

Студент: Галимзянов Дмитрий Сергеевич
 Группа: МОиАД 2020
 Дата: 10.11.2020

0. Используя метод моментов с пробными функциями $g(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$, оценить параметр θ

(а) равномерного распределения $U[0, \theta] = \theta \cdot U[0, 1]$

$$E X_1^k = \int_0^\theta x^k (1/\theta) dx = (1/\theta) \int_0^\theta x^k dx = (1/\theta) x^{k+1} / (k+1) \Big|_0^\theta = \theta^k / (k+1)$$

$$E X_1^k = \theta^k / (k+1)$$

$$\theta = \sqrt[k]{(k+1) E X_1^k}$$

$$\theta^* = \sqrt[k]{(k+1) \overline{X^k}}$$

(б) экспоненциального распределения $\text{Exp}(\theta) = \theta \cdot \text{Exp}(1)$

$$E X_1^k = \int_0^\infty x^k (1/\theta) e^{-x/\theta} dx = \int_0^\infty \theta^k (x/\theta)^k e^{-x/\theta} d(x/\theta) = \theta^k \int_0^\infty y^k e^{-y} dy =$$

$$= \theta^k \int_0^\infty y^{(k+1)-1} e^{-y} dy = \theta^k * \Gamma(k+1) = \theta^k k!$$

$$E X_1^k = \theta^k k!$$

$$\theta = \sqrt[k]{(k! E X_1^k)}$$

$$\theta^* = \sqrt[k]{(k! \overline{X^k})}$$

1. Численно исследуйте поведение среднеквадратичного отклонения (СКО) построенных оценок.

В данном эксперименте было сгенерировано $s = 100$ выборок по $n = 1000$ элементов в каждой:

(а) из нормального распределения на отрезке $[0, \theta=1]$

(б) из экспоненциального распределения с параметром $\theta=1$

Для каждой из s выборок был рассчитан выборочный k -ый момент, с помощью которого была вычислена оценка θ^* по формулам, выведенным в пункте(0).

После чего, было вычислено среднеквадратическое отклонение по всем выборкам:

$$\text{СКО} = (1/s) * \sum_{i=1}^s (\theta_i^* - \theta)^2$$

Данные вычисления были произведены для k -ых моментов при $k = 1, \dots, 1000$. По данным вычислениям был построен график зависимости СКО от k для обоих типов распределений. На основе построенных графиков можно сделать следующие выводы:

(a) Равномерное распределение: СКО обратно пропорционально k . Следовательно, оценка θ^* становится эффективнее с ростом k .

(b) Экспоненциальное распределение: СКО растет экспоненциально с ростом k . Следовательно, оценка θ^* эффективнее при k , близких к 1.

