Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени
Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Робототехники и комплексной автоматизации»
КАФЕДРА «Системы автоматизированного проектирования (РК-6)»

ОТЧЕТ О ВЫПОЛНЕНИИ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

по дисциплине «Вычислительная математика»

Студент:	Турунов Дмитрий Николаевич
Группа:	РК6-53Б
Тип задания:	домашнее задание 1.14
Тема:	Интерполяционные многочлены Лагранжа

Студент ____________ Турунов Д.Н.
подпись, дата Фамилия, И.О.

Преподаватель ____________ ____________
подпись, дата Фамилия, И.О.

Москва, 2023

Содержание

Интерполяционные многочлены Лагранжа

Задание

Дан дискретный набор данных в m-мерном пространстве $\{(\boldsymbol{x}_i, y_i)\}_{i=1}^n$, где $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{x}_i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_m^i)^T, y_i = f(\boldsymbol{x}_i), f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Необходимо записать модифицированную формулу интерполяционного полинома Лагранжа L_p над данными векторами.

Пусть $\boldsymbol{x}_i \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ и $y_i \in \{0, 1, 1\}$. С помощью интерполяционного полинома Лагранжа, построенного на этих данных, определите значение функции в точке $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Как изменится значение в этой точке, если в предложенные наборы добавить новые элементы $\boldsymbol{x}_i = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, y_i = -4\sqrt{10}$?

1 Нахождение значения в точке

Общий случай интерполяционного полинома Лагранжа:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Модифицированный полином Лагранжа для m-мерного пространства:

$$L_p(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{x}_i) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_j\|}{\|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|} \tag{1}$$

где $\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|$ — это евклидово расстояние между точками $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.
Известны следующие точки:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y_1 = 0$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = 1$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y_3 = 1$$

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

Для начала вычислим все необходимые евклидовы расстояния:

1. Расстояния от $\boldsymbol{z}$ до каждой точки:

$$\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_1\| = \sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$$
$$\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_2\| = \sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2} = 1$$
$$\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_3\| = \sqrt{(1-1)^2+(1-0)^2} = 1$$

2. Расстояния между всеми парами точек:

$$\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\| = \sqrt{(0-0)^2+(0-1)^2} = 1$$
$$\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_3\| = \sqrt{(0-1)^2+(0-0)^2} = 1$$
$$\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3\| = \sqrt{(0-1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{2}$$

Теперь можно подставить все расстояния в формулу базисного полинома:
1. Для $\boldsymbol{x}_1$:

$$\frac{\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_2\|}{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|} \times \frac{\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_3\|}{\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{1} = \sqrt{2}$$

2. Для $\boldsymbol{x}_2$:

$$\frac{\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_1\|}{\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1\|} \times \frac{\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_3\|}{\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3\|} = \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

3. Для $\boldsymbol{x}_3$:

$$\frac{\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_1\|}{\|\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_1\|} \times \frac{\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_2\|}{\|\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_2\|} = \frac{\sqrt{2}}{1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 1$$

Подставим значения в модифицированную формулу 1:

$$L_p(\boldsymbol{z}) = \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{x}_i) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_j\|}{\|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j\|} = (0\times\sqrt{2}) + (1\times 1) + (1\times 1) = 2$$

2 Добавление новой точки

Далее, необходимо добавить элемент $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, y_1 = -4\sqrt{10}$ и посчитать расстояния для остальных точек:

$$\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{x}_4\| = \sqrt{(1-2)^2+(1-2)^2} = \sqrt{2}$$
$$\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_4\| = \sqrt{(0-2)^2+(0-2)^2} = 2\sqrt{2}$$
$$\|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_4\| = \sqrt{(0-2)^2+(1-2)^2} = \sqrt{5}$$
$$\|\boldsymbol{x}_3-\boldsymbol{x}_4\| = \sqrt{(1-2)^2+(0-2)^2} = \sqrt{5}$$

Теперь, когда есть все расстояния, можно обновить формулу для каждой из исходных точек и добавить новый член для $\boldsymbol{x}_4$.

$$\frac{\sqrt{2}\times 1\times\sqrt{2}}{1\times 1\times 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{\sqrt{2}\times 1\times\sqrt{2}}{1\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$
$$\frac{\sqrt{2}\times 1\times\sqrt{2}}{1\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$
$$\frac{\sqrt{2}\times 1\times 1}{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{1}{10}$$

Затем нужно суммировать все значения.

$$(0\times\frac{1}{\sqrt{2}}) + (1\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}) + (1\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}) + (-4\sqrt{10}\times\frac{1}{10}) = 0$$

Заключение

Для точек:

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, y_1 = 0$$

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, y_2 = 1$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, y_3 = 1$$

значение функции в точке

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

будет равно 2.

После добавления точки $\boldsymbol{x}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, y_1 = -4\sqrt{10}$ значение функции в той же точке равно 0.