线性时不变系统的周期采样控制及稳定性分析

目录

1. 系统方程

线性时不变系统方程如下：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{1}$$

其中，

$$u(t)=Kx(t_k) \qquad t\in[t_k,t_{k+1}) \tag{2}$$

其中，$t_k=k\cdot h$。

2. 问题提出

对于一个给定的线性时不变系统(1)，如何设计一个基于周期采样h的状态反馈控制器(2)，使得最终的闭环控制系统是渐进稳定的？

令$\tau(t)=t-t_k$，且满足$\tau(t)\in[0,h)$，$\dot{\tau}(t)=1$。所以，系统(1)转化为：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+BKx(t-\tau(t)) \tag{3}$$

3. 稳定性分析

3.1 Lyapunov-Krasovskii 泛函的构建

构建如下形式的 LKF：

$$V(t,x_t,\dot{x}_t)=V_S(t,x_t,\dot{x}_t)+V_X(t,x_t) \tag{4}$$

其中，

$$V_S(t,x_t,\dot{x}_t)=x^T(t)Px(t)+(h-\tau(t))\int_{t-\tau(t)}^{t}e^{2\alpha(s-t)}\dot{x}^T(s)U\dot{x}(s)ds \tag{5}$$

$$V_X=(h-\tau(t))\xi^T(t)\begin{pmatrix}\frac{X+X^T}{2} & -X+X_1\\ * & -X_1-X_1^T+\frac{X+X^T}{2}\end{pmatrix}\xi(t) \tag{6}$$

其中，

$$\xi^T(t)=[\,x^T(t)\quad x^T(t-\tau(t))\,] \tag{7}$$

对(4)求导得：

$$\begin{aligned}\dot V(t,x_t,\dot x_t)&=\dot V_S(t,x_t,\dot x_t)+\dot V_X(t,x_t)\\ &=2\dot x^T(t)Px(t)-\int_{t-\tau(t)}^{t}e^{2\alpha(s-t)}\dot x^T(s)U\dot x(s)ds\\ &\quad-2\alpha(h-\tau(t))\int_{t-\tau(t)}^{t}e^{2\alpha(s-t)}\dot x^T(s)U\dot x(s)ds\\ &\quad+(h-\tau(t))\dot x^T(t)U\dot x(t)-\xi^T(t)\begin{pmatrix}\frac{X+X^T}{2} & -X+X_1\\ * & -X_1-X_1^T+\frac{X+X^T}{2}\end{pmatrix}\xi(t)\\ &\quad+(h-\tau(t))\left(\dot x^T(t)(X+X^T)x(t)+2\dot x^T(t)(-X+X_1)x(t-\tau(t))\right)\end{aligned} \tag{8}$$

莱布尼茨积分法则：

$$\frac{d}{dt}\int_{a(t)}^{b(t)}f(t,s)ds=f(t,b(t))\cdot b'(t)-f(t,a(t))\cdot a'(t)+\int_{a(t)}^{b(t)}\frac{\partial}{\partial t}f(t,s)ds$$

因此，

$$\begin{aligned}\dot V(t,x_t,\dot x_t)+2\alpha V(t,x_t,\dot x_t)&=2\dot x^T(t)Px(t)+2\alpha x^T(t)Px(t)-\int_{t-\tau(t)}^{t}e^{2\alpha(s-t)}\dot x^T(s)U\dot x(s)ds\\ &\quad+(h-\tau(t))\dot x^T(t)U\dot x(t)-\xi^T(t)\begin{pmatrix}\frac{X+X^T}{2} & -X+X_1\\ * & -X_1-X_1^T+\frac{X+X^T}{2}\end{pmatrix}\xi(t)\\ &\quad+(h-\tau(t))\left(\dot x^T(t)(X+X^T)x(t)+2\dot x^T(t)(-X+X_1)x(t-\tau(t))\right)\\ &\quad+2\alpha(h-\tau(t))\xi^T(t)\begin{pmatrix}\frac{X+X^T}{2} & -X+X_1\\ * & -X_1-X_1^T+\frac{X+X^T}{2}\end{pmatrix}\xi(t)\end{aligned} \tag{9}$$

令$v_1=\dfrac{1}{\tau(t)}\displaystyle\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x(s)ds$，利用琴生不等式得：

$$\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x^T(s)U\dot x(s)ds\geq\frac{1}{\tau(t)}\left[\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x(s)ds\right]^TU\left[\int_{t-\tau(t)}^{t}\dot x(s)ds\right]=\tau(t)v_1^TUv_1 \tag{10}$$

琴生不等式：

$$\left[\int_a^b \varepsilon(\sigma)d\sigma\right]^T N\left[\int_a^b \varepsilon(\sigma)d\sigma\right] \leq (b-a)\int_a^b \varepsilon^T(\sigma)N\varepsilon(\sigma)d\sigma$$

应用自由权矩阵法,

由(3)得:

$$0=2(x^T(t)P_2^T+\dot{x}^T(t)P_3^T)\times(Ax(t)+BKx(t-\tau(t))-\dot{x}(t)) \tag{11}$$

由微积分基本定理:

$$\int_{t-\tau(t)}^{t} \dot{x}(s)ds = x(t)-x(t-\tau(t)) \tag{12}$$

所以:

$$0=2(x^T(t)Y_1^T+\dot{x}^T(t)Y_2^T+x^T(t-\tau(t))T^T)\times(\tau(t)v_1+x(t-\tau(t))-x(t)) \tag{13}$$

令$\eta^T(t)=[x^T(t)\quad \dot{x}^T(t)\quad x^T(t-\tau(t))\quad v_1^T]$,得到:

$$\begin{aligned}
&\dot{V}(t,x_t,\dot{x}_t)+2\alpha V(t,x_t,\dot{x}_t)\\
&\leqslant 2\dot{x}^T(t)Px(t)+2\alpha x^T(t)Px(t)-e^{-2\alpha h}\tau(t)v_1^TUv_1\\
&\quad+(h-\tau(t))\dot{x}^T(t)U\dot{x}(t)-\xi^T(t)\begin{pmatrix}\frac{X+X^T}{2} & -X+X_1\\ * & -X_1-X_1^T+\frac{X+X^T}{2}\end{pmatrix}\xi(t)\\
&\quad+(h-\tau(t))(\dot{x}^T(t)(X+X^T)x(t)+2\dot{x}^T(t)(-X+X_1)x(t-\tau(t)))\\
&\quad+2\alpha(h-\tau(t))\xi^T(t)\begin{pmatrix}\frac{X+X^T}{2} & -X+X_1\\ * & -X_1-X_1^T+\frac{X+X^T}{2}\end{pmatrix}\xi(t)\\
&\quad+2(x^T(t)P_2^T+\dot{x}^T(t)P_3^T)(Ax(t)+BKx(t-\tau(t))-\dot{x}(t))\\
&\quad+(2(x^T(t)Y_1^T+\dot{x}^T(t)Y_2^T+x^T(t-\tau(t))T^T)(\tau(t)v_1+x(t-\tau(t))-x(t)))\\
&=\eta^T(t)\begin{pmatrix}\Phi_{11}-X_\alpha & \Phi_{12}+X_\tau & \Phi_{13}+X_{1\alpha} & \tau Y_1^\top\\ * & \Phi_{22}+(h-\tau)U & \Phi_{23}-X_{1\tau} & \tau Y_2^\top\\ * & * & \Phi_{33}-X_{2\alpha} & \tau T^\top\\ * & * & * & -\tau e^{-2\alpha h}U\end{pmatrix}\eta(t)\\
&=\eta^T(t)\Psi_S\eta(t)
\end{aligned} \tag{14}$$

其中,

$$\Phi_{11} = 2\alpha P + P_2^T A + A^\top P_2 - (Y_1^\top + Y_1)$$
$$\Phi_{12} = P - P_2^T + P_3^\top A - Y_2$$
$$\Phi_{13} = P_2^\top BK + Y_1^\top - T$$
$$\Phi_{22} = -P_3^\top - P_3$$
$$\Phi_{23} = P_3^\top BK + Y_2^\top$$
$$\Phi_{33} = T + T^\top$$
$$X_\alpha = (1 - 2\alpha(h-\tau))\frac{X + X^\top}{2} \tag{15}$$
$$X_\tau = (h-\tau)\frac{X + X^\top}{2}$$
$$X_{1\alpha} = (1 - 2\alpha(h-\tau))(X - X_1)$$
$$X_{1\tau} = (h-\tau)(X - X_1)$$
$$X_{2\alpha} = (1 - 2\alpha(h-\tau))\frac{X + X^\top - 2X_1 - 2X_1^\top}{2}$$

若$\Psi_S = \begin{pmatrix} \Phi_{11} - X_\alpha & \Phi_{12} + X_\tau & \Phi_{13} + X_{1\alpha} & \tau Y_1^\top \\ * & \Phi_{22} + (h-\tau)U & \Phi_{23} - X_{1\tau} & \tau Y_2^\top \\ * & * & \Phi_{33} - X_{2\alpha} & \tau T^\top \\ * & * & * & -\tau e^{-2\alpha h} U \end{pmatrix} < 0$，则：

$$\dot{V}(t, x_t, \dot{x}_t) + 2\alpha V(t, x_t, \dot{x}_t) < 0 \tag{16}$$

3.2 指数稳定性

3.2.1 引理

存在正数β,δ和函数V: $\mathbb{R} \times W \times L_2[-h, 0] \to \mathbb{R}$ 以下不等式成立

$$\beta|\phi(0)|^2 \le V\left(t, \phi, \dot{\phi}\right) \le \delta|\phi|_W^2 \tag{17}$$

函数$\bar{V}(t) = V(t, x(t), \dot{x}_t)$是右连续且满足(1)，对于$t \neq t_k$是绝对连续且满足

$$\lim_{t \to t_k^-} \bar{V}(t) \ge \bar{V}(t_k) \tag{18}$$

给定α，如果沿着系统(1)，对所有t满足$\dot{\bar{V}}(t) + 2\alpha\bar{V}(t) \le 0$，则(1)随衰减率$\alpha$呈指数稳定。

3.1 节我们已经得到了$\dot{V}(t, x_t, \dot{x}_t) + 2\alpha V(t, x_t, \dot{x}_t) < 0$，所以只需保证(17)式即可。

3.2.2 V 的下界保证

已知

$$V(t, x_t, \dot{x}_t) = x^T(t) P x(t) + (h - \tau(t)) \int_{t-\tau(t)}^{t} e^{2\alpha(s-t)} \dot{x}^T(s) U \dot{x}(s) ds$$
$$+ (h - \tau(t)) \xi^T(t) \begin{pmatrix} \dfrac{X + X^T}{2} & -X + X_1 \\ * & -X_1 - X_1^T + \dfrac{X + X^T}{2} \end{pmatrix} \xi(t) \tag{19}$$

因为$+(h-\tau(t))\int_{t-\tau(t)}^{t} e^{2\alpha(s-t)}\dot{x}^T(s)U\dot{x}(s)ds \geqslant 0$，所以：

$$V(t,x_t,\dot{x}_t) \geqslant x^T(t)Px(t) + (h-\tau(t))\xi^T(t)\begin{pmatrix} \frac{X+X^T}{2} & -X+X_1 \\ * & -X_1-X_1^T+\frac{X+X^T}{2} \end{pmatrix}\xi(t) \tag{20}$$

令

$$\Xi(h) = \begin{bmatrix} P+h\frac{X+X^T}{2} & hX_1-hX \\ * & -hX_1-hX_1^T+h\frac{X+X^T}{2} \end{bmatrix} \tag{21}$$

所以：

$$V(t,x_t,\dot{x}_t) \geqslant \frac{h-\tau(t)}{h}\Xi(h) + \frac{\tau(t)}{h}\Xi(0) \tag{22}$$

若$\Xi(h)>0$时，$\Xi(0)=\begin{bmatrix} P & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix}>0$，取$\beta<\min\{\lambda_{\min}(\Xi(h)),\lambda_{\min}(P)\}$，使得：

$$\begin{gathered} \Xi(h) \succ \beta I_{2n} \\ \Xi(0)=\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \succcurlyeq \begin{bmatrix} \beta I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{gathered} \tag{23}$$

所以

$$\begin{aligned} &\frac{h-\tau(t)}{h}\Xi(h)+\frac{\tau(t)}{h}\Xi(0) \succeq \frac{h-\tau(t)}{h}\beta I_{2n}+\frac{\tau(t)}{h}\begin{bmatrix} \beta I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \beta I_n & 0 \\ 0 & \frac{h-\tau(t)}{h}\beta I_n \end{bmatrix} \succeq \begin{bmatrix} \beta I_n \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{24}$$

所以：

$$\beta|\phi(0)|^2 \leq \overline{V}(t) \tag{25}$$

下界得以保证。

3.2.3 V 的上界保证

令$W(t)=e^{2\alpha t}\overline{V}(t)$，所以

$$\dot{W}(t)=e^{2\alpha t}\left(\dot{\overline{V}}(t)+2\alpha\overline{V}(t)\right) \leq 0 \tag{26}$$

所以$W(t)$在每个采样区间(t_k,t_{k+1})上单调不增，得到

$$\overline{V}(t) \leq e^{-2\alpha(t-t_k)}\overline{V}(t_k), \quad t\in[t_k,t_{k+1}) \tag{27}$$

又因为$\lim\limits_{t\to t_k^-}\overline{V}(t) \geq \overline{V}(t_k)$，所以：

$$\overline{V}(t) \leq e^{-2\alpha(t-t_k)}\overline{V}(t_k) \leq e^{-2\alpha(t-t_k)}\overline{V}(t_k^-) \tag{28}$$

把同样的区间内衰减再向前套用到$[t_{k-1},t_k)$、$[t_{k-2},t_{k-1})\ldots$,得到

$$\overline{V}(t) \le e^{-2\alpha(t-t_k)}\overline{V}(t_k^-) \le e^{-2\alpha(t-t_{k-1})}\overline{V}(t_{k-1}) \le \cdots \le e^{-2\alpha t}\overline{V}(0) \tag{29}$$

所以：

$$\overline{V}(t) \le \delta e^{-2\alpha t}|x|_W^2 \tag{30}$$

上界得以保证。

3.3 结论

我们将最终结论总结为如下定理：

对于给定α，如果存在矩阵$P>0, U>0, X, X_1, P_2, P_3, T, Y_1, Y_2$,使得对于$\tau \in \{0, h\}$使得以下不等式成立：

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11}-X_\alpha & \Phi_{12}+X_\tau & \Phi_{13}+X_{1\alpha} & \tau Y_1^\top \\ * & \Phi_{22}+(h-\tau)U & \Phi_{23}-X_{1\tau} & \tau Y_2^\top \\ * & * & \Phi_{33}-X_{2\alpha} & \tau T^\top \\ * & * & * & -\tau e^{-2\alpha h}U \end{pmatrix} < 0 \tag{31}$$

$$\begin{pmatrix} P+h\dfrac{X+X^T}{2} & hX_1-hX \\ * & -hX_1-hX_1^T+h\dfrac{X+X^T}{2} \end{pmatrix} > 0 \tag{32}$$

其中，

$$\begin{aligned}
&\Phi_{11}=2\alpha P+P_2^T A+A^\top P_2-(Y_1^\top+Y_1)\\
&\Phi_{12}=P-P_2^T+P_3^\top A-Y_2\\
&\Phi_{13}=P_2^\top BK+Y_1^\top-T\\
&\Phi_{22}=-P_3^\top-P_3\\
&\Phi_{23}=P_3^\top BK+Y_2^\top\\
&\Phi_{33}=T+T^\top\\
&X_\alpha=(1-2\alpha(h-\tau))\frac{X+X^\top}{2}\\
&X_\tau=(h-\tau)\frac{X+X^\top}{2}\\
&X_{1\alpha}=(1-2\alpha(h-\tau))(X-X_1)\\
&X_{1\tau}=(h-\tau)(X-X_1)\\
&X_{2\alpha}=(1-2\alpha(h-\tau))\frac{X+X^\top-2X_1-2X_1^\top}{2}
\end{aligned} \tag{33}$$

则系统(1)随衰减率α指数稳定。

4. 求解 LMI

4.1 端点 LMI

定理 A：

设$\tau \in [0, h]$，若矩阵不等式

$$F(\tau) \prec 0 \tag{34}$$

中$F(\tau)$关于τ仿射，即$F(\tau)=F_0+\tau F_1$，则

$$F(\tau) \prec 0, \forall \tau \in [0,h] \quad \Longleftrightarrow \quad F(0) \prec 0 \text{ 且 } F(h) \prec 0. \tag{35}$$

证明：对任意$\tau \in [0,h]$，记$\lambda := \tau/h \in [0,1]$，有

$$F(\tau)=F_0+\tau F_1=(1-\lambda)F(0)+\lambda F(h). \tag{36}$$

负定矩阵集合在凸运算下保持负定 (即若$X \prec 0, Y \prec 0$，则$(1-\lambda)X+\lambda Y \prec 0$。因此$F(0) \prec 0$且$F(h) \prec 0 \Rightarrow F(\tau) \prec 0$对所有$\tau$成立；反向蕴含显然。证毕。

对于(31)式，每一项均为τ的仿射函数，因此

$$(31) \text{ 在 } [0,h] \text{ 上成立} \Longleftrightarrow (31) \text{ 在 } \tau=0 \text{ 与 } \tau=h \text{ 两个端点分别成立。} \tag{37}$$

于是：

在$\tau=0$时，

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11}-X_\alpha & \Phi_{12}+X_\tau & \Phi_{13}+X_{1\alpha} & 0 \\ * & \Phi_{22}+hU & \Phi_{23}-X_{1\tau} & 0 \\ * & * & \Phi_{33}-X_{2\alpha} & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix} < 0 \tag{38}$$

也即，

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11}-X_\alpha & \Phi_{12}+X_\tau & \Phi_{13}+X_{1\alpha} \\ * & \Phi_{22}+hU & \Phi_{23}-X_{1\tau} \\ * & * & \Phi_{33}-X_{2\alpha} \end{pmatrix} < 0 \tag{39}$$

且

$$\begin{aligned}
&\Phi_{11}=2\alpha P+P_2^T A+A^\top P_2-(Y_1^\top+Y_1) \\
&\Phi_{12}=P-P_2^T+P_3^\top A-Y_2 \\
&\Phi_{13}=P_2^\top BK+Y_1^\top-T \\
&\Phi_{22}=-P_3^\top-P_3 \\
&\Phi_{23}=P_3^\top BK+Y_2^\top \\
&\Phi_{33}=T+T^\top \\
&X_\alpha=(1-2\alpha h)\frac{X+X^\top}{2} \\
&X_\tau=h\frac{X+X^\top}{2} \\
&X_{1\alpha}=(1-2\alpha h)(X-X_1) \\
&X_{1\tau}=h(X-X_1) \\
&X_{2\alpha}=(1-2\alpha h)\frac{X+X^\top-2X_1-2X_1^\top}{2}
\end{aligned} \tag{40}$$

在$\tau=h$时，

$$\begin{pmatrix} \Phi_{11}-X_\alpha & \Phi_{12} & \Phi_{13}+X_{1\alpha} & hY_1^\top \\ * & \Phi_{22} & \Phi_{23} & hY_2^\top \\ * & * & \Phi_{33}-X_{2\alpha} & hT^\top \\ * & * & * & -he^{-2\alpha h}U \end{pmatrix} < 0 \tag{41}$$

其中，

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &= 2\alpha P + P_2^T A + A^\top P_2 - (Y_1^\top + Y_1) \\
\Phi_{12} &= P - P_2^T + P_3^\top A - Y_2 \\
\Phi_{13} &= P_2^\top BK + Y_1^\top - T \\
\Phi_{22} &= -P_3^\top - P_3 \\
\Phi_{23} &= P_3^\top BK + Y_2^\top \\
\Phi_{33} &= T + T^\top \\
X_\alpha &= \frac{X + X^\top}{2} \\
X_{1\alpha} &= X - X_1 \\
X_{2\alpha} &= \frac{X + X^\top - 2X_1 - 2X_1^\top}{2}
\end{aligned} \tag{42}$$

所以，(31)成立等价于(39)与(41)成立。

最终，我们需要保证(39)(41)(32)同时成立。

4.2 解耦

由于$\Phi_{13} = P_2^\top BK + Y_1^\top - T$与$\Phi_{23} = P_3^\top BK + Y_2^\top$，其中的$P_2, P_3, K$均为待求矩阵，不能作为单个 SDP 直接求解。令

$$P_2 = \gamma_2 I, \quad P_3 = \gamma_3 I \tag{43}$$

于是，

$$\Phi_{13} = \gamma_2 BK + Y_1^\top - T, \quad \Phi_{23} = \gamma_3 BK + Y_2^\top, \tag{44}$$

其中，γ_2, γ_3给定。

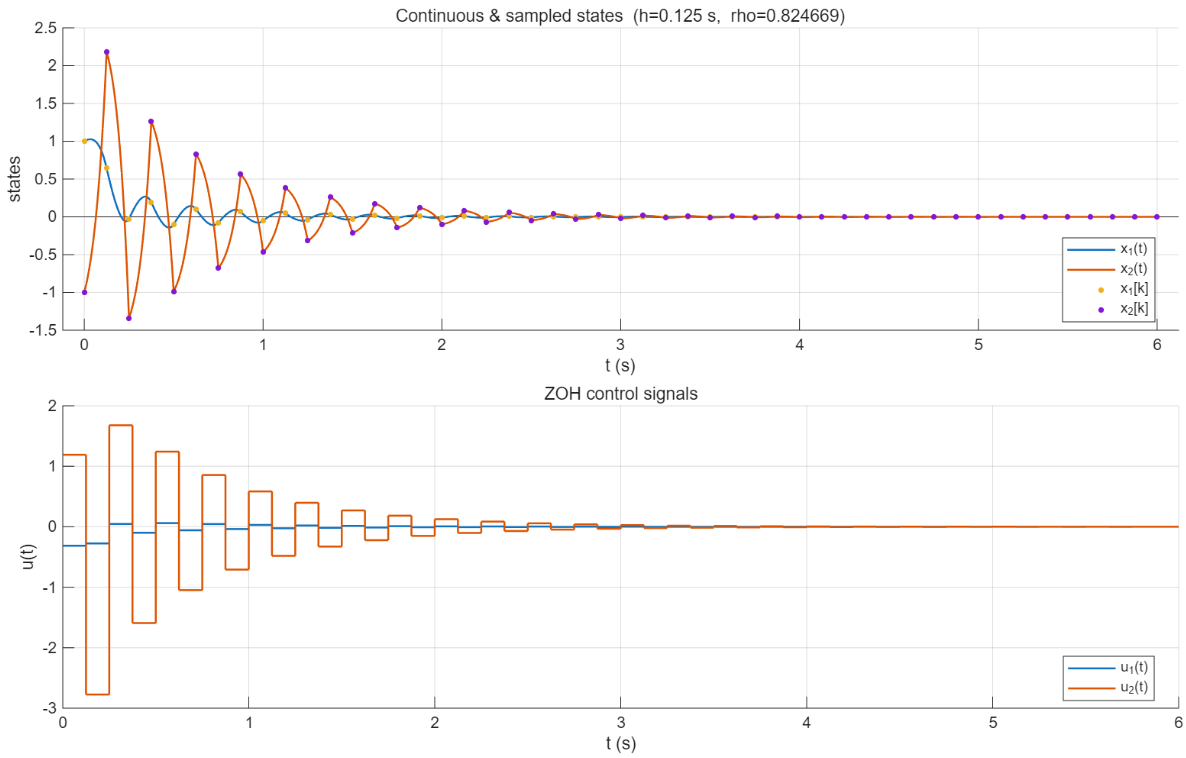
4.3 求解结果

取衰减率$\alpha = 0.05$，采样间隔$h = 0.125$（经过测试后的较好采样周期），利用 MATLAB（YALMIP + MOSEK）求解得出：

$$K = \begin{bmatrix} -0.3399 & -0.0263 \\ -0.0628 & -1.2527 \end{bmatrix} \tag{45}$$

5. 仿真

取$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, A = \begin{pmatrix} -0.479908 & -3.81625 \\ 5.1546 & 14.4723 \end{pmatrix}, B = diag(5.8705212, 15.50107)$。


Continuous & sampled states (h=0.125 s, rho=0.824669)
states
t (s)
x1(t)
x2(t)
x1[k]
x2[k]
ZOH control signals
u(t)
t (s)
u1(t)
u2(t)