Гомозов Павел
РК6-51Б

Задача 1.1 по вычислительной математике

Требуется:

1. Доказать, что определённый интеграл
$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\, dx$$
можно переписать в виде рекурентного соотношения
$$I_n = 1 - nI_{n-1}$$
и вывести начальное условие I_0.
2. Доказать, что решение для I_n имеет следующий вид:
$$I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} + (-1)^n n! I_0$$
3. Используя формулу Стирлинга $n! \approx \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}$, докажите, что рекуррентное соотношение 2 является вычислительно устойчивым.

Решение

1. Решение пункта №1:
(1)
$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x-1}\, dx = \boxed{\begin{matrix} u = x^n & \mathrm{dv} = e^{x-1}\ \mathrm{dx} \\ \mathrm{du} = nx^{n-1}\ \mathrm{dx} & \mathrm{v} = \int_0^1 e^{x-1}\ \mathrm{dx} = e^{x-1} \end{matrix}} =$$
$$= (x^n e^{x-1})\Big|_0^1 - n\int_0^1 e^{x-1}x^{n-1}dx = 1 - n\int_0^1 e^{x-1}x^{n-1}dx$$
(2)
$$I_{n-1} = \int_0^1 x^{n-1}e^{x-1}dx$$
Подставим (2) в (1), получим:
$$I_n = 1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^{x-1} = 1 - nI_{n-1}$$

Что и требовалось доказать.

Выведем начальное условие для I_0:

$$I_0 = \int_0^1 x^0 e^{x-1} dx = e^{x-1}\Big|_0^1 = 1 - e^{-1}$$

Решение пункта №2:
Используя рекуррентное соотношение $I_n = 1 - nI_{n-1}$, распишем I_n:

$$I_n = 1 - n(1 - (n-1)(1 - (n-2)(1 - (n-3)I_{n-4})))$$

$$I_n = 1 - n(1 - (n-1)(1 - (n-2) - (-(n-2)(n-3)I_{n-4}))$$

$$I_n = 1 - n(1 - (n-1) - (n-1)(-(n-2)) - (n-1)(-(-(n-2)(n-3)I_{n-4})))$$

$$I_n = 1 - n - n(-(n-1)) - n(-(n-1)(-(n-2))) - n(-(n-1)(-(-(n-2))(n-3))I_{n-4})$$

Рассмотри до I_0:

$$I_n = 1 - n - n(-(n-1)) - n(-(n-1)(-(n-2))) - n(-(n-1)(-(n-2)(-(n-3))) \ldots -(n-k) \ldots (-2)(-1)I_0)$$

$$I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} + (-1)^n n! I_0$$

Что и требовалось доказать.

Решение пункта №3:
Так как мы доказали пункт 2, то можем подставить формулу Стирлинга в нее:

$$I_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}}{(n-k)!} + (-1)^n \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} I_0$$

Заменим I_0 на $I_0 + \delta$, где δ - вычислительная погрешность:

$$I_n^\delta = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \frac{\sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}}{(n-k)!} + (-1)^n \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} (I_0 + \delta)$$

Вычтем I_n из I_n^δ:

$$I_n - I_n^\delta = (-1)^n \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n} \delta = (-1)^n \sqrt{2\pi n} (\frac{n}{e})^n$$

Это вычислительная погрешность полсле n итераций.

Рассмотрим эту погрешность как функцию:
$(-1)^n \sqrt{2\pi}\delta$ - константа;
$\sqrt{n}$ - степенная функция от n;
$(\frac{n}{e})^n$ - показательно-степенная фунцкия;
Данное соотношение является вычислительно неуйсточивым, так как функция быстро растет, как функция от n.
Что и требовалось доказать.