Funzionali lineari continui su spazi di Hilbert.

H sp. di Hilbert, fissato $x \in H$

$\Lambda : H \longrightarrow \mathbb{R}$

$\Lambda : y \longmapsto \langle x, y \rangle$ funzionale, lineare,

continuo $|\Lambda y| \leq \|x\| \, \|y\| \Rightarrow \|\Lambda\|_{H^*} \leq \|x\|$

$\Lambda x = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$ $\qquad \dfrac{|\Lambda x|}{\|x\|} = \|x\| \leq \|\Lambda\|_{H^*}$

$\Rightarrow \|\Lambda\|_{H^*} = \|x\|_H$.

Ci sono altri modi di definire funzionali lin. continui su H?

NO:

<u>Th.</u> di rappresentazione di Riesz (per sp. di Hilbert).

Sia $\Lambda \in H^*$ allora $\exists!\ x \in H$ t.c.

$\Lambda y = \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H$ (si dice che x è l'elem. di H che rappresenta Λ), inoltre $\|\Lambda\|_{H^*} = \|x\|_H$

Il duale H^* di H si può identificare con H stesso

$H^* \simeq H$

(es. $(\mathcal{L}^2(\Omega))^* \simeq \mathcal{L}^2(\Omega)$).

Dim. Una volta provato che $\exists\, x$ che rappresenta Λ, ne segue $\|\Lambda\|_{H^*} = \|x\|_H$ come sopra.

Dim. dell'unicità. Supponiamo che $\exists\, x_1, x_2 \in H$ t.c.

$$\Lambda y = \langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle \quad \forall y \in H.$$

$$\langle x_1 - x_2, y\rangle = 0 \quad \forall y \in H$$

Per $y = x_1 - x_2$ $\quad 0 = \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = \|x_1 - x_2\|^2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$ (unicità).

Proviamo l'esistenza.

(Se $\exists\, x : \Lambda y = \langle x, y\rangle \ \forall y$

$\Lambda y = 0 \iff x \perp y$

$x \perp N(\Lambda)$.)

$N(\Lambda)$ è un sottosp. vett. di H (perché Λ è lin.) chiuso (perché Λ è continuo).

Se $N(\Lambda) = H$ allora $\Lambda y = 0 \ \forall y$

[illegible] $x = 0$ $\quad \Lambda y = \langle 0, y \rangle$

Sia $N(\Lambda) \subsetneq H$ sottosp. chiuso proprio di H,

per il coroll. del Th. della proiezione $\exists$ $\underline{z \neq 0}$

$z \in N(\Lambda)^{\perp}$.

(L'x che cerchiamo sarà un multiplo di questo z)

Sia $y \in H$ consideriamo: $\left[y - \frac{(\Lambda y)}{(\Lambda z)} z \right]$

$\Lambda z \neq 0$ perché $z \notin N(\Lambda)$ (perché $z \in N(\Lambda) \cap N(\Lambda)^{\perp} \Rightarrow z = 0$ assurdo)

$$\Lambda \Big[\underbrace{y - \frac{(\Lambda y)}{(\Lambda z)} z}_{\in N(\Lambda)} \Big] = \Lambda y - \frac{(\Lambda y)}{\cancel{(\Lambda z)}} \cancel{\Lambda z} = 0$$

$z \in N(\Lambda)^{\perp}$ perciò $0 = \left\langle z, y - \frac{(\Lambda y)}{(\Lambda z)} z \right\rangle$

$$= \langle z, y \rangle - \frac{\Lambda y}{\Lambda z} \|z\|^2$$

$$\Rightarrow \Lambda y = \frac{\Lambda z}{\|z\|^2} \langle z, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

ponendo $x = z \left(\frac{\Lambda z}{\|z\|^2} \right)$ //

Richiami su divergenza e teorema della divergenza in dimensione n qualsiasi:

"$\not\!\mathbb{X}$ In $\mathbb{R}^3$: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ è un dominio

"abbastanza regolare" e limitato e $\underline{u}: \Omega \to \mathbb{R}$

$\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ allora

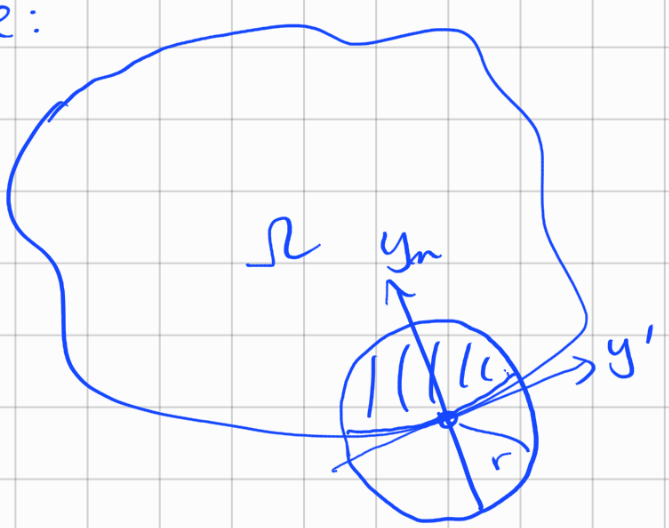
$$\int_\Omega \nabla \cdot \underline{u}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \underline{u}(\sigma) \cdot \underline{n}_e \, d\sigma$$

Cosa vuol dire: "dominio regolare" o "dominio con frontiera regolare" in $\mathbb{R}^n$?

Ω dominio = Ω aperto connesso

Ω si dice dominio $\mathcal{C}^1$ (o anche "di classe $\mathcal{C}^1$")

Se:



$\forall\, \bar{x} \in \partial\Omega \quad \exists\, B_r(\bar{x})$

ed $\exists$ un sistema di coordinate $y = (y', y_n)$
$\uparrow$
$\mathbb{R}^{n-1}$

centrato in $\bar{x}$ ed $\exists$

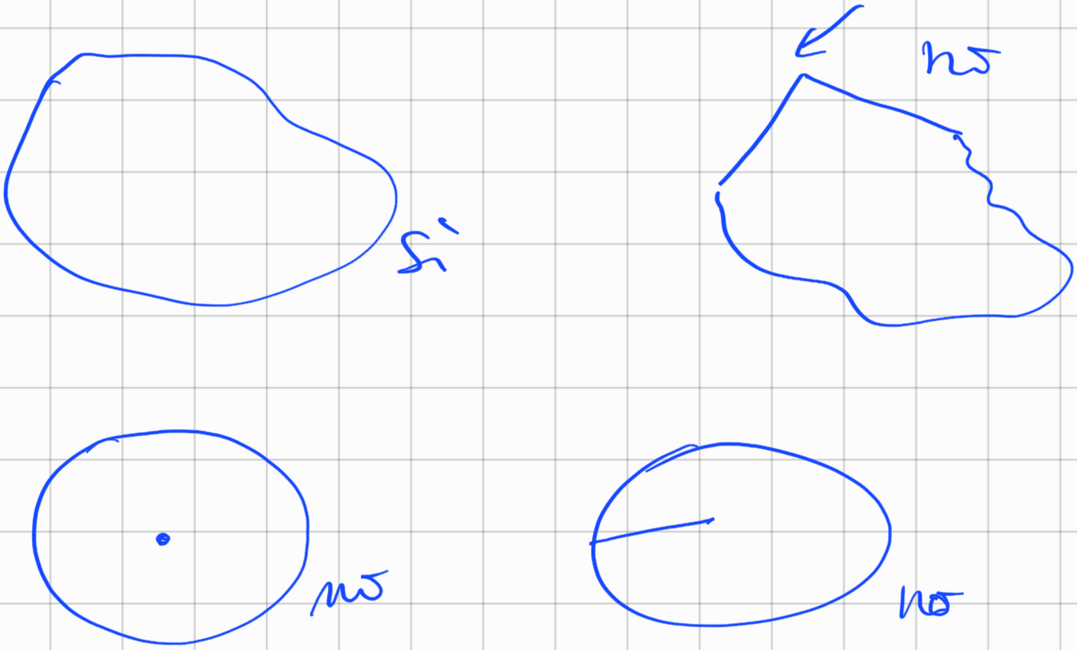
una funzione $y_n = \phi(y')$ definita in un

un intorno (n-1) dimensionale di 0 $\phi \in \mathcal{C}^1$

tale che: $\partial\Omega \cap B_r(\bar{x}) = \{(y', \phi(y')) : y' \in \Delta\}$

$\Omega \subseteq B_r(\bar{x}) \subseteq \{(y', y_n) : y_n > \phi(y'), y' \in \Delta\}$

$dS = \sqrt{1 + |\nabla\phi(\sigma)|}\, d\sigma$



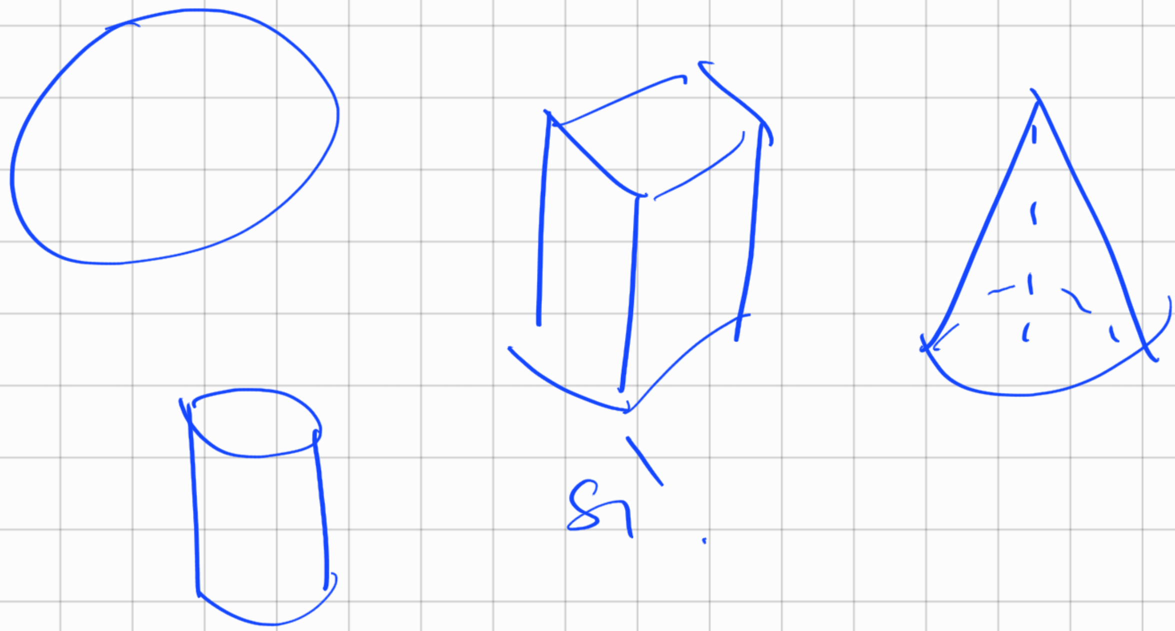
$\boxed{\text{Def.}}$ Si dice che $f : \Omega \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana se $\exists K > 0$ t.c. $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$

$\forall x_1, x_2 \in \Omega$.

(Se $f \in C^1(\bar{\Omega})$ allora f è Lip.)

Una funzione lipschitziana può avere punti angolosi

Domini lipschitziani. (v. sopra, con φ lipschitziane).



Th. della divergenza Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio limitato e lipschitziano e sia $\underline{u} : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\underline{u} \in C^1(\overline{\Omega})$ allora $\int_\Omega \nabla \cdot \underline{u}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \underline{u}(\sigma) \cdot \underline{n}_e \, d\sigma$

Identità notevoli:

$\nabla \cdot (f\,\underline{G}) =$
$= \nabla f \cdot \underline{G} + f\, \nabla \cdot \underline{G}$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$
$\underline{G} : \Omega \to \mathbb{R}^n$
C^1

$\nabla \cdot (f\, \nabla g) =$

$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$

$$= \nabla f \cdot \nabla g + f \, \nabla \cdot \nabla g$$

$\cancel{f, g}$ $f \in C^1$
$g \in C^2$

$$\underbrace{\nabla \cdot \nabla g}_{} = \Delta g$$

$$" \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = \Delta g$$

$$\boxed{\nabla \cdot (f \nabla g) = \nabla f \cdot \nabla g + f \Delta g}$$

$$\underbrace{\int_{\Omega} \nabla \cdot (f \nabla g) \, dx}_{\int_{\partial\Omega} f \, \underbrace{\nabla g \cdot \underline{n}_e}_{} \, d\sigma} = \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx + \int_{\Omega} f \Delta g \, dx$$

$\frac{\partial g}{\partial n_e}$ derivata normale di g (uscente)

1° identità di Green

$$\underline{\int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx} + \int_{\Omega} f \Delta g \, dx = \int_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n_e} \, d\sigma$$

$f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\quad f \in C^1(\bar{\Omega})$ $\quad g \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$

Scriviamo ora la stessa identità con f e g scambiate tra loro, e sottraiamo membro a membro: 2° identità di Green

2ª identità di Green

$$\int_\Omega \left(f\,\Delta g - g\,\Delta f\right)dx = \int_{\partial\Omega}\left(f\frac{\partial g}{\partial n_e} - g\frac{\partial f}{\partial n_e}\right)d\sigma$$

per $f,g : \Omega \to \mathbb{R}$, $f,g \in \mathcal{C}^2(\Omega)\cap\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$

Operatore di Laplace, equazione di Laplace / Poisson, suoi significati fisici.

1. Elettrostatica. Teorema di Gauss dell'elettrostatica

Ho una distribuzione continua di carica elettrica nello spazio, sia $\underline{E}$ il campo elettrico, $\forall$ dominio Ω

$$\int_{\partial\Omega} \underline{E}\cdot \underline{n}_e\, d\sigma = 4k\pi\, Q_{tot.}(\Omega)$$

$$\int_\Omega \nabla\cdot \underline{E}(x)\,dx \qquad = \qquad 4k\pi\int_\Omega \rho(x)\,dx$$

densità di carica

$$\int_\Omega \left[\nabla\cdot E(x) - 4k\pi\,\rho(x)\right]dx = 0$$

Poiché questo è vero $\forall\,\Omega$,

$$\nabla\cdot \underline{E}(x) = 4k\pi\rho(x)$$

E è conservativo $E = \nabla u$ con u = potenziale

$\underline{E}$ è conservativo $\underline{E} = \nabla u$ con u = potenziale elettrostatico.

$$\nabla \cdot \nabla u = 4k\pi\rho$$

$$\boxed{\Delta u = 4k\pi\rho}$$ equazione di Poisson per il potenziale elettrostatico

termine di sorgente

Nelle regioni prive di carica elettrica sarà

$$\boxed{\Delta u = 0}$$ equazione di Laplace

Una funzione $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ t.c. $\Delta u = 0$ si dice armonica in Ω

Per il potenziale gravitazionale u sarà:

$$\Delta u = -4G\pi\rho$$ densità di materia

$$\boxed{\Delta u = f}$$ equazione di Poisson.

Moto di un fluido incomprimibile (es. acqua) sia $\underline{v}$ il campo di velocità

$$\Rightarrow \nabla \cdot \underline{v} = 0$$

Supponiamo che il moto sia non vorticoso

allora $\nabla \times \underline{v} = \underline{0}$

Allora $\underline{v}$ è almeno localmente conservativo, cioè $\exists$ un potenziale di velocità ϕ t.c.

$$\underline{v} = \nabla \phi$$

$$\nabla \cdot \nabla \phi = 0 \qquad \boxed{\Delta \phi = 0}$$

"Il potenziale di velocità di un fluido incomprimibile in moto non vorticoso è una funzione armonica".

L'equaz. $\Delta u = f$ si può vedere come caso stazionario dell'equazione di diffusione

u = temperatura in un mezzo continuo

$$\cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff. } D>0 \text{ di diffusione}}}{D} \Delta u = \underset{\text{termine di sorgente}}{f}$$

Se il sistema ha raggiunto l'equilibrio termico e la temperatura nel tempo non cambia

$$-D \Delta u = f$$

In particolare, in assenza di sorgenti o pozzi di calore,

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{(in dimensione 2)}$$

può vedersi come equaz. della membrana elastica in equilibrio

Significato matematico dell'equazione di Laplace, in dimensione $n=2$.

Funzioni olomorfe. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ aperto

$f(z)$ olomorfa in Ω.

$$f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

f olomorfa in $\Omega \iff u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ e

soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{cases}$$

= per il th. di Schwartz purché $\in \mathcal{C}^2$

In realtà, parte reale e immaginaria di f sono $\mathcal{C}^\infty$!

$$\Delta u = 0 \qquad \Delta v = 0$$

"Parte reale e immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche".

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x \cos y} + i\,\underbrace{e^x \sin y}$$

$u(x,y) \qquad\qquad v(x,y)$

$u(x,y) = e^x \cos y \qquad \Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2$

$z^n = (x+iy)^n$

$u_n(x,y) = \mathrm{Re}\left[(x+iy)^n\right]$

$v_n(x,y) = \mathrm{Im}\left[(x+iy)^n\right]$

$\rightarrow$ sono armoniche in $\mathbb{R}^2$

$u_3 = \mathrm{Re}\,(x+iy)^3 = \mathrm{Re}\left(x^3 + 3x^2 iy - 3xy^2 - iy^3\right) = \boxed{x^3 - 3xy^2}$

$\Delta\left(x^3 - 3xy^2\right) = 6x - 6x = 0$

$3x^2 - 3y^2 \qquad -6xy$

$6x \qquad -6x$

Le funzioni u_n, v_n scritte più sopra si chiamano armoniche fondamentali nel piano.

$z^n = (\rho e^{i\vartheta})^n = \rho^n e^{in\vartheta}$

$= \rho^n \cos n\vartheta + i\,\rho^n \sin n\vartheta$

$u_n(x,y) = \rho^n \cos(n\vartheta) \qquad v_n(x,y) = \rho^n \sin(n\vartheta)$

Problemi differenziali che si studiano per Δ.

Problemi al contorno tipici per l'equazione
$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega$$

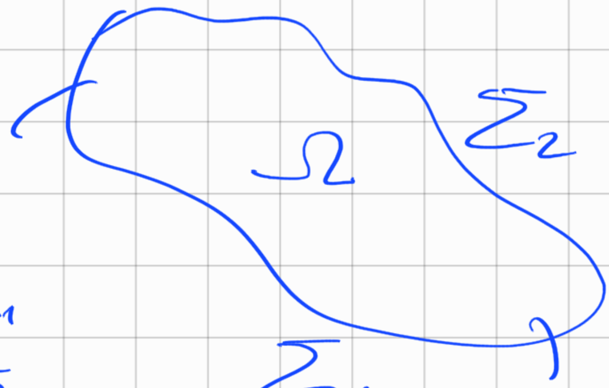
Tipi di condizioni al contorno:

condiz. di Dirichlet : $\quad u = g$ su $\partial\Omega$

condiz. di Neumann: $\quad \dfrac{\partial u}{\partial n_e} = g$ su $\partial\Omega$

es. u = temperatura, $\quad \dfrac{\partial u}{\partial n_e} = 0$ vuol dire: corpo termicam. isolato.

condiz. di tipo misto



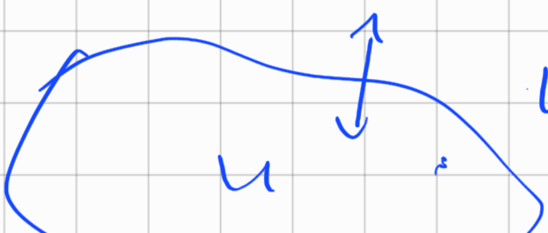
$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \partial\Omega$

$u = g$ su Σ_1

$\dfrac{\partial u}{\partial n_e} = h$ su Σ_2

condiz. di Robin $\quad \dfrac{\partial u}{\partial n_e} + \alpha u = g \quad \alpha > 0$

u = temperatura



u_0 = temperatura dell'ambiente esterno

$$\frac{\partial u}{\partial n_e} = \alpha(u_0 - u) > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_e} + \alpha u = \alpha u_0 = g$$

Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_e} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Teorema di unicità Sia Ω un dominio limitato e lipschitziano. Allora nella classe di funzioni $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, la soluzione di un probl.

- di Dirichlet
- misto
- di Robin

è unica;

- di Neumann

è unica a meno di costante additiva.

Dim. Siano $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ 2 soluzioni dello stesso problema. Allora $u = u_1 - u_2$ soddisfa

$$\Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 = f - f = 0 \text{ in } \Omega$$

e condizione al contorno zero.

Ts. $u \equiv 0$ in Ω 1ª identità di Green $u=v$

$u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$

$$\cancel{\int_\Omega u \underbrace{\Delta u}_{\overset{\shortparallel}{0}} dx} + \underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \, dx}_{\shortparallel} = \underbrace{\cancel{\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial n_e} d\sigma}}_{0}$$

caso Dirichlet: $u=0$ su $\partial\Omega$

caso Neumann $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ su $\partial\Omega$

caso misto

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 0$$

$\Rightarrow \nabla u \equiv 0$ $u \equiv$ costante in Ω.

caso Dirichlet: $u \equiv 0$
caso misto $u \equiv 0$ $\Big\} \Rightarrow u_1 = u_2$

caso Neumann. $u \equiv$ costante $\} \Rightarrow u_1 = u_2 + c$.

Notiamo che la soluzione del problema di Neumann non può esistere $\forall$ scelta di f, g.

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n_e} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\int_\Omega v \, \Delta u \, dx + \cancel{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx} = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n_e} d\sigma$$

$v \equiv 1$

$$\int_\Omega \underbrace{\Delta u}_{f}\,dx = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial n_e}}_{g}\,d\sigma$$

$$\boxed{\int_\Omega f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} g(\sigma)\,d\sigma}$$

condizione di compatibilità
(condizione necessaria, sul termine noto f e dato al bordo g) affinché $\exists$ soluz. u.

$$\cancel{\begin{cases} \Delta u = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n_e} = g \end{cases}} \qquad \begin{cases} \Delta u = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n_e} = 0 \end{cases} \qquad \int_\Omega f(x)\,dx = 0$$

Problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace sul cerchio $(n = 2)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & \text{per } x^2+y^2 \le r^2 \\ u(x,y) = f(x,y) & \text{per } x^2+y^2 = r^2 \end{cases}$$

Si affronta bene in coord. polari $\quad u(\rho,\vartheta)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0 & 0 \le \rho < r \\ & \vartheta \in [0, 2\pi) \\ u(r, \vartheta) = f(\vartheta) & \vartheta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

Metodo di separazione delle variabili.

Cerchiamo soluzioni a variabili separate, cioè:

$$\Rightarrow u(\rho, \vartheta) = R(\rho)\,\Theta(\vartheta)$$

$$R''(\rho)\Theta(\vartheta) + \frac{1}{\rho}R'(\rho)\Theta(\vartheta) + \frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Theta''(\vartheta) = 0$$

$$\cdot \frac{\rho^2}{R(\rho)\Theta(\vartheta)}$$

$$\boxed{\underbrace{\rho^2\frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)}} = -\frac{\Theta''(\vartheta)}{\Theta(\vartheta)} \quad \forall \rho \in [0, r) \quad \forall \vartheta \in [0, 2\pi)}$$

$$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.c.}$$

$$1^\circ m = 2^\circ m = \lambda \quad \forall \rho \quad \forall \vartheta$$

$$-\frac{\Theta''(\vartheta)}{\ } = \lambda \qquad \Theta''(\vartheta) + \lambda\Theta(\vartheta) = 0$$

$$\boxed{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) = \lambda R(\rho)}$$

$$\Theta''(\vartheta) + \lambda \Theta(\vartheta) = 0$$

$\Theta(\vartheta)$ dev'essere 2π-periodico se voglio che u sia regolare nel cerchio

$\lambda > 0$ $\qquad \Theta(\vartheta) \qquad \cos\sqrt{\lambda}\,\vartheta \qquad \sin\sqrt{\lambda}\,\vartheta$

$\sqrt{\lambda} = n = 1, 2, 3, \ldots$ $\qquad n = 0$

$\lambda = 0$

$\lambda = n^2 \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$\Theta(\vartheta) \quad 1, \ \cos n\vartheta, \ \sin n\vartheta$

$$\boxed{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) = n^2 R(\rho)}$$

e.d.o. del 2° ord. lin. a coeff. continui ma non costanti.

È un'equazione di Eulero, cerchiamo una

soluzioni potenza $\quad R(\rho) = \rho^\alpha$

$$R' = \alpha \rho^{\alpha-1} \qquad R'' = \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-2}$$

$$\alpha(\alpha-1)\cancel{\rho^\alpha} + \alpha\cancel{\rho^\alpha} = n^2 \cancel{\rho^\alpha}$$

$$\alpha^2 \cancel{-\alpha} + \cancel{\alpha} = n^2 \qquad \alpha^2 = n^2$$

$$\alpha = \pm n \qquad R(\rho) = \begin{cases} \rho^n \\ \rho^{-n} \end{cases}$$

ρ^{-n} ← non accettabile perché illimitata in 0

$\Theta(\vartheta)$	$\cos n\vartheta$	$\sin n\vartheta$	$1 \quad n=0$
$R(\rho)$	ρ^n	ρ^n	1

$$u_n(\rho,\vartheta) = \underbrace{\rho^n \cos n\vartheta, \ \rho^n \sin n\vartheta, \ 1}_{\text{soluzioni a variabili separate.}}$$

Ogni combinazione lineare delle u_n sarà ancora soluzione di $\Delta u = 0 \quad \rho < r$

cerco dei coefficienti per cui la funzione

$$u(\rho,\vartheta) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \rho^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta)$$

assuma anche la condiz. al contorno.

$$u(r,\vartheta) = a_0 + \sum^{n} r^k (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta)$$

$n=1$

$$\stackrel{???}{=} f(\vartheta)$$

vorrei scegliere gli a_k, b_k per soddisfare anche le condiz. al contorno.

Idea è: cerco a_n, b_n t.c.

$$u(\rho, \vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)$$

che risolva equaz + condiz. al contorno.

Sia $f(\vartheta)$ il dato al bordo, che sviluppo in serie di Fourier

$$f(\vartheta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta$$

$$\begin{cases} \alpha_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cos(n\vartheta)\, d\vartheta & n = 0, 1, 2, \dots \\ \beta_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(\vartheta) \sin(n\vartheta)\, d\vartheta & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Voglio dare $f(\vartheta) = u(r, \vartheta) =$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta)$$

$a_0 = \alpha_0 \quad a_n = \alpha_n \quad b_n = \beta_n$

$$\Rightarrow \boxed{u(\rho,\vartheta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n} \left[\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta\right]}$$

con α_n, β_n coefficienti di Fourier di f

Ricorda - Serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f(x) \qquad \forall x \in (a,b)$$

- Se la serie converge uniformemente e tutte le f_k sono continue, allora f è continua.
- Se tutte le f_k sono derivabili ($\mathcal{C}^1(a,b)$),
  $\sum f_k'(x)$ converge uniformemente a $g(x)$
  $\sum f_k(x)$ converge puntualmente a $f(x)$

allora: f è derivabile; $f' = g$

$$f'(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$$

Condiz. suff. per la conv. unif.:

Si dice che $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge totalmente in I se $\exists \{a_k\} \subseteq \mathbb{R}$ t.c.

$$|f_k(x)| \leq a_k \quad \forall k \quad \forall x \in I$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$$

$\boxed{\text{Th.}}$ Se una serie converge totalmente in I, allora converge uniformemente, assolutamente, puntualmente.

Mettiamoci in questione cerchio $B_\delta(0)$ con $\delta < r$.

Se $\rho \leq \delta < r \qquad \vartheta \in [0, 2\pi)$

$$\left| \left(\frac{\rho}{r}\right)^n [\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta] \right|$$

$$\leq \left(\frac{\delta}{r}\right)^n (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq \underline{c \left(\frac{\delta}{r}\right)^n}$$

$0 < \frac{\delta}{r} < 1$

$$|\alpha_n| = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cos n\vartheta \, d\vartheta \right| \leq \frac{1}{\pi} \|f\|_{L^1(0,2\pi)}$$

$$|\beta_n| \le \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \sin n\vartheta \, d\vartheta \right| \le \frac{1}{\pi} \|f\|_{L^1(0,2\pi)}$$

- Se $f \in L^1(0, 2\pi)$ $\quad |\alpha_n| + |\beta_n| \le c \quad \forall n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\delta}{r}\right)^n < \infty \quad \text{(serie geometrica)}$$

La serie che definisce u converge totalmente in $\overline{B_\delta(0)}$ $\quad \forall \delta < r$

Quindi $u \in C^0\left(\overline{B_\delta(0)}\right) \quad \forall \delta < r$

Quindi $u \in C^0(B_r(0))$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n [\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta]$$

$$= n \frac{\rho^{n-1}}{r^n} [\, \dots \,]$$

$$= \frac{n}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{n-1} [\, \dots \,] \qquad \frac{\rho}{r} < 1$$

$$\left| \quad r \quad \right| \le c\, n\, \delta^{n-1}$$

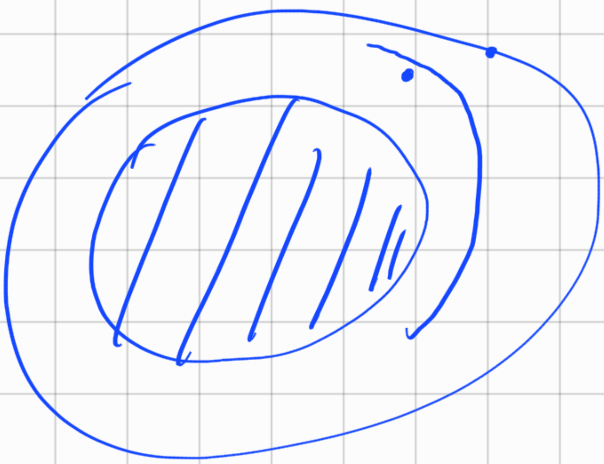
$$\sum n\delta^{n-1} < \infty$$

Le serie delle derivate di ogni ordine convergono totalmente in ogni cerchio $\overline{B_\delta(0)}$ con $\delta<r$.

Quindi $u \in C^\infty(B_\delta(0))\ \forall \delta<r$

Quindi $u \in C^\infty(B_r(0))$.

La soluzione trovata è $C^\infty(B_r(0))$ sotto la sola ipotesi che $f \in L^1(0,2\pi)$.



La serie si può derivare termine a termine in $B_r(0)$ e poiché $\rho^n \cos n\theta$,

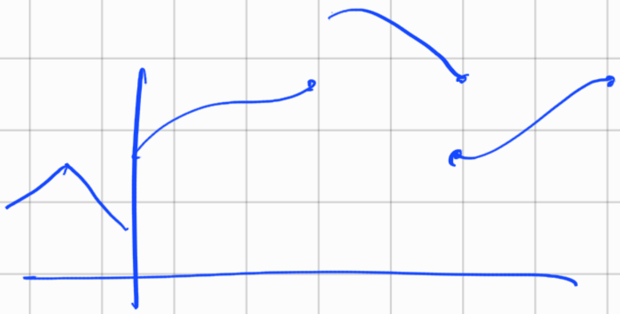
$\rho^n \sin n\vartheta$ sono armoniche, u è armonica

Se $f \in L^1(0, 2\pi)$ allora $|\alpha_n| + |\beta_n| \leq C \quad \forall n$

Sotto quali ipotesi su f $\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty$?

(Se questo accade, la serie che definisce u converge totalmente in $\overline{B_r(0)}$, quindi $u \in \mathcal{C}^0(\overline{B_r(0)})$).

f regolare a tratti



$\boxed{\text{Th.}}$ Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ t.c.

1) $f \in \mathcal{C}^0[0, 2\pi]$
2) $f(0) = f(2\pi)$
3) f è regolare a tratti in $[0, 2\pi]$

allora la serie di Fourier di f converge

... [illegible] di Fourier di f converge

totalmente, cioè $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\alpha_n| + |\beta_n|\right) < \infty$

Sotto quest'ipotesi la u è:

1) $\mathcal{C}^{\infty}(B_r(0))$ e $\Delta u = 0$

2) $\mathcal{C}^{0}(\overline{B_r(0)})$ e $u = f$ su $\partial B_r(0)$

Il caso in cui $f \in L^2[0, 2\pi]$

A maggior ragione $f \in L^1[0, 2\pi]$ quindi

$u \in \mathcal{C}^{\infty}(B_r(0))$ e $\Delta u = 0$ in $B_r(0)$

In che senso è assunto il dato al bordo?

$$f(\vartheta) = \underline{\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}}\left(\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta\right).$$

$$\|f\|_{L^2}^2 = \pi\left(\frac{\alpha_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n^2 + \beta_n^2\right)\right) \leftarrow$$

$$u(\rho, \vartheta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\left(\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta\right) \leftarrow$$

$\rho < r$

$$f(\vartheta) - u(\rho,\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^n\right]}_{\in (0,1]} \left[\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta\right]$$

$$\int_0^{2\pi} |f(\vartheta) - u(\rho,\vartheta)|^2 d\vartheta \overset{\text{Pitagora in } L^2}{=}$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^n\right]^n (\alpha_n^2 + \beta_n^2)}_{\leq \alpha_n^2 + \beta_n^2} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} g_n(\rho)}_{\substack{\text{converge} \\ \text{totalmente} \\ \text{per } \rho \in [0,r]}}$$

$$\sum (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$$

$$|g_n(\rho)| \leq \alpha_n^2 + \beta_n^2$$

$$\lim_{\rho \to r^-} \int_0^{2\pi} |f(\vartheta) - u(\rho,\vartheta)|^2 d\vartheta =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lim_{\rho \to r^-} \left[1 - \left(\frac{\rho}{r}\right)^n\right]^2 (\alpha_n^2 + \beta_n^2)}_{=0} = 0$$

Perciò: se $f \in L^2(0, 2\pi)$ allora

u assume il dato al bordo in senso L^2 cioè:

$$\lim_{\rho \to r^-} \int_0^{2\pi} |u(\rho,\vartheta) - f(\vartheta)|^2 \, d\vartheta = 0.$$

Problema di Neumann $\longrightarrow \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_r(0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = f & \text{su } \partial B_r(0) \end{cases}$

Cerchiamo una $u(\rho,\vartheta)$

$$u(\rho,\vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta\right)$$

e cerchiamo a_n, b_n in modo che

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}(r,\vartheta) = f(\vartheta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1} \left(a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta\right)$$

$$f(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \left(a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta\right)$$

Ma lo sviluppo in serie di Fourier di f è:

$$f(\vartheta) = \cancel{\frac{\alpha_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta\right)$$

dev'essere $\alpha_0 = 0$ cioè $\qquad \alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\,d\vartheta$

Abbiamo visto che se $\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$

$$\int_\Omega f(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} g(\sigma)\,d\sigma$$

se $f = 0$ $\qquad \int_{\partial\Omega} g(\sigma)\,d\sigma = 0$

Deve valere la condizione di compatibilità:

$$\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\,d\vartheta = 0.$$

$$a_n = \frac{\alpha_n}{n r^{n-1}} \qquad b_n = \frac{\beta_n}{n r^{n-1}}$$

$$u(\rho,\vartheta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^n}{n r^{n-1}} \left(\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta\right)$$

con α_n, β_n coeff. di Fourier di $f(\vartheta)$

indeterminata (la soluz. del pb. di Neumann è unica a meno di costante additiva).

$$\boxed{u(\rho,\vartheta) = a_0 + r \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r}\right)^n \frac{1}{n}\left[\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta\right]}$$

- Se $f:[0,2\pi] \to \mathbb{R}$ è continua in $[0,2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$, f regolare a tratti in $[0,2\pi]$

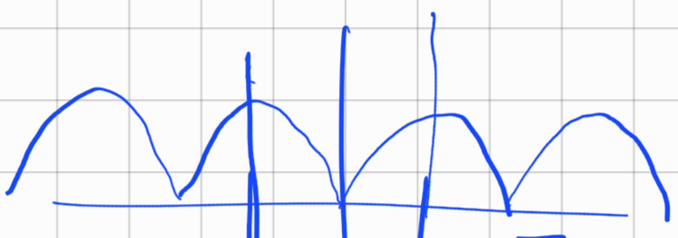
allora $u \in C^\infty(B_r(0)) \cap C^1(\overline{B_r(0)})$

(in particolare $\frac{\partial u}{\partial \rho} \in C^0(\overline{B_r(0)})$).

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \rho < 3 \quad \vartheta \in [0,2\pi] \\ u(3,\vartheta) = \vartheta(2\pi - \vartheta) & \vartheta \in [0,2\pi] \end{cases}$$

$$u(\rho,\vartheta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{3}\right)^n \left[\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta\right]$$

La periodizzata di f è pari, quindi $\beta_n = 0$



$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta)\cos(n\vartheta)\,d\vartheta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\vartheta)\cos(n\vartheta)\,d\vartheta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\vartheta(2\pi-\vartheta)}_{f}\,\underbrace{\cos(n\vartheta)}_{g'}\,d\vartheta$$

$$\boxed{\alpha_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \vartheta(2\pi-\vartheta)\,d\vartheta = \frac{2}{\pi}\left[\pi\vartheta^2 - \frac{\vartheta^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right] = \frac{2\pi^{\cancel{3}\,2}}{3}\cdot\frac{2}{\cancel{\pi}} = \boxed{\frac{4}{3}\pi^2}$$

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\left\{\cancel{\left[\vartheta(2\pi-\vartheta)\frac{\sin n\vartheta}{n}\right]_0^{\pi}} - \int_0^{\pi}(2\pi-2\vartheta)\frac{\sin n\vartheta}{n}\,d\vartheta\right\}$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{(\pi-\vartheta)}_{f}\,\underbrace{\sin n\vartheta}_{g'}\,d\vartheta =$$

$$= -\frac{4}{n\pi}\left\{\left[-(\pi-\vartheta)\frac{\cos n\vartheta}{n}\right]_0^{\pi} - \cancel{\int_0^{\pi}\frac{\cos n\vartheta}{n}\,d\vartheta}\right\}$$

$$= -\frac{4}{n^2\pi}\,\pi = -\frac{4}{n^2}$$

$$f(\vartheta) = \frac{2}{3}\pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos(n\vartheta)$$

$$u(\rho,\vartheta) = 2\pi^2 - \sum^{\infty} 4\left(\rho\right)^n\cos(n\vartheta)$$

$$3 \qquad \sum_{n=1} \quad n^2 \left(3\right)$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2+y^2 < 4 \\ u = x^2 y & x^2+y^2 = 4 \end{cases} \qquad \rho < 2 \quad r=2$$

$$x = \rho \cos\vartheta \qquad x^2 y = \rho^3 \cos^2\vartheta \sin\vartheta$$
$$y = \rho \sin\vartheta$$
$$\rho = 2$$

$$f(\vartheta) = 8 \cos^2\vartheta \sin\vartheta$$

Scrivere lo sviluppo di Fourier di f.

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\underline{\sin\alpha \cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

$$8\cos^2\vartheta \sin\vartheta = 8\left(\frac{1+\cos 2\vartheta}{2}\right)\sin\vartheta =$$

$$= 4\sin\vartheta + \underline{4\sin\vartheta\cos 2\vartheta}$$

$$= 4\sin\vartheta + 2\left[\sin 3\vartheta - \sin\vartheta\right] =$$

$$= 2\sin 3\vartheta + 2\sin\vartheta = f(\vartheta) \qquad r = 2$$

$$u(\rho,\vartheta) = 2\,\frac{\rho}{2}\sin\vartheta + 2\left(\frac{\rho}{2}\right)^3 \sin 3\vartheta$$

$$= \rho\sin\vartheta + \frac{1}{4}\rho^3 \sin 3\vartheta \qquad \rho\sin\vartheta = y$$

$$\boxed{\rho^3 \sin 3\vartheta} = \mathrm{Im}\left((x+iy)^3\right) = 3x^2y - y^3$$

$$= \mathrm{Im}\left(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3\right)$$

$$= 3x^2y - y^3$$

$$\boxed{u(x,y) = y + \frac{1}{4}\left(3x^2y - y^3\right)}$$

$$\begin{cases} \Delta u(\rho,\vartheta) = 0 & \text{in } \rho < 3 \quad \vartheta \in (-\pi,\pi) \\ \ldots & \begin{cases} 1 & \text{in } \vartheta \in (0,\pi) \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(3,\vartheta) = f(\vartheta) = \begin{cases} 1 & \text{per } \vartheta \in (0,\pi) \\ -1 & \text{per } \vartheta \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta = 0$$ vale la condiz. di compatibilità.

f è dispari in $[-\pi,\pi]$. $\alpha_n = 0$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\vartheta)\sin n\vartheta\, d\vartheta$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin n\vartheta\, d\vartheta = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos n\vartheta}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right)$$

$$u(\rho,\vartheta) = a_0 + r\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n \frac{1}{n}\left[\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta\right]$$

$r = 3$

$$u(\rho,\vartheta) = a_0 + 3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{3}\right)^n \frac{1}{n}\,\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)\sin n\vartheta$$

$$= \boxed{a_0 + \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{3}\right)^n \frac{1-\cos n\pi}{n^2}\sin(n\vartheta)}$$