

(練習30) (1) 次の不等式を証明せよ。

(ア)  $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$  (イ)  $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$

(2) 次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(ア)  $x \geq 0, y \geq 0$  のとき  $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} \geq \frac{x+y}{1+x+y}$

(イ)  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  のとき  $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \geq \frac{x+y+z}{1+x+y+z}$

(練習31)  $a, b$  は正の数とする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(1)  $a+2+\frac{9}{a+2} \geq 6$

(2)  $\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(b+\frac{8}{a}\right) \geq 18$

(練習32) (1)  $a > 0$  のとき、 $a-2+\frac{2}{a+1}$  の最小値を求めよ。

(2)  $a > 0, b > 0$  のとき、 $(2a+3b)\left(\frac{8}{a}+\frac{3}{b}\right)$  の最小値を求めよ。

(練習33) (1)  $0 < a < b, a+b=1$  のとき、 $\frac{1}{2}, a, b, 2ab, a^2+b^2$  の大きさを比較せよ。

(2)  $0 < a < b < c < d$  のとき、 $\frac{a}{d}, \frac{c}{b}, \frac{ac}{bd}, \frac{a+c}{b+d}$  の大きさを比較せよ。