UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

VREDNOVANJE KREDITNIH SVAPOVA

Seminarski rad

iz:

ELEMENTI FINANSIJSKE MATEMATIKE

PROFESOR:
Dr Bojana Milošević

ASISTENT:
Bojana Todić

STUDENT:
Gala Posedi
064/2021

Beograd, oktobar 2025.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu predstavljam tržišni standardni model za određivanje cene (vrednovanje) pozicija u kreditnim svapovima ($creditdefaultswaps\breve{}CDS$). Najpre, cilj je objasniti zašto je za kreditne svapove potreban model za vrednovanje, a zatim da ćemo se fokusirati na standardnom modelu – onaj koji se najčešće koristi na tržištu. Tokom izlaganja modela, pažljivo ću objašnjavati i opravdavati različite pretpostavke koje se u modelovanju prave. Postojaće i brojni primeri sa namerom da čitalac lakše razume teme koje će se obrađivati.

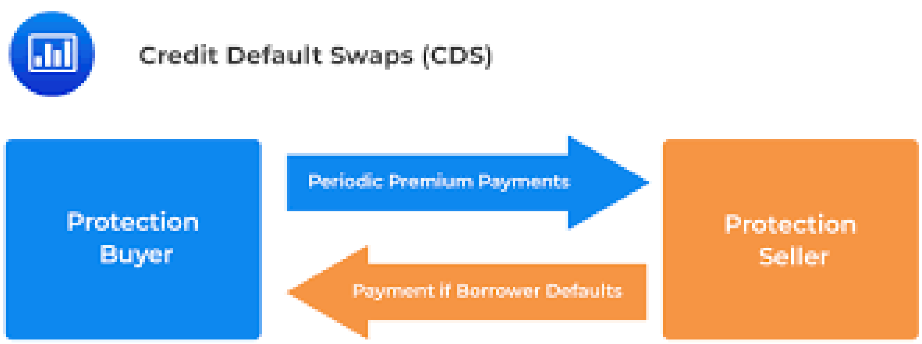
Kreditni svap je jednostavan derivatni ugovor koji je revolucionisao trgovinu kreditnim rizikom. Tokom poslednjih pet godina postao je najkorišćeniji kreditni derivat, koji čini oko 72% ukupne tržišne nominalne vrednosti koja se trenutno procenjuje na oko 2,3 milijarde dolara. Tržište kreditnih svapova je zaista globalno, sa ugovorima koji se odnose na kreditni rizik brojnih američkih, evropskih i azijskih korporacija.

Cilj ovog rada je da pruži potpun i praktičan prikaz tržišnog standardnog modela i time pomogne onima koji su novi u oblasti kreditnih derivata u učenju kako da vrednuju pozicije u kreditnim svapovima.

1 Kreditni default svap (Kreditni svap na neispunjenje obaveza)

Kreditni default svap (CDS) predstavlja finansijski ugovor kojim jedna strana preuzima rizik neispunjenja obaveze druge strane.

Drugim rečima, CDS se koristi za prenos kreditnog rizika referentnog subjekta (preduzeća ili države) sa jedne strane na drugu. U standardnom CDS ugovoru, jedna strana kupuje kreditnu zaštitu od druge strane, kako bi pokrila gubitak nominalne vrednosti imovine u slučaju kreditnog incidenta ili događaja (*eng credit event*). Kreditni događaj je zakonski definisan događaj koji se aktivira kada je kreditni rizik realizovan i tada CDS počinje sa isplaćivanjem naknade kupcu zaštite. U kreditne događaje se obično uključuje bankrot, neizmirenje obaveza i restrukturiranje (dogovaranje dužnika i poverioca promena u uslovima postojećeg duga kako bi se izbegla potpuna nesolventnost ili bankrot). Ova zaštita traje do određenog datuma dospeća. Da bi platila za ovu zaštitu, kupac zaštite vrši redovne uplate, poznate kao premijska noga (*eng. premium leg*).

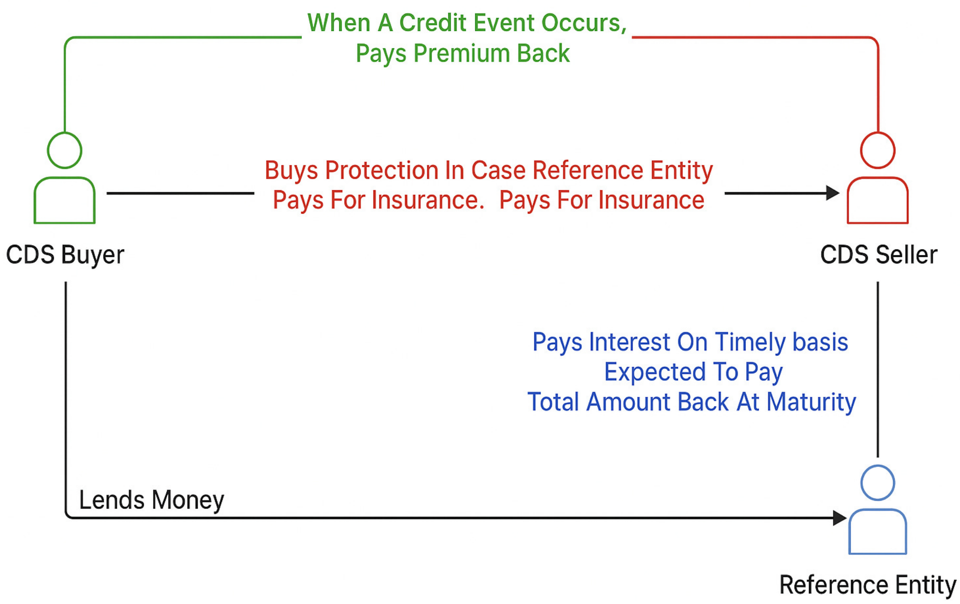


Slika 1: Odnos između kupca zaštite i prodavca zaštite

Na Slici 1 vidimo relaciju kupac-prodavac zaštite. Ukoliko dođe do realizacije rizika, prodavac je u obavezi da plaća nadoknadu kupcu zaštite.

Veličina ovih premijskih uplata se izračunava na osnovu kotiranog CDS spreda, koji se primenjuje na nominalnu vrednost zaštite. Ove uplate se vrše sve dok ne dođe do kreditnog događaja ili do datuma dospeća, šta god nastupi prvo.

Ako dođe do kreditnog događaja pre datuma dospeća ugovora, prodavac zaštite vrši uplatu, poznatu kao noga zaštite (*eng. protection leg*). Ova uplata iznosi razliku između nominalne vrednosti i cene najjeftinijeg dostavljivog (*eng. CTD – cheapest to deliver*) instrumenta referentnog subjekta po nominalnoj vrednosti zaštite.



Slika 2: Premium i protection leg

Na Slici 2 možemo videti kompletan tok uplata kupca-prodavca zaštite koja je malopre objašnjena.

1.1 Isplata nakon kreditnog događaja

U mnogim slučajevima kreditni događaj se definiše u odnosu na **senioritet duga** koji je izdao referentni entitet, a uloga referentnog sredstva se svodi na određivanje gotovinske isplate. Takođe, **rok dospeća default svapa ne mora biti isti kao rok dospeća referentnog sredstva** — uobičajeno je da referentno sredstvo ima **duži rok dospeća**.

Ugovor mora jasno definisati **isplatu nakon kreditnog događaja**. Tipično, ta isplata kompenzuje **kupca zaštite** za razliku između **nominalne vrednosti (par)** i **vrednosti oporavka** referentnog sredstva nakon kreditnog događaja. Ova isplata može biti u **fizičkom** ili **gotovinskom obliku**, tj. kupac zaštite će obično pristati na jedno od sledećeg:

- **Fizička isporuka:** kupac zaštite fizički predaje bezvredni (defaultovani) hartijski papir prodavcu zaštite i zauzvrat dobija nominalnu vrednost u gotovini. Ugovor obično navodi *korpu obaveza* (*basket of obligations*) istog ranga (*pari passu*) koje mogu biti isporučene umesto referentnog sredstva.
- **Gotovinsko poravnanje (cash settlement):** kupac zaštite prima **razliku između nominalne vrednosti i tržišne cene bezvrednog sredstva**. Cena tog sredstva se obično određuje **anketom među dilerima (dealer poll)** u roku **14–30 dana** nakon kreditnog događaja, kako bi se vrednost oporavka stabilizovala.

- **Fiksno gotovinsko poravnanje (fixed cash settlement)** — odnosi se na **default svapove sa fiksnom stopom oporavka (fixed recovery default swaps)**.

Primer kreditnog svapa

Pretpostavimo da kupac zaštite kupuje petogodišnju zaštitu na kompaniju po *default swap spread-u* od 300 baznih poena (bp). Nominalna vrednost zaštite iznosi 10 miliona dolara. Kupac zaštite zato vrši kvartalne uplate približno jednake:

$$10 \text{ miliona} \times 0,03 \times 0,25 = 75.000 \text{ dolara.}$$

Pretpostavimo da, nakon kratkog vremena, referentni subjekt doživi *kreditni događaj*, i da najjeftiniji za isporuku (CTD) instrument referentnog subjekta ima cenu oporavka od 45 dolara na 100 dolara nominalne vrednosti. Uplate su sledeće:

- **Prodavac zaštite** nadoknađuje kupcu zaštite gubitak na nominalnoj vrednosti instrumenta primljenog od kupca zaštite. Ovo iznosi:

$$10 \text{ miliona} \times (100\% - 45\%) = 5,5 \text{ miliona dolara.}$$

- **Kupac zaštite** plaća prikupljenu premiju od prethodnog datuma uplate premije do vremena kreditnog događaja. Na primer, ako se kreditni događaj dogodi nakon mesec dana, kupac zaštite plaća približno:

$$10 \text{ miliona} \times 0,03 \times \frac{1}{12} = 18.750 \text{ dolara prikupljene premije.}$$

1.2 Računanje tržišne (mark-to-market) vrednosti

Za razliku od obveznica, dobitak ili gubitak iz pozicije u CDS-u ne može se jednostavno izračunati kao razlika između trenutne tržišne cene sa primljenim kuponima i kupovne cene. Za vrednovanje CDS-a potrebno je koristiti **strukturu ročnosti spredova kreditnih svapova**, pretpostavku o stopi oporavka (procena koliki deo nominalne vrednosti dužničkog instrumenta će biti vraćen ili oporavljen u slučaju kreditnog događaja) i odgovarajući model. Takođe, važno je definisati i pojam baznom poena zbog dalje analize CDS-ova.

Bazni poeni (*basis points*, skraćeno *bp*) predstavljaju malu jedinicu koja se koristi za merenje promene kamatnih stopa, prinosa ili kreditnih spreadova.

$$1 \text{ bazni poen} = 0.01\% = 0.0001$$

Drugim rečima:

- 100 baznih poena = 1%
- 50 baznih poena = 0.5%
- 25 baznih poena = 0.25%

Tržišna vrednost default svapa u opštem slučaju data je formulom:

$$\text{MTM} = (S(T) - S(0)) \times PV01$$

gde je:

- $S(T)$ – trenutni spred default svap-a do roka dospeća,
- $S(0)$ – spread default swap-a u trenutku sklapanja ugovora,
- $PV01$ – sadašnja vrednost **anuiteta od jednog baznog poena** (*zero-recovery, one-basis-point annuity*) sa rokom dospeća default swap-a koji prestaje nakon kreditnog događaja.

Svaki novčani tok u ovom anuitetu ponderiše se verovatnoćom da se kreditni događaj neće desiti do datog datuma. Zbog toga $PV01$ blago zavisi od stope oporavka, jer se ona koristi pri izračunavanju tržišno impliciranih verovatnoća preživljavanja iz krive default svapova.

Razmotrimo investitora koji inicijalno kupuje petogodišnju zaštitu na kompaniju po spredu od 60 baznih poena (bp) i zatim želi da proceni vrednost pozicije nakon jedne godine. Na taj datum, četvorogodišnji spred CDS-a kotiran na tržištu iznosi 170 bp. Trenutna vrednost pozicije se daje formulom:

$$\begin{aligned}\text{MTM} = {} & \text{Trenutna tržišna vrednost preostale četvorogodišnje zaštite} \\ & - \text{Očekivana sadašnja vrednost četvorogodišnjeg premium lega po 60 bp}\end{aligned} \tag{1}$$

Vrednost CDS ugovora je porasla, jer investitor plaća samo 60 bp za nešto za šta je tržište sada spremno da plati 170 bp. Pošto je tržišna vrednost novog CDS-a nula, ovo implicira:

$$\begin{aligned}&\text{Trenutna tržišna vrednost preostale četvorogodišnje zaštite} \\ &\qquad = \text{Očekivana sadašnja vrednost premium lega po 170 bp}\end{aligned} \tag{2}$$

Na osnovu prethodnog, tržišna vrednost za kupca zaštite glasi:

$$\begin{aligned}\text{MTM} = {} & \text{Očekivana sadašnja vrednost četvorogodišnjeg premium lega po 170 bp} \\ & - \text{Očekivana sadašnja vrednost četvorogodišnjeg premium lega po 60 bp}\end{aligned} \tag{3}$$

Ako definišemo **Rizično** (*eng. Risky*) **PV01 (RPV01)** kao očekivanu sadašnju vrednost 1 bp plaćenog na premium leg do *default*-a ili dospeća (zavisno šta se desi pre), izraz za MTM se može zapisati kao:

$$MTM = 170\,bp \times RPV01 - 60\,bp \times RPV01 = 110\,bp \times RPV01 \tag{4}$$

Dakle, potrebno je izračunati **Risky PV01**, koji se naziva „rizičnim“ jer predstavlja očekivanu sadašnju vrednost neizvesnog toka premija. Neizvesnost proizilazi iz toga što plaćanje premija prestaje ako dođe do kreditnog događaja. Više reči o tome će biti u sledećem odeljku.

Da bi investitor realizovao ovaj mark-to-market dobitak ili gubitak, postoje dve opcije:

1. **Zatvorena** (*eng. Unwind* **pozicija**-proces zatvaranja ili poništavanja otvorene finansijske pozicije u cilju realizacije njenog trenutnog profita ili gubitka. Ona bi trebalo da bude jednaka MTM pozicije.

2. **Ulazak u suprotnu poziciju** - investitor prodaje zaštitu na istu referentnu kompaniju za naredne četiri godine po spredu od 170 bp. Ovo stvara pozitivan prihod od premija od $170 - 60 = 110$ bp godišnje, sve dok se ne desi kreditni događaj ili dok ugovor ne dospe, šta god se desi pre.

Ako se dogodi kreditni događaj, investitor nema **rizik glavnice**, jer se referentna obveznica može isporučiti u okviru kupljene zaštite, a uplate nominalne vrednosti se razmenjuju. Iako ne postoji rizik glavnice, postoji **rizik premija**. To je rizik da referentna kompanija ne preživi do dospeća ugovora i da četiri godine godišnjeg prihoda od 110 bp ne budu primljene.

Obe opcije imaju istu ekonomsku vrednost danas, ali se razlikuju u načinu realizacije. U slučaju (i), **P&L** (dobitak/gubitak) se realizuje odmah i pozicija se zatvara, dok se u slučaju (ii) **P&L** realizuje tokom preostalog trajanja svapa, pri čemu investitor preuzima rizik kreditnog događaja do dospeća ugovora.

Slika 3: MTM skica

Na Slici 3 se može videti shema funkcionisanja MTM vrednosti u praksi.

1.2.1 Vrednovanje pozicije i Risky PV01

Sadašnja vrednost pozicije koja je inicijalno trgovana u trenutku t_0 po ugovornom spredu $S(t_0, t_N)$, sa rokom dospeća t_N i koja je u trenutku procene t_V izbalansirana sa pozicijom trgovanom po spreadu $S(t_V, t_N)$, data je formulom:

$$\text{MTM}(t_V, t_N) = \pm \left[S(t_V, t_N) - S(t_0, t_N) \right] \times \text{RPV01}(t_V, t_N)$$

gde se **pozitivan znak** koristi za **dugu poziciju zaštite**, a **negativan znak** za **kratku poziciju zaštite**.

Formula za $PV01$ je ekvivalentna je formuli (1a) prikazanom ranije i pokazuje da su vrednosti obe investitorske opcije (i) i (ii) jednake.

Za izračunavanje *Risky PV01* potreban je model, jer moramo uzeti u obzir rizik povezan sa svakom premijom. Računa se verovatnoća da referentno preduzeće preživi do svakog datuma plaćanja premije. Ove verovatnoće preživljavanja, koje se koriste u vrednovanju Risky PV01, moraju biti *arbitražno slobodne verovatnoće preživljavanja.* To su verovatnoće da referentno preduzeće preživi do određenog datuma, izračunate tako da budu u skladu sa tržišnim cenama CDS-a i ne dopuštaju bezrizičnu dobit (arbitražu).

1.2.2 Karakteristike traženog modela

Model za vrednovanje mora da:

1. Uključi rizik od **default-a referentnog preduzeća**;

2. Modeluje isplatu **stopa oporavka** kao procenat nominalne vrednosti;

3. Uspešno modeluje **vreme nastanka default-a** (od posebne važnosti, jer je vrednost CDS-a sadašnja vrednost – sve uplate moraju biti diskontovane do današnjeg dana);

4. Bude dovoljno fleksibilan da se može **ponovo prilagoditi strukturi terminskih spreadova** – model ne sme generisati arbitraže;

5. Bude što jednostavniji.

1.3 Modelovanje kredita korišćenjem pristupa smanjenog oblika (reduced-form pristupa)

Model koji zadovoljava sve prethodne karakteristike je upravo ovaj.
Svet modelovanja kredita je podeljen u dva glavna pristupa: **strukturni** i **reduced-form**.

U **strukturnom pristupu**, ideja je da se kreditni događaj (default) karakteriše kao posledica nekog događaja u kompaniji. Takvi modeli su obično proširenja Mertonovog modela vrednosti firme iz 1974. godine [**?**], koji koristi analizu kontingentnih potraživanja za modelovanje defaulta.

Analiza kontingentnih potraživanja je metod koji se koristi za procenu rizika od neispunjenja obaveza firme. Ovaj pristup posmatra dug firme kao da je povezan sa opcijom – firmine obaveze se ispunjavaju samo ako je vrednost imovine dovoljno velika. Ukoliko vrednost imovine padne ispod duga, dolazi do defaulta, a analiza omogućava procenu verovatnoće i potencijalnog gubitka u takvim slučajevima.

Strukturni modeli se uglavnom koriste da se odredi po kojem spredu bi korporativne obveznice trebale trgovati na osnovu interne strukture firme. Oni zahtevaju podatke o bilansu firme i mogu se koristiti za uspostavljanje veze između cena na tržištima akcija i duga. Međutim, ograničeni su u najmanje tri aspekta: teško se kalibrišu jer su interni podaci kompanije objavljeni najviše četiri puta godišnje; generalno nemaju fleksibilnost da tačno prilagode zadatu strukturu spreadova; i ne mogu se lako proširiti za proračun cena kreditnih derivata.

U **reduced-form pristupu**, proces kreditnog događaja se modeluje direktno, tj. modeluje se verovatnoća samog kreditnog događaja. Korišćenjem modela za određivanje cena hartija od vrednosti (HOV) baziranog na ovom pristupu, verovatnoća defaulta može se izvući iz tržišnih cena. $Reduced - form$ modeli takođe imaju fleksibilnost da prilagode cene različitih kreditnih instrumenata sa različitim rokovima dospeća. Takođe, koriste se za određivanje cena kreditnih derivata.

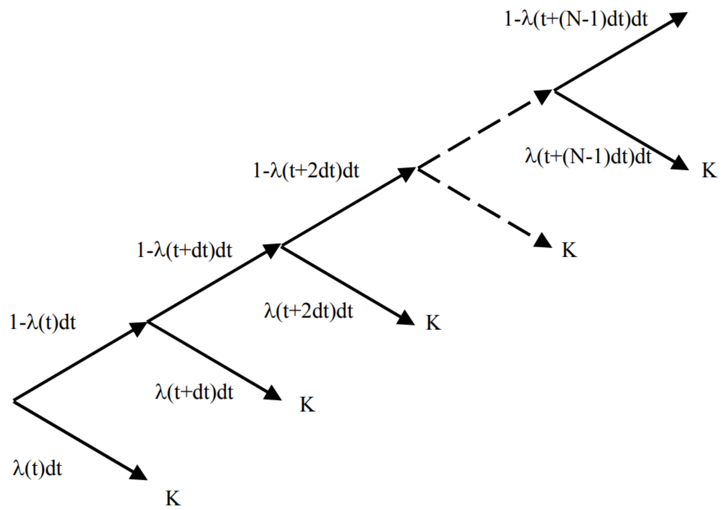
Najčešće korišćen **reduced-form pristup** baziran je na radu Jarrow-a i Turnbull-a (1995), koji karakterišu kreditni događaj kao prvi događaj brojačkog Puasonovog procesa, koji se javlja u nekom trenutku τ sa verovatnoćom definisanom kao:

$$Pr[\tau < t + dt \mid \tau \geq t] = \lambda(t)dt$$

tj. verovatnoća da dođe do defaulta u vremenskom intervalu $[t, t + dt)$ pod uslovom da je preživelo do vremena t, proporcionalna je vremenski zavisnoj funkciji $\lambda(t)$, poznatoj kao **stopa hazarda** (*eng. hazard rate*, i dužini vremenskog intervala dt. Ona predstavlja trenutnu verovatnoću da dođe do kreditnog događaja u veoma malom vremenskom intervalu, pod uslovom da do tog trenutka nije došlo do defaulta. Ključna je u modelima kreditnog rizika jer omogućava kvantifikovanje rizika neispunjenja obaveza u neprekidnom vremenu.

Možemo razmišljati o modelovanju defaulta u jednoperiodnom okviru kao o jednostavnom binarnom stablu, gde preživljavamo sa verovatnoćom $1 - \lambda(t)dt$ ili doživljavamo default i primamo vrednost oporavka R sa verovatnoćom $\lambda(t)dt$.

Pravimo pojednostavljenje da je proces hazard rate deterministički. Po ekstenziji, ovo implicira da je hazard rate nezavisan od kamatnih stopa i stopa oporavka. Kasnije ćemo diskutovati o validnosti ovog pretpostavke u kontekstu određivanja cena. Sve što sada kažemo jeste da je za gotovo sve učesnike na tržištu ova pretpostavka prihvatljiva, jer njen uticaj na cene je dobro unutar tipičnog bid-offer spreda za kreditne default svapove.



Slika 4: Ekvivalent binomnog stabla u modelovanju default-a, u kojem se stablo zaustavlja i isplaćuje iznos K u slučaju kreditnog događaja

Ovaj model možemo proširiti na više vremenskih perioda, kao što je prikazano na Slici 4, gde je K isplata u trenutku default-a. Možemo izračunati verovatnoću kontinuiranog preživljavanja do vremena T pod uslovom da je preživelo do vremena t_V tako što ćemo razmatrati limes kada $dt \to 0$. Verovatnoća preživljavanja data izrazom:

$$Q(t_V, T) = \exp\left(-\int_{t_V}^{T} \lambda(s)ds\right)$$

1.4 Vrednovanje *Premium Leg-a*

Premijska noga (premium leg) CDS-a predstavlja niz plaćanja default svap spreda koja se vrše do dospeća ili do kreditnog događaja, zavisi od toga šta nastupi prvo. Ovaj leg takođe uključuje i plaćanje akumulirane premije od prethodnog datuma plaćanja do trenutka kreditnog događaja.

Pretpostavimo da postoje ugovoreni datumi plaćanja $t_1, \ldots, t_N$, gde je t_N datum dospeća CDS-a, a $S(t_0, t_N)$ je ugovoreni spred do dospeća. Ignorišući akumuliranu premiju, sadašnja vrednost premijske noge može se zapisati kao:

$$\mathrm{PV}_{\text{Premium Leg}} = \sum_{n=1}^{N} \Delta(t_{n-1}, t_n, B)\, S(t_0, t_N)\, Z(t_V, t_n)\, Q(t_V, t_n),$$

gde je:

- $\Delta(t_{n-1}, t_n, B)$ – day count frakcija između datuma plaćanja t_{n-1} i t_n prema konvenciji B,
- $Q(t_V, t_n)$ – arbitražno-slobodne verovatnoće preživljavanja referentnog entiteta od trenutka vrednovanja t_V do datuma plaćanja t_n,
- $Z(t_V, t_n)$ – Libor diskont faktor od trenutka vrednovanja do datuma plaćanja.

Ova jednačina u početku ignoriše efekat akumulirane premije – činjenicu da ugovor pri kreditnom događaju obično zahteva od kupca zaštite da plati deo premije koji je akumuliran od prethodnog datuma plaćanja do trenutka kreditnog događaja.

Da bismo uključili efekat akumulirane premije, potrebno je:

1. Razmotriti svaki period akumulacije premije koji počinje na t_{n-1} sa datumom plaćanja t_n.
2. Odrediti verovatnoću preživljavanja od trenutka vrednovanja t_V do svakog trenutka s u periodu premije, a zatim verovatnoću default-a u sledećem malom vremenskom intervalu ds. Ova verovatnoća je data kao $Q(t_V, s)\lambda(s)ds$.
3. Izračunati akumulirano plaćanje od prethodnog datuma plaćanja do svakog trenutka s.
4. Diskontovati ovo plaćanje nazad do trenutka vrednovanja koristeći Libor diskont faktor.
5. Integrisati preko svih trenutaka u periodu premije. Ovo je inače diskretna dnevna integracija, jer se premije računaju na dnevnoj bazi, ali zbog jednostavnosti se aproksimira neprekidnim integralom.
6. Sabirati preko svih perioda premije od $n = 1$ do poslednjeg $n = N$.

Rezultujući izraz za akumuliranu premiju je:

$$\text{Premium Accrued} = \sum_{n=1}^{N} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \Delta(t_{n-1}, t_n, B)\, S(t_0, t_N)\, Z(t_V, s)\, Q(t_V, s)\, \lambda(s)\, s\, ds$$

Integral čini ovaj izraz složenim za tačno izračunavanje. Međutim, kao što pokazuju O'Kane i Turnbull (2003), moguće je aproksimirati ga sa:

$$\text{Premium Accrued} \approx \sum_{n=1}^{N} \Delta(t_{n-1}, t_n, B)\, Z(t_V, t_n)\, Q(t_V, t_n)\, \frac{(Q(t_V, t_{n-1}) - Q(t_V, t_n))}{2}\, S(t_0, t_N),$$

Gde pretpostavljamo da je prosečna akumulirana premija između dva datuma plaćanja polovina pune premije na kraju perioda.

Konačna vrednost premium leg-a je:

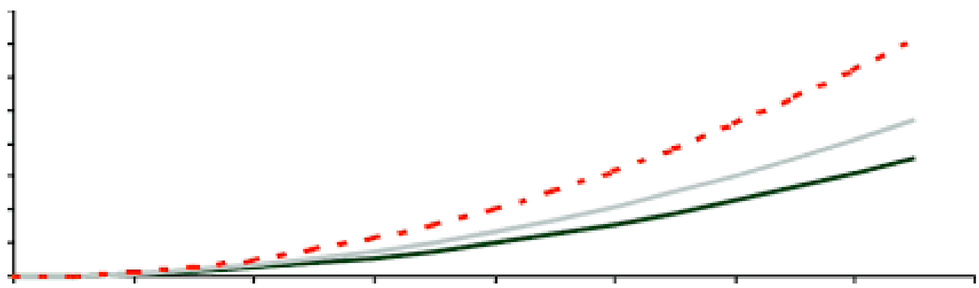
$$\text{PV}_{\text{Premium Leg}} = S(t_0, t_N) \times \mathit{RPV01},$$

gde je *Risky PV01 (RPV01)* očekivana sadašnja vrednost jednog baznog poena do dospeća ili kreditnog događaja. Ako ugovor specificira akumuliranu premiju (PA), koristi se faktor $1_{\text{PA}} = 1$, a inače 0.

Efekat akumulirane premije na *breakeven spread* (spred kod kojeg vrednost premium leg-a i protection leg-a CDS-a bude jednaka) je obično mali, ali se može aproksimirati izrazom:

$$\frac{R}{2} f(1 - S),$$

gde je f frekvencija, tj. učestalost plaćanja premium leg-a, a R pretpostavljena stopa oporavka.



Slika 5: Efekat akumulirane premije prikazan kao razlika između breakeven spread-a i kreditnog svapa sa i bez uračunate akumulirane premije, uz pretpostavku stope oporavka od 0%, 25% i 50%.

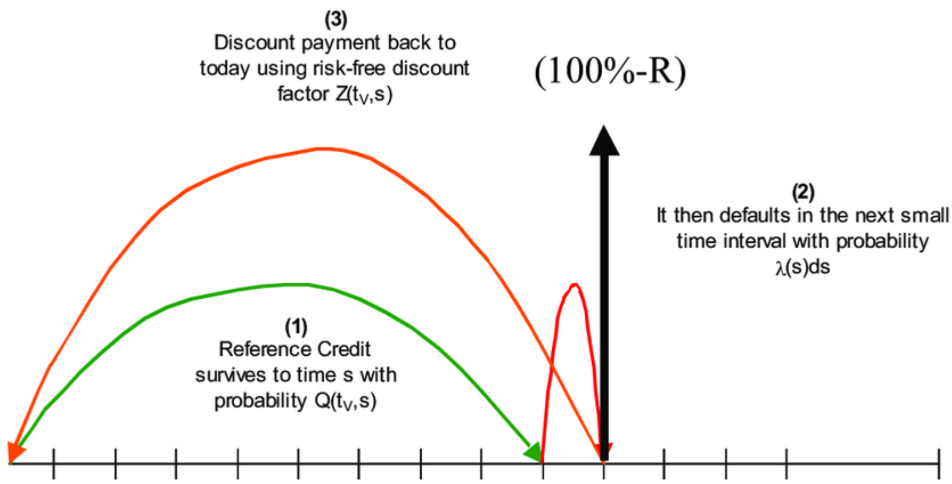
Slika 5 nam pruža vizuelni prikaz odnosa premium leg-a sa različitim udelima oporavka. Breakeven spread sa uračunatom akumuliranom premijom mora biti manji od onog bez akumulirane premije, jer kupac zaštite želi da plati niži spread kako bi kompenzovao moguću dodatnu premiju u slučaju kreditnog događaja.

1.5 Vrednovanje *Protection Leg-a*

Protection leg predstavlja kontingentnu isplatu $(100\% - R)$ na nominalnu vrednost zaštite, koja se vrši nakon kreditnog događaja. R je očekivana stopa oporavka, odnosno očekivana cena obaveze najjeftinijeg instrumenta (CTD) u okviru zaštite u trenutku kreditnog događaja. Iako može postojati kašnjenje do 72 kalendarska dana između obaveštenja o kreditnom događaju i isplate *protection lega*, obično se pretpostavlja da je isplata izvršena odmah.

Prilikom vrednovanja *protection lega*, važno je uzeti u obzir vreme kreditnog događaja, jer ono značajno utiče na sadašnju vrednost *protection lega*, posebno za dugoročne *default swap*-ove. U okviru pristupa sa *hazard rate*-om, problem vremenskog određivanja rešavamo tako što uslovljavamo svaki mali vremenski interval $[s, s+ds]$ između trenutka vrednovanja t_V i dospeća t_N, kada kreditni događaj može nastupiti. Koraci su sledeći:

1. Izračunati verovatnoću preživljavanja do budućeg vremena s, koja iznosi $Q(t_V, s)$.
2. Izračunati verovatnoću kreditnog događaja u sledećem malom vremenskom intervalu ds, koja iznosi $\lambda(s)ds$.
3. U tom trenutku se isplaćuje iznos $(100\% - R)$, koji se diskontuje nazad do trenutka vrednovanja pomoću bezrizične stope $Z(t_V, s)$.
4. Razmotriti verovatnoću ovog događaja u svim vremenskim tačkama $s = t_V$ do dospeća t_N. Precizno, vreme kreditnog događaja ne bi trebalo da bude manje od jednog dana, ali pretpostavka intra-dnevnog događaja ima minimalan efekat na vrednovanje i pojednostavljuje objašnjenje.



Slika 6: Koraci u računanju očekivane sadašnje vrednosti stope oporavka

Očekivana sadašnja vrednost isplate na osnovu oporavka se može izraziti integralom:

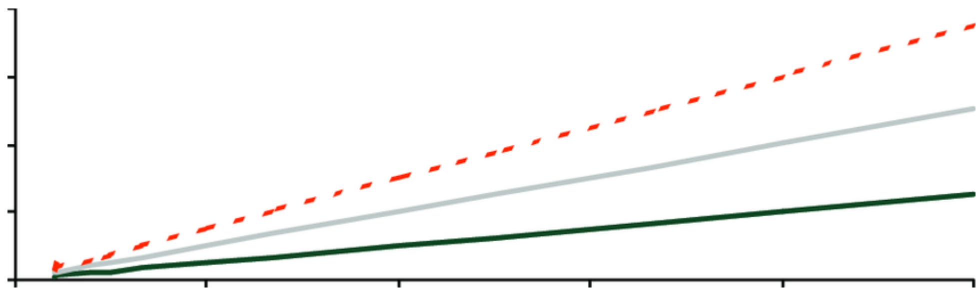
$$\mathrm{PV}_{\mathrm{protection}} = \int_{t_V}^{t_N} (1-R) Z(t_V, s) Q(t_V, s) \lambda(s) ds \tag{5}$$

gde je R očekivana cena CTD (*eng. cheapest to deliver*)instrumenta u trenutku kreditnog događaja.

Zbog složenosti ovog integrala, moguće je, bez značajnog gubitka tačnosti, pretpostaviti da kreditni događaj može nastupiti samo u konačnom broju M diskretnih tačaka godišnje. Za default svap sa dospećem t_N, imamo $M \times t_N$ diskretnih vremena, označenih sa $m = 1, \ldots, M \times t_N$, tako da se vrednost protection leg-a aproksimira sumom:

$$\mathrm{PV}_{\mathrm{protection}} \approx \sum_{m=1}^{M \cdot t_N} (1-R) Z(t_V, t_m) Q(t_V, t_m)(\ldots) \tag{6}$$

Manja vrednost M smanjuje broj potrebnih proračuna, ali i smanjuje preciznost. O'Kane i Turnbull (2003) pokazuju da je procentualna razlika između neprekidnog i diskretnog slučaja za konstantnu stopu hazarda $r/2M$, gde je r kontinuirano kapitalizovana bezrizična stopa (kamatna stopa koja se preračunava "beskonačno"tokom godine). Ova aproksimacija omogućava da model bude brz, jednostavan i precizan.



Slika 7: Zavisnost broja intervala za M i preciznosti vrednovanja protection leg-a

Slika 7 prikazuje zavisnost greške diskretizacije zaštitne noge CDS-a od broja intervala M. Veći M smanjuje grešku i približava rezultat neprekidnom modelu, dok manji M smanjuje broj proračuna, ali i preciznost.

1.6 Bootstrap pristup za konstrukciju krive preživljavanja CDS-a

Nakon što smo objasnili vrednovanje *protection* i *premium leg*-a CDS-a, sledeći korak je određivanje cene CDS ugovora korišćenjem **bootstrap pristupa**. CDS se može ceniti ukoliko imamo:

- Krivu preživljavanja izdavaoca $Q(t,T)$
- Libor krivu $Z(t,T)$
- Pretpostavljenu stopu oporavka R

LIBOR kriva predstavlja skup kamatnih stopa za različite rokove dospeća na međubankarskom tržištu. Koristi se kao referentna stopa za kreditne instrumente i derivativne ugovore, kao i za diskontovanje budućih novčanih tokova. Oblik krive odražava očekivanja tržišta o kretanju kamatnih stopa u budućnosti.

Bootstrap metod omogućava pravljenje krive preživljavanja koja prati tržišne CDS spreadove za sve rokove i služi za vrednovanje CDS ugovora.

Poželjna svojstva krive preživljavanja

1. Minimalna preciznost PV je reda veličine $O(10^{-7})$, a spread se definiše sa greškom $O(10^{-4})$ baznih poena ili manje.
2. Metod interpolacije između tržišnih kotacija treba biti smislen.
3. Konstrukcija krive treba biti lokalna, tj. promena CDS spread-a sa sličnom ročnošću.
4. Algoritam treba biti brz.
5. Kriva treba biti glatka, ali lokalnost ima prioritet nad glatkošću.

Bootstrap algoritam

Bootstrap radi tako što se počinje od instrumenta sa najkraćim rokom i postepeno ide ka instrumentu sa najdužim rokom. Na svakom koraku se koristi cena sledećeg instrumenta da se reši jedan parametar koji određuje produženje krive preživljavanja.

Za interpolaciju između tačaka koristi se **log verovatnoća preživljavanja**:

$$Q(t) = \exp\Big(-\int_0^t h(s)\,ds\Big), \tag{7}$$

gde je $h(t)$ *forward default rate*. Postavljanjem

$$f(t) = -\ln Q(t), \quad 0 \le Q(t) \le 1, \tag{8}$$

dobijamo pozitivnu funkciju $f(t)$, sa:

$$f(t) = \int_0^t h(s)\,ds, \quad h(t) = \frac{\partial f(t)}{\partial t}. \tag{9}$$

Linearni interpolacioni metod između tačaka t_{n-1} i t_n je:

$$f(t^*) = \frac{(t_n - t^*)f(t_{n-1}) + (t^* - t_{n-1})f(t_n)}{t_n - t_{n-1}}, \quad t^* \in [t_{n-1}, t_n], \tag{10}$$

što odgovara **piecewise konstantnom forward default rate**:

$$h(t^*) = \frac{f(t_n) - f(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} = \frac{1}{t_n - t_{n-1}} \ln \frac{Q(t_{n-1})}{Q(t_n)}. \tag{11}$$

Verovatnoća preživljavanja za $t^* \in [t_{n-1}, t_n]$:

$$Q(t^*) = Q(t_{n-1}) \exp\big(-(t^* - t_{n-1})h(t^*)\big), \tag{12}$$

pri čemu $h(t) \ge 0$ osigurava nepostojanje arbitraže.

Konkretan bootstrap algoritam (O'Kane)

Algoritam za računanje bootstrap algoritma koji je pružio O'Kane je sldeći:

1. Inicijalizuje se kriva: $Q(T_0 = 0) = 1$.
2. Postavi se $m = 1$.
3. Reši se $Q(T_m)$ tako da mark-to-market vrednost CDS-a sa rokom T_m i tržišnim spreadom S_m bude jednaka nuli:
$$S_0 = \frac{1-R}{2} \frac{\sum_{k=1}^{K} \big(Z(0,t_k) + Z(0,t_{k-1})\big)\big(Q(0,t_{k-1}) - Q(0,t_k)\big)}{RPV01(0,T)}, \tag{13}$$
gde se diskontni faktori interpoliraju iz prethodno izračunatih $Q(T_1), \ldots, Q(T_{m-1})$.
4. Dodaj $Q(T_m)$ u krivu preživljavanja.
5. Povećaj $m = m + 1$; ako $m \leq M$, vraćamo se na korak 3.
6. Nakon završetka, dobijamo krivu preživljavanja sa $M + 1$ tačkom:
$$0, T_1, T_2, \ldots, T_M \quad \text{i vrednosti} \quad 1.0, Q(T_1), Q(T_2), \ldots, Q(T_M).$$

Ovaj metod pravi krivu preživljavanja koja prati tržišne CDS spreadove i koristi se za vrednovanje CDS ugovora.

2 Kalibrisanje očekivanih stopa oporavka

Kalibrisanje predstavlja proces prilagođavanja parametara modela tako da rezultati modela budu u skladu sa tržišnim podacima. U kontekstu kreditnih derivata, kalibrisanje omogućava da pretpostavke o verovatnoći default-a i stopi oporavka odražavaju *realna tržišna očekivanja*.

Jedan od potrebnih ulaznih parametara o kome do sada nismo govorili jeste stopa oporavka R. Za razliku od spreda ili strukture kamatnih stopa, ovo nije veličina koja se može direktno posmatrati na tržištu. Očekivana stopa oporavka R nije očekivana vrednost imovine nakon procesa naplate posle default-a. Umesto toga, ona predstavlja cenu CTD $(cheapest - to - deliver)$ sredstva, izraženu kao procenat nominalne vrednosti, u periodu od otprilike 72 kalendarska dana nakon obaveštenja o kreditnom događaju.

Korišćenje vrednosnog modela omogućava da se, na osnovu tržišnih cena obveznica, proceni očekivana stopa oporavka R tako da teoretska cena u modelu odgovara stvarnoj tržišnoj ceni.

Međutim, to je teško za sigurne izdavaoci obveznica, jer je njihova verovatnoća default-a niska – pa je stopa oporavka samo mali deo cene obveznice.

Ovo nije veliki problem, jer tržišna vrednost kreditnog svopa slabo zavisi od stope oporavka kada su spreadovi mali. Kod lošijih kreditnih rejtinga, ta zavisnost je veća, pa niže cene obveznica mogu otkriti više o tržišnim očekivanjima budućih stopa oporavka.

2.1 Određivanje ravnotežnog CDS spreda (breakeven CDS)

Sada smo predstavili model koji vrednuje *protection* i *premium* delove CDS-a. Sledeći korak je da odredimo verovatnoće preživljavanja (*survival probabilities*) iz tržišno kotiranog CDS spreda.

Ravnotežni CDS spred se definiše kao:

$$\text{PV of Premium Leg} = \text{PV of Protection Leg.}$$

Za novi ugovor imamo $t_V = t_0$ (jer ugovor posmatramo odmah po sklapanju istog) pa zamenom iz jednačine (5) i jednačine (7) i preuređivanjem dobijamo:

$$S(t_0, t_N) = \frac{\sum_{m=1}^{N} \text{RPV01}(t_0, t_m)\big[Z(t_0, t_m)Q(t_0, t_{m-1}) - Z(t_0, t_m)Q(t_0, t_m)\big]}{\sum_{m=1}^{N} \text{PV}_m},$$

gde je RPV01 definisan u jednačini (5).

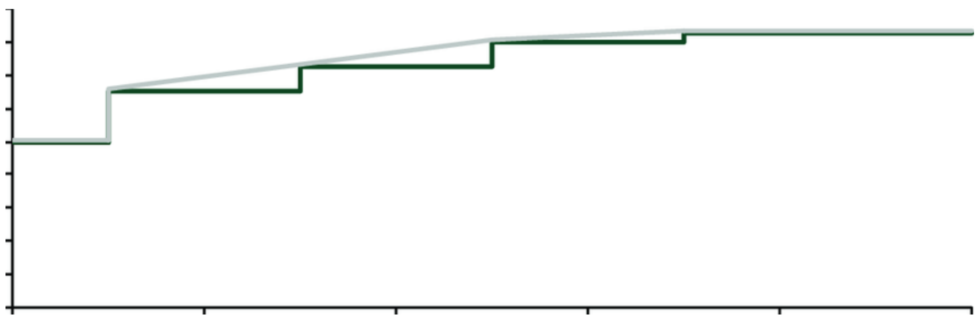
Ovim dobijamo direktnu vezu između CDS spreda kotiranog na tržištu i verovatnoća preživljavanja koje on implicira. Međutim, ovo još uvek nije dovoljno da bismo odredili sve potrebne verovatnoće preživljavanja.

Jedna jedina jednačina koja povezuje CDS spread i verovatnoće preživljavanja ne može odrediti sve potrebne verovatnoće, jer broj nepoznatih (verovatnoća preživljavanja u različitim periodima) premašuje broj jednačina.

U ovoj jednačini poznati su faktori akumulacije, možemo napraviti pretpostavku o stopi oporavka R i izračunati diskontne faktore. Međutim, pošto imamo više nepoznatih verovatnoća preživljavanja nego jednačina, nije moguće odrediti sve verovatnoće direktno. Zbog toga je potrebno napraviti **pojednostavljujuću pretpostavku o terminskoj strukturi verovatnoća preživljavanja** (npr. pretpostavimo da verovatnoće rastu ili opadaju u nekim periodima), kako bi se model mogao kalibrisati.

3 Izgradnja terminske strukture stope hazarda

Na tržištu CDS-ova se obično pretpostavlja da je stopa hazarda **komadno konstantna** (konstantna funkcija na određenim intervalima) na intervalima dospeća, što je dovoljno jer sa jednim tržišnim podatkom ne može da se odredi više informacija o terminskoj strukturi.



Slika 8: Terminska struktura hazard rate-a bazirana na tržišnim CDS spreadovima za 1,2,3,5 i 10 godina

Mogli bismo ići korak dalje i pretpostaviti da je kriva komadno linearna, ali to pravi razliku samo ako (i) nemamo kotirane spredove za mnogo dospeća i (ii) je kriva strmo nagnuta. U praksi, većina emitenta ima likvidnost uglavnom kod 5-godišnjeg CDS-a, pa se kriva pretpostavlja kao ravna. Glavni izuzetak je kada imamo inverznu krivu spreda, što je obično povezano sa kreditorima u problemu. U tom slučaju imamo više tržišnih spredova, posebno za kratka dospeća. Zbog toga ćemo model zadržati jednostavnim pretpostavljajući komadno konstantnu strukturu, iako je generalizacija na linearni model prilično jednostavna.

Ako imamo CDS spreadove za dospeća 1,3,5,7 i 10 godina, pretpostavljamo da imamo terminsku strukturu stope hazarda sa pet segmenata: $\lambda_{0,1}, \lambda_{1,3}, \lambda_{3,5}, \lambda_{5,7}$ i $\lambda_{7,10}$, kao što je prikazano na Slici 9.

Proces konstrukcije terminske strukture stope hazarda je iterativan i poznat kao eng. bootstrapping, o kom je bilo reči ranije. Počinje uzimanjem najkraćeg dospeća i korišćenjem istog za izračunavanje prve verovatnoće preživljavanja. U ovom slučaju, 1-godišnji CDS se koristi za određivanje vrednosti $\lambda_{0,1}$. Pretpostavljajući kvartalna plaćanja premije, mesečnu diskretizaciju ($M = 12$) i da akumulirana premija nije plaćena, to se postiže rešavanjem jednačine:

$$\sum_{n=3,6,9,12} \sum_{m=1}^{3} \left(V_m^n - V_{m-1}^n \right) \left(Z(t_0, t_m) e^{-\sum_{i=0}^{m} \lambda_i \tau_i} - Z(t_0, t_m) e^{-\sum_{i=0}^{m} \lambda_{i-1} \tau_i} \right) = 1$$

pri čemu je mesečna diskretizacija definisana kao: $\tau_0 = 0.0, \tau_1 = 0.0833, \tau_2 = 0.167, \tau_3 = 0.25, \ldots, \tau_{12} = 1.00$.

Ova jednačina se rešava korišćenjem **algoritma za traženje nulte tačke u jednoj dimenziji**. Procedura se zatim ponavlja za $\lambda_{1,3}$, $\lambda_{3,5}$ itd., sve dok ne dođemo do CDS-a sa poslednjim dospećem. Nakon toga se često pretpostavlja da je stopa hazarda konstantan.

Definišući $\tau = T - t_V$, stopa hazarda je komadno konstantna:

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} \lambda_{0,1}, & 0 < \tau \leq 1 \\ \lambda_{1,3}, & 1 < \tau \leq 3 \\ \lambda_{3,5}, & 3 < \tau \leq 5 \\ \lambda_{5,7}, & 5 < \tau \leq 7 \\ \lambda_{7,10}, & 7 < \tau \leq 10 \end{cases}$$

Stopa hazarda izračunata ovde je **arbitražno slobodan**, što znači da predstavlja nivo stope opasnosti potreban da model odgovara tržištu. Arbitražno slobodna stopa hazarda je obično veća od one izvedene iz istorijskih podataka, jer uključuje i druge faktore, poput premije za likvidnost, premije za spred rizik i efekata ponude i potražnje na tržištu.

Kada je kriva spreda inverzna, ponekad se dobija negativna stopa hazarda. Često negativna verovatnoća implicira arbitražu, koja može biti zavisna ili nezavisna od modela.

4 Izračunavanje tržišne vrednosti pozicije tržišne (mark-to-market vrednosti)

U ovom poglavlju izračunavamo mark-to-market (MTM) vrednost pozicije u default svapu na dan plaćanja premije, čime se izbegava tretman akumulirane premije. MTM duge pozicije dat je formulom:

$$MTM(t_V, t_N) = \pm\big(S(t_V, t_N) - S_{\text{kontrakt}}(t_V, t_N)\big) \times RPV01(t_V, t_N),$$

gde je *Risky PV01* definisan kao:

$$RPV01(t_V, t_N) = \sum_{n=1}^{N} \Delta_n B_n Z(t_V, t_n) Q(t_V, t_n) \frac{Q(t_V, t_{n-1}) - Q(t_V, t_n)}{2} \cdot PA_n,$$

pri čemu je $PA = 1$ ako je akumulirana premija deo ugovora, a 0 inače. Trenutni breakeven spred određuje se iz:

$$(1 - R) \sum_{m=1}^{M} Z(t_V, t_m)\big(Q(t_V, t_{m-1}) - Q(t_V, t_m)\big) - S(t_V, t_N) \cdot RPV01(t_V, t_N) = 0.$$

Potpuni primer za \$10M dugu poziciju inicijalno kupljenu po spredu od 200 bp pokazuje da, kada tržišni spredovi padnu na 142.7 bp, MTM postaje negativan i iznosi -\$223K, jasno ilustrujući uticaj promena spreadova na vrednost ugovora.

LIBOR Rates	6M	1.35	Default Swaps	1Y	110bp
	1Y	1.43		2Y	120bp
	2Y	1.90		3Y	130bp
	3Y	2.47		4Y	140bp
	4Y	2.936		5Y	150bp
	5Y	3.311		Recovery Rate R	40%

Notional	\$10,000,000	**Frequency**	Quarterly
Contractual Spread	200bp	**Basis**	Actual 360
Effective Date	20 June 2002	**Calendar**	USD
Maturity Date	20 Sep 2007	**Premium Accrued**	Yes

Valuation Date: 19 June 2003

Payment Dates	Day Count	Actual Flows	Survival Probability	Libor discount factor
Mon 22 Sep 2003	0.261111	52,222.22	99.567%	0.99649
Mon 22 Dec 2003	0.252778	50,555.56	99.150%	0.99311
Mon 22 Mar 2004	0.252778	50,555.56	98.657%	0.98953
Mon 21 Jun 2004	0.252778	50,555.56	98.164%	0.98583
Mon 20 Sep 2004	0.252778	50,555.56	97.628%	0.98084
Mon 20 Dec 2004	0.252778	50,555.56	97.092%	0.97523
Mon 21 Mar 2005	0.252778	50,555.56	96.559%	0.96899
Mon 20 Jun 2005	0.252778	50,555.56	96.030%	0.96218
Tue 20 Sep 2005	0.255556	51,111.11	95.420%	0.95450
Tue 20 Dec 2005	0.252778	50,555.56	94.815%	0.94630
Mon 20 Mar 2006	0.250000	50,000.00	94.220%	0.93754
Tue 20 Jun 2006	0.255556	51,111.11	93.616%	0.92800
Wed 20 Sep 2006	0.255556	51,111.11	92.934%	0.91879
Wed 20 Dec 2006	0.252778	50,555.56	92.259%	0.90931
Tue 20 Mar 2007	0.250000	50,000.00	91.597%	0.89946
Wed 20 Jun 2007	0.255556	51,111.11	90.924%	0.88899
Thu 20 Sep 2007	0.255556	51,111.11	90.173%	0.87902

Risky PV01	3.899	**Breakeven Spread**	142.7
PV of Protection	\$557,872	**Full Mark-to-Market**	-\$223,516

Slika 9: Rezultati izračunavanja tržišne vrednosti CDS pozicije

5 Rad sa bazom podataka

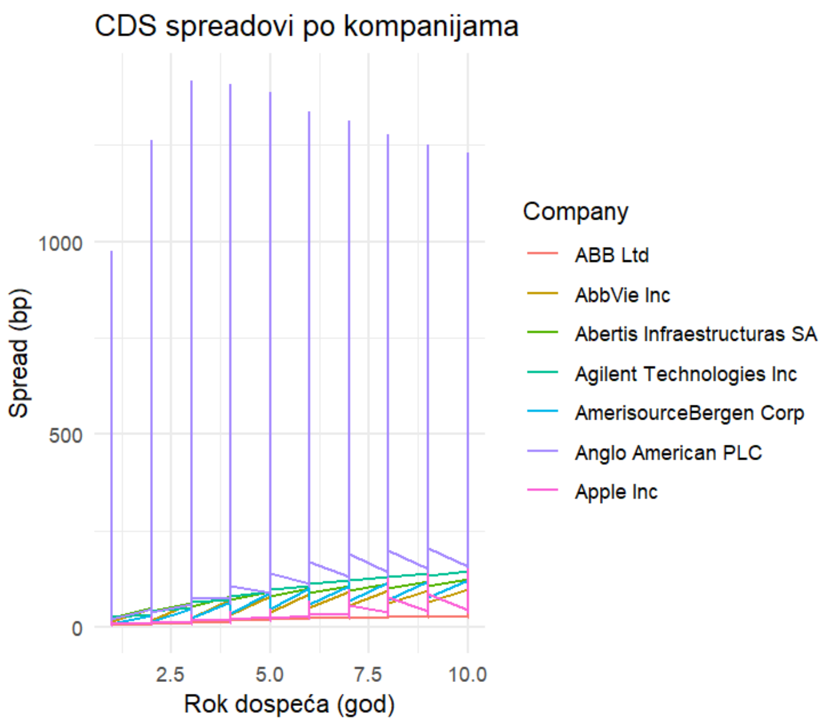
U radu je korišćena baza podataka CDS koja sadrži vrednosti CDS spreadova za više kompanija i za različite rokove dospeća (od 1 do 10 godina). Svaka kompanija ima svoju seriju podataka označenu kolonama `PX1`, `PX2`, ..., `PX10`, koje predstavljaju CDS spreadove u baznim poenima za odgovarajuće godine.

Na osnovu ovih podataka, izračunate su sledeće vrednosti:

- Kriva preživljavanja (Q) za svaki rok dospeća i za svaku kompaniju;
- Sadašnja vrednost premijske noge (*Premium Leg*);
- Sadašnja vrednost isplate u slučaju kreditnog događaja (*Protection Leg*);
- Stopu hazarda po godinama dospeća;
- Mark-to-market vrednost (MTM) za svaku kompaniju.

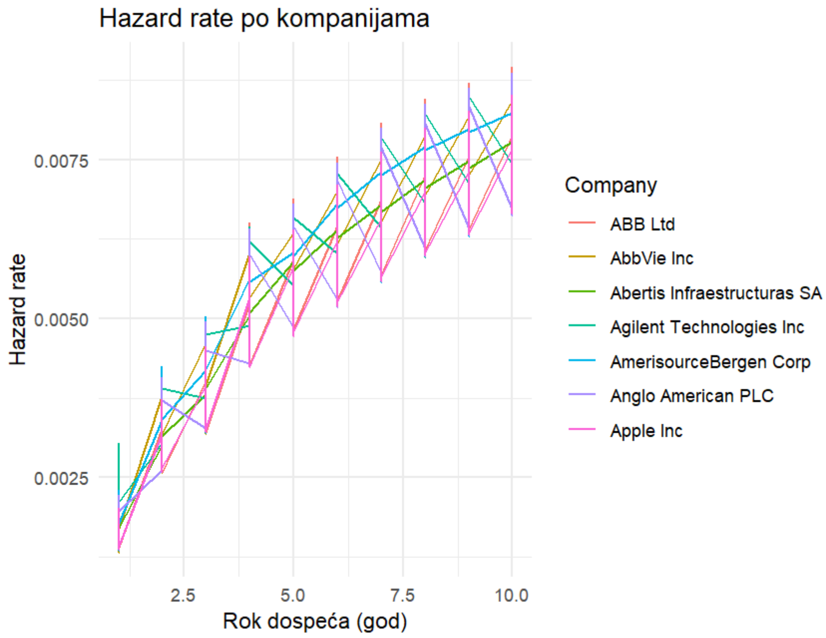
Rezultati pokazuju da je *Premium Leg* oko 2, što znači da je ukupna sadašnja vrednost premija koje kupac CDS-a plaća veća u odnosu na nominalnu vrednost i opravdava plaćanje zaštite. *Protection Leg* iznosi oko 0.46, što ukazuje da je očekivana isplata u slučaju defaulta manja od plaćenih premija, što je tipično za stabilne reference entitete sa niskim kreditnim rizikom. Ovi rezultati potvrđuju da CDS ugovori nose premiju za kreditni rizik, dok je potencijalna isplata ograničena stopom oporavka od 40%.

CDS spreadovi po kompanijama



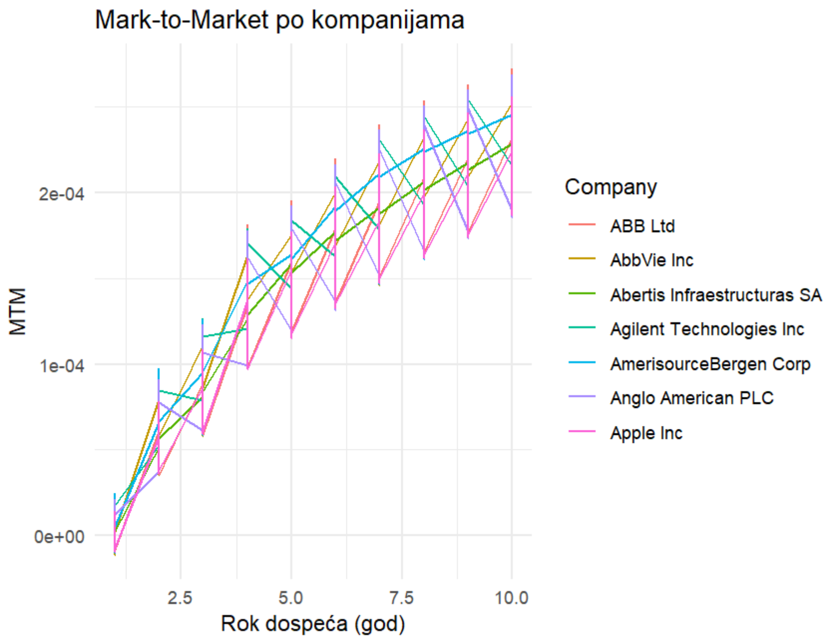
Na slici su prikazani CDS spreadovi po kompanijama u zavisnosti od roka dospeća. Uočava se da spread generalno raste sa rokom dospeća, što znači da tržište očekuje veći rizik neplaćanja za duže periode.

Stopa hazarda po kompanijama



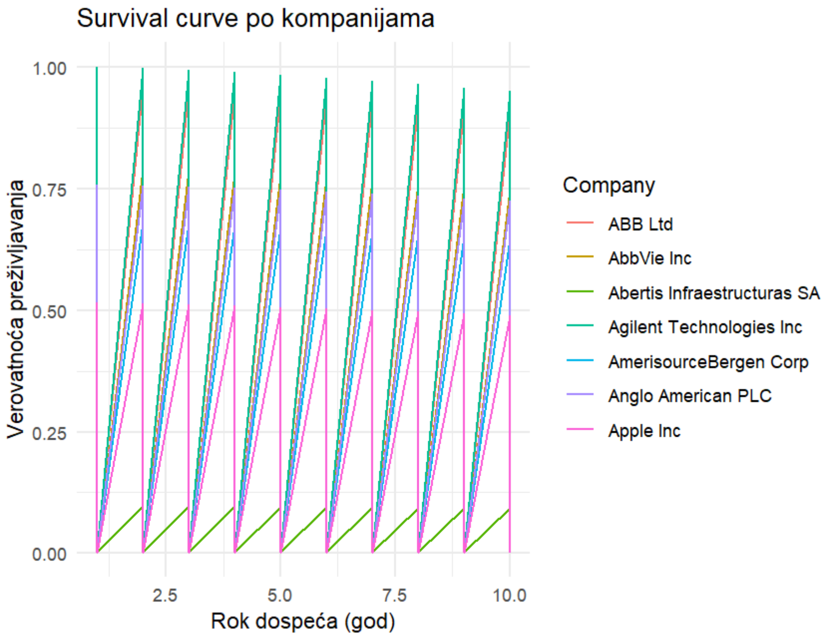
Grafikon prikazuje stopu hazarda, odnosno trenutnu verovatnoću defaulta po jedinici vremena. Vidi se da hazard rate raste s vremenom, što odražava povećani rizik bankrota kako rok dospeća postaje duži.

Mark-to-Market po kompanijama



Na ovom grafiku prikazana je vrednost Mark-to-Market (MTM) kroz vreme za različite kompanije. MTM raste s rokom dospeća, jer duži ugovori imaju veću osetljivost na promene u kreditnim spreadovima i veću tržišnu vrednost rizika.

Kriva preživljavanja po kompanijama



Ova slika prikazuje krive preživljavanja koje pokazuju verovatnoću da kompanija ne doživi default do određenog roka dospeća. Kriva opada s vremenom, što je očekivano jer se verovatnoća preživljavanja smanjuje što je period duži.

6 Zaključak

U ovom radu detaljno je analiziran tržišni model vrednovanja kreditnih svapova, sa fokusom na izračunavanje premijske i zaštitne noge. Korišćenjem reduced-form pristupa, model omogućava precizno određivanje verovatnoća preživljavanja referentnog entiteta i tržišno impliciranih stopa hazarda, što je potvrđeno i kroz analizu podataka iz baze. Rezultati pokazuju da se mark-to-market vrednost CDS pozicija značajno menja u zavisnosti od nivoa premije i raspodele default verovatnoće, dok bootstrap metoda za konstrukciju krive preživljavanja omogućava pouzdanu kalibraciju na tržišne CDS spreadove. Prikazani podaci iz baze jasno ilustruju razliku između vrednosti premium i protection lega, kao i uticaj promena stopa hazarda na ukupnu vrednost pozicije. Ovaj pristup omogućava investitorima da na konzistentan i arbitražno slobodan način procene rizik i vrednost CDS-ova. Zaključno, kombinacija teorijskog modela i praktičnih podataka iz baze pruža sveobuhvatan uvid u funkcionisanje kreditnih derivata i njihovu primenu u upravljanju kreditnim rizikom.

Literatura

[1] Alphapicks, *Global Primer Series: Credit Default Swaps*, dostupno na: `https://www.alphapicks.co.uk/p/global-primer-series-credit-default`

[2] Sara Maria Correia Pereira, *Pricing of a Credit Default Swap*, Dissertação de Mestrado em Matemática Financeira, Universidade de Lisboa, 2019.

[3] Fintech Explained, *Credit Default Swap (CDS)*, Medium, dostupno na: `https://medium.com/fintechexplained/credit-default-swap-cds-d4ed050d8430`, 2021.

[4] Dominic O'Kane, Stuart Turnbull, *Valuation of Credit Default Swaps*, Finance and Stochastics, 8(3), January 2004, dostupno na: `https://link.springer.com/article/10.1007/s00780-004-0122-5`