Задание:

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — выборка из равномерного распределения на конечном множестве $\{1, \ldots, \theta\}$, где θ — натуральный параметр.

$$S = [X_{(n)}^{n+1} - (X_{(n)} - 1)^{n+1}] / [X_{(n)}^{n} - (X_{(n)} - 1)^{n}]$$

Докажите, что статистика S является эффективной (в среднеквадратичном смысле) оценкой параметра θ в классе несмещенных оценок.

Доказательство:

1. Предположим, что существует такая статистика T, что:

S - зависит от T
S - несмещенная оценка
T - достаточная статистика
T - полная статистика

Тогда, по теореме Лемана-Шеффе, S является эффективной оценкой параметра θ в среднеквадратичном смысле.

2. Предъявим такую статистику: $T = X_{(n)}$. Тогда, формула для S примет вид, из которого сразу следует, что S - зависит от T:

$$S = [T^{n+1} - (T-1)^{n+1}] / [T^{n} - (T-1)^{n}]$$

3. Найдем вероятность $P(X_{(n)} = k)$.

Предположим для начала, что в выборке максимум единственен.
Пусть $X_{(n)}$ стоит на позиции k. Тогда все остальные $X_{(i)}$ стоят на позициях, меньших k. Таких позиций (k -1). Вероятность, что элемент выборки примет конкретное значение = $1/\theta$. Тогда, вероятность, что элемент выборки примет любое из (k - 1) значений = $(k - 1)/\theta$. Заметим теперь, что в выборке максимумов может быть от 1 до n. Тогда, вероятность $P(X_{(n)} = k)$ описывается следующей формулой:

$$P(X_{(n)} = k) = \sum_{i=1}^{n} C_n^{i} \, (1/\theta)^{i} \, ((k-1)/\theta)^{n-i}$$

Прибавим и вычтем член при $i = 0$, чтобы получить бином Ньютона:

$$P(X_{(n)} = k) = (\Sigma_{i=0}^{n} C_n^{\,i}\ (1/\theta)^i\ ((k - 1)/\theta)^{n - i}) - (1/\theta)^0((k - 1)/\theta)^n = (k/\theta)^n - ((k - 1)/\theta)^n$$

$$P(X_{(n)} = k) = (k^n - (k - 1)^n) / \theta^n$$

$$P(T = k) = (k^n - (k - 1)^n) / \theta^n$$

4. Докажем, что S(T) - несмещенная оценка:

$$E_\theta(S(T)) = \Sigma_{k=1}^{\theta}\ [\ P(T = k) * S(T)\ ]$$

$$E_\theta(S(T)) = \Sigma_{k=1}^{\theta}\ [\ (k^n - (k - 1)^n) / \ \theta\ ] * [\ (k^{n+1} - (k - 1)^{n+1}) / (k^n - (k - 1)^n)\ ]$$

$$E_\theta(S(T)) = \Sigma_{k=1}^{\theta}\ [\ (k^{n+1} - (k - 1)^{n+1}) / \ \theta^n\ ] = (1/\theta^n)\ \Sigma_{k=1}^{\theta}\ [\ k^{n+1} - (k - 1)^{n+1}\ ] = \theta^{n+1} / \theta^n = \theta$$

$$E_\theta(S) = \theta \ \Longrightarrow S \text{ - несмещенная оценка}$$

5. Докажем, что T - полная статистика:

$$\text{По определению: } \forall\ \varphi:\ \ \forall\ \theta:\ \ E_\theta\ \varphi(T) = 0 \ \Longrightarrow \varphi(T) = 0$$

$$E_\theta\ \varphi(T) = \Sigma_{k=1}^{\theta}\ [\ \varphi(k) * P(T = k)\ ]$$

$$E_\theta\ \varphi(T) = \Sigma_{k=1}^{\theta}\ [\ \varphi(k)\ (k^n - (k - 1)^n) / \theta^n\ ]$$

Пусть $E_\theta\ \varphi(T) = 0$, тогда:

$$\Sigma_{k=1}^{\theta}\ [\ \varphi(k)\ (k^n - (k - 1)^n) / \theta^n\ ] = 0$$

$$(k^n - (k - 1)^n) > 0 \text{ и } \theta^n > 0 \Longrightarrow \varphi(k) = 0 \Longrightarrow T \text{ - полная}$$

6. Докажем, что T - достаточная статистика:

По теореме Неймана-Фишера, T - достаточная статистика, если удастся представить $f(X1, \dots , Xn; \theta)$ в следующем разложении:

$$f(X1, \dots , Xn; \theta) = g(\theta, T) * h(X1, \dots, Xn)$$

Найдем такое разложение. Заметим: $f(X, \theta) = P_\theta(X = x) = (1/\theta) * I\{x \in \{1, \dots, \theta\}\}$

$$P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = (1/\theta^n) * I\{x_1 \in \{1, \dots, \theta\}\} * \dots * I\{x_n \in \{1, \dots, \theta\}\}$$

$$P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = (1/\theta^n) * I\{X_{(1)} \geq 1\} * I\{X_{(n)} \leq \theta\}$$

$$P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = (1/\theta^n) * I\{T \leq \theta\} * I\{X_{(1)} \geq 1\}$$

$$g(\theta, T) = (1/\theta^n) * I\{T \leq \theta\}$$

$$h(X) = \{X_{(1)} \geq 1\}$$

Получили требуемое разложение $\Longrightarrow$ T - достаточная статистика.

7. Вывод:

Мы предъявили статистику: $T = X_{(n)}$. Показали, что T - полная и достаточная статистика. Показали, что S - несмещенная оценка, и она зависит от T. Из этого, по теореме Лемана-Шеффе следует, что S является эффективной оценкой параметра θ в среднеквадратичном смысле в классе несмещенных оценок, что и требовалось доказать.