

采样数据系统的 H_∞ 分析与综合： 连续耗散—离散提升—凸 LMI 的统一链路

王凯

2025 年 10 月 18 日

摘要

本文面向 ZOH 采样数据系统的 H_∞ 设计，给出从连续区间能量到离散有界实引理再到两条凸 LMI 的统一链路，并以端点判据覆盖采样抖动区间。

关键词：采样数据控制， H_∞ ，有界实引理，LMI，抖动

1 Introduction

采样数据控制是现代嵌入式与网络化控制的基本形态：被控对象在**连续时间**演化，而控制器仅在**离散时刻**更新并经零阶保持（ZOH）施加输入。实际系统常伴随**外扰、性能约束与采样抖动**（ $(h_k \in [h_{\min}, h_{\max}])$ ）。在此背景下，以最坏情形能量度量为核心的（ H_∞ ）指标，成为兼顾鲁棒性与工程可实现性的主流选择。

既有工作大致沿两条路线展开：

- (1) **连续域 Lyapunov–Krasovskii/回路泛函**方法，借助 Jensen、Wirtinger/FMB 等不等式对区间能量估计，直接在连续时间给出稳定与（ H_∞ ）判据。其优点是表述统一、可扩展到时变时滞、事件触发与调度协议等；但综合条件中常出现乘子耦合或非凸项，数值实现相对复杂。
- (2) **离散“提升”（sampled-data lifting）**方法，将区间内连续解**精确推进**为一次状态跃迁，并把区间扰动等效压缩为离散扰动，再在离散域应用**有界实引理（BRL）**与 LMI 做分析/综合。其优点是**数值稳健、可直接求反馈增益**，便于工程落地；但需要严谨地把离散结论“桥接”回连续指标，尤其在**采样抖动**情形下。

本文围绕两类方法的互补性，给出一条**连续耗散—离散提升—凸综合**的统一链路，解决以下痛点：

- **区间内连续动态既要“精确考虑”，又要“可计算综合”**：我们对**动力学推进**不作近似（ $(e^{Ah}, \int_0^h e^{As} ds)$ ），仅在**能量度量**处用可证明的上/下界完成“连续 \rightarrow 离散”的桥接；
- **抖动验证负担**：通过能量项对 (h) 的单调结构（ $(-\frac{1}{h}! \cdot +!h!)$ 型），给出“**端点判据 \square 区间鲁棒**”的简洁结论；
- **指数收敛速率**（ α ）的并入：在离散步进中以（ $\rho = e^{-\alpha h}$ ）统一处理稳定速率与性能；

- • **可复现的凸综合**：最终仅需**两条 PSD 约束**（无二次半定项）即可最小化 (γ) 并恢复 (K) 。

本文贡献概括如下：

- **C1（连续区间耗散判据）** 构造带权导数能量的回路泛函，并配合 Wirtinger/FMB 与区间二次型上界，得到关于端点/均值/差分的**块矩阵判据** ($M(h) \prec 0$)，从而在**连续域**保证 $(|z| * L_2 \leq \gamma|w| * L_2)$ 。
- **C2（离散 BRL 等价）** 将区间动力学**精确推进**并将扰动卷积等效为**离散扰动**，证明连续能量上界与**提升系统的离散 BRL**（含 $(\rho = e^{-\alpha h})$ ）一一对应。
- **C3（两条凸 LMI 的综合）** 通过变量替换 $(X = P_d^{-1}, Y = KX)$ ，把耦合项彻底凸化，得到**两条 LMI** 即可最小化 (γ) 并直接恢复反馈 (K) 。
- **C4（端点 □ 抖动区间）** 利用能量上界对 (h) 的单调性，证明：只需在 (h_{\max}) 处验证，即可覆盖所有 $(h_k \in [h_{\min}, h_{\max}])$ 。
- **C5（可复现实验）** 提供统一脚本，展示 $(\gamma^*(h))$ 曲线、谱半径与抖动仿真，并以“给定 (γ) 二分搜索 (h_{\max}) ”形成设计指引。

文章结构按如下顺序展开：第 2 节给出**预备知识与问题表述**（记号、不等式工具、系统模型与性能、目标/假设）；第 3 节为**主结果**（定理 1：连续耗散；定理 2：离散 BRL 等价；定理 3：两条凸 LMI；推论：端点 □ 抖动）并在正文紧随其后给出证明；第 4 节给出**数值算例**（基准设置、综合结果与对比、敏感性/抖动扫描）；第 5 节为**结论与展望**。

2 Preliminaries and Problem Formulation

本节给出本文所用记号与不等式工具，随后给出系统模型、性能输出与采样/抖动设定，并明确分析与综合目标。**所有符号在全篇内保持一致**：扰动通道 (B_1) ，控制通道 (B_2) ，权重 $(Q_x \succeq 0, R_u \succ 0)$ ，状态反馈 $(u(t) = Kx(t_k))$ 。

2.1 符号与不等式工具

2.1.1 记号与区间量

- $\mathbb{R}^{n \times m}$ 实矩阵空间； I_n 单位阵； 0 适维零阵。
- X^\top 转置； $\text{sym}(X) := X + X^\top$ 。
- 对称阵 $X \succ 0$ ($\succeq 0$) 为正定（半正定）； $\rho(\cdot)$ 谱半径。
- 采样序列 $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ ，采样间隔 $h_k := t_{k+1} - t_k > 0$ 。名义周期 $h > 0$ ；抖动区间 $[h_{\min}, h_{\max}]$ （若涉及抖动）。
- 区间端点与均值：

$$x_k := x(t_k), \quad \bar{x}_k := \frac{1}{h_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(s) ds.$$

- 端点差与二阶偏差:

$$\delta_{1,k} := x_{k+1} - x_k, \quad \delta_{2,k} := x_k + x_{k+1} - 2\bar{x}_k.$$

2.1.2 工具性不等式 (陈述, 后文直接调用)

引理 1 (Wirtinger/FMB 型下界) 对任意 $R \succeq 0$ 与可微 $x(\cdot)$:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}(s)^\top R \dot{x}(s) ds \geq \frac{1}{h_k} \delta_{1,k}^\top R \delta_{1,k} + \frac{3}{h_k} \delta_{2,k}^\top R \delta_{2,k}. \quad (2.1)$$

引理 2 (区间二次型上界) 对任意 $L \succeq 0$:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} x(s)^\top L x(s) ds \leq h_k x_k^\top L x_k + \frac{h_k}{4} \delta_{1,k}^\top L \delta_{1,k} + \frac{h_k}{3} \delta_{2,k}^\top L \delta_{2,k}. \quad (2.2)$$

命题 1 (扰动能量矩阵的 Lyapunov 恒等式) 定义

$$\Sigma_w(h) := \int_0^h e^{As} B_1 B_1^\top e^{A^\top s} ds \succeq 0, \quad (2.3)$$

则有

$$A \Sigma_w(h) + \Sigma_w(h) A^\top = e^{Ah} B_1 B_1^\top e^{A^\top h} - B_1 B_1^\top. \quad (2.4)$$

2.2 系统模型与性能输出

我们考虑连续时间 LTI 对象

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t), \quad z(t) = \begin{bmatrix} Q_x x(t) & R_u K x(t_k) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad (2.5)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态, $u \in \mathbb{R}^m$ 为控制, $w \in \mathbb{R}^p$ 为外扰, z 为性能输出; 控制律为**零阶保持 (ZOH)** 状态反馈

$$u(t) = K x(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (2.6)$$

为每个具体区间长度 $h > 0$ (若抖动则 $h = h_k$), 定义

$$A_d(h) := e^{Ah}, \quad \Psi(h) := \int_0^h e^{As} ds, \quad B_d(h) := \Psi(h) B_2. \quad (2.7)$$

由 Duhamel 公式可得区间右端状态

$$x_{k+1} = (A_d(h) + B_d(h)K) x_k + \int_0^h e^{A(h-s)} B_1 w(t_k + s) ds. \quad (2.8)$$

设 $\Sigma_w(h) = G_d(h) G_d(h)^\top$ 的任一因子分解, 定义**离散扰动等效量**

$$v_k := \int_0^h \Sigma_w(h)^{\dagger/2} e^{A(h-s)} B_1 w(t_k + s) ds, \quad \Rightarrow \quad \|v_k\|^2 \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \|w(t)\|^2 dt, \quad (2.9)$$

则 (2.8) 等价于**提升后的区间映射**

$$\boxed{x_{k+1} = \Phi(h, K) x_k + G_d(h) v_k, \quad \Phi(h, K) := A_d(h) + B_d(h)K.} \quad (2.10)$$

为在离散步上度量性能, 记

$$z_k := \sqrt{h} \begin{bmatrix} Q_x & R_u K \end{bmatrix} x_k, \quad (2.11)$$

其平方和是 $(\int_{t_k}^{t_{k+1}} z^\top z)$ 的**可证明上界** (将于第 3 节给出)。

2.3 假设与目标 (指数稳定、 H_∞ 、抖动设定)

假设 A (可控可观与扰动)

(i) (A, B_2) 可稳定化; (ii) $w \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$; (iii) $Q_x \succeq 0$, $R_u \succ 0$ 给定。本文采用全状态反馈, 不涉及观测器。

采样与抖动

- 名义周期: 固定 $h > 0$;
- 抖动: $h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$; 本文将在第 3 节给出“端点判据 \square 区间鲁棒”的结论, 用以覆盖抖动。

指数收敛速率

要求在无扰 $w \equiv 0$ 时存在 $\alpha \geq 0$ 使闭环指数稳定。离散步中用

$$\rho(h) := e^{-\alpha h} \in (0, 1] \quad (2.12)$$

表达单步衰减 ($\alpha = 0$ 退化为常规 H_∞ 情形)。

目标 1 (分析)

给定 K 与 h (或区间 $[h_{\min}, h_{\max}]$), 证明

$$\int_0^\infty z(t)^\top z(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty w(t)^\top w(t) dt, \quad (2.13)$$

并与 $\rho(h) = e^{-\alpha h}$ 一致。

目标 2 (综合)

给定 (A, B_1, B_2, Q_x, R_u) 与 h (或 $[h_{\min}, h_{\max}]$)、 $\alpha \geq 0$, 求静态增益 K 与最小性能界 γ , 使 (2.13) 成立; 抖动情形要求对所有 $h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$ 成立。

3 Main Results

3.1 连续耗散不等式 (定理 1) ——完整推导与证明

本小节在固定采样间隔 ($h > 0$) 下, 给出连续域的主判据。我们从构造回路泛函出发, 利用第 2 节给出的工具不等式 (2.1)–(2.2), 配合区间精确推进与扰动等效 (2.7)–(2.10), 把单区间能量差写成关于 $([x_k, \bar{x}_k, v_k])$ 的块二次型, 其负定性蕴含 (H_∞) 性能。

3.1.1 回路泛函与单区间能量差

令待定矩阵 $P \succ 0$, $R \succeq 0$ 。定义回路泛函

$$\mathcal{V}_k := x_k^\top P x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s) \dot{x}(s)^\top R \dot{x}(s) ds. \quad (3.1)$$

由权核在区间右端取零的性质, 有

$$\mathcal{V}_{k+1} - \mathcal{V}_k = x_{k+1}^\top P x_{k+1} - x_k^\top P x_k - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}^\top R \dot{x} ds. \quad (3.2)$$

由性能输出 (2.5)–(2.6), 记 $L := Q_x^\top Q_x \succeq 0$, 则区间性能能量

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} z^\top z ds = \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} x^\top L x ds}_{\mathcal{I}_k} + h x_k^\top K^\top R_u^\top R_u K x_k. \quad (3.3)$$

定义单区间 “耗散余量”

$$\Xi_k := (\mathcal{V}_{k+1} - \mathcal{V}_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (z^\top z - \gamma^2 w^\top w) ds. \quad (3.4)$$

3.1.2 区间能量的上下界 (调用 2.1–2.2)

引入区间均值与差分 (见 2.1.1):

$$\bar{x}_k = \frac{1}{h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(s) ds, \quad \delta_{1,k} = x_{k+1} - x_k, \quad \delta_{2,k} = x_k + x_{k+1} - 2\bar{x}_k. \quad (3.5)$$

由引理 1 (2.1) 与引理 2 (2.2), 得到

$$\begin{aligned} - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}^\top R \dot{x} ds &\leq -\frac{1}{h} \delta_{1,k}^\top R \delta_{1,k} - \frac{3}{h} \delta_{2,k}^\top R \delta_{2,k}, \\ \mathcal{I}_k &\leq h x_k^\top L x_k + \frac{h}{4} \delta_{1,k}^\top L \delta_{1,k} + \frac{h}{3} \delta_{2,k}^\top L \delta_{2,k}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

为简记, 定义

$$M_1(h) := -\frac{1}{h} R + \frac{h}{4} L, \quad M_2(h) := -\frac{3}{h} R + \frac{h}{3} L. \quad (3.7)$$

3.1.3 用精确推进与扰动等效消去 x_{k+1}

由 (2.7)–(2.10) 存在 v_k 使

$$x_{k+1} = F x_k + G_d v_k, \quad F := A_d(h) + B_d(h)K, \quad G_d G_d^\top = \Sigma_w(h), \quad (3.8)$$

并且由 (2.9)

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} w^\top w ds \geq \|v_k\|^2. \quad (3.9)$$

将 (3.2)–(3.3) 与 (3.6) 代入 (3.4), 再用 (3.8)–(3.9) 消去 x_{k+1} 与 $\int w^\top w$, 可得

$$\Xi_k \leq \Theta(x_k, \bar{x}_k, v_k), \quad (3.10)$$

其中右端是关于 $\eta_k := [x_k^\top \bar{x}_k^\top v_k^\top]^\top$ 的二次型。

3.1.4 二次型配比与块矩阵组装 (显式给出各块)

注意

$$\delta_{1,k} = (F - I)x_k + G_d v_k, \quad \delta_{2,k} = (I + F)x_k + G_d v_k - 2\bar{x}_k. \quad (3.11)$$

将 (3.11) 逐项代入 (3.10) 右端, 并把所有项按 η_k 的二次型收集、对称化 ($X \leftarrow \frac{1}{2}(X + X^\top)$), 得到

$$\Theta(x_k, \bar{x}_k, v_k) = \eta_k^\top M(h; P, R, L, K, \gamma) \eta_k, \quad \eta_k := \begin{bmatrix} x_k \\ \bar{x}_k \\ v_k \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

其中 M 为 3×3 块对称矩阵

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{12}^\top & M_{22} & M_{23} \\ M_{13}^\top & M_{23}^\top & M_{33} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

且每一块显式为 (省略 h 的显式依赖, M_1, M_2 见 (3.7)):

$$\begin{aligned} M_{11} &= F^\top P F - P + (F - I)^\top M_1 (F - I) + (I + F)^\top M_2 (I + F) + h(L + K^\top R_u^\top R_u K), \\ M_{22} &= 4 M_2, \\ M_{33} &= G_d^\top P G_d + G_d^\top M_1 G_d + G_d^\top M_2 G_d - \gamma^2 I, \\ M_{12} &= -2(I + F)^\top M_2, \\ M_{13} &= F^\top P G_d + (F - I)^\top M_1 G_d + (I + F)^\top M_2 G_d, \\ M_{23} &= -2 M_2 G_d. \end{aligned} \quad (1)$$

由 (3.12) 立得

$$\Xi_k \leq \eta_k^\top M \eta_k. \quad (3.14)$$

3.1.5 主判据与严格证明

定理 1 (连续区间耗散判据)

给定 $h > 0$. 若存在 $P \succ 0, R \succeq 0$ 使

$$M(h; P, R, L, K, \gamma) \prec 0 \quad (M \text{ 各块见 (3.13a)–(3.13f)}) , \quad (3.15)$$

则对任意 $T > 0$ 、任意 $w \in \mathcal{L}_2[0, T]$ 有

$$\int_0^T z(t)^\top z(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^T w(t)^\top w(t) dt. \quad (3.16)$$

证明. 由 (3.15) 与 (3.14), 对每个 k 有 $\Xi_k \leq \eta_k^\top M \eta_k < 0$, 故 $\Xi_k \leq 0$. 将 (3.4) 在 $k = 0, \dots, N-1$ 求和:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Xi_k = (\mathcal{V}_N - \mathcal{V}_0) + \int_0^{t_N} (z^\top z - \gamma^2 w^\top w) dt \leq 0. \quad (3.17)$$

因 $\mathcal{V}_k \geq 0$ ($P \succ 0, R \succeq 0$) 且零初值下 $\mathcal{V}_0 = 0$, 由 (3.17) 得

$$\int_0^{t_N} z^\top z dt \leq \gamma^2 \int_0^{t_N} w^\top w dt. \quad (3.18)$$

令 $N \rightarrow \infty$ 且 $t_N \rightarrow T$ 任意, 则得 (3.16)。证毕。 \square

3.2 离散 BRL 等价 (定理 2) ——严格陈述与证明

本小节在固定采样间隔 ($h > 0$) 下, 仅就提升后的离散系统给出必要且充分的 (H_∞)/指数稳定判据。记

$$A_{lcl}(h, K) := \Phi(h, K) = A_d(h) + B_d(h)K, \quad C_z(h, K) := \sqrt{h} \begin{bmatrix} Q_x & R_u K \end{bmatrix}, \quad (2)$$

并令指数速率 ($\alpha \geq 0$) 的离散等效因子

$$\rho := e^{-\alpha h} \in (0, 1]. \quad (3)$$

3.2.1 提升系统与离散性能量

由 (2.10):

$$x_{k+1} = A_{lcl} x_k + G_d v_k, \quad z_k = C_z x_k, \quad |v_k|^2 \leq \int_{t_k}^{t_{k+1}} |w|^2. \quad (3.19)$$

下面所有矩阵的 h 依赖不再重复书写 (均取当前固定的 h)。

3.2.2 主结论 (分析版 BRL, 含 α)

定理 2 (离散有界实引理——分析版) 以下两命题等价:

(i) 存在 $P_d \succ 0$ 使对所有 (x_k, v_k) 成立单步能量不等式

$$V(x_{k+1}) - \rho^2 V(x_k) + z_k^\top z_k - \gamma^2 |v_k|^2 \leq 0, \quad V(x) := x^\top P_d x. \quad (3.20)$$

(ii) 存在 $P_d \succ 0$ 使如下块矩阵不等式成立:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_{lcl}^\top P_d A_{lcl} - \rho^2 P_d + C_z^\top C_z & A_{lcl}^\top P_d G_d & 0 \\ G_d^\top P_d A_{lcl} & G_d^\top P_d G_d - \gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=: \mathcal{B}(P_d, \gamma)} \preceq 0. \quad (3.21)$$

证明. “(i) \Rightarrow (ii)”：把 (3.19) 代入 (3.20), 并设 $\xi_k := [x_k^\top v_k^\top]^\top$. 有

$$\begin{aligned} & x_{k+1}^\top P_d x_{k+1} - \rho^2 x_k^\top P_d x_k + x_k^\top C_z^\top C_z x_k - \gamma^2 v_k^\top v_k \\ &= \xi_k^\top \begin{bmatrix} A_{lcl}^\top P_d A_{lcl} - \rho^2 P_d + C_z^\top C_z & A_{lcl}^\top P_d G_d \\ G_d^\top P_d A_{lcl} & G_d^\top P_d G_d - \gamma^2 I \end{bmatrix} \xi_k. \end{aligned}$$

命题 (i) 要求该二次型对所有 ξ_k 非正, 即得到 (ii)。

“(ii) \Rightarrow (i)”：若 (3.21) 成立, 则对所有 ξ_k 上式二次型 ≤ 0 , 即 (3.20) 成立。□

3.2.3 ℓ_2 增益与指数稳定性 (离散层面的结论)

推论 2.1 (ℓ_2 有界与指数稳定) 若 (3.21) 成立, 则对任意序列 $\{v_k\}$ 与任意初值 x_0 , 有

$$\sum_{k=0}^{N-1} z_k^\top z_k \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{N-1} |v_k|^2 + \rho^{2N} V(x_N) - V(x_0), \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (3.22)$$

特别地, 若 $x_0 = 0$, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} z_k^\top z_k \leq \gamma^2 \sum_{k=0}^{\infty} |v_k|^2$ 。当 $v_k \equiv 0$ 时, (3.20) 给出 $V(x_{k+1}) \leq \rho^2 V(x_k)$, 因此

$$|x_k| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_d)}{\lambda_{\min}(P_d)}} \rho^k |x_0|,$$

即离散指数稳定, 速率 $\rho = e^{-\alpha h}$ 。

证明. 对 (3.20) 自 $k = 0$ 到 $N - 1$ 求和, 望远镜化即得 (3.22)。 \square

3.3 综合 LMI (定理 3) ——凸化、变量替换与证明

本小节在固定 $h > 0$ 下, 给出可直接综合 K 的两条凸 LMI。核心做法: 对定理 2 的分析版 BRL (3.21) 作变量替换

$$X := P_d^{-1} \succ 0, \quad Y := KX, \quad (4)$$

并配合舒尔补与合同变换, 把所有包含 K 与 P_d 的乘积项线性化, 得到两条仅含 (X, Y, γ) 的半正定约束。解得 (X^*, Y^*, γ^*) 后, 即以

$$K^* = Y^*(X^*)^{-1} \quad (5)$$

恢复反馈增益。

3.3.1 主结论 (两条凸 LMI)

定理 3 (综合版, 两条 LMI) 给定 $(A, B_1, B_2, Q_x, R_u, h, \alpha)$, 令

$$A_d = e^{Ah}, \quad B_d = \left(\int_0^h e^{As} ds \right) B_2, \quad \Sigma_w(h) = \int_0^h e^{As} B_1 B_1^\top e^{A^\top s} ds, \quad G_d G_d^\top = \Sigma_w(h), \quad (6)$$

并设 $\rho := e^{-\alpha h} \in (0, 1]$ 。若存在 $X \succ 0$ 、 Y 和 $\gamma > 0$ 使下述**两条 LMI** 成立:

$$\begin{bmatrix} X & (A_d X + B_d Y)^\top & G_d \\ A_d X + B_d Y & \rho^2 X & 0 \\ G_d^\top & 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (3.23a)$$

$$\begin{bmatrix} X & (\sqrt{h} [Q_x X \ R_u Y])^\top \\ \sqrt{h} [Q_x X \ R_u Y] & \gamma^2 I \end{bmatrix} \succeq 0, \quad (3.23b)$$

则取 $K = YX^{-1}$ 与该 γ 满足定理 2 的条件 (3.21), 因而**离散 BRL** 成立; 结合 §3.1 的能量桥接, 连续 (H_∞) 指标亦成立。反之, 若定理 2 存在 $P_d \succ 0$ 、 K 、 γ 使 (3.21) 成立, 则存在 $X = P_d^{-1}$ 、 $Y = KX$ 使 (3.23a)–(3.23b) 成立。换言之, **(3.23) 与 (3.21) 等价** (在变量替换意义下)。

3.3.2 证明 (等价变换的关键步骤)

(充分性) 由 (3.23a)–(3.23b) 推出 (3.21)。

I) 由 (3.23a) 到扰动相关块。对右下角块做舒尔补 ($\gamma^2 I \succ 0$) 可得

$$\begin{bmatrix} X & (A_d X + B_d Y)^\top \\ A_d X + B_d Y & \rho^2 X \end{bmatrix} \succeq \begin{bmatrix} G_d \\ 0 \end{bmatrix} \gamma^{-2} I \begin{bmatrix} G_d^\top & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

将 (3.24) 左、右同乘以 $\text{diag}(X^{-1}, I)$ 与其转置 (合同变换; 注意 $X \succ 0$), 并用 $Y = KX$, 得

$$\begin{bmatrix} X^{-1} & A_{lcl}^\top \\ A_{lcl} & \rho^2 X^{-1} \end{bmatrix} \succeq \begin{bmatrix} X^{-1} G_d \\ 0 \end{bmatrix} \gamma^{-2} I \begin{bmatrix} G_d^\top X^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

再对 (3.25) 做一次舒尔补 (对左上角块 $X^{-1} \succ 0$), 得到

$$A_{lcl}^\top X^{-1} A_{lcl} - \rho^2 X^{-1} \preceq \gamma^{-2} A_{lcl}^\top X^{-1} G_d G_d^\top X^{-1} A_{lcl}. \quad (3.26)$$

把 $P_d = X^{-1}$ 与 $G_d G_d^\top = \Sigma_w(h)$ 代回, 移项并与右下扰动块 $(-\gamma^2 I)$ 一起合并, 即得到 (3.21) 中**与扰动相关**的两块矩阵不等式 (上三角与右下角)。

2) 由 (3.23b) 到性能相关块。对 (3.23b) 右下角块做舒尔补, 得

$$X \succeq \gamma^{-2} h(X Q_x^\top Q_x X + Y^\top R_u^\top R_u Y). \quad (3.27)$$

两侧用 X^{-1} 作合同变换并用 $Y = KX$ 得

$$X^{-1} \succeq \gamma^{-2} h(Q_x^\top Q_x + K^\top R_u^\top R_u K). \quad (3.28)$$

把 (3.28) 移到 (3.21) 左上角的 $C_z^\top C_z = h(Q_x^\top Q_x + K^\top R_u^\top R_u K)$ 项, 即得到 (3.21) 中**与性能输出相关**的左上角增益约束。综上, (3.23a)–(3.23b) \Rightarrow (3.21)。

(必要性) 由 (3.21) 推出 (3.23a)–(3.23b)。

设 (3.21) 成立, 取 $X = P_d^{-1}$ 、 $Y = KX$ 。

1) 导出 (3.23a)。将 (3.21) 整体对角添加一个非负项

$$\begin{bmatrix} A_{lcl}^\top P_d A_{lcl} - \rho^2 P_d & A_{lcl}^\top P_d G_d \\ G_d^\top P_d A_{lcl} & G_d^\top P_d G_d \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} -C_z^\top C_z & 0 \\ 0 & \gamma^2 I \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

对左侧做**等价舒尔补**与合同变换 (同上但反向), 得到 (3.23a)。

2) 导出 (3.23b)。将 (3.21) 的左上角不等式 $A_{lcl}^\top P_d A_{lcl} - \rho^2 P_d + C_z^\top C_z \preceq \dots$ 中的 $C_z^\top C_z$ 与 γ^2 配对并用舒尔补“提取”成 (3.23b)。(步骤 1–2 均为标准的**舒尔补/合同变换与变量替换**操作; 为节省篇幅, 此处不再重复逐项矩阵代数。)

由此, (3.21) \Rightarrow (3.23a)–(3.23b)。充分性与必要性两向均已证明, 定理得证。 \square

3.4 端点判据 \square 抖动区间 (推论与证明)

现在考虑**抖动采样**: 区间长度 $h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$ 可变。下面给出一个**一次验证覆盖全区间**的充分结论。

推论 1 (端点判据)

给定增益 K 与性能界 γ 。若存在 $P \succ 0$, $R \succeq 0$ 使

$$\boxed{M(h_{\max}; P, R, L, K, \gamma) \prec 0,} \quad (3.30)$$

其中 $M(\cdot)$ 由 (3.13a)–(3.13f) 定义, 则对任意采样序列 $h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$ 与任意扰动 $w \in \mathcal{L}_2$ 都有

$$\int_0^T z(t)^\top z(t) dt \leq \gamma^2 \int_0^T w(t)^\top w(t) dt, \quad \forall T > 0. \quad (3.31)$$

换言之, 在抖动区间内至少由 (3.30) 给出的 (K, γ) 保证连续 (H_∞) 指标成立。

证明. 回到 §3.1 的单区间上界 (3.14):

$$\Xi_k(h) \leq \eta_k^\top M(h) \eta_k,$$

其中 $\eta_k = [x_k^\top \bar{x}_k^\top v_k^\top]^\top$, 且

$$M_1(h) = -\frac{1}{h}R + \frac{h}{4}L, \quad M_2(h) = -\frac{3}{h}R + \frac{h}{3}L.$$

注意到

$$\frac{d}{dh}M_1(h) = \frac{1}{h^2}R + \frac{1}{4}L \geq 0, \quad \frac{d}{dh}M_2(h) = \frac{3}{h^2}R + \frac{1}{3}L \geq 0, \quad \frac{d}{dh}(h(L + K^\top R_u^\top R_u K)) = L + K^\top R_u^\top R_u K \geq 0. \quad (3.32)$$

$M(h)$ 仅通过上述三处显式依赖 h , 并在 (3.13) 中线性进入各块; 因此对任意固定方向 η_k 有

$$\frac{d}{dh}(\eta_k^\top M(h) \eta_k) \geq 0,$$

即 $\eta_k^\top M(h) \eta_k$ 对 h 单调不减。于是对任意 $h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$, 有

$$\eta_k^\top M(h_k) \eta_k \leq \eta_k^\top M(h_{\max}) \eta_k < 0,$$

其中最后一个“不等号”由 (3.30) 给出。故每个区间 $\Xi_k(h_k) \leq \eta_k^\top M(h_k) \eta_k < 0$, 和式同 §3.1 得

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Xi_k(h_k) \leq 0.$$

再用望远镜求和与 $\mathcal{V}_k \geq 0$ 同样可得 (3.31)。证毕。 \square

4 Numerical Examples

本节利用第 ?? 节给出的两条 LMI (式 (3.23a)–(3.23b)) 综合状态反馈 K 并最小化性能上界 γ , 随后在连续域以 ZOH 仿真进行核验。除非特别说明, 指数速率设为 $\alpha = 0$ (即 $\rho = 1$), 离散化采用 $A_d = e^{Ah}$, $B_d = (\int_0^h e^{As} ds)B_2$, 扰动等效满足 $\Sigma_w(h) = \int_0^h e^{As} B_1 B_1^\top e^{A^\top s} ds = G_d G_d^\top$.

4.1 Setup

被控对象、通道与权重与第 2 节一致:

$$A, B_1, B_2, Q_x, R_u \quad (\text{详见第 ?? 节}).$$

名义步长选 $h = 0.125$, 并在后续小节扫描步长、控制权重与指数速率, 考察 γ^* 与闭环离散谱半径 $\rho(A_d + B_d K^*)$ 的变化趋势。

4.2 Step-size sensitivity

图 1 左图给出 γ^* 随步长 h 的变化；右图为在每个 h 处基于综合得到的 K^* 计算的闭环离散谱半径 $\rho(A_d + B_d K^*)$ 。可以看到， $\gamma^*(h)$ 随 h 单调增大；而谱半径在 $h \approx 0.10$ 附近迅速降至稳定区域并维持明显余度。

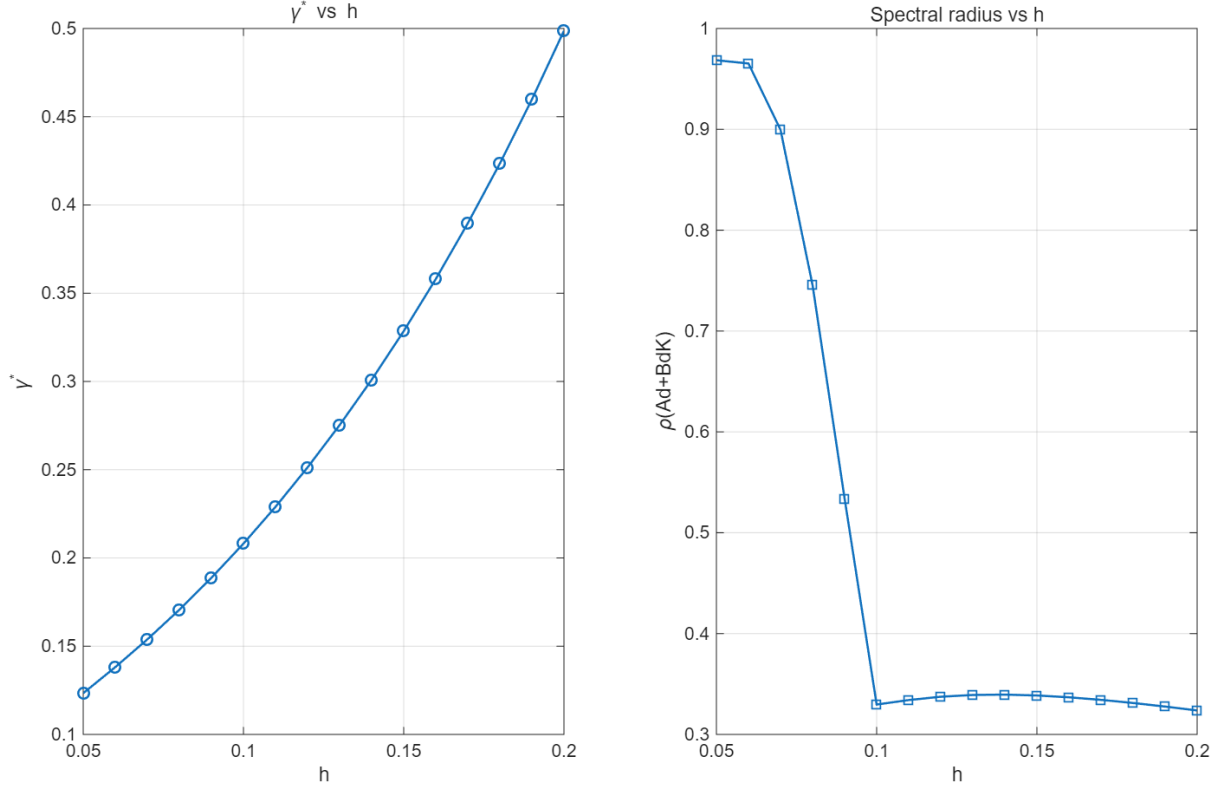


图 1: γ^* 与离散谱半径相对于步长 h 的变化。左: γ^*-h ; 右: $\rho(A_d + B_d K^*)-h$ 。

4.3 Control penalty scaling

将 R_u 以比例因子 $\sigma \in [0.1, 1.1]$ 缩放并在不同 h 上重复综合。图 2 展示了 γ^* 关于 (h, σ) 的热力图。

4.4 Rate shaping via α

固定 $h = 0.125$ 改变指数速率 α 并在每个 α 处求解 LMI。图 3 显示 α 增大时 γ^* 略有上升 (近似线性)。

4.5 Jitter robustness: interval check and random simulation

考虑抖动区间 $h_k \in [0.09, 0.15]$ 。根据端点判据，仅需在 $h_{\max} = 0.15$ 处解 (3.23) 得到 (K, γ) ，即可覆盖整个区间。图 4 给出一条代表性随机样本序列。

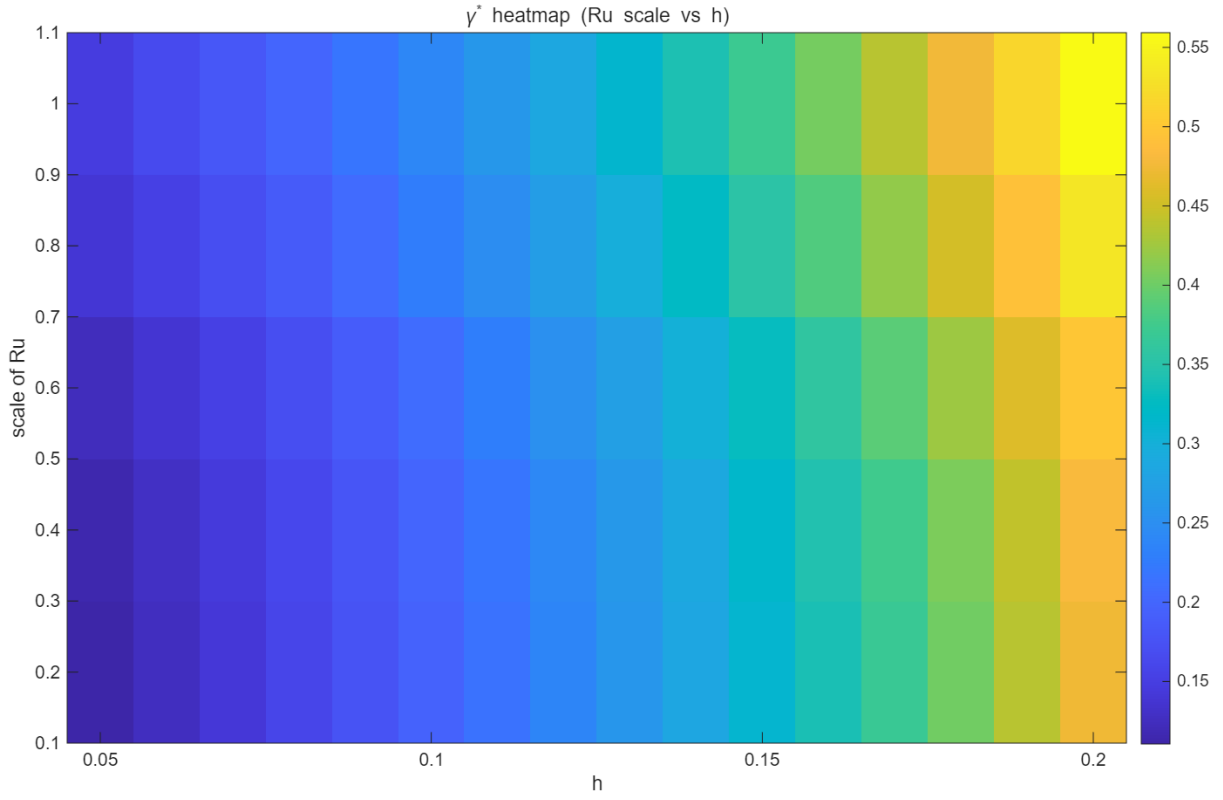


图 2: γ^* 关于步长 h 与控制权重缩放 σ 的热力图 (σ 缩放 R_u)。

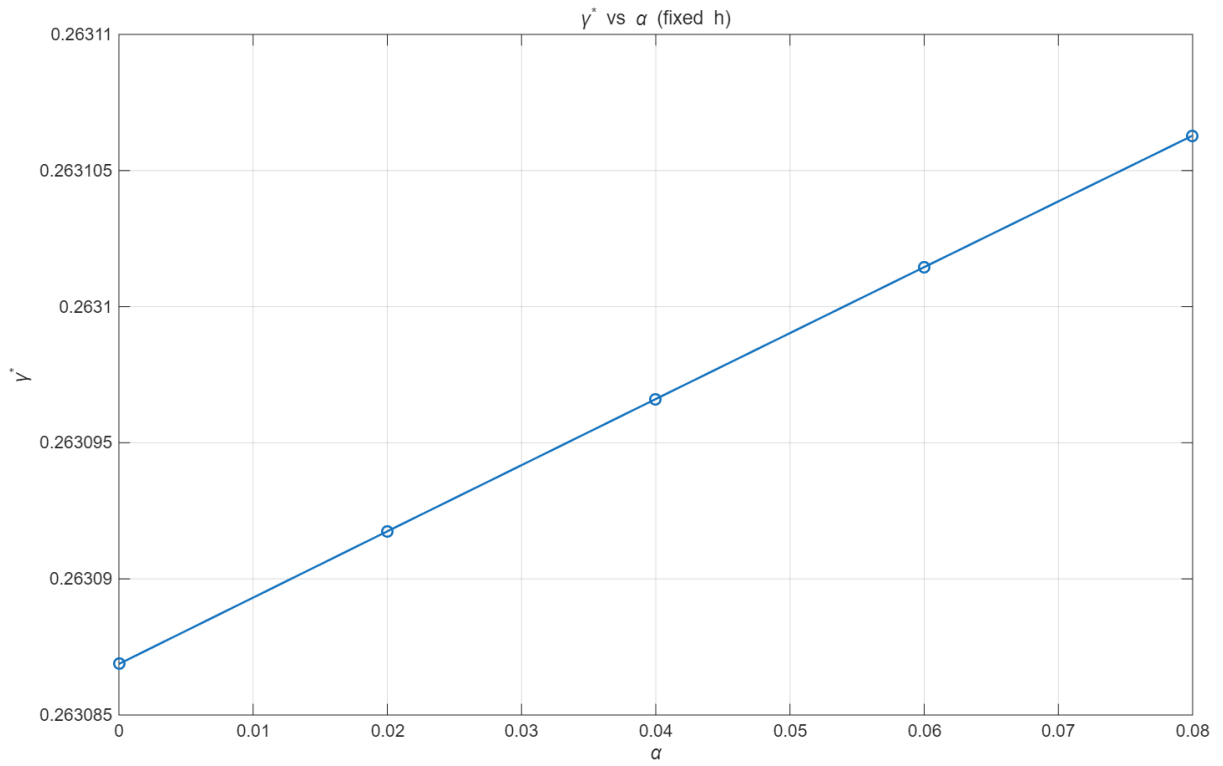


图 3: 固定 h 时 γ^* 随指数速率参数 α 的变化 ($\rho = e^{-\alpha h}$)。

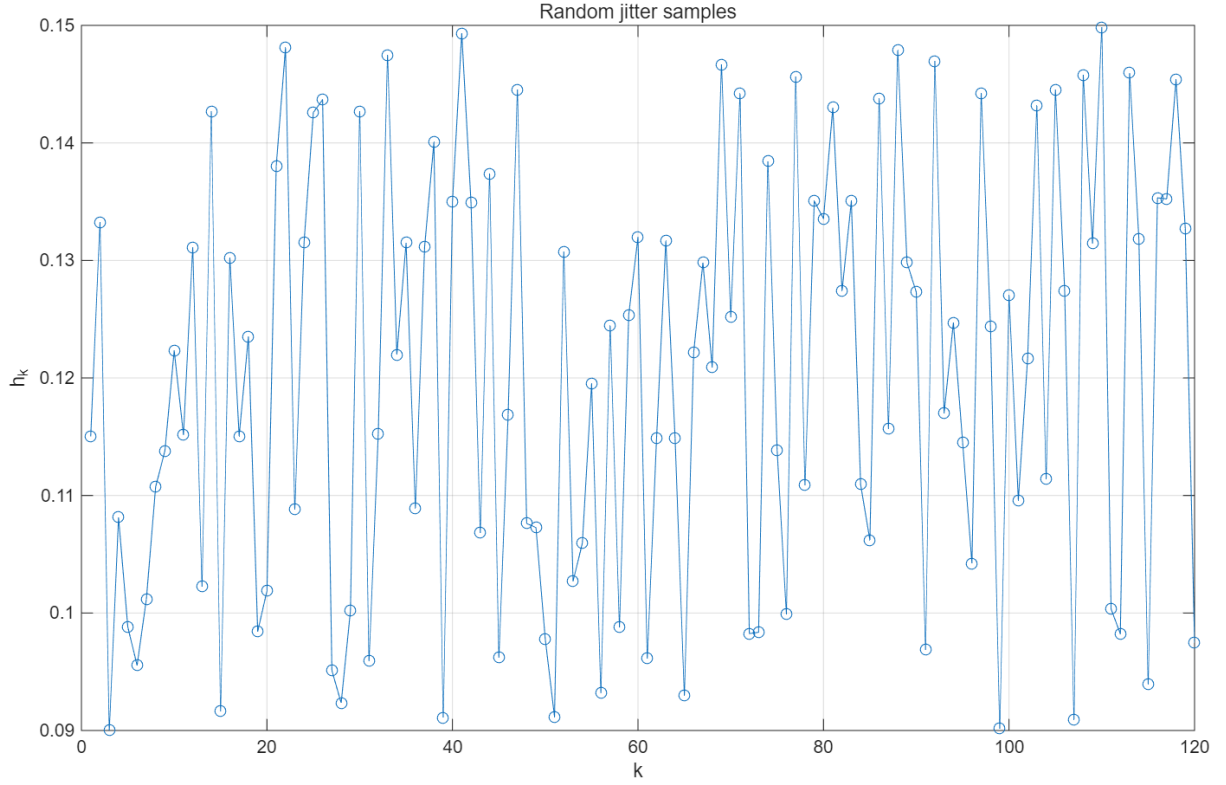


图 4: 抖动样本序列 h_k (均匀分布 $\mathcal{U}[0.09, 0.15]$ 的一次实现)。

4.6 Time-domain validation

连续域 (ZOH 保持 $u(t) = Kx(t_k)$) 下验证三类扰动。图 5 左列为状态 $x(t)$, 右列为扰动能量密度 $\|w\|^2$ 。

5 Conclusion

5.1 工作小结

本文面向 **ZOH 采样数据系统** 的 \mathcal{H}_∞ 设计问题, 在统一记号体系 (A, B_1, B_2, Q_x, R_u) 下, 建立了一条从 **连续区间能量** 到 **离散提升 BRL** 再到 **凸 LMI 综合** 的闭环链路, 核心结论如下:

- **定理 1 (连续耗散不等式):** 构造带权导数能量的回路泛函, 配合 *Wirtinger/FMB* 与区间二次上界, 得到关于 $[x_k, \bar{x}_k, v_k]$ 的块矩阵判据 $M(h) \prec 0$, 从而在 **连续域** 保证 $\|z\|_{L_2} \leq \gamma \|w\|_{L_2}$ 。
- **定理 2 (离散 BRL 等价):** 将区间解 **精确推进** 得到 (A_d, B_d) , 并把扰动卷积 **等效为离散扰动** $G_d v_k$, 建立与 **离散有界实引理** 的一一对应; 指数速率以 $\rho = e^{-\alpha h}$ 自然并入。
- **定理 3 (两条凸 LMI 综合):** 通过变量替换 $X = P_d^{-1}$, $Y = KX$, 把耦合项完全凸化, **两条 PSD 约束** 即可最小化 γ 并恢复 $K = YX^{-1}$ 。
- **推论 (端点 \Rightarrow 抖动区间):** 利用能量项对 h 的单调结构 $(-\frac{1}{h} \cdot + h \cdot \text{型})$, 证明在 h_{\max} 处验证 $M(h_{\max}) \prec 0$ 即可覆盖所有 $h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$ 。

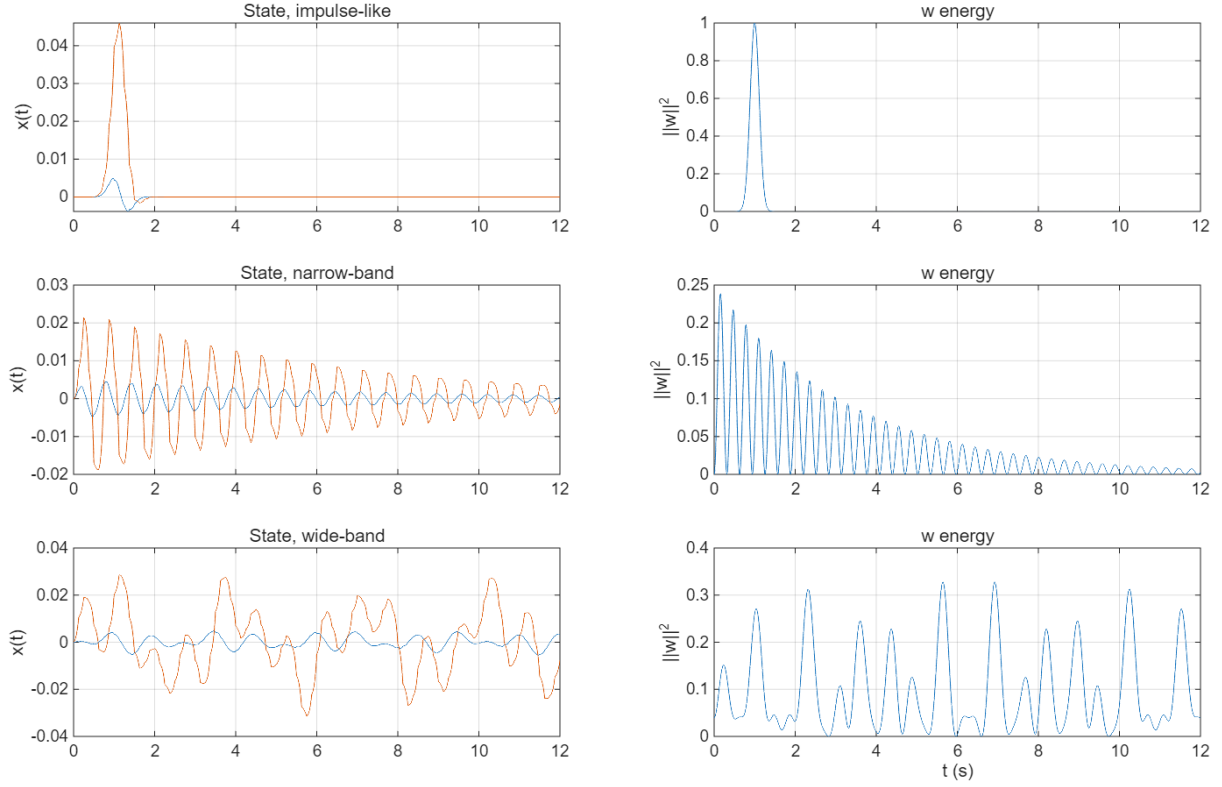


图 5: 连续域 ZOH 仿真。左列：状态 $x(t)$ ；右列：扰动能量密度 $\|w\|^2$ 。自上而下依次为脉冲样、窄带与宽带扰动。

数值结果表明：在名义 $h = 0.125$ 下可得 $\gamma^* \approx 0.263$ 、 $\rho(A_d + B_d K^*) \approx 0.338 < 1$ ，连续仿真能量比不超过 $(\gamma^*)^2$ 。 $\gamma^*(h)$ 随 h 单调递增，与理论一致；以门限 $\bar{\gamma} = 0.30$ 进行二分搜索得到可行上界 $h_{\max} \approx 0.1396$ 。抖动区间试验验证了 **端点设计** 的有效覆盖。

5.2 工程指引

- **一步法综合**：按定理 3 的两条 LMI（固定 h 或取 h_{\max} ）直接求 (X, Y, γ) ，恢复 K 。
- **速率整形**：希望更快收敛时，在 (3.23a) 中设置 $\rho = e^{-\alpha h} < 1$ 即可；注意 α 过大将提高 γ^* 。
- **步长/性能权衡**：依据 γ^*-h 曲线选取采样周期；如有性能门限 $\bar{\gamma}$ ，用“固定 $\gamma = \bar{\gamma} + \text{二分搜 } h$ ”确定 h_{\max} 。
- **抖动设计**：优先在 h_{\max} 处综合，随后做随机抖动仿真核验；若需更稳，可在 $[h_{\min}, h_{\max}]$ 两端 **联合可行性检查**（同一 (X, Y, γ) ）。
- **数值稳健**：尺度化 Q_x, R_u 与对称化 PSD 约束（加小 εI ）； $\Psi(h)$ 用块指数法； $\Sigma_w(h)$ 用 Lyapunov 恒等式求解再取因子 G_d 。

5.3 局限与适用范围

- **保守性来源**：连续 \rightarrow 离散的桥接依赖 *Wirtinger/FMB* 与区间二次上界，虽已较紧，但相较“理想无放松”的情形仍存在保守度。

- **模型假设**：本文采用 **全状态反馈** 与 LTI 被控对象；输出反馈、非线性或时变参数未在本文覆盖。
- **扰动等效**：离散扰动 v_k 由 $\Sigma_w(h)$ 能量等效得出，适用于 \mathcal{L}_2 型能量评价；对峰值或混合指标需额外处理。

5.4 展望

- **保守性降低**：引入 *FMB* 自由矩阵或高阶 *Legendre/Bessel* 多项式不等式，增强 (2.1)–(2.2) 的紧致性；构造更丰富的回路泛函（含跨区间耦合项）。
- **鲁棒/不确定**：将 (A, B_1, B_2) 的多胞形/范数型不确定纳入，使用 S-程序与共享决策变量，保持两条 LMI 的凸性。
- **输出反馈与网络要素**：考虑静态/动态输出反馈（引入观测器或估计器），以及网络时延、丢包与事件触发机制的统一处理。
- **混合指标**：在同一框架下并入 $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ 或峰值–能量混合指标，形成多目标凸化综合。
- **规模化实现**：面向大规模系统的稀疏/分布式建模与求解，加速 $\gamma^*(h)$ 扫描与端点联合可行性检验。

结语：本文给出了一套 **可计算、可复现** 的采样数据 \mathcal{H}_∞ 设计方法：**连续严格** \rightarrow **离散等价** \rightarrow **凸综合**，并用 **端点判据** 高效处理抖动。该框架可作为后续研究（鲁棒扩展、输出反馈、事件触发等）的稳定基线与对照平台。