TRABAJO PRÁCTICO VI: ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

1) Indicar cuales de las siguientes operaciones binarias definen grupos en A.

a) A = N $a * b = a + b$

b) A = Z $a * b = a + b$

c) A = Z $a * b = a \,.\, b$

d) A = R $a * b = a + b + a\,.b$

e) A = {1, 2, 3, 4} y la operación $*$ dada por la siguiente tabla

$*$	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

f) A = { 1, -1, i, -i } $a * b = a \,.\, b$

2)

a) Dado el grupo abeliano (Z, +), $n \in N$. Probar que la congruencia módulo n es compatible con la suma definida en Z.

b) Dado el semigrupo abeliano (Z, .), $n \in N$. Probar que la congruencia módulo n es compatible con el producto definido en Z.

c) Demostrar que $(Z_n, \bar{+})$ es un grupo abeliano con $\bar{a} \;\bar{+}\; \bar{b} = \overline{a+b}$

d) Demostrar que $(Z_n, \bar{.})$ es un semigrupo abeliano con $\bar{a} \;\bar{.}\; \bar{b} = \overline{a.b}$

3)

a) Sean $(G_1, *_1)$ $(G_2, *_2)$ dos grupos con neutro e_1 y e_2 respectivamente. Probar que $(G_1 \times G_2, *)$ es grupo con $(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 *_1 b_1, \; a_2 *_2 b_2)$. Qué condiciones se deben cumplir para que sea un grupo abeliano?

b) Sean $(Z_2, \bar{+})$ y $(Z_3, \bar{+})$ grupos abelianos definir * en $Z_2 \times Z_3$ de forma tal que sea un grupo abeliano.

4)

a) Para el grupo (Z, +), probar que H = n Z = {a $\in$ Z, a = n z, n, z $\in$ Z, n es fijo} es subgrupo de Z.

b) Sabiendo que ($\{0, 1\}^4$) es un grupo con

+	0	1
0	0	1
1	1	0

verificar que H ={ (a, b, c, d)/ a + c = 0, a, b, c, d $\in$ {0, 1}) es subgrupo de ($\{0, 1\}^4$, +)

c) Demostrar que H = { $\bar{2}, \bar{0}$ } es subgrupo del grupo (Z_4, +).

5) Estudiar si el conjunto A es un anillo con las operaciones indicadas

a) A = N con la suma y el producto usual en N

b) A = Z con la suma y el producto usual en Z

c) A = P(B) X * Y = X Δ Y X . Y = (X $\cap$ Y)

d) A = R^{nxn} con la suma y el producto usual de matrices

e) A = R con la suma y el producto usual en R

f) A= Z_n a * b = $\bar{a} \mathbin{\bar{+}} \bar{b}$ a . b = $\bar{a} \mathbin{\bar{\cdot}} \bar{b}$

g) A = { x $\in$ R / x = a + b $\sqrt{2}$ a, b $\in$ Z } a * b = a + b a . b = a . b

6) Indicar cuales de los anillos del ejercicio 5 son anillos de división. ¿Cuáles alcanzan la estructura de cuerpo?