

Задача 3

Требуется построить кубический сплайн, который проходит через следующие узлы

$$x_1 = -5 \quad f(x_1) = -2 \quad (1)$$

$$x_2 = 4 \quad f(x_2) = 4 \quad (2)$$

$$x_3 = 8 \quad f(x_3) = 0 \quad (3)$$

Используя естественные граничные условия

Решение

Формула i -го компонента кубического сплайна:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \text{ где } (4)$$

$$a_i = f(x_i)$$

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(c_{i+1} - 2c_i)$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

Для нахождения c_i можно воспользоваться известным соотношением.

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_i + h_{i-1})c_i + h_ic_{i+1} = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) \quad (5)$$

Составим систему уравнений из всех вышеперечисленных условий и тем, что

$$s''(x_1) = s''(x_3) = 0$$

$$h_1 = 9, h_2 = 4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 26 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Решим систему (6) и найдем коэффициенты c_i

$$\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ \frac{26}{26} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Найдем a_i, b_i, d_i :

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 1.2435 \\ -1.512 \end{pmatrix} \quad \bar{d} = \begin{pmatrix} -0.007 \\ 0.016 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Получив коэффициенты получим конечное выражение для $S(x)$:

$$S(x) = \begin{cases} -2 + 1.2435(x + 5) - 0.007(x + 5)^3, & -5 \leq x \leq 4 \\ 4 - 1.512(x - 4) - \frac{5}{26}(x - 4)^2 + 0.016(x - 4)^3, & 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

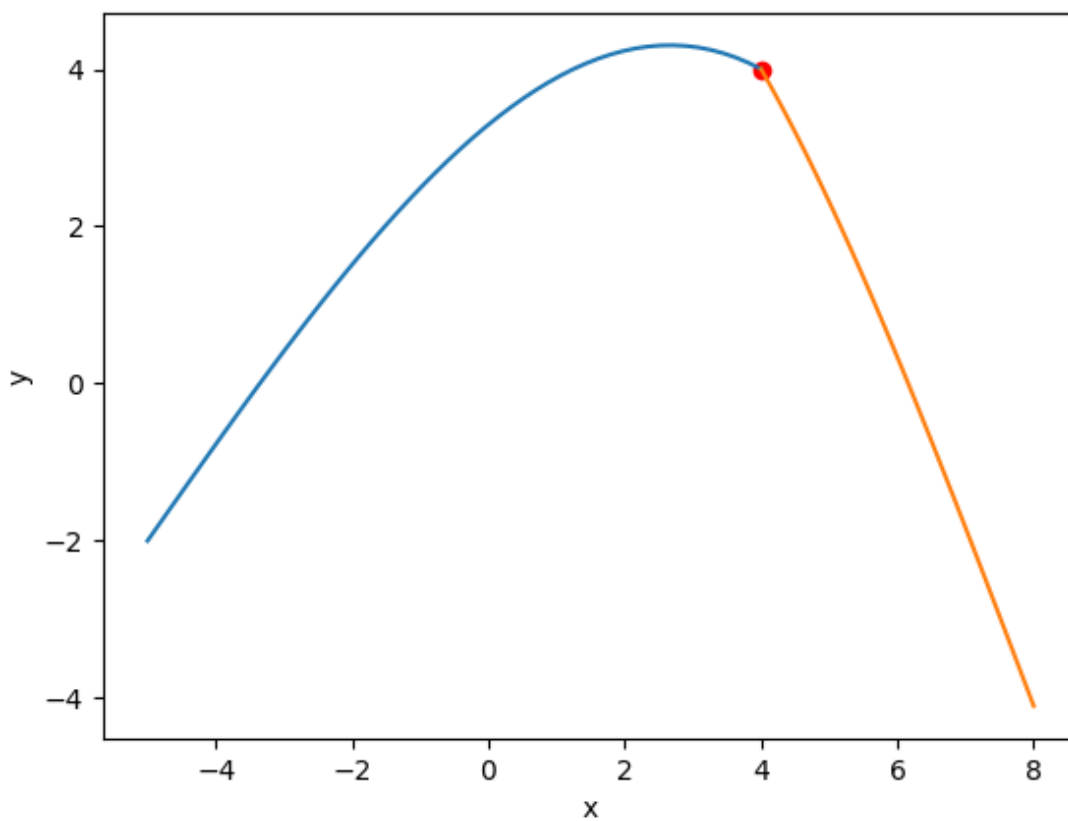


Рисунок 1