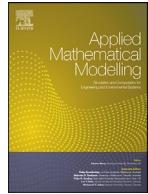


目录可在[ScienceDirect](#)查阅

# 应用数学建模

期刊主页: [www.elsevier.com/locate/apm](http://www.elsevier.com/locate/apm)



## 事件触发扩展耗散性对半马尔可夫切换系统的稳定化

吴文煌<sup>a</sup>, 何玲<sup>a</sup>, 严志廉<sup>b</sup>, 周建平<sup>a,\*</sup>

<sup>a</sup> 安徽工业大学计算机科学与技术学院, 安徽马鞍山243032

<sup>b</sup> 安徽工业大学电气与信息工程学院, 安徽马鞍山243032



Article

信息

### 摘要

文章历史:

2022年5月21日收到

修订于2023年1月30日

2023年1月31日接受

2023年2月7日在线发布

关键词:

半马尔可夫切换系统 随机稳定性

事件触发控制 扩展耗散性

本文关注具有外部扰动的不确定半马尔可夫切换系统的事件触发扩展耗散稳定性问题。其目的是通过事件触发控制确保半马尔可夫切换系统的随机稳定性与扩展耗散性。设计了一种模式和扰动依赖的切换式事件触发机制来确定触发时刻, 该机制相较于现有某些切换式事件触发机制可进一步减少触发事件数量。基于该机制, 构建了时间和模式依赖的分段定义李雅普诺夫泛函, 从而确立了随机稳定性与扩展耗散性的判定准则。继而运用矩阵不等式的等价变换, 提出反馈增益矩阵与事件触发矩阵的协同设计方案。最后通过直流电机模型与机械臂模型的实例验证, 证实所设计控制器的有效性。

© 2023 爱思唯尔公司。保留所有权利。

### 1. 引言

随机行为（如元件故障与修复）以及互连变化可能导致控制系统的结构或参数发生突变[1]。为描述、解释、预测并控制此类系统的状态演化趋势, 已开发出多种由线性或非线性微分方程建模的马尔可夫切换系统 (MSS) [2,3]。一般而言, MSS由一组相互连接的子系统构成, 这些子系统对应不同模式 (子系统), 并在连续或离散时间马尔可夫过程控制下实现模式切换。在任意两次连续随机切换间, 系统保持同一模式。因此, MSS已被广泛应用于诸多实际系统, 包括目标跟踪系统[4]、网络化控制系统[5]、轮式移动机械臂[6]及隧道二极管电路[7]。

在马尔可夫开关系统 (MSS) 中, 任意两次连续随机切换之间的持续时间 (亦称停留时间) 为随机变量, 在连续时间系统域中服从指数分布 (ED)。基于指数分布的无记忆特性, 其转移速率保持恒定。这意味着不同模式间的切换速率不依赖于马尔可夫过程的历史状态[8–11]。该特性在一定程度上限制了MSS的应用范围, 使其仅适用于建模具有恒定转换速率的随机系统。一种可行方案是采用半马尔可夫过程替代马尔可夫过程来刻画模式间的随机切换。如文献[12,13]所述, 停留时间

\* 通讯作者。

电子邮箱: [jzhou@ahut.edu.cn](mailto:jzhou@ahut.edu.cn) (周建军)。

在半马尔可夫过程中, 状态变换可遵循更一般的分布, 且对应的转移速率随时间变化, 这与马尔可夫过程形成鲜明对比。因此, 半马尔可夫切换系统 (semi-MSSs) 放宽了分布的无记忆限制, 其应用范围较马尔可夫切换系统 (MSSs) 更为广泛[14]。故对半马尔可夫切换系统的分析与控制具有重要的理论和实践意义。

实际的半微分系统会受到不同程度的外部干扰。这些扰动可能恶化系统性能, 甚至导致控制失效。为获得理想效果, 已将多种抗扰控制策略应用于半微分系统, 包括  $H_{(\cdot)}$  控制[15–17]、 $L_{(2)}-L_{(\cdot)}$  控制[18–20]及被动控制[21]。扩展的

[22]提出的扩展耗散性能指标具有综合性, 涵盖了  $H_{(\cdot)}$  控制、 $L_2-L_{(\cdot)}$  控制及被动性能等维度。

作为特例。因此, 近年来半马尔可夫开关多智能体系统的扩展耗散性控制引起了越来越多的关注

近年来受到越来越多的关注。在[23]中, 提出了一种基于线性矩阵不等式 (LMIs) 的非脆弱控制方法, 用于确保半马尔可夫切换多智能体系统的共识性和扩展耗散性。在[24]中, 针对具有不确定转移率的半马尔可夫切换神经网络, 提出了一种状态反馈扩展耗散性控制方法。在[25]中, 研究了一类具有时滞的奇异半马尔可夫切换多智能体系统, 并设计了抗干扰扩展耗散性控制器。

随着通信技术的发展, 事件触发控制 (ETC) 已成为控制领域备受瞩目的焦点, 因其能有效缓解通信信道过度占用问题[26]。仅当系统状态变化超过触发条件中设定的阈值时, 才会发送新测量值更新控制器数据。通过设置特定触发条件, ETC技术能在资源利用率提升与预期系统性能之间实现平衡。迄今已提出若干有意义的事件触发机制 (ETM), 包括连续ETM[27]、周期性ETM[28]及切换式

ETM (SETM) [29]。如[29]所示, 任何两个连续触发时刻之间的时间间隔均不小于预定义的正常数, 从而有效规避了所谓的芝诺现象。

此外, 与其他ETM相比, SETM能显著减少触发事件数量 (NTEs)。后续研究结果进一步证实了此类ETM的有效性与高效性[30–33]

。综上所述, 本文聚焦于基于开关ETC的半MSS系统扩展耗散稳定性问题, 主要贡献如下:

- (1) 提出一种新型事件触发矩阵 (SETM), 其阈值函数包含模式依赖的事件触发矩阵和扰动项, 用于确定触发矩。相较于现有SETM, 所提出的模式与扰动依赖型SETM (MDSETM) 在保持控制性能的同时, 能进一步降低非线性误差 (NTE)。
- (2) 通过应用时域与模态相关的分段定义李雅普诺夫泛函 (LF)、詹森不等式及广义丁金公式, 建立了闭环半微分系统 (semi-MSSs) 的随机稳定性与扩展耗散性判据。
- (3) 通过采用既定准则及矩阵不等式的等效变换, 解决了扩展耗散稳定性问题。基于线性矩阵不等式 (LMIs) 的可行解, 提出了反馈增益矩阵与事件触发矩阵的协同设计方案。

**符号说明:** 我们使用  $N^+ \cdot R^l$  及  $R^{l \times m}$  分别表示非负整数集、 $l$  维欧几里得空间以及  $l \times m$  实矩阵集。 $L_{(2)}[0, \infty)$  表示在区间  $[0, \infty)$  上具有平方可积性的向量函数空间。我们用  $\text{diag}\{\cdot\}$  表示对角矩阵, 用符号 \* 表示对称矩阵中可由对称特征推断出的项, 用  $\text{col}[z(1), z(2)]$  表示具有元素  $z(1)$  和  $z(2)$  的列向量。对于方阵  $Z$ , 我们用  $Z > 0$  表示  $Z$  是对称正定矩阵, 用  $Z \geq 0$  表示  $Z$  是半正定矩阵, 用  $S(Z)$  表示  $S(Z) = Z + Z^T$ 。此外, 我们用  $\|\cdot\|$  表示欧几里得向量范数, 并用  $E \cdot$  表示数学期望算子。

## 2. 引言

$$\|\cdot\| \quad \{\cdot\}$$

考虑以下含扰动的不确定半微分微分系统:

$$\begin{aligned} x(t) &= A^-(\zeta(t))x(t) + B(\zeta(t))u(t) + C(\zeta(t))o(t), \\ y(t) &= D(\zeta(t))x(t), \\ x(0) &= 0, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \end{aligned} \tag{1}$$

其中  $x(t) \in R^{n_a}$  为半微分微分系统状态;  $u(t) \in R^{n_b}$  为控制输入;  $y(t) \in R^{n_b}$  为输出;  $o(t) \in R^k$  表示外部扰动, 其属于  $L_2[0, \infty)$ ;  $A^-(\zeta(t)) = A(\zeta(t)) + \Delta A(\zeta(t))$ ,  $B(\zeta(t))$ ,  $C(\zeta(t))$ ,  $D(\zeta(t))$  为具有适当维度的系统参数矩阵;  $\Delta A(\zeta(t))$  表示系统不确定性;  $\{\zeta(t), t \geq 0\}$  是半马尔可夫过程, 其取值域为  $N^- = \{1, 2, \dots, N\}, N \in N(+)$ 。该过程的转移概率满足

$$\Pr[\zeta(t+\iota) = j | \zeta(t) = i] = \frac{\lambda_{ij}(\iota) + o(\iota)}{1 + \lambda_{ii}(\iota) + o(\iota)}, \quad i \neq j,$$

其中  $\iota > 0$  表示停留时间,  $o(\iota)$  表示  $\iota$  的高阶无穷小量, 满足  $\lim_{\iota \rightarrow 0} o(\iota)/\iota = 0$ , 且  $\lambda_{ij}(\iota)$

表示时刻  $t$  从模式  $i$  到模式  $j$  的转移速率, 满足  $\lambda_{ij}(\iota) > 0 (i \neq j)$  且  $\lambda_{ii}(\iota) = -\sum_{j=1, j \neq i}^N \lambda_{ij}(\iota)$  [34]。

**注1.** 式(1)中的半马尔可夫系统由一组连续时间子系统和遵循半马尔可夫过程的开关信号构成。电气与机械工程中许多复杂系统（如升压转换器电路[35]、直流电机[36,37]及机械臂[38]）均可建模为该类系统。半马尔可夫过程的转移率取决于停留时间，其普适性强于常规马尔可夫过程。因此，所研究的半马尔可夫系统具有广泛的应用潜力。

对于式(1)中的半微分可控系统，作出以下三个假设：**假设1.** [39] 参数对( $\Lambda^-(\zeta(t))$ ,

$B(\zeta(t))$ )可控。**假设2.** [40] 扰动可测。

**假设3.** [41,42] 参数不确定性满足

$$\Delta A(\zeta(t)) = E(\zeta(t))\Delta(t)F(\zeta(t)), \quad (2)$$

矩阵 $E(\zeta(t))$ 和 $F(\zeta(t))$ 已知；矩阵 $\Delta(t)$ 未知但满足 $\Delta^T(t)\Delta(t) \leq I$ 。

**注2.** 可控性作为控制系统的基础特性，关乎通过反馈控制实现可接受动态性能的能力。干扰量的可测性假设（多文献采用）将在后续ETM设计中发挥重要作用。参数不确定性假设为范数有界形式，较常规区间不确定形式[43]更具普适性。

半MSS (1) 的稳定性问题将在基于MDSETM控制的框架下进行讨论。该控制器在时间点

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t(s) < \dots, \lim_{s \rightarrow \infty} t(s) = \infty,$$

定义如下：

$$u(t) = B(\zeta(t))K(\zeta(t))x(t_s), t \in [t_s, t_{s+1}], s = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

确定触发时刻的事件触发条件如下：

$$t_{s+1} = \min\{t \geq t_s + d | (x(t) - x(t_s))^T \Lambda(\zeta(t))(x(t) - x(t_s)) \geq \sigma x^T(t) \Lambda(\zeta(t))x(t) + \delta o^T(t)o(t)\} \quad (4)$$

其中标量  $\sigma \geq 0, d > 0, \delta \geq 0$ ，且  $\Lambda(\zeta(t)) \geq 0$  为模态依赖型事件触发矩阵， $d$  表示最小采样周期。MDSETM 工作原理如下：假设控制器在时刻  $t_s$  接收到测量  $d$ ，则传感器将暂停发送测量值  $d$  秒。当时间  $t$  达到  $t_s + d$  时，传感器开始持续监测事件触发条件 (4)。若满足条件，则传感器将在触发时刻  $t_{(s+1)}$  发送新测量值更新控制器 (3)。如此，任意两个测量值之间的时间间隔连续触发的时刻间隔不小于  $d$ ，从而有效规避了芝诺现象。

在提出的MDSETM框架下，式(3)中的控制器可重构为

$$u(t) = \begin{cases} B(\zeta(t))K(\zeta(t))x(t - \vartheta(t)), & t \in [t_s, t_s + d], \\ B(\zeta(t))K(\zeta(t))[x(t) + e(t)], & t \in [t_s + d, t_{s+1}] \end{cases} \quad (5a)$$

$$B(\zeta(t))K(\zeta(t))[x(t) + e(t)], \quad (5b)$$

当  $\vartheta(t) = t - t_s \leq d$ ， $t \in [t_s, t_s + d]$  时， $e(t) = x(t_s) - x(t)$ ， $t \in [t_s + d, t_{s+1}]$ 。据此，我们能够将半MSS (1) 转换为以下切换系统：

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \Lambda^-(\zeta(t))x(t) + C(\zeta(t))o(t) + B(\zeta(t))K(\zeta(t))x(t - \vartheta(t)), & t \in [t_s, t_s + d], \\ \frac{1}{2} \Lambda^-(\zeta(t))x(t) + C(\zeta(t))o(t) + B(\zeta(t))K(\zeta(t))[x(t) + e(t)], & t \in [t_s + d, t_{s+1}] \end{cases} \quad (6a)$$

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \Lambda^-(\zeta(t))x(t) + C(\zeta(t))o(t) + B(\zeta(t))K(\zeta(t))[x(t) + e(t)], & t \in [t_s + d, t_{s+1}] \end{cases} \quad (6b)$$

令  $\zeta(t) = i \in N^-$ ，则  $A_i, B_i, C_i, D_i, \Delta A_i, E_i, F_i, \Lambda_i^-$  用于替代系统(1)中的矩阵，这有利于简化符号表示。

**备注3.** 在提出的MDSETM框架下，控制器允许在  $t \in [t_s, t_s + d]$  区间进行周期采样，并在  $t \in [t_s + d, t_{s+1}]$  区间实现连续事件触发，从而形成切换闭环系统(SCLS)。当  $\Lambda(\zeta(t)) = \Lambda$  时，事件触发矩阵与模式无关，此时MDSETM将简化为文献[44]中的SETM；若进一步限制  $\delta = 0$ ，阈值函数将与扰动无关，此时MDSETM将简化为文献[29]中的SETM。相较于

在[45]中的周期采样机制(PSM)和[29,44]中的SETMs基础上，通过在阈值函数中引入模态依赖的事件触发矩阵和扰动项，可在保持控制性能的同时进一步降低非线性误差(NTEs)，具体将在第4节中进行论证。

我们回顾以下两个概念和两个引理：

**定义1.** [46] 当  $o(t)=0$  时，若存在正标量  $M$  使得

$$E \int_0^\infty \|x(\mu)\|^2 d\mu \leq M. \quad (7)$$

**定义 2.** [22] 对于给定实矩阵  $\Upsilon_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ )，满足  $\Upsilon(1) \leq 0$ ,  $\Upsilon(2) > 0$ ,  $\Upsilon(3) > 0$ ,  $\Upsilon(4) \geq 0$  且  $(\|\Upsilon(1)\| + \|\Upsilon_2\|)/\|\Upsilon_4\| = 0$ ，假设在满足  $x(0) = 0$  的条件下，

$$\sup_{t \geq 0} \left\| E \int_0^t x^T(t) \Upsilon_4 x(t) dt \right\|^{\frac{1}{2}} \leq E \int_0^{\infty} J(\mu) d\mu \quad (8)$$

对任意  $t \geq 0$  成立，其中

$$J(t) = x^T(t) \Upsilon_1 x(t) + 2x^T(t) \Upsilon_2 o(t) + o^T(t) \Upsilon_3 o(t).$$

此时，半MSS (6) 被称为扩展耗散型。

**引理 1.** [47, 48] (詹森不等式) 对于任意  $l \times l$  维矩阵  $W > 0$ ，任意两个标量  $a_1$  和  $a_2$  满足  $a_2 > a_1$ ，以及向量函数  $\delta : [a_1, a_2] \rightarrow \mathbb{R}^l$ ，

$$\frac{1}{(a_2 - a_1)} \int_{a_1}^{a_2} \delta(\mu) d\mu W \leq \int_{a_1}^{a_2} \delta(\mu) d\mu \leq \int_{a_1}^{a_2} \delta(\mu) W \delta(\mu) d\mu$$

成立

。

**引理 2.** [49] 对于正则维数矩阵  $L_1$  ( $L^T = L_1$ )、 $L_2$ 、 $L_3$  以及  $\Delta(t)$  ( $\Delta^T(t) \Delta(t) \leq I$ )，

$$L_1 + S L_3 \Delta(t) L_2 < 0$$

当且仅当存在常数  $c > 0$  满足

$$L_1 + c^{-1} L_3 L_3^T + c L^T L_2 < 0.$$

**注4.** 扩展耗散性已在多种控制系统中得到广泛研究（参见[50–52]等文献），其内涵相当全面。事实上，通过设定  $\Upsilon(1) = -I$ ,  $\Upsilon(2) = 0$ ,  $\Upsilon(3) = \Upsilon(2) - L$ ,  $\Upsilon(4) = 0$  满足性能条件，式(8)中的扩展耗散性条件可转化为  $H$  性能条件。 $\Upsilon(1) = 0$  [15–17]，而通过设定  $\Upsilon(1) = 0$ ,  $\Upsilon(2) = 0$ ,  $\Upsilon(3) = \Upsilon(2)$ ,  $\Upsilon(4) = 0$  [18–20]，通过设定  $\Upsilon(1) = 0$ ,  $\Upsilon(2) = I$ ,  $\Upsilon(3) = I$ ,  $\Upsilon(4) = 0$  [21] 满足被动性能条件，同时通过设定  $\Delta(1) = Q$ ,  $\Delta(2) = S$ ,  $\Delta(3) = R - \gamma I$ ,  $\Delta(4) = 0$  [53]。

本文旨在通过采用提出的MDSETM方法，实现半MSS系统的扩展耗散稳定性。具体而言，我们将确定式(3)中的反馈增益矩阵以及事件触发矩阵

(4)，以确保式(1)中的不确定半微分系统不仅具有随机稳定性，同时满足扩展耗散性。

### 3. 主要结果

首先，针对半微分微分系统(6)的必要性能分析得出结论：

**定理1.** 对于给定实矩阵  $\Upsilon_1 \leq 0$ ,  $\Upsilon_2, \Upsilon_3 > 0$ , 且  $\Upsilon_4 \geq 0$  满足  $(\|\Upsilon_1\| + \|\Upsilon_2\|)/\|\Upsilon_4\| = 0$ ，且  $\text{sc}(\cdot)$  报警  $\epsilon(1)$ ,

$\epsilon_2 \gamma > 0$ ,  $\delta \geq 0$ ,  $d > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\sigma \geq 0$ ，设对于任意  $i \in \mathbb{N}^+$ ，存在矩阵  $P > 0$ ,  $U > 0$ ,  $Q^- =$

$$\begin{array}{ccc} Q_1 & Q_2 & \delta > 0, \\ * & Q_3 & Y, \end{array}$$

$H_m$  ( $m = 1, 2, 3, 4, 5$ ),  $G_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) 及矩阵  $\Lambda_i \geq 0$ ，使得

$$W(i) = \begin{bmatrix} W_{11}(i) & W_{12}(i) & W_{13}(i) & W_{14} & W_{15}(i) & W_{16} \\ * & W_{22} & W_{23}(i) & 0 & W_{25}(i) & W_{26} \\ * & * & W_{33}(i) & W_{34} & W_{35}(i) & W_{36} \\ | & * & * & W_{44} & 0 & W_{46} \\ | & * & * & * & W_{55} & 0 \\ * & * & * & * & * & W_{66} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}(i) = & \begin{bmatrix} \textcircled{1}_{11}(i) & \textcircled{1}_{12}(i) & \textcircled{1}_{13}(i) & \textcircled{1}_{14}(i) & \textcircled{1}_{15}(i) \\ & \textcircled{1}_{22} & \textcircled{1}_{23}(i) & \textcircled{1}_{24} & \textcircled{1}_{25}(i) \\ & * & \textcircled{1}_{33}(i) & \textcircled{1}_{34} & \textcircled{1}_{35}(i) \\ & * & * & \textcircled{1}_{44} & 0 \end{bmatrix} & & \delta < 0, \\ & & & \textcircled{1}_{55} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\Phi(i) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(i) & \Phi_{12}(i) & \Phi_{13}(i) & \Phi_{14}(i) \\ & \Phi_{22} & \Phi_{23}(i) & * \\ * & * & \Phi_{33}(i) & * \\ 0 & * & * & \Phi_{44} \end{bmatrix} \quad \delta < 0, \quad \Phi_{24}(i)$$



$$\div(i) = \begin{vmatrix} P_i + dS(\frac{H_1}{2}) - Y_4 & -dH_1 + dH_2 & dH_3 \\ * & -dS(H_2 - \frac{H_1}{2}) & dH_4 \\ * & * & dS(\frac{H_4}{2}) \end{vmatrix} > 0, \quad (12)$$

$$P_i - Y_4 > 0 \quad (13)$$

成立，其中

$$\begin{aligned} W_{11}(i) &= \sum_N \lambda_1^* P_j + 2\alpha P_i + S \left[ -\frac{H_1}{2} + G_1 + 2YA_i - Y_2 \right] - \\ W_{12}(i) &= P + G - \frac{H_1}{2} - Y + \varepsilon_1 \bar{A}_i^T Y^T, \\ \underline{W}_{13}(i) &= H - H_1 + G - \frac{H_2}{2} + Y_3 B K + \varepsilon_1 \bar{E} - \frac{H_1}{2} \bar{A}_i^T Y^T, \\ W_{14} &= -H_3 + G_4, \quad W_{15}(i) = YC_i - Y_2, \\ W_{16} &= \frac{\sqrt{-}}{dG^T} W_{22} = -S(\varepsilon_1 Y), \\ W_{23}(i) &= -G^T \bar{\varepsilon}_2 Y^T + \varepsilon_1 Y B_i K_i, \\ W_{25}(i) &= \varepsilon_1 Y C_i, \quad W_{26} = \frac{\sqrt{-}}{dG^T}, \\ W_{33}(i) &= S H_2 - \frac{H_3}{2} - G_3 + \varepsilon_2 Y B_i K_i - d e^{-2\alpha d} Q_3, \\ W_{34} &= -H_4 - e^{-2\alpha d} Q^T \frac{H_2}{2} G_4, \quad W_{35}(i) = \varepsilon_2 Y C_i, \quad W_{36} = \frac{\sqrt{-}}{dG^T}, \\ W_{44} &= -S \frac{H_3}{2} - \frac{e^{-2\alpha d}}{d} Q^T \frac{H_2}{2} U, \quad W_{55} = -e^{-2\alpha d} U, \\ \Phi_{11}(i) &= \sum_{v=1,j}^N \lambda_{ij}^* P_j + 2\alpha P_i + \sigma \Lambda_i + S \left[ Y A_i - Y B_i K \right] - Y_1, \\ \Phi_{12}(i) &= P - Y + \varepsilon_1 \bar{A}_i^T Y^T + (\varepsilon_1 Y B_i K_i)^T, \\ \Phi_{13}(i) &= Y B_i K_i, \quad \Phi_{14}(i) = Y C_i - Y_2, \\ \Phi_{22} &= S(-\varepsilon_1 Y), \quad \Phi_{23}(i) = \varepsilon_1 Y B_i K_i, \quad \Phi_{24}(i) = \varepsilon_1 Y C_i, \\ \Phi_{33}(i) &= -\Lambda_i, \quad \Phi_{44} = \delta I - Y_3, \\ \textcircled{1}_{11}(i) &= W_{11}(i) + \alpha d S(H_1) + d S(H_3) + d Q_1 - Y_1, \\ \textcircled{1}_{12}(i) &= W_{12}(i) + d \frac{S(H_1)}{2}, \\ \textcircled{1}_{13}(i) &= W_{13}(i) + 2\alpha d(H_2 - H_1) + d H^T + d Q_2, \\ \textcircled{1}_{14} &= W_{14} + 2\alpha d H_3 + d \frac{S(H_1)}{2}, \quad \textcircled{1}_{15}(i) = Y C_i - Y_2 \\ \textcircled{1}_{22} &= W_{22} + d U, \quad \textcircled{1}_{23}(i) = W_{23}(i) + d(H_2 - H_1), \\ \textcircled{1}_{24} &= \textcircled{1}_{25}(i) = \varepsilon_1 Y C_i, \\ \textcircled{1}_{33}(i) &= S \left( \frac{H_3}{2} - (H_1 - G_3) + \varepsilon_2 (2) Y B_i K_i \right) + 2\alpha d S \left( \frac{H_2}{2} \right) \\ \textcircled{1}_{34} &= W_{34} + 2\alpha d H_4, \quad \textcircled{1}_{35}(i) = \varepsilon_2 Y C_i \\ -H_2 \textcircled{1}_{44} &+ \frac{H_1}{W_{44}} + \alpha d S \left( \frac{H_3}{2} \right) \textcircled{1}_{55} = -Y_3, \quad \lambda_{ij}^* = E \lambda_{ij}(i). \end{aligned}$$

因此，半MSS(6)具有随机稳定性且具有扩展耗散性。

**证明。** 考虑时间与模态相关的分段定义线性函数：

$$\begin{aligned} V(t, \zeta(t)) &= \begin{cases} V_\alpha(t, \zeta(t)), & t \in [t_s, t_s + d], \\ V_\beta(t, \zeta(t)), & t \in [t_s + d, t_{s+1}], \end{cases} \\ \text{其中 } v\alpha(t, \zeta(t)) &= \sum_{m=1}^4 V_m(t, \zeta(t)), \quad V_\beta(t, \zeta(t)) = V_1(t, \zeta(t)) \text{ 且} \\ V_1(t, \zeta(t)) &= e^{2\alpha t} x^T(t) P_{\zeta(t)} x(t), \\ V_2(t, \zeta(t)) &= \vartheta_d(t) \int_{t-\vartheta(t)}^t e^{2\alpha \mu} x^T(\mu) U x(\mu) d\mu, \\ V_3(t, \zeta(t)) &= \vartheta_d(t) \int_t^t e^{2\alpha \mu} \bar{\eta}_1(\mu) Q \eta_1(\mu) d\mu, \\ V_4(t, \zeta(t)) &= \vartheta_d(t) e^{2\alpha t} \bar{\eta}_2^T(t) F \eta_2(t), \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\vartheta_d(t) &= d - \vartheta(t), \quad \eta_1(\mu) = \text{col}\{x(\mu), x(\mu - \vartheta(\mu))\}_{3/4} \\ \eta_2(t) &= \text{col} \begin{bmatrix} x(t), x(t - \vartheta(t)), \\ S\left(\frac{H_1}{2}\right) & -H_1 + H_2 & H_3 \\ * & S(-H_2 + \frac{H_1}{2}) & H_4 \\ * & * & S(\frac{H_1}{2}) \end{bmatrix}, \\ F &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & \int_t & & \\ & & t - \vartheta(t) & \\ & & & x(\mu) d\mu \end{bmatrix},\end{aligned}$$

注意

$$\begin{aligned}V_1(t, \zeta(t)) &+ V_4(t, \zeta(t)) \\ &= e^{2at} \eta_2^T(t) \begin{bmatrix} * & \vartheta_d(t) S \left[ \frac{H_1}{2} \right] & \vartheta_d(t)(-H_1 + H_2) & \vartheta_d(t) H_3 \\ P_{\zeta(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \eta_2(t) \\ &= e^{2at} \frac{\vartheta(t)}{d} \eta_2^T(t) \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ P_{\zeta(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \eta_2(t) \\ &+ e^{2at} \frac{\vartheta(t)}{d} \eta_2^T(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \eta_2(t).\end{aligned}$$

结合  $P_i > 0 (i \in \mathbb{N}^+)$ 、 $U > 0$ 、 $Q^- > 0$ 、 $Y_4 \geq 0$ 、(12) 及 (13)，可得

$$V(t, \zeta(t)) \geq V_1(t, \zeta(t)) + V_4(t, \zeta(t)) \geq e^{2at} \eta_2^T(t) \begin{bmatrix} Y_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \eta_2(t) \geq x^T(t) Y_4 x(t). \quad (14)$$

由(14)式可知，构造的泛函  $V(t)$  为正定泛函。根据两种不同的时间区间，考虑以下两种情况：

情况 I  $t \in [t_s, t_s + d]$

此时有  $V(t, \zeta(t)) = v\alpha(t, \zeta(t))$ 。设  $L$  为无穷小算子。当  $\zeta(t) = i$  时，可得

$$\begin{aligned}LV(t, \zeta(t)) &= (i) = (\lim_{\xi \rightarrow 0}) E[V \frac{(x(t + \xi), \zeta(t + \xi)) / x(t), \zeta(t)] - V(x(t), \zeta(t))}{\xi}] \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \sum_{j=1, j \neq i}^N \Pr(\zeta(t + \xi) = j | \zeta(t) = i) e^{2\alpha(i+\xi)} x^T(t + \xi) P_j x(t + \xi) \\ &\quad + \Pr(\zeta(t + \xi) = i | \zeta(t) = i) e^{2\alpha(i)} (0)(t) (+)(\xi)(0) x^T(t + \xi) P(i, x, t + \xi) - e(2)(\alpha)(t) x^T(t) P(i, x, t) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\Pr(\zeta(t + \xi) = j, \zeta(t) = i)}{\Pr(\zeta(t) = i)} e^{2\alpha(i+\xi)} x^T(t + \xi) P_j x(t + \xi) \\ &\quad + \frac{\Pr(\zeta(t + \xi) = i, \zeta(t) = i)}{\Pr(\zeta(t) = i)} e(2)(\alpha)(t) x^T(t + \xi) P(i, x, t + \xi) - e(2)(\alpha)(t) x^T(t) P(i, x, t) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \sum_{j=1, j \neq i}^N (\lambda_{ij}(t) + o(t)) e^{2\alpha(i+\xi)} x^T(t + \xi) P_j x(t + \xi) \\ &\quad + (1 + \lambda_{ii}(t) + o(t)) e^{2\alpha(i)} (0)(t) (+)(\xi)(0) x^T(t + \xi) P(i, x, t + \xi) - e(2)(\alpha)(t) x^T(t) P(i, x, t).\end{aligned}$$

这表明

$$LV_1(t, \zeta(t) = i) = \sum_{j=1}^N \lambda_{ij}(t) e^{2\alpha t} x^T(t) P_j x(t) + 2\alpha e^{2\alpha t} x^T(t) P_i x(t) + 2e^{(2)\alpha(t)} x^T(t) P(i, x^*(t)), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} LV_2(t, \zeta(t) = i) &= \vartheta_d(t) e^{-2\alpha t} x^T(t) U x^*(t) - \int_{t-\vartheta(t)}^t e^{2\alpha \mu} x^T(\mu) U x^*(\mu) d\mu \\ &\leq \vartheta_d(t) e^{2\alpha t} x^T(t) U x^*(t) - \int_{t-\vartheta(t)}^t e^{2\alpha \mu} x^T(\mu) U x^*(\mu) d\mu \\ &\leq \vartheta_d(t) e^{2\alpha t} x^T(t) U x^*(t) - e^{-2\alpha t} \int_{t-\vartheta(t)}^t e^{-2\alpha \mu} x^T(\mu) U x^*(\mu) d\mu, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} LV_3(t, \zeta(t) = i) &= - \int_{t-\vartheta(t)}^t e^{2\alpha \mu} \eta^T(\mu) Q \eta_1(\mu) d\mu + \vartheta_d(t) e^{-2\alpha t} \eta^T(t) Q \eta_1(t) \\ &\leq - \int_{t-\vartheta(t)}^t e^{2\alpha \mu - \vartheta(t)} \eta^T(\mu) Q \eta_1(\mu) d\mu + \vartheta_d(t) e^{-2\alpha t} \eta_1^T(t) Q \eta_1(t) \\ &\leq - e^{-2\alpha t} \int_{t-\vartheta(t)}^t e^{-2\alpha d} \eta^T(\mu) Q \eta_1(\mu) d\mu + \vartheta_d(t) e^{-2\alpha t} \eta^T(t) Q \eta_1(t) \\ &= - e^{-2\alpha t} \int_{t-\vartheta(t)}^t e^{-2\alpha d} x^T(\mu) Q_1 x(\mu) d\mu - 2e^{-2\alpha t} (t - \vartheta(t)) e^{-2\alpha t} Q_2 \int_{t-\vartheta(t)}^t x(\mu) d\mu \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} -\vartheta(t) e^{2\alpha t} x^T(t - \vartheta(t)) e^{-2(\alpha(d) Q_3 x(t) - \theta(t)))} + \theta(d, t) e^{(2)\alpha(t)} \eta^T(t) Q \eta_1(t), \\ LV_4(t, \zeta(t) = i) = -e^{2\alpha t} \eta_2^T(t) F \eta_2(t) + 2\alpha \vartheta_d(t) e^{(2)\alpha(t)} \eta_2^T(t) F \eta_2(t) + 2\theta(d, t) e^{(2)\alpha(t)} \eta_2^T(t) F \eta_2(t) \\ \leq -e^{2\alpha t} \eta_2^T(t) F \eta_2(t) + 2\alpha \vartheta_d(t) e^{-2\alpha t} \eta_2^T(t) F \eta_2(t) \\ + 2\vartheta_d(t) e^{2\alpha t} x^T(t) \frac{H_1 + H^T}{2} x(t) + 2\vartheta_d(t) e^{-2\alpha t} x^T(t - \vartheta(t)) (-H_1 + H_2)^T x(t) \\ + 2\vartheta_d(t) e^{-2\alpha t} x^T(t - \vartheta(t)) H_3 x(t) + 2\vartheta_d(t) e^{-2\alpha t} \int_{t-\vartheta(t)}^t x^T(\mu) d\mu H_3 x(t) + 2\vartheta_d(t) e^{-2\alpha t} x^T(t) H_3 x(t) \\ + 2\vartheta_d(t) e^{-2\alpha t} x^T(t - \vartheta(t)) H_4 x(t) + 2\vartheta_d(t) e^{-2\alpha t} \int_{t-\vartheta(t)}^t x^T(\mu) d\mu \xrightarrow{\text{引理1}} x(t). \end{aligned} \quad (18)$$

利用引理1，我们得到

$$- \int_{t-\vartheta(t)}^t e^{-2\alpha d} x^T(\mu) Q_1 x(\mu) d\mu \leq - \int_{t-\vartheta(t)}^t x^T(\mu) d\mu \frac{e^{-2\alpha d}}{d} Q_1 \int_{t-\vartheta(t)}^t x(\mu) d\mu. \quad (19)$$

将(19)代入(17)，可得

$$\begin{aligned} LV_3(t, \zeta(t) = i) &\leq -e^{-2\alpha t} \int_{t-\vartheta(t)}^t x^T(\mu) d\mu \frac{e^{-2\alpha d}}{d} Q_1 \int_{t-\vartheta(t)}^t x(\mu) d\mu \\ &- (t - t_s) e^{2\alpha t} x^T(t - \vartheta(t)) e^{-2(\alpha(d) Q_3 x(t) - \theta(t)))} + (t_s - t) e^{(2)\alpha(t)} \eta^T(t) Q \eta_1(t). \end{aligned} \quad (20)$$

对于具有适当维数的矩阵  $G$ ，基于舒尔补，我们有

$$G^T e^{2ad} U^{-1} G - \frac{G^T}{e^{-2ad} U} \geq 0,$$

这意味着

$$\int_t^{\infty} (\cdot, \varphi(t)(\cdot, \cdot)) (T) (\cdot, G(T) e^{(2)\alpha(d)} \cup (-1) G) G^T (\cdot, \cdot) \phi(t)(\cdot, \cdot) x(\mu) d\mu \geq 0, \quad (21)$$

其中

$$\varphi(t) = \text{col}\{x(t), x^*(t), x(t - \vartheta(t))\}, \quad \int_{t-\vartheta(t)}^t x(\mu) d\mu.$$

由(21)式可得

$$- \int_{t-\vartheta(t)}^t e^{-2\alpha d} x^T(\mu) U x^*(\mu) d\mu \leq \vartheta(t) \varphi^T(t) G^T e^{2(\alpha(d) U)} G \varphi(t) + 2\phi(T^-(t) G(T^x(t)) - 2\phi(T^-(t) G(T^x(t - \vartheta(t)))) \quad (22)$$

将(22)式与(18)式结合, 可得

$$\begin{aligned} LV_4(t, \zeta(t) = i) &= e^{2\alpha t} \vartheta(t) \varphi^T(t) G^T e^{2(\alpha-d)t} U^{-1} G \varphi(t) + 2e^{(2-\alpha)t} (T^t(t) G(T^x(t)) - 2e^{(2-\alpha)t} (T^t(t) G(T^x(t)) - \Theta(t))) \\ &\quad + (t_{s+1}-t)e^{2\alpha t} x^T(t) U x(t). \end{aligned} \quad (23)$$

对于任意标量  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  及维数适当的矩阵  $Y$ , 根据(6a)式可得:

$$0 = 2e^{2\alpha t} x^T(t) + \varepsilon_1 x^T(t) + \varepsilon_2 x^T(t - \vartheta(t)) Y - x^T(t) + \overset{\square}{A}_i x(t) + C_i o(t) + B_i K_i x(t - \vartheta(t)). \quad \square \quad (24)$$

由此, 结合(15)、(16)、(20)、(23)和(24)式可得: 当  $t \in [t_s, t_s+d]$  时,

$$E\{LV_\alpha(t, \zeta(t) = i) - J(t)\} \leq E\{e^{2\alpha t} \varphi^T(t) W_2(i) \varphi(t)\}.$$

其中

$$W_2(i) = \frac{\overset{\square}{\vartheta}(t)}{d} \underbrace{\left( \overset{\square}{\vartheta}(t) \right)}_d \left( \overset{\square}{\vartheta}(t) \right)^T, \quad \boxed{W_2(i)}$$

$$W_2(i) = \begin{bmatrix} W_{11}(i) & W_{12}(i) & W_{13}(i) & W_{14} & W_{15}(i) \\ W_{12}(i) & * & * & * & * \\ W_{13}(i) & * & * & * & * \\ W_{14} & * & * & * & * \\ W_{15}(i) & * & * & * & * \end{bmatrix} \quad \boxed{W_2(i)}$$

$$W_2(i) = \begin{bmatrix} W_{22}(i) & 0 & W_{23}(i) & W_{34} & W_{25}(i) \\ 0 & W_{33}(i) & W_{34} & 0 & W_{35}(i) \\ W_{23}(i) & W_{34} & W_{35}(i) & * & * \\ W_{34} & 0 & 0 & * & * \\ W_{25}(i) & W_{35}(i) & * & * & * \end{bmatrix} \quad \boxed{W_2(i)}$$

$$W_2(i) = \begin{bmatrix} G^T & & & & \\ & 1 & & & \\ & & G^T & & \\ & & & 1 & \\ & & & & G^T \end{bmatrix} \quad \boxed{G^T}$$

由(9)、(10)及舒尔补定理可得, 存在正常数  $M_1$  使得

$$E\{LV_\alpha(t, \zeta(t) = i) - J(t)\} \leq -M_1 \|x(t)\|^2, \quad t \in [t_s, t_s+d].$$

情况II:  $t \in [t_s+d, t_{s+1}]$ .

在此情况下, 我们有  $V(t, \zeta(t)) = V_\theta(t, \zeta(t))$ . 事件触发条件(4)意味着

$$0 \leq -e^T(t) \Lambda_i e(t) + \sigma x^T(t) \Lambda_i x(t) + \delta o^T(t) o(t). \quad (25)$$

根据(6b), 有

$$0 = 2e^{(2-\alpha)t} x^T(t) Y - x^T(t) \varepsilon(1, \zeta(t)) - x^T(t) + A^{-1}(x(t)) + C(i_o(t)) + B(i_K i_o(t)) x(t) + e(t). \quad \square \quad (26)$$

利用(11)、(25)、(26), 并遵循与情况I类似的证明过程, 可证明存在常数  $M_2$  使得

$$E\{LV_\theta(t, \zeta(t) = i) - J(t)\} \leq E\{e^{(2-\alpha)t} \varphi^T(t) \varphi(t)\} \leq -M(2) \|x(t)\|/(2), \quad t \in [t(s)+d, t(s+1)].$$

其中  $\varphi_1(t) = \text{col } x(t), x^T(t), e(t)$ .

将这两种情况合并, 我们得到

$$E\{LV(t, \zeta(t) = i) - J(t)\} \leq -M_0 \|x(t)\|^2, \quad t \in [t_s, t_{s+1}]. \quad (27)$$

其中  $M_0 = \max\{M_1, M_2\}$ . 应用广义迪金公式[46], 由(27)可得

$$\begin{aligned} E[V(x(t), \zeta(t) = i) - V(x(0), \zeta(0))] &= \int_0^t \int_0^\mu J(\mu) d\mu \quad \frac{3}{4} \\ &= E[V(x(t), \zeta(t) = i) - V(x(t_s), \zeta(t_s))] - \int_{t_s}^t \int_{t_1}^\mu J(\mu) d\mu \quad \frac{3}{4} \\ &\quad + \cdots + V(x(t(1)), \zeta(t(1))) - V(x(0), \zeta(0)) \quad \frac{3}{4} \\ &\leq -\frac{1}{2} \int_{t_s}^t \int_{t_1}^\mu J(\mu) d\mu \quad \frac{3}{4} \\ &\quad + \cdots + E[\{LV(\mu) - J(\mu)\} d\mu] \quad \frac{3}{4} \\ &\leq -E[\int_{t_s}^t \int_0^\mu J(\mu) d\mu] \quad \frac{3}{4} \\ &\leq -E[\int_{t_s}^t \|x(t)\|^2 d\mu] \quad \frac{3}{4} \\ &\leq -E[\int_0^t \|x(t)\|^2 d\mu] \quad \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (28)$$

当  $o(t) = 0$  时, 由  $\gamma_1 \leq 0$ 、 $V(x(t), \zeta(t)) \geq 0$  及(28)可得

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^t \|x(t)\|^2 dt\right] &\leq \frac{1}{M_0} E[V(x(t), \zeta(t) = i) - V(x(0), \zeta(0))] - \int_0^t J(\mu) d\mu \\ &\leq \frac{1}{M_0} E\{V(x(0), \zeta(0))\}. \end{aligned}$$

考虑到  $t$  的任意性, 通过选择  $M_0 = E[V(x(0), \zeta(0))]/M_0$ , 可得(7), 这意味着半-MSS(6) 是随机稳定的。

在以下推导中, 我们将继续推导广义耗散性。当  $x(0)=0$  时, 由(28)式可得

$$E \int_0^{\frac{1}{2}t} J(\mu)d\mu \geq E\{V(x(t), \zeta(t) = i) - V(x(0), \zeta(0))\} \geq E\{V(x(t), \zeta(t) = i)\} \quad . \quad (29)$$

利用(14)和(29), 我们得到

$$E \int_0^{\frac{1}{2}t} J(\mu)d\mu \geq E\{x^T(t)Y_4x(t)\},$$

结合  $t$  的任意性, 可得(8)。根据定义2, 半MSS(6)具有扩展耗散性, 证明完成。□

**备注5.** 需注意, 在MDSETM(4)的作用下, 半MSS(6)成为时参切换系统。对于此类模式依赖与时间依赖的切换系统, 如何建立合适的低阶系统以实现控制目标成为复杂问题。受文献[29,54]启发, 本文提出一种模式依赖且时间依赖的分段型线性函数  $V(t, \zeta(t))$ 。该函数在不同时间区间内由  $v_\alpha(t)$  与  $V_{(6)}(t)$  构成。当

当  $t \in [t_s, t_s + d]$  时, 将采用低频电压  $v_\alpha(t)$ ; 而当  $t \in [t_s + d, t_{s+1}]$  时, 则采用低频电压  $V_{(6)}(t)$ 。此外,  $\lim_{t \rightarrow t_s^-} V(t, \zeta(t))$  在  $t_s$  和  $t_s + d$  处的连续性对半微分微分系统的稳定性分析至关重要。对于时间点  $t_s$ , 由于  $x(t) = x(t - \vartheta(t))$ , 故  $V_{(2)}(t_s) = V_{(3)}(t_s) = V_{(4)}(t_s) = 0$ ; 而在时间点  $t_s + d$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_s^+} V(t, \zeta(t)) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_s^+} V_{(2)}(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_s^+} V_{(3)}(t) = 0$ , 且  $\lim_{t \rightarrow t_s^+} V_{(4)}(t) = 0$ , 因为  $\lim_{t \rightarrow t_s^+} V_{(6)}(t) = 0$ 。综上所述, 在时刻  $t_s$  和  $t_s + d$  处,  $v_\alpha(t) = V_{(6)}(t)$ , 这表明  $V(t, \zeta(t))$  是连续的。

现在, 我们处理扩展耗散稳定性问题。我们可以证明以下结果:

**定理2.** 对于满足  $(||Y_1|| + ||Y_2||) \cdot ||Y_4|| = 0$  的实矩阵组  $Y_{(1)} \leq 0, Y_{(2)}, Y_{(3)} > 0, Y_{(4)} \geq 0$ , 以及标量  $\varepsilon_{(1)}, \varepsilon_{(2)}, \varepsilon_{(4)}$  满足  $\varepsilon_{(1)} \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0, \varepsilon_4 \geq 0$ , 且  $\varepsilon_{(1)} \cdot \varepsilon_{(2)} \geq 0$ , 则存在解  $Y_{(1)} = \varepsilon_{(1)}I, Y_{(2)} = \varepsilon_{(2)}I, Y_{(3)} = \varepsilon_{(4)}I = \varepsilon_{(4)}^2I$  满足  $Y_{(1)} + \varepsilon_{(1)}Y_{(2)} + \varepsilon_{(2)}Y_{(3)} + \varepsilon_{(4)}Y_{(4)} = P^+ > 0, U^+ > 0, Q^+ = V > 0, \delta \geq 0, d \geq 0, \alpha \geq 0, \sigma \geq 0$ , 且对于任意  $i \in \mathbb{N}$ , 存在标量  $\rho > 0$  及矩阵  $P^- > 0, U^- > 0, Q^- =$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} Q_1 \\ Q \\ \vdots \\ Q_3 \end{matrix} & \text{及} & \begin{matrix} Q \\ Q \\ \vdots \\ Q_3 \end{matrix} & \text{且} & \begin{matrix} Q \\ Q \\ \vdots \\ Q_3 \end{matrix} & \text{满足} \\ & \begin{matrix} \frac{Q_1}{Q} \\ \frac{Q}{Q} \\ \vdots \\ \frac{Q_3}{Q} \end{matrix} & \text{及} & \begin{matrix} \frac{Q}{Q} \\ \frac{Q_1}{Q} \\ \vdots \\ \frac{Q_3}{Q} \end{matrix} & \text{且} & \begin{matrix} \frac{Q}{Q} \\ \frac{Q_1}{Q} \\ \vdots \\ \frac{Q_3}{Q} \end{matrix} & \text{满足} \\ & \begin{matrix} W(i) \\ \vdots \\ W(i) \end{matrix} & = & \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} & \text{且} & \begin{matrix} W(i) \\ \vdots \\ W(i) \end{matrix} & \text{满足} \\ & \begin{matrix} W(i) \\ \vdots \\ W(i) \end{matrix} & = & \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} & \text{且} & \begin{matrix} W(i) \\ \vdots \\ W(i) \end{matrix} & \text{满足} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \textcircled{1}(i) \\ \textcircled{1}(i) \\ \vdots \\ \textcircled{1}(i) \end{matrix} & = & \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} & \text{且} & \begin{matrix} \textcircled{1}(i) \\ \textcircled{1}(i) \\ \vdots \\ \textcircled{1}(i) \end{matrix} & = 0, \\ & \begin{matrix} \textcircled{1}(i) \\ \textcircled{1}(i) \\ \vdots \\ \textcircled{1}(i) \end{matrix} & = & \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} & \text{且} & \begin{matrix} \textcircled{1}(i) \\ \textcircled{1}(i) \\ \vdots \\ \textcircled{1}(i) \end{matrix} & = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \Phi(i) = \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} & \text{且} & \begin{cases} \Phi(i) \\ \Phi(i) \\ \vdots \\ \Phi(i) \end{cases} & = 0, \\ & \Phi(i) = \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} & \text{且} & \begin{cases} \Phi(i) \\ \Phi(i) \\ \vdots \\ \Phi(i) \end{cases} & = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \div(i) \\ \div(i) \\ \vdots \\ \div(i) \end{matrix} & = & \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} & \text{且} & \begin{matrix} \div(i) \\ \div(i) \\ \vdots \\ \div(i) \end{matrix} & = 0, \\ & \begin{matrix} \div(i) \\ \div(i) \\ \vdots \\ \div(i) \end{matrix} & = & \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} & \text{且} & \begin{matrix} \div(i) \\ \div(i) \\ \vdots \\ \div(i) \end{matrix} & = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} \div(i) \\ \div(i) \\ \vdots \\ \div(i) \end{matrix} & = & \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} & \text{且} & \begin{matrix} \div(i) \\ \div(i) \\ \vdots \\ \div(i) \end{matrix} & = 0, \\ & \begin{matrix} \div(i) \\ \div(i) \\ \vdots \\ \div(i) \end{matrix} & = & \begin{cases} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} & \text{且} & \begin{matrix} \div(i) \\ \div(i) \\ \vdots \\ \div(i) \end{matrix} & = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

成立，其中

$$\begin{aligned}
& \text{其中} \\
& \overline{W}(i) = \left[ \begin{array}{ccccccccc} \overline{w_{11}}(i) & \overline{w_{12}}(i) & \overline{w_{13}}(i) & \overline{w_{14}} & \overline{w_{15}}(i) & \overline{w_{16}} & E_i & Y F_i^T \\ | & | & | & | & | & | & \epsilon_1 \dot{E}_i & 0 \\ * & * & * & 0 & \overline{W_{25}}(i) & \overline{W_{26}} & 0 & 0 \\ * & * & * & \overline{W_{44}} & 0 & \overline{W_{46}} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \overline{W_{55}} & \overline{W_{66}} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\rho I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -\rho I \end{array} \right], \\
& \underline{\Phi}(i) = \left[ \begin{array}{ccccccccc} \underline{\Phi}_{11}(i) & \underline{\Phi}_{12}(i) & \underline{\Phi}_{13}(i) & \underline{\Phi}_{14}(i) & \underline{\Phi}_{15}(i) & E_i & Y F_i^T \\ | & | & | & | & | & \epsilon_1 E_i & 0 \\ \underline{\Phi}_{22}(i) & \underline{\Phi}_{23}(i) & \underline{\Phi}_{24}(i) & \underline{\Phi}_{25}(i) & \underline{\Phi}_{26}(i) & \epsilon_2 E_i & 0 \\ * & * & * & \underline{\Phi}_{34}(i) & \underline{\Phi}_{35}(i) & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\rho I \\ * & * & * & * & * & * & -\rho I \end{array} \right], \\
& \underline{\Phi}(i) = \left[ \begin{array}{ccccccccc} \underline{\Phi}_{11}(i) & \underline{\Phi}_{12}(i) & \underline{\Phi}_{13}(i) & \underline{\Phi}_{14}(i) & \underline{\Phi}_{15}(i) & E_i & Y F_i^T \\ | & | & | & | & | & \epsilon_1 E_i & 0 \\ * & * & * & \underline{\Phi}_{44}(i) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\rho I \\ * & * & * & * & * & * & -\rho I \end{array} \right], \\
& \underline{\Phi}(i) = \left[ \begin{array}{ccccccccc} \underline{\Phi}_{11}(i) & \underline{\Phi}_{12}(i) & \underline{\Phi}_{13}(i) & \underline{\Phi}_{14}(i) & \underline{\Phi}_{15}(i) & E_i & Y F_i^T \\ | & | & | & | & | & \epsilon_1 E_i & 0 \\ * & * & * & \underline{\Phi}_{44}(i) & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\rho I \\ * & * & * & * & * & * & -\rho I \end{array} \right], \\
& \overline{Y}(i) = \left[ \begin{array}{ccccccccc} \overline{Y}_1(i) & \overline{Y}_2(i) & \overline{Y}_3(i) & \overline{Y}_4(i) & \overline{Y}_5(i) & \overline{Y}_6(i) & \overline{Y}_7(i) & \overline{Y}_8(i) \\ | & | & | & | & | & | & | & | \\ \overline{Y}_1(i) & \overline{Y}_2(i) & \overline{Y}_3(i) & \overline{Y}_4(i) & \overline{Y}_5(i) & \overline{Y}_6(i) & \overline{Y}_7(i) & \overline{Y}_8(i) \\ \overline{Y}_1(i) & \overline{Y}_2(i) & \overline{Y}_3(i) & \overline{Y}_4(i) & \overline{Y}_5(i) & \overline{Y}_6(i) & \overline{Y}_7(i) & \overline{Y}_8(i) \\ \overline{Y}_1(i) & \overline{Y}_2(i) & \overline{Y}_3(i) & \overline{Y}_4(i) & \overline{Y}_5(i) & \overline{Y}_6(i) & \overline{Y}_7(i) & \overline{Y}_8(i) \\ \overline{Y}_1(i) & \overline{Y}_2(i) & \overline{Y}_3(i) & \overline{Y}_4(i) & \overline{Y}_5(i) & \overline{Y}_6(i) & \overline{Y}_7(i) & \overline{Y}_8(i) \\ \overline{Y}_1(i) & \overline{Y}_2(i) & \overline{Y}_3(i) & \overline{Y}_4(i) & \overline{Y}_5(i) & \overline{Y}_6(i) & \overline{Y}_7(i) & \overline{Y}_8(i) \\ \overline{Y}_1(i) & \overline{Y}_2(i) & \overline{Y}_3(i) & \overline{Y}_4(i) & \overline{Y}_5(i) & \overline{Y}_6(i) & \overline{Y}_7(i) & \overline{Y}_8(i) \\ \overline{Y}_1(i) & \overline{Y}_2(i) & \overline{Y}_3(i) & \overline{Y}_4(i) & \overline{Y}_5(i) & \overline{Y}_6(i) & \overline{Y}_7(i) & \overline{Y}_8(i) \end{array} \right], \\
& \overline{W^{11}}(i) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^* P_j + 2\alpha P + S - H_{12} + G^{-1} + A Y^T, \\
& \overline{W^{12}}(i) = P + G - Y + \epsilon Y A, \\
& \overline{H}(i) = H - H_1 + G_2 - G_1^T B K \overline{F} \epsilon Y A_2 \overline{F}^T, \\
& \overline{W}_{14}(i) = -H_1 + G_2 - G_1^T B K \overline{F} \epsilon Y A_2 \overline{F}^T, \\
& \overline{W}_{22} = -S \epsilon Y_1^T, \\
& \overline{W}_{25}(i) = \underline{\Phi}_{25}(i) = \underline{\Phi}_{24}(i) \overline{Y} C_i, \\
& \overline{W}_{33}(i) = S H_2 - \overline{H_3} + \epsilon \overline{B_3} K_i - d \overline{e^{-2\alpha d} Q}, \\
& \overline{W}_{34} = -H - e^{-2\alpha d} Q - G^T, \\
& \overline{W}_{35}(i) = \underline{\Phi}_{15}(i) = \epsilon C, \\
& \overline{W}_{44} = -S \frac{H_{52}}{2}, \\
& \overline{W}_{55} = -Y_3, \\
& \overline{\Phi}_{13}(i) = B_i K_i, \\
& \overline{\Phi}_{14}(i) = C_i - Y Y_2, \\
& \overline{\Phi}_{22} = S - \epsilon Y^T, \\
& \overline{\Phi}_{33}(i) = -A_i, \\
& \overline{\Phi}_{44}(i) = \delta I - Y_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{1}_{11}(i) &= W_{11} + adS^{\frac{1}{1}} H^{\frac{1}{1}} + dS^{\frac{1}{1}} H^{\frac{1}{1}} + dQ^{\frac{1}{1}}, \quad \textcircled{1}_3(i) = W_3 + \frac{S(H_3)}{d}, \\
\textcircled{1}_{13}(i) &= W_{13} + (i) + 2ad(H_2 - H_1) + dH^T + dQ_2, \\
\textcircled{1}_{14}(i) &= W_{14} + 2adH^T + dS^{\frac{1}{1}} H^{\frac{1}{1}}, \quad \textcircled{1}_{15}(i) = C - Y Y^T, \\
\textcircled{1}_{22}(i) &= W_{22} + dU, \quad \textcircled{1}_{23}(i) = W_{23} + dH_2 - H_1, \\
\textcircled{1}_{24} &= dH_3, \\
\textcircled{1}_{33}(i) &= S - H_2 - G_3 + \varepsilon_2 B_i K_i + 2adS - H_2 + H_1 + dQ_3, \\
\textcircled{1}_{34} &= W_{34} + 2adH_4, \\
\textcircled{1}_{44} &= W_{44} + adS, \quad \textcircled{1}_{55} = -Y_3, \quad \lambda_{ij}^* = E \lambda_{ij}(t).
\end{aligned}$$

然后, 半MSS (1) 的扩展耗散稳定性可通过具有反馈增益和事件触发矩阵的事件触发控制器 (5) 实现

$$K_i = \mathcal{K}_i (\mathcal{N}^T)^{-1}, \quad \Lambda_i = Y^{-1} \Lambda_i (\mathcal{N}^T)^{-1}. \quad (35)$$

**证明。** 根据(2), 可将(9)式改写为:

$$\begin{array}{ccccccccc}
W_{11}^0(i) & W_{12}^0(i) & W_{13}^0(i) & W_{14} & W_{15}^0(i) & W_{16} & \left[ \begin{array}{c} Y E_i \\ \varepsilon_1 Y E_i \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]_T & \left[ \begin{array}{c} F_i^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]_T & \left[ \begin{array}{c} Y E_i \\ F_i^T \\ \vdots \\ \varepsilon_2 Y E_i \\ \Delta(t) \\ 0 \end{array} \right]_T \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & 0 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
* & * & * & W_{34} & W_{35}(i) & W_{36} & + \left[ \begin{array}{c} \varepsilon_2 Y E_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]_T & + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]_T & + \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]_T \\
* & * & * & W_{44} & 0 & W_{46} & & & \\
* & * & * & * & W_{55} & 0 & & & \\
* & * & * & * & * & W_{66} & & & \\
\end{array} \quad \&lt; 0, \quad (36)$$

其中

$$\begin{aligned}
W_{11}^0(i) &= \sum_{j=1}^N \lambda_j^* P_j + 2\alpha P + S \left( \frac{H_1}{G_1 + A Y_i} + G_2 - Y + \varepsilon_1 Y A^T \right), \\
W_{12}^0(i) &= P_i + G_2 - Y + \varepsilon_1 Y A^T, \\
W_{13}^0(i) &= H_1 - H_2 + G_3 - G^T + B_i K_i + \varepsilon_2 Y A^T.
\end{aligned}$$

利用引理2, (36)等价于

$$\begin{array}{ccccccccc}
W_{11}^0(i) & W_{12}^0(i) & W_{13}^0(i) & W_{14} & W_{15}^0(i) & W_{16} & \left[ \begin{array}{c} Y E_i \\ \varepsilon_1 Y E_i \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]_T & \left[ \begin{array}{c} Y^T E_i \\ \varepsilon_1 Y^T E_i \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]_T & \left[ \begin{array}{c} F_i^T \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]_T \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & 0 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
* & * & * & W_{34} & W_{35}(i) & W_{36} & + \left[ \begin{array}{c} \varepsilon_1 Y E_i \\ \varepsilon_2 Y E_i \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]_T & + \rho \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]_T & + \rho \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]_T \\
* & * & * & W_{44} & 0 & W_{46} & & & \\
* & * & * & * & W_{55} & 0 & & & \\
* & * & * & * & * & W_{66} & & & \\
\end{array} \quad \&lt; 0,$$

根据舒尔补则, 可进一步等价变换为

$$\Gamma_1(i) = \begin{bmatrix} \overline{W}_{11}^0(i) & W_{12}^0(i) & W_{13}^0(i) & W_{14} & W_{15}(i) & W_{16} & Y E_i \\ * & W_{22} & W_{23}(i) & 0 & W_{25}(i) & W_{26} & \varepsilon_1 Y E_i \\ * & * & W_{33}(i) & W_{34} & W_{35}(i) & W_{36} & \varepsilon_2 Y E_i \\ * & * & * & W_{44} & 0 & W_{46} & 0 \\ * & * & * & * & W_{55} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & W_{66} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -\rho I \end{bmatrix} \quad (37)$$

其中

$$W_{11}^{10}(i) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^* P_j + 2\alpha P + S \left( \frac{H_1}{G_1 + A Y_i} + G_2 - Y + \rho F F^T \right)$$

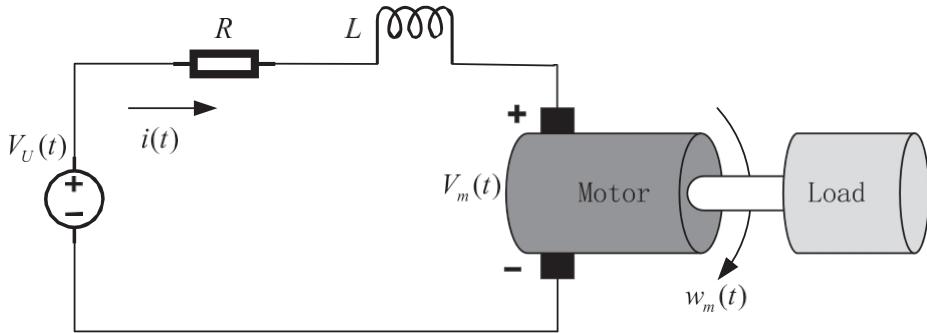


图1. 直流电机装置。

由(9)式可知 $\Upsilon$ 是可逆矩阵。设 $\Upsilon^{-1} = \Upsilon^T$ 。则(37)式可由以下对角矩阵保证成立：

$$\text{diag}\{\Upsilon, \Upsilon, \Upsilon, \Upsilon, I, \Upsilon^T, L, I\} \Gamma(i) \text{diag}\{\Upsilon^T, \Upsilon^T, \Upsilon^T, \Upsilon^T, I, \Upsilon^T, L, I\} &lt; 0. \quad (38)$$

根据(35)，可得 $K_{-i} = K_i \Upsilon^{-T}$ 且 $\Lambda_{-i} = \Upsilon^{-1} \Lambda_i \Upsilon^{-T}$ 。进一步设

$$\mathbf{U}^{-} = \Upsilon^{-1} \mathbf{U} \Upsilon^T, \quad \mathbf{P}_{-i} = \Upsilon^{-1} P_i \Upsilon^T, \quad \mathbf{Q}_{-z} = \Upsilon^{-1} Q_z \Upsilon^T \quad (z=1,2,3),$$

$$\mathbf{G}_{-n}^{-} = \Upsilon^{-1} G_n \Upsilon^T \quad (n=1,2,3,4), \quad \mathbf{H}_{-m}^{-} = \Upsilon^{-1} H_m \Upsilon^T \quad (m=1,2,3,4,5).$$

此时，(38)式可重写为：当 $\Upsilon_1 = 0$ 时， $\mathbf{W}^{-}(i) < 0$ 。若 $\Upsilon_1 < 0$ ，则(38)式可等效转换为

$\mathcal{J}(W)^{-}(i) < 0$ 再次使用舒尔补。由此，我们证明了(30)蕴含(9)。类似地

$\mathcal{J}(W)^{*} < 0$ ，我们可证明(31)至(34)分别蕴含(10)至(13)，从而完成证明。□

注6. 本定理为求解扩展耗散稳定性问题提供了一种高效方法。基于定理1的分析结果及矩阵不等式的若干等价变换，本文提出了一组线性矩阵不等式(LMIs)形式的条件，该条件可通过现成的MATLAB YALMIP或LMI工具箱直接验证。当满足该条件时，所需的反馈增益矩阵与事件触发矩阵即可同时获得。

#### 4. 数值示例

我们采用文献[36,37]中的直流电机模型和文献[38]中的机械臂模型，以验证所设计的基于MDSETM的控制器的有效性。

例1. 如图1所示的[36,37]中的直流电机模型可表征为

$$\begin{cases} V_m(t) = K_b w_m(t), \\ V_U(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + V_m(t), \\ T(t) = K_m i(t), \\ J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} = -K_f w_m(t) + T(t), \end{cases}$$

其中 $V_m(t)$ 表示电电压， $K_b$ 是与特定物理属性对应的标量， $w_m(t)$ 代表负载的角速度， $L$ 和 $R$ 分别表示电感和电阻， $i(t)$ 代表电流， $T(t)$ 表示直流电机轴上的转矩， $K_m$ 代表电枢常数， $J(m)$ 表示转矩常数。分别表示电感和电阻， $i(t)$ 表示电流， $T(t)$ 表示直流电机轴上的转矩， $K_b$ 表示电枢常数， $J(m)$ 是惯性负载，而 $K_f(w_m(t))$ 表示粘性摩擦的线性近似。

经过计算，直流电机模型可表示为：

$$x(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t) + C_i o(t),$$

其中 $i \in \{1, 2, 3\}$ ， $x(t) = [w_m(t), i(t)]^T$ ，且

$$A_i = \begin{matrix} (a^{11})_i & a^{12}_i \\ a^{21}_i & a^{22}_i \end{matrix}, \quad B_i = \begin{matrix} b^{11}_i & 0 \\ 0 & b^{22}_i \end{matrix}.$$

与[36,37]相同，该电机具有三种模式：正常模式、低速模式和中速模式；参数 $a^{11}$ 、 $a^{12}$ 、 $a^{21}$ 、 $a^{22}$ 、 $b^{11}$ 和

$b^{22}$ 如表1所示；其他模式相关参数如下：

$$E_1 = E_2 = E_3 = \begin{matrix} 0.1 \\ 0.1 \end{matrix}, \quad F^1 = F_2 = F_3 = \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ 0.1 \end{matrix}, \quad \square$$

表1

直流电机的参数。

模式	$a_i^{11}$	$a_i^{12}$	$a_i^{21}$	$a_i^{22}$	$b_i^{11}$	$b_i^{22}$
i=1	-0.479908	5.1546	-3.81625	14.4723	5.8705212	15.50107
i=2	-1.60261	9.1632	-0.5918697	3.0317	10.285129	2.2282663
i=3	0.634617	0.917836	-0.50569	2.48116	0.7874647	1.5302844

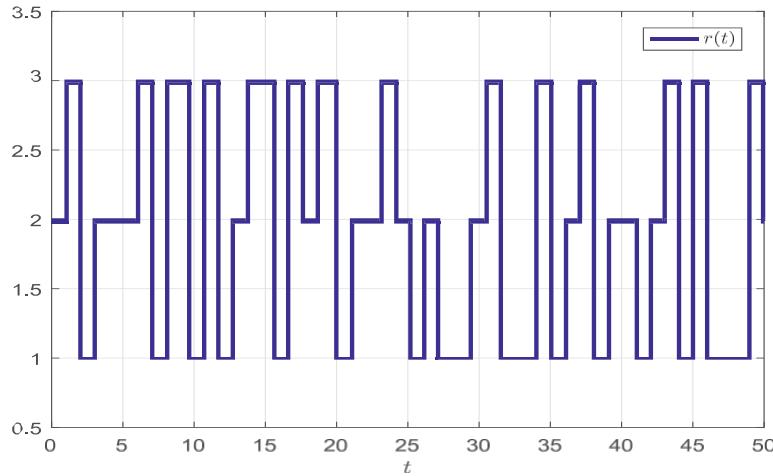


图2. 例1的开关信号。

$$C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.14 \end{pmatrix}.$$

请注意,  $(A^-, B_1)$ 、 $(A^-, B_2)$  和  $(A^-, B_3)$  均为可控系统。假设切换半马尔可夫过程支配, 其中驻留时间在  $i = 1, 2$  时服从威布尔分布, 在  $i = 3$  时服从指数分布。更具体地说, 我们为模式  $i$  选择转换率函数  $\lambda(i, i) = (\theta_{(2)}/\theta_{(1)})^{\beta_{(2)} - \beta_{(1)}} (1)$ , 其中  $\theta_{(1)}$  和  $\theta_{(2)}$  分别是尺度参数和形状参数。其中, 当  $i = 1$  时设  $\theta_{(1)} = 1$  且  $\theta_{(2)} = 2$ ; 当  $i = 2$  时设  $\theta_{(1)} = 1$  且  $\theta_{(2)} = 3$ , 并采用参数为 0.5 的指数分布。转换速率强度  $q_{ij}$  选取为

$$q_{ij} = \begin{matrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{matrix}.$$

相应地, 我们得到

$$E\{\lambda(i)\} = \begin{bmatrix} -3.545 & 1.7725 & 1.7725 \\ 1.0833 & -5.4164 & 4.3332 \\ 3.2 & 0.8 & -4 \end{bmatrix}$$

$\alpha = 0.1, \delta = 0.1, d = 0.05, \sigma = 0.01, \varepsilon_1 = 0.03, \varepsilon_2 = 0.01$ , 外部扰动  $\omega(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (T)$ , 初始条件  $x(0) = [0; 0]$ 。模态切换过程如图 2 所示。

接下来考虑以下四种情况:

### 情况1. $H_\infty$ 性能

取  $Y_1 = -I$ ,  $Y_2 = 0$ ,  $Y_3 = 5^2 I$ , 以及  $Y_4 = 0$ 。随后, 通过在 MATLAB 的 YALMIP 接口下使用 SeDuMi 求解器求解定理 2 中的线性矩阵不等式 (30)–(34), 可得

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} -0.7523 & -0.3702 \\ 0.2026 & -1.5200 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} -0.3678 & -0.3307 \\ 0.4398 & -6.5651 \end{pmatrix}, K_3 = \begin{pmatrix} -5.8111 & -1.7759 \\ 0.7931 & -9.4983 \end{pmatrix}, \\ \Lambda_1 &= \begin{pmatrix} 3.3904 & 6.1099 \\ -6.1099 & 42.1919 \end{pmatrix}, \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 2.4372 & 1.6619 \\ -1.6619 & 22.7854 \end{pmatrix}, \Lambda_3 = \begin{pmatrix} -2.7637 & -2.1649 \\ -2.1649 & 22.4972 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

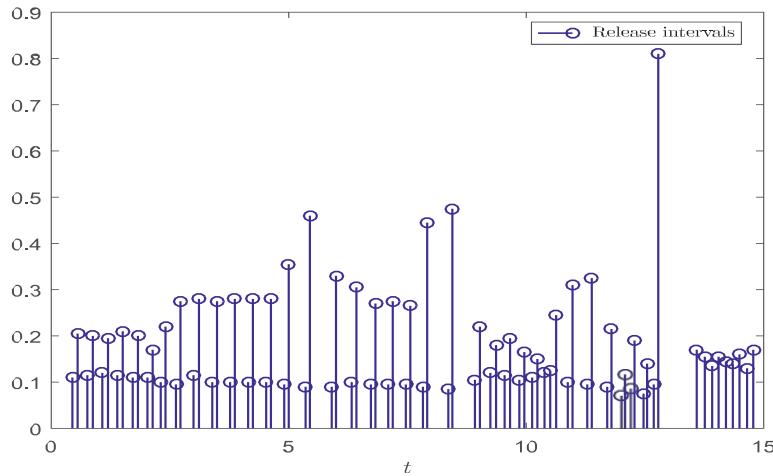


图3. 例1中情况1的MDSETM释放间隔与释放时刻。

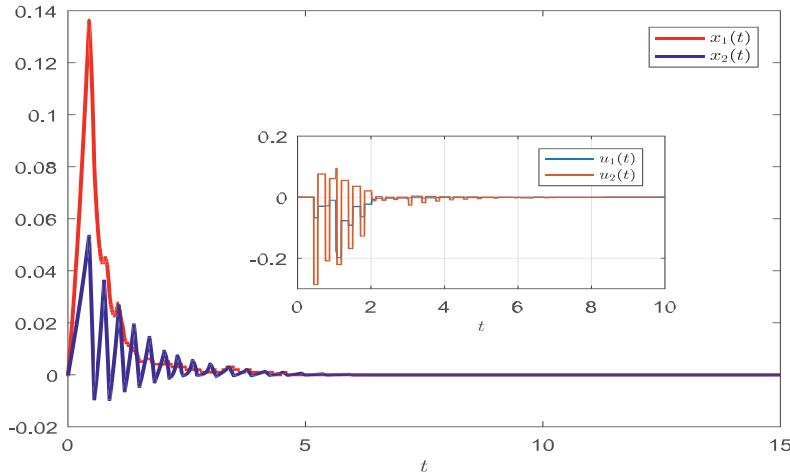


图4. 例1中情况1的带控制状态轨迹。

表2

示例1中案例1不同ETM条件下NTE的比较。

机制	非预期事件	传输速率 (%)
[45]中的PSM	300	100
STEM在[29]	175	58
STEM在[44]	97	32
MDSETM	82	27

图3展示了基于所提MDSETM的事件触发释放间隔与时刻。图4呈现了SCLS的状态轨迹。可知在基于MDSETM设计的控制器作用下，系统实现了稳定性。定义

$$H^-(t) = \frac{\int_0^t \alpha^T(\mu)x(\mu)d\mu}{\int_0^t \alpha^T(\mu)\alpha(\mu)d\mu}$$

当 $t$ 趋于无穷大时，该值对应于 $H_\infty$ 性能指标的平方。随后，图5展示了在零初始条件下 $H^-(t)$ 的演变过程。结果表明 $H^-(t)$ 最终收敛至0.0112，该值低于预设的 $H_\infty$ 性能阈值。因此，仿真结果验证了基于MDSETM控制方法在案例1的有效性。

表2展示了不同ETM下NTEs的对比结果。如表所示，基于当前MDSETM的NTEs比[45]中基于PSM的NTEs低73%，比[29]中基于STEM的NTEs低31%，比[44]中基于STEM的NTEs低5%。

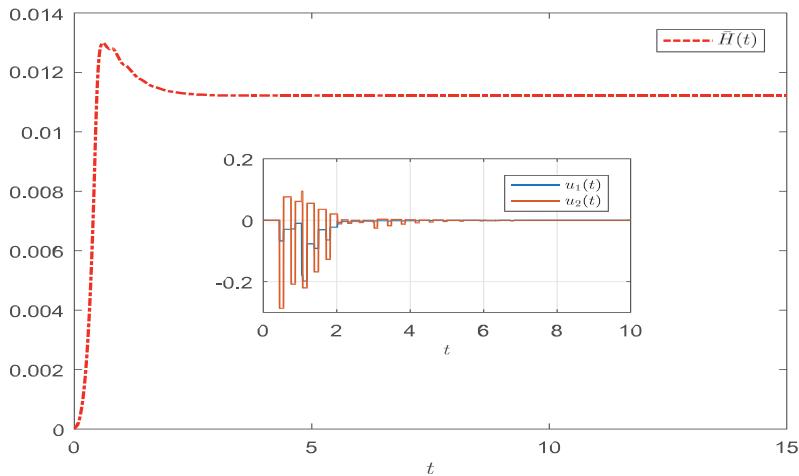
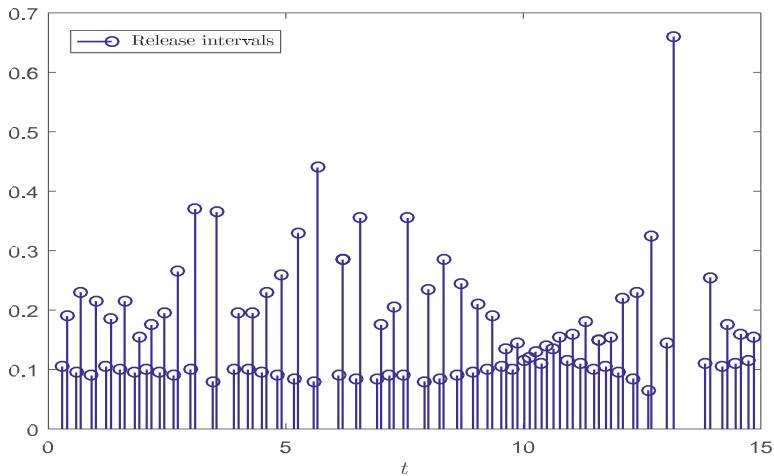
图5.  $H^-(t)$ 的轨迹。

图6. 例1中情况2的MDSETM释放间隔与释放时刻。

## 案例2. $L_2 - L_\infty$ 性能指标

取  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 0$ ,  $\gamma_3 = 5.7^2 I$ , 且  $\gamma_4 = I$ 。随后通过 MATLAB 中 YALMIP 接口下的 SeDuMi 求解器求解定理 2 中 LMI (30)–(34), 可得

$$\begin{aligned} K^1 &= \begin{pmatrix} 1.4077 & -0.4561 \\ 0.1076 & -1.5815 \end{pmatrix}, K^2 = \begin{pmatrix} 0.7761 & -0.3625 \\ 0.1683 & -7.3356 \end{pmatrix}, K^3 = \begin{pmatrix} -10.9131 & -1.3435 \\ 0.4508 & -10.4965 \end{pmatrix}, \\ A_1 &= \begin{pmatrix} 14.0691 & -5.8641 \\ -5.8641 & 67.3342 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 13.3064 & -1.3169 \\ -1.3169 & 43.2120 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 13.5803 & -2.6019 \\ -2.6019 & 41.1622 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

图6展示了基于所提机制的事件触发释放间隔与时刻。图7呈现了SCLS的状态轨迹。可发现系统在基于MDSETM设计的控制器下实现了稳定性。定义

$$L(t) = \frac{\sup_{t \geq 0} x^T(t)x(t)}{\int_0^t (\mu)^T(\mu)d\mu}$$

当 $t$ 趋于无穷大时, 这对应于 $L_2 - L_\infty$ 性能指标的平方。随后, 图8展示了满足零初始条件的 $L^-(t)$ 轨迹。结果表明 $L^-(t)$ 最终收敛至0, 该值低于预设的 $L_2 - L_\infty$ 性能阈值。因此, 仿真结果证实了基于MDSETM的控制方法在案例2中的有效性。

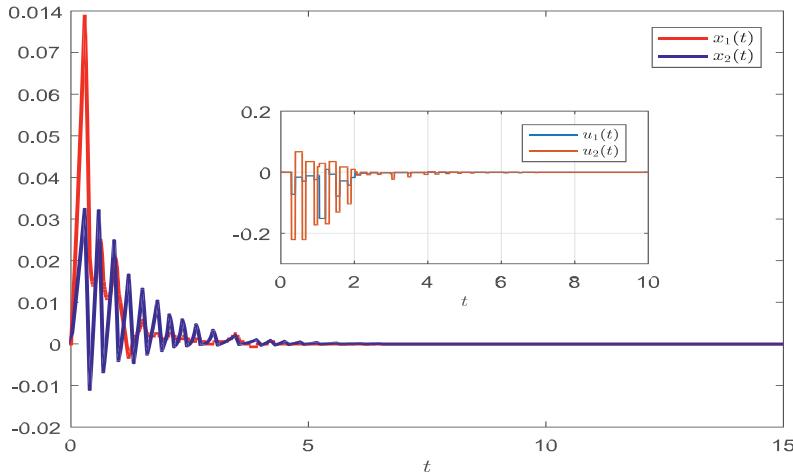


图7. 例1中情况2的受控状态轨迹。

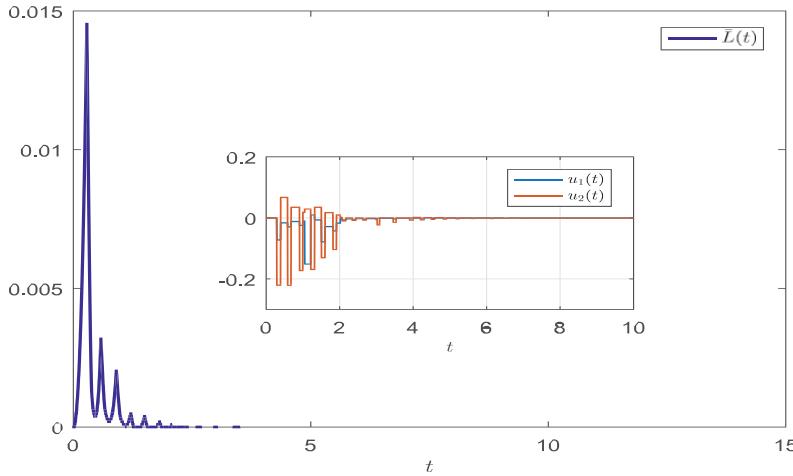
图8.  $L^-(t)$ 的轨迹。

表3

示例1中情况2下不同ETM条件下NTEs的比较。

机制	NTEs	传输速率 (%)
[45]中的PSM	300	100
STEM在[29]	169	56
STEM在[44]	102	34
MDSETM	91	30

表3展示了不同ETM下NTEs的对比情况。如表所示，基于当前MDSETM的NTEs比[45]中基于周期采样机制(PSM)的NTEs低70%，比[29]中基于STEM的NTEs低26%，比[44]中基于STEM的NTEs低4%。

### 案例3和4。被动及( $Q, S, R$ )耗散性能

分别取  $Y_1=0, Y_2=I, Y_3=4.8^2I, Y_4=0$  以及  $Y_1=-I, Y_2=I, Y_3=3.8I, Y_4=0$ 。求解定理2中的线性矩阵不等式(30)–(34)，得到

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{pmatrix} 0.3385 & 0.0466 \\ -0.2724 & -1.4282 \end{pmatrix}, K^2 = \begin{pmatrix} 0.1315 & -0.2545 \\ 0.8227 & -5.6482 \end{pmatrix}, K^3 = \begin{pmatrix} -2.6193 & 0.0299 \\ 1.3239 & -8.4859 \end{pmatrix}, \\ A_1 &= \begin{pmatrix} 1.0529 & -4.0905 \\ -4.0905 & 20.6529 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 0.4534 & -1.5255 \\ -1.5255 & 9.8624 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0.4981 & -1.5898 \\ -1.5898 & 9.7622 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

表示被动性,

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{pmatrix} -0.1464 \\ 0.2571 \end{pmatrix}, K_2 = \begin{pmatrix} -0.2558 \\ 0.8027 \end{pmatrix}, K^3 = \begin{pmatrix} -3.6713 \\ 1.2489 \end{pmatrix}, \\ \Lambda^1 &= \begin{pmatrix} 11.2148 \\ -36.5103 \end{pmatrix}, \Lambda^2 = \begin{pmatrix} 6.1781 \\ -14.7566 \end{pmatrix}, \Lambda^3 = \begin{pmatrix} 6.7317 \\ 104.6375 \end{pmatrix}, \\ \Lambda^4 &= \begin{pmatrix} -15.2888 \\ -15.2888 \end{pmatrix}, \Lambda^5 = \begin{pmatrix} 101.5738 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

对于  $(Q, S, R)$ -耗散性。基于上述反馈增益矩阵和事件触发矩阵, 可保证 SCLS 的预期性能为。为简明起见, 省略仿真结果。

**例2.** 考虑文献[38]中的2自由度(2-DOF)机械臂模型。该模型的动力学方程为:

$$F(\theta) + M(\theta)\dot{\theta} + N(\theta, \dot{\theta})\ddot{\theta} = \tau^*, \quad (39)$$

其中  $F(\theta)$ 、 $M(\theta)$  和  $N(\theta, \dot{\theta})$  分别表示重力项、质量矩阵以及科里奥利力和离心力项。具体而言,

$$\begin{aligned} \theta &= [\theta, \dot{\theta}]^T, M(\theta) = \begin{pmatrix} M_{11}(\theta) & M_{12}(\theta) \\ M_{21}(\theta) & M_{22}(\theta) \end{pmatrix}, \\ F(\theta) &= \begin{pmatrix} F_1(\theta) \\ F_2(\theta) \end{pmatrix}, N(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} N_1(\theta, \dot{\theta}) \\ N_2(\theta, \dot{\theta}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} M_{11}(\theta) &= m_1 f_1^2 + m_2 (f_1^2 + 2f_1 f_2 \cos \theta_2 + f_2^2), \\ M_{12}(\theta) &= m_2 (f_1 f_2 \cos \theta_2) + f_2^2, \\ M_{21}(\theta) &= M_{12}(\theta), M_{22}(\theta) = m_2 f_2^2, \\ N_1(\theta, \dot{\theta}) &= -m_2 (f_1 f_2 \sin \theta_2 (2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}^2)), \\ N_2(\theta, \dot{\theta}) &= m_2 f_1 f_2 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2, \\ F_1(\theta) &= (m_1 + m_2) f_1 g \cos \theta_1 + m_2 g f_2 \cos(\theta_1 + \theta_2), \\ F_2(\theta) &= m_2 g f_2 \cos(\theta_1 + \theta_2). \end{aligned}$$

考虑参数不确定性和扩展扰动, 式(39)的线性模型可描述为

$$\dot{x}(t) = (A_i + \Delta A_i)x(t) + B_i u(t) + C_i o(t),$$

其中

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix}, u(t) = \tau^*, \\ A_i &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ a(i)_1 & a(i)_2 & 0 & 0 \\ a(i)_3 & a(i)_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} b_i^1 & b(i)_2 \\ b_i^3 & b_i^4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} a(i)_1 &= -\frac{gf_2 m_{2i} (m_{1i} f_1^2 + f_1^2 m_{2i} + m_{2i} f_2^2 + 2f_1 f_2 m_{2i})}{m_{1i} f_1^2 m_{2i} f_2^2}, \\ &\quad -\frac{gf_2 m_{2i} (f_1 + f_2) (m_{1i} f_1 + f_1 m_{2i} + m_{2i} f_2)}{m_{1i} f_1^2 m_{2i} f_2^2}, \\ a(i)_2 &= -\frac{gf_2 m_{2i} (m_{1i} f_1^2 + f_1^2 m_{2i} + m_{2i} f_2^2 + 2f_1 f_2 m_{2i})}{m_{1i} f_1^2 m_{2i} f_2^2} \\ &\quad -\frac{gm^2 f_2^2 (f_1 + f_2)}{m_{1i} f_1^2 m_{2i} f_2^2}, \end{aligned}$$

$$a(i)_3 = \frac{g(f_2 + f_1 m_{2i})}{m f^2 - m f g(m + f m)_{2i} - 2 - 2i},$$

$$a(i)_4 = \frac{g(f_2 + f_1 m_{2i})}{m f_{l_1}^2 - g f m f^2 m_{2i} - 2i},$$

$$b(i)_1 = \frac{f_1 + f_2}{f_2 m_{1i} f_1'},$$

$$b(i)_2 = \frac{m_1 f^2 + f^2 m_{2i} + m_2 f^2 + 2 f_1 l_2 m_{2i}}{m_1 f^2 m_{2i} f^2},$$

$$b(i)_3 = m_{2i} f_2^2,$$

$$b(i)_4 = - \frac{f(\ell_2) + f(\ell_1) m(\ell_2) \omega}{m_{1i} f_1^2 m_{2i} f_2'}$$

$$Z_{11} = m_{11} f^2, Z_{21} = m_{21} f^2, Z_{12} = m_{12} f^2, Z_{22} = m_{22} f^2.$$

2

以下参数取自 [38]:

$$g = 9.8 m/s^2, f_1 = 0.4m, f_2 = 0.2m,$$

$$Z_{11} = 0.25N * m, Z_{21} = 0.1N * m, Z_{12} =$$

$$0.4N * m, Z_{22} = 0.2N * m, m_{11} = 0.5kg,$$

$$m_{21} = 0.3kg,$$

$$m_{12} = 0.8 \text{ 千克}, m_{22} = 0.5 \text{ 千克}.$$

不同速度之间的切换取决于  $\zeta(t)$ , 其中  $t \geq 0$ , 取值范围为  $N^- = 1, 2$ 。其余参数设定如下: { }

$$C = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}, C^{-2} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

我们假设停留时间服从威布尔分布。具体而言, 对于模式  $i$ , 我们选择转移率函数  $\lambda(i) = (\theta_1/\theta_2)^{\epsilon 2(1)}$ , 其中  $\theta_1$  和  $\theta_2$  分别是尺度参数和形状参数。在此, 当  $i=1$  时设  $\theta_{(1)}=1$  且  $\theta_{(2)}=2$ ; 当  $i=2$  时设  $\theta_{(1)}=1$  且  $\theta_{(2)}=3$ , 这意味着:

$$\lambda(i) = \frac{(-1)^{(i-1)} (2) (i)}{3t^2} e^{-\frac{3t^2}{2}},$$

相应地, 我们得到

$$E\lambda(i) = \begin{bmatrix} -1.7725 & 1.7725 \\ 2.7082 & -2.7082 \end{bmatrix}.$$

我们设定  $\alpha = 0.1, \delta = 0.1, d = 0.05, \sigma = 0.001, \varepsilon_1 = 0.03, \varepsilon_2 = 0.01, \zeta = 5e^{-t}, 10e^{-t}, 10e^{-t}, 10e^{-t}$ , 初始条件为  $x(0) = [-5; -10; 0; 0]$ 。模式切换如图 9 所示。为简明起见, 下文仅考虑扩展耗散性的两种情形。

### 情况1. 被动性能

设  $Y_1 = 0, Y_2 = I, Y_3 = 6.5^2 I$ , 且  $Y_4 = 0$ 。随后, 通过在 MATLAB 的 YALMIP 接口下使用 SeDuMi 求解器求解定理 2 中的线性矩阵不等式 (30)–(34), 可得

$$K_1 = \begin{bmatrix} -3.1888 & 2.6065 & 0.7159 & 1.5667 \\ -2.1273 & 2.7201 & -0.0887 & 1.0648 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1.3886 & 6.8116 & 1.1032 & 2.8949 \\ -1.1547 & 7.2332 & -0.0831 & 2.3852 \end{bmatrix},$$

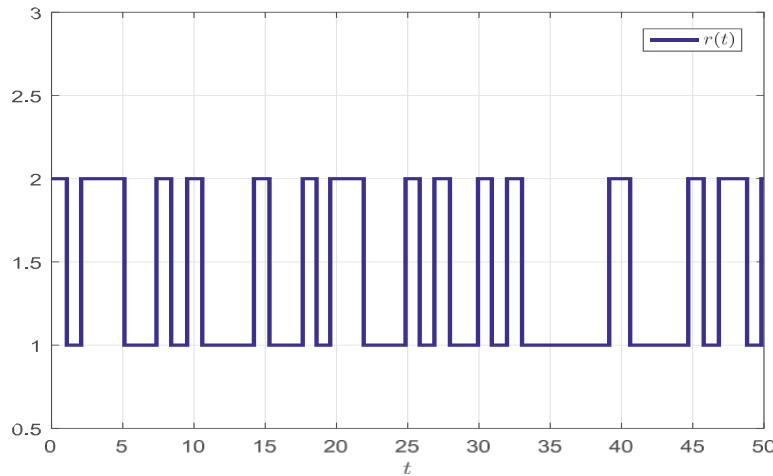


图9. 例2的开关信号。

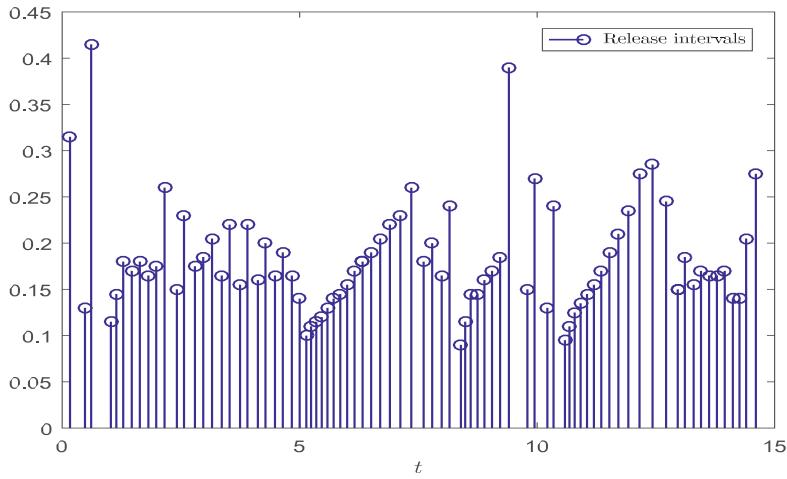


图10. 例2中情况1的MDSETM释放间隔与释放时刻。

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 4.1716 & -0.7630 & 0.3935 & -0.1378 \\ -0.7630 & 4.6068 & -0.1280 & 0.5114 \\ 0.3935 & -0.1280 & 0.0850 & -0.0056 \\ -0.1378 & 0.5114 & -0.0056 & 0.0884 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} 2.8756 & -0.3917 & 0.2977 & -0.0522 \\ -0.3917 & 4.1015 & -0.0951 & 0.4533 \\ 0.2977 & -0.0951 & 0.0770 & -0.0000 \\ -0.0522 & 0.4533 & -0.0000 & 0.0784 \end{bmatrix}.$$

图10展示了基于MDSETM控制器的事件触发释放间隔与时刻。图11描述了受控状态轨迹。显然，该系统实现了稳定性。[表4](#)展示了不同事件触发机制下非线性误差的对比结果。可见MDSETM机制下的非线性误差比[\[45\]](#)中PSM机制低72%，比[\[29\]](#)中STEM机制低65%，比[\[44\]](#)中STEM机制低5%。

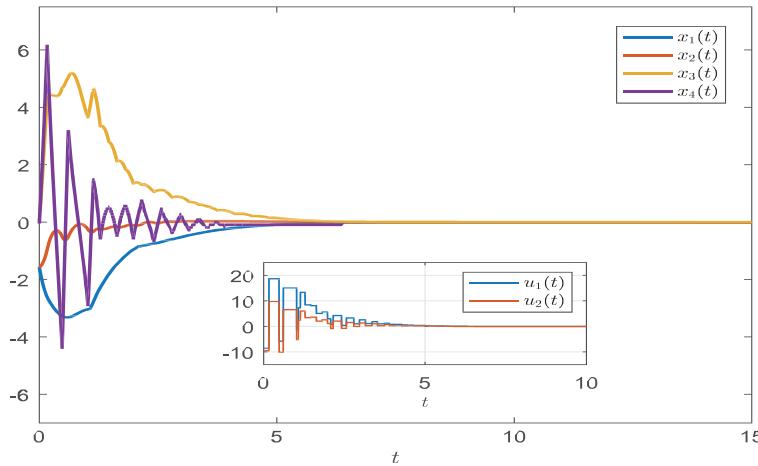


图11. 例2案例1中带控制的状态轨迹。

表4

例2案例1中不同ETM条件下NTEs的比较。

机制	非线性误差	传输速率 (%)
[45]中的PSM	300	100
[29]中的STEM	280	93
STEM在[44]	100	33
MDSETM	83	28

## 案例2. $(Q, S, R)$ -耗散性能

设  $Y_1 = -I$ ,  $Y_2 = I$ ,  $Y_3 = 6.5I$ ,  $Y_4 = 0$ 。通过在 MATLAB 的 YALMIP 接口下使用 SeDuMi 求解器求解定理 2 中的线性矩阵不等式 (30)–(34)，可得

$$\begin{aligned} K_1 &= \begin{bmatrix} -3.0617 & 2.0128 & 0.4705 & 0.9671 \\ -2.2326 & 2.2161 & -0.1472 & 0.6039 \end{bmatrix}, \\ \Lambda_1 &= \begin{bmatrix} 302.9519 & -41.1912 & 49.8130 & -14.6950 \\ -41.1912 & 100.2976 & -12.0190 & 19.8871 \\ 49.8130 & -12.0190 & 13.4775 & -1.0957 \\ -14.6950 & 19.8871 & -1.0957 & 6.0689 \end{bmatrix}, \\ K_2 &= \begin{bmatrix} -0.4235 & 5.2170 & 1.2512 & 1.5890 \\ -0.7165 & 5.9327 & 0.1389 & 1.3564 \end{bmatrix}, \\ \Lambda_2 &= \begin{bmatrix} 247.3384 & -24.1746 & 48.2814 & -6.8041 \\ -24.1746 & 119.5976 & -12.7310 & 22.4193 \\ 48.2814 & -12.7310 & 13.1804 & -1.5809 \\ -6.8041 & 22.4193 & -1.5809 & 5.5608 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

图12展示了基于设计MDSETM控制器的事件触发释放间隔与时刻。图13描述了控制输入下的状态轨迹。显然，SCLS系统能快速实现稳定性。因此，仿真结果验证了所提控制方法的有效性。表5展示了不同事件触发机制下非线性误差的对比结果。可见，基于MDSETM的非线性误差比[45]中PSM方法低51%，比[29]中STEM方法低45%，比[44]中STEM方法低3%。

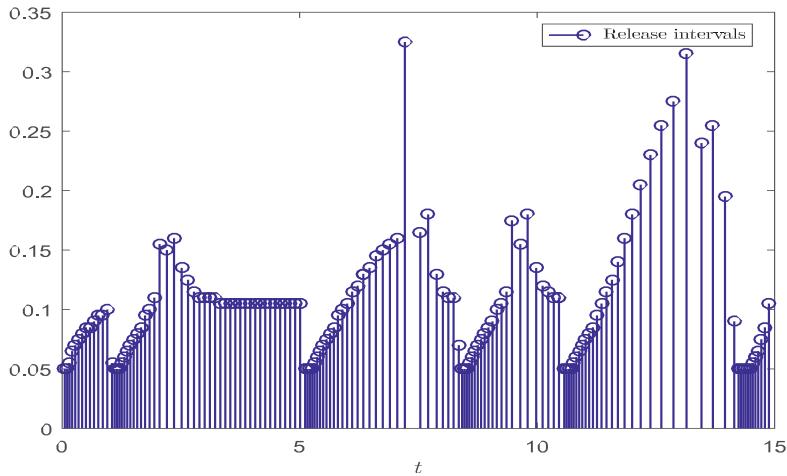


图12. 示例2中情况2的MDSETM释放间隔与释放时刻。

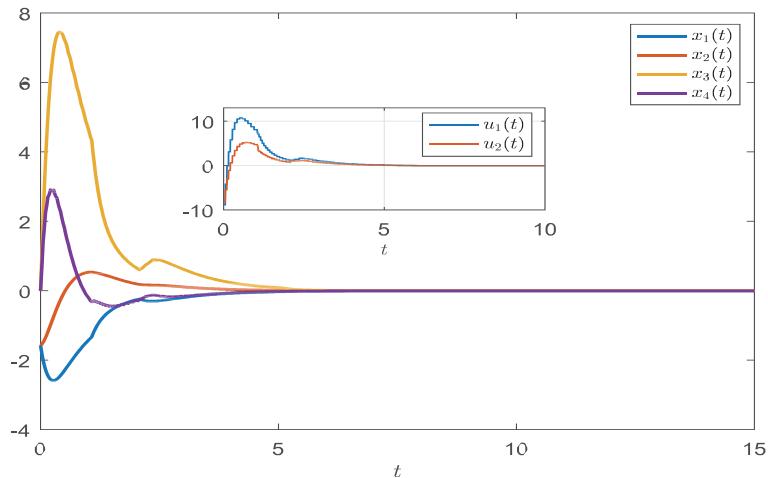


图13. 例2中情况2的带控制状态轨迹。

表5

示例2中情况2下不同ETM条件下NTEs的比较。

机制	非线性误差	传输速率 (%)
[45]中的PSM	300	100
STEM在[29]	281	94
STEM在[44]	157	52
MDSETM	147	49

## 5. 结论

本文针对含扰动的不确定半微分系统 (semi-MSS) 的扩展稳定性问题展开研究。通过在阈值函数中引入模式依赖事件触发矩阵与扰动相关项，构建了多阈值事件触发矩阵 (MDSETM) 以确定触发时刻。通过采用时域与模态相关的分段定义  $\nu(t)$ ，[定理1提出了](#) 半MSS(6)的随机稳定性与扩展耗散性判据。基于该判据，[定理2](#)通过矩阵不等式的等效变换，建立了反馈增益矩阵与事件触发矩阵的基于线性矩阵不等式的协同设计方法。最后，通过直流电机模型与双自由度机械臂模型的实例验证，展现了MDSETM的优势及所提控制器设计方法的有效性。

本文设计的MDSETM基于可测扰动。当扰动不可测量时，可先通过设计观测器获取这些扰动的估计值，再将其应用于ETM。该将成为我们未来研究的方向之一。

## 利益冲突声明

作者声明不存在利益冲突。

## 数据可用性

本文所述研究未使用任何数据。

## 致谢

本研究得到安徽省重点研发计划（项目编号：202004a07020028）和安徽省高等教育机构自然科学基金（项目编号：2022AH050290）的支持。

## 参考文献

- [1] O.L.V. Costa, M.D. Fragoso, M.G. Todorov, 《连续时间马尔可夫跳跃线性系统》, Springer出版社, 2012.
- [2] P. Shi, Y. Yin, F. Liu, J. Zhang, 《具有缺失信息的饱和马尔可夫跳跃系统的鲁棒控制》, 《信息科学》265 (2014) 123–138.
- [3] R. Sakthivel, M. Rathika, S. Santra, M. Muslim, 基于观测器的马尔可夫跳跃系统耗散控制：基于delta算子的方法, 国际系统科学杂志 48 (2017) 247–256.
- [4] H. He, W. Qi, Z. Liu, M. Wang, 具有加性攻击的马尔可夫跳跃系统的自适应抗攻击控制, 《非线性动力学》103 (2021) 1585–1598.
- [5] D. Zhai, L. An, J. Li, Q. Zhang, 随机参数变化马尔可夫跳跃系统的故障检测及其在网络化控制系统中的应用, 应用数学模型 40 (2016) 2368–2383.
- [6] 曹志强, 牛永明, 受执行器非线性约束的马尔可夫跳变系统有限时间滑模控制及其在轮式移动机械臂中的应用, J. Franklin Inst. 355 (2018) 7865–7894.
- [7] 程建, 吴勇, 闫海, 吴志刚, 石凯, 基于协议的开关链模糊马尔可夫仿射系统滤波, Automatica 141 (2022) 110321.
- [8] L. Zhang, T. Yang, P. Colaneri, 具有指数调制周期停留时间分布的半马尔可夫跳跃线性系统的稳定性与稳定性, IEEE Trans. Autom. Control 62 (2016) 2870–2885.
- [9] S. Ouaret, 随机需求与恶化库存条件下含半马尔可夫跳跃的生产控制问题, 应用数学建模 107 (2022) 85–102.
- [10] 周杰, 刘勇, 夏建, 王志, 阿里克·萨利姆, 具有半马尔可夫跳跃参数的随机延迟反应-扩散神经网络的弹性容错抗同步化, 神经网络, 125卷 (2020年), 194–204页。
- [11] 杨杰, 宁志, 朱勇, 张亮, 林汉康, 具有双边界停留时间的半马尔可夫跳跃线性系统: 反模异步控制, 《自动学报》140卷 (2022) 110270.
- [12] 高明, 齐伟, 曹军, 程建, 石凯, 高勇, 相位型随机非线性半马尔可夫跳跃系统的自适应微分控制, 《非线性动力学》108卷 (2022) 279–292页。
- [13] 董思, 陈刚, 刘明, 吴志刚, 带输入量化网络化不确定半马尔可夫跳跃非线性系统的鲁棒自适应 $H_{\infty}$ 控制, 《中国科学·信息科学》65卷 (2022) 189201.
- [14] H. Shen, F. Li, S. Xu, V. Sreeram, 具有奇异扰动的半马尔可夫跳跃系统的慢态变量反馈稳定性, IEEE Trans. Autom. Control 63 (2017) 2709–2714.
- [15] E.K. Boukas, Z. Liu, G. Liu, 具有时滞的跳跃线性系统的时滞依赖鲁棒稳定性与 $H_{\infty}$ 控制, 国际控制学报 74 (2001) 329–340.
- [16] 徐志强, 苏海峰, 石鹏, 吴志强, 半马尔可夫跳跃线性系统的异步 $H_{\infty}$ 控制, 应用数学与计算, 349 (2019) 270–280.
- [17] 张建, 马思, 奇异半马尔可夫跳跃系统的鲁棒 $H_{\infty}$ 无限保证成本动态输出反馈控制, 《弗兰克林学会学报》(2021), doi:10.1016/j.jfranklin.2021.04.051。
- [18] 徐勇, 李建, 卢锐, 刘晨, 吴勇, 混合型攻击下时变马尔可夫跳跃神经网络的有限时域 $L_2-L_\infty$ 同步: 基于观测器的案例, IEEE神经网络与学习系统汇刊 30 (2018) 1695–1704.
- [19] Z. Yan, C. Sang, M. Fang, J. Zhou, 具有随机扰动和马尔可夫切换拓扑的多智能体系统中的能量峰值共识, Trans. Inst. Meas. Control. 40 (2018) 4358–4368.
- [20] 何思, 刘峰, 中性时滞马尔可夫跳变系统的 $L^2-L^\infty$ 模糊控制, 数学计算与仿真, 92卷 (2013年), 1–13页。
- [21] X. Hu, J. Xia, Y. Wei, B. Meng, H. Shen, 基于被动性的半马尔可夫跳跃耦合混沌神经网络状态同步研究 (含随机时滞)  
发生的时间延迟, 应用数学与计算 361 (2019) 32–41.
- [22] B. Zhang, W.X. Zheng, S. Xu, 基于新型性能指标的马尔可夫跳变延迟系统滤波, IEEE电路与系统学会学报: 常规论文 60 (2013) 1250–1263.
- [23] R. Sakthivel, A. Parivallal, N.H. Tuan, S. Manickavalli, 带干扰的半马尔可夫跳跃多智能体系统共识的非脆弱控制设计, 国际自适应控制与信号处理期刊 35 (2021) 1039–1061.
- [24] 陈伟, 戴明志, 关超, 费志, 具有部分未知转移率的半马尔可夫跳跃神经网络的扩展耗散性, 《神经计算》423 (2021) 601–608.
- [25] 丁凯, 朱庆, 基于扰动观测器的多扰动延迟切换奇异半马尔可夫跳跃系统扩展耗散抗扰控制, 《Automatica》128 (2021) 109556.
- [26] C. Pradeep, Y. Cao, R. Murugesu, R. Rakkiyappan, 基于广义自由权重矩阵方法的时变延迟半马尔可夫跳跃神经网络事件触发同步, 数学计算与仿真 155 (2019) 41–56.
- [27] P. Tabuada, 稳定控制任务的事件触发实时调度, IEEE Trans. Autom. Control 52 (2007) 1680–1685.
- [28] W.H. Heemels, M. Donkers, A.R. Teel, 《线性系统的周期事件触发控制》, IEEE Trans. Autom. Control 58 (2012) 847–861.
- [29] A. Selivanov, E. Fridman, 事件触发 $H_{\infty}$ 控制: 一种切换方法, IEEE自动化控制汇刊 61 (2016) 3221–3226.
- [30] Z. 费, C. 关, H. 高, 基于混合事件触发方案的网络化混沌延迟神经网络指数同步, IEEE神经网络与学习系统汇刊 29 (2017) 2558–2567.  
学习系统 29 (2017) 2558–2567.
- [31] 丁思, 王志, 离散时间神经网络的事件触发同步: 一种切换方法, 《神经网络》125 (2020) 31–40.
- [32] 王晓, 王志, 宋庆, 沈浩, 黄晓, 基于等待时间的事件触发方案用于复数神经网络的稳定性, 《神经网络》121卷 (2020) 329–338页。
- [33] 闫志, 黄晓, 范勇, 夏军, 沈浩, 基于混合事件触发控制的时滞忆阻神经网络阈值函数依赖准同步研究, 《IEEE系统、人、控制论系统汇刊》51卷(2021) 6712–6722页。
- [34] 刘晓, 于晓, 周晓, 西辉, 具有半马尔可夫切换的线性系统的有限时间 $H_{\infty}$ 控制, 《非线性动力学》85卷 (2016) 2297–2308页。
- [35] 齐伟, 宗刚, 郑伟, 基于半马尔可夫过程的随机切换系统自适应事件触发式SMC及其在升压变换器电路模型中的应用, IEEE电路与系统学会学报(I)常规论文 68 (2021) 786–796.  
电路模型, IEEE电路与系统学报: 常规论文 68 (2021) 786–796.
- [36] A. Vargas, E. Costa, J. do Val, 关于无模式观测马尔可夫跳跃线性系统的控制: 应用于直流电机装置, 《国际鲁棒非线性控制杂志》23卷 (2013) 1136–1150页.
- [37] Y. Yin, P. Shi, F. Liu, C. Lim, 《非齐次马尔可夫跳跃过程的鲁棒控制: 直流电机装置应用》, 《弗兰克林学会学报》351 (2014) 3322–3338.

- [38] 姚晓, 张亮, 郑伟, 半马尔可夫跳跃系统的不确定扰动抑制与衰减及其在两自由度机械臂中的应用, 《IEEE电路与系统学报: 常规论文》68卷 (2021) 3836–3845页。
- [39] C. 杜, C. 杨, F. 李, W. 桂, 基于输出反馈滑模方法的人工延迟马尔可夫跳跃系统新型异步控制, IEEE系统、人、控制论系统汇刊 49 (2018) 364–374.
- [40] I. Wolf, D. Munoz, W. Marquardt, 基于邻域极值更新的一致分层经济性非定常多阶控制: 适用于某类混合系统, 过程控制杂志 24 (2014) 389–398.
- [41] T.H. Lee, J.H. Park, S.M. Lee, O.M. Kwon, 基于随机采样数据 控制的混沌系统鲁棒同步 (含随机性不确定性), 《国际控制学报》86 (2013) 107–119.
- [42] X. Chang, J. Song, X. Zhao, 连续时间非线性系统中具有 $h_{\infty}$ 的鲁棒滤波器设计, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 30 (2022) 591–596.
- [43] 周杰, 徐思, 张波, 邹勇, 沈浩, 具有分布式时延与反应差分融合的不确定随机神经网络的鲁棒指数稳定性, IEEE神经网络与学习系统汇刊 23 (2012) 1407–1416.  
融合系统, IEEE神经网络与学习系统汇刊, 23卷(2012年), 1407–1416页。
- [44] 吴伟, 何亮, 周杰, 宣志, 阿里克, 基于扰动项的混沌Lur'e系统联合性能保证的事件触发切换同步控制, 《非线性科学与数值模拟通讯》115卷 (2022) 106774页。
- [45] 华晨, 葛晨, 关晓, 基于采样数据控制的时滞混沌Lur'e系统同步研究, 《IEEE神经网络与学习系统汇刊》26 (2014) 1214–1221.
- [46] J. 黄, Y. 石, 半马尔可夫跳跃线性系统的随机稳定性与鲁棒稳定性, 《国际鲁棒非线性控制杂志》23卷 (2013年) 2028–2043页。
- [47] 顾凯, 陈建, V.L. Kharitonov, 《时滞系统的稳定性》, Springer Science & Business Media, 2003年。
- [48] 张志, 张建, 艾志, 基于时间滞后分数阶基因调控网络系统的新型稳定性判据研究, 《非线性科学与数值模拟通讯》66卷 (2019) 96–108页。
- [49] 谢立, 傅明, C.E. de Souza 等, 基于输出反馈的参数不确定系统 $H_{\infty}$ 控制与二次稳定性, IEEE自动控制汇刊 37 (1992) 1253–1256.
- [50] 王建, 张晓, 韩青, 时变时滞神经网络的事件触发广义耗散性滤波, IEEE神经网络与学习系统汇刊 27 (2016) 77–88.
- [51] 刘宇, 方飞, 朴俊, 金浩, 易晓, 具有输入时延与量化测量的马尔可夫跳跃系统的异步输出反馈耗散控制, 《非线性分析与混合系统》31卷 (2019) 109–122页。
- [52] X. Zhang, Q. Han, X. Ge, B. Zhang, 时变延迟离散时间神经网络的延迟-变差依赖扩展耗散性判据, IEEE神经网络与学习系统汇刊 (2021), doi:[10.1109/TNNLS.2021.3105591](https://doi.org/10.1109/TNNLS.2021.3105591). 在线发表
- [53] 冯志强, 林建华, 离散时滞奇异系统的鲁棒可靠耗散滤波, 信号处理, 92 (2012) 3010–3025.
- [54] 吴志强, 石鹏, 苏海荣, 朱建华, 具有时滞的混沌Lur'e系统的采样数据同步, IEEE神经网络与学习系统汇刊 24 (2013) 410–421.