Отчет по лабораторной работе №2

Задача управления оборудованием. Решение задачи итерационным методом. Решение задачи методом линейного программирования.

Легиньких Галина Андреевна

Содержание

1 Исходные данные

Вероятности отказов:

$p_1 = 0.2$ (нормальный режим), $p_2 = 0.5$ (усиленный режим)

Вероятности ремонта:

$q_1 = 0.4$ (своими силами), $q_2 = 0.9$ (специалисты)

Доходы от эксплуатации:

$r_1 = 2$ (нормальный режим), $r_2 = 6$ (усиленный режим)

Затраты на ремонт:

$c_1 = 3$ (своими силами), $c_2 = 5$ (специалисты)

2 Решение задачи итерационным методом.

2.1 Решение методом итераций Ховарда с $\beta = 0.9$

2.1.1 Шаг 0: Начальная политика

Выбор начальной политики:

В состоянии 1: $r_1 = 2, r_2 = 6$ => выбираем u_1^2 (усиленный режим)

В состоянии 2: $-c_1 = -3, -c_2 = -5$ => выбираем u_2^1 (ремонт своими силами)

Начальная политика: $f_0 = (u_1^2, u_2^1) = f^{(2,1)}$

Матрица переходов:

$$P(f_0) = \begin{bmatrix} 1 - p_2 & p_2 \\ q_1 & 1 - q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Вектор доходов:

$$l(f_0) = \begin{bmatrix} r_2 \\ -c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2.1.2 Шаг 1: Определим β-оценку $v(f_0)$ политики f_0 как решение выражения ниже

$$v(f_0) = (I - \beta P(f_0))^{-1} l(f_0)$$

Вычисляем матрицу $I - \beta P(f_0)$:

$$I - \beta P(f_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.9 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.55 & -0.45 \\ -0.36 & 0.46 \end{bmatrix}$$

Получаем обратную матрицу:

$$(I - \beta P(f_0))^{-1} = \frac{1}{0.091} \begin{bmatrix} 0.46 & 0.45 \\ 0.36 & 0.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0549 & 4.9451 \\ 3.9560 & 6.0440 \end{bmatrix}$$

Вычисляем β-оценку:

$$v(f_0) = \begin{bmatrix} 5.0549 & 4.9451 \\ 3.9560 & 6.0440 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0549 \cdot 6 + 4.9451 \cdot (-3) \\ 3.9560 \cdot 6 + 6.0440 \cdot (-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 30.3294 - 14.8353 \\ 23.7360 - 18.1320 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15.4941 \\ 5.6040 \end{bmatrix}$$

2.1.3 Шаг 2: Переходя к процедуре улучшения решения, имеем

В состоянии 1:

$v(1, u_1^1) = 2 + 0.9[0.8 \cdot 15.4941 + 0.2 \cdot 5.6040] = 14.1645$

$v(1, u_1^2) = 6 + 0.9[0.5 \cdot 15.4941 + 0.5 \cdot 5.6040] = 15.4942$

Выбор: u_1^2 (усиленный режим)

В состоянии 2:

$v(2, u_2^1) = -3 + 0.9[0.4 \cdot 15.4941 + 0.6 \cdot 5.6040] = 5.6040$

$v(2, u_2^2) = -5 + 0.9[0.9 \cdot 15.4941 + 0.1 \cdot 5.6040] = 8.0546$

Выбор: u_2^2 (ремонт специалистами)

2.1.4 Шаг 3: Оценка новой политики

Новая политика: $f_1 = (u_1^2, u_2^2) = f^{(2,2)}$

Переходим к новой итерации k = 1 с политикой f_1.

2.1.5 Шаг 1: Определим β-оценку $v(f_1)$ политики f_1 как решение выражения ниже

Матрица переходов:

$$P(f_1) = \begin{bmatrix} 1 - p_2 & p_2 \\ q_2 & 1 - q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Вектор доходов:

$$l(f_1) = \begin{bmatrix} r_2 \\ -c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

β-оценка политики f_1:

$$v(f_1) = (I - \beta P(f_1))^{-1} l(f_1)$$

Вычисляем матрицу $I - \beta P(f_1)$:

$$I - \beta P(f_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.9 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.55 & -0.45 \\ -0.81 & 0.91 \end{bmatrix}$$

Получаем обратную матрицу:

$$(I - \beta P(f_1))^{-1} = \frac{1}{0.136} \begin{bmatrix} 0.91 & 0.45 \\ 0.81 & 0.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.6912 & 3.3088 \\ 5.9559 & 4.0441 \end{bmatrix}$$

Вычисляем β-оценку:

$$v(f_1) = \begin{bmatrix} 6.6912 & 3.3088 \\ 5.9559 & 4.0441 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.6912 \cdot 6 + 3.3088 \cdot (-5) \\ 5.9559 \cdot 6 + 4.0441 \cdot (-5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40.1472 - 16.5440 \\ 35.7354 - 20.2205 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23.6032 \\ 15.5149 \end{bmatrix}$$

2.1.6 Шаг 2: Переходя к процедуре улучшения решения, имеем

В состоянии 1 (исправное):

Для управления u_1^1 (нормальный режим):

$$\begin{aligned} v(1, u_1^1) &= r_1 + \beta[(1 - p_1)v_1(1) + p_1 v_1(2)] \\ &= 2 + 0.9[0.8 \cdot 23.6032 + 0.2 \cdot 15.5149] \\ &= 21.7870 \end{aligned}$$

Для управления u_1^2 (усиленный режим):

$$\begin{aligned} v(1, u_1^2) &= r_2 + \beta[(1 - p_2)v_1(1) + p_2 v_1(2)] \\ &= 6 + 0.9[0.5 \cdot 23.6032 + 0.5 \cdot 15.5149] \\ &= 23.6032 \end{aligned}$$

Выбор: u_1^2 (усиленный режим)

В состоянии 2 (неисправное):

Для управления u_2^1 (ремонт своими силами):

$$\begin{aligned} v(2, u_2^1) &= -c_1 + \beta[q_1 v_1(1) + (1 - q_1)v_1(2)] \\ &= -3 + 0.9[0.4 \cdot 23.6032 + 0.6 \cdot 15.5149] \\ &= 13.8752 \end{aligned}$$

Для управления u_2^2 (ремонт специалистами):

$$\begin{aligned} v(2, u_2^2) &= -c_2 + \beta[q_2 v_1(1) + (1 - q_2)v_1(2)] \\ &= -5 + 0.9[0.9 \cdot 23.6032 + 0.1 \cdot 15.5149] \\ &= 15.5150 \end{aligned}$$

Выбор: u_2^2 (ремонт с привлечением специалистов)

2.1.7 Шаг 3: Оценка новой политики

Политика не изменилась: $f_2 = f_1 = (u_1^2, u_2^2)$

2.2 Результат

2.2.1 Оптимальная стационарная стратегия:

Состояние	Оптимальное управление	Интерпретация
1 (исправное)	u_1^2	**Усиленный режим эксплуатации**

Состояние	Оптимальное управление	Интерпретация
2 (неисправное)	u_2^2	**Ремонт с привлечением специалистов**

2.2.2 Оптимальные оценки состояний:

$$v^*(1) = 23.60, \quad v^*(2) = 15.51$$

Вывод: Оптимальная стратегия состоит в использовании усиленного режима эксплуатации исправного оборудования и ремонта неисправного оборудования с привлечением специалистов на каждом шаге процесса.

2.3 Решение методом итераций Ховарда с $\beta = 0.6$

2.3.1 Шаг 0: Начальная политика

Выбор начальной политики:

В состоянии 1: $r_1 = 2, r_2 = 6$ => выбираем u_1^2 (усиленный режим)

В состоянии 2: $-c_1 = -3, -c_2 = -5$ => выбираем u_2^1 (ремонт своими силами)

Начальная политика: $f_0 = (u_1^2, u_2^1) = f^{(2,1)}$

Матрица переходов:

$$P(f_0) = \begin{bmatrix} 1 - p_2 & p_2 \\ q_1 & 1 - q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Вектор доходов:

$$l(f_0) = \begin{bmatrix} r_2 \\ -c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

2.3.2 Шаг 1: Определим β-оценку $v(f_0)$ политики f_0

$$v(f_0) = (I - \beta P(f_0))^{-1} l(f_0)$$

Вычисляем матрицу $I - \beta P(f_0)$:

$$I - \beta P(f_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.6 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.3 \\ -0.24 & 0.64 \end{bmatrix}$$

Получаем обратную матрицу:

$$(I - \beta P(f_0))^{-1} = \frac{1}{0.376} \begin{bmatrix} 0.64 & 0.3 \\ 0.24 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7021 & 0.7979 \\ 0.6383 & 1.8617 \end{bmatrix}$$

Вычисляем β-оценку:

$$v(f_0) = \begin{bmatrix} 1.7021 & 0.7979 \\ 0.6383 & 1.8617 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7021 \cdot 6 + 0.7979 \cdot (-3) \\ 0.6383 \cdot 6 + 1.8617 \cdot (-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10.2126 - 2.3937 \\ 3.8298 - 5.5851 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.8189 \\ -1.7553 \end{bmatrix}$$

2.3.3 Шаг 2: Переходя к процедуре улучшения решения, имеем

В состоянии 1:

$$\begin{aligned} v(1, u_1^1) &= 2 + 0.6[0.8 \cdot 7.8189 + 0.2 \cdot (-1.7553)] \\ &= 5.5424 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(1, u_1^2) &= 6 + 0.6[0.5 \cdot 7.8189 + 0.5 \cdot (-1.7553)] \\ &= 7.8191 \end{aligned}$$

Выбор: u_1^2 (усиленный режим)

В состоянии 2:

$$\begin{aligned} v(2, u_2^1) &= -3 + 0.6[0.4 \cdot 7.8189 + 0.6 \cdot (-1.7553)] \\ &= -1.7554 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(2, u_2^2) &= -5 + 0.6[0.9 \cdot 7.8189 + 0.1 \cdot (-1.7553)] \\ &= -0.8831 \end{aligned}$$

Выбор: u_2^2 (ремонт специалистами)

2.3.4 Шаг 3: Оценка новой политики

Новая политика: $f_1 = (u_1^2, u_2^2) = f^{(2,2)}$

Переходим к новой итерации k = 1 с политикой f_1.

2.3.5 Шаг 1: Определим β-оценку $v(f_1)$ политики f_1 как решение выражения ниже

Матрица переходов:

$$P(f_1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Вектор доходов:

$$l(f_1) = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$I - \beta P(f_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0.6 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.3 \\ -0.54 & 0.94 \end{bmatrix}$$

Обратная матрица:

$$(I - \beta P(f_1))^{-1} = \frac{1}{0.496} \begin{bmatrix} 0.94 & 0.3 \\ 0.54 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8952 & 0.6048 \\ 1.0887 & 1.4113 \end{bmatrix}$$

β-оценка:

$$v(f_1) = \begin{bmatrix} 1.8952 & 0.6048 \\ 1.0887 & 1.4113 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.3712 - 3.0240 \\ 6.5322 - 7.0565 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.3472 \\ -0.5243 \end{bmatrix}$$

2.3.6 Шаг 2: Переходя к процедуре улучшения решения, имеем

В состоянии 1:

$$\begin{aligned} v(1, u_1^1) &= 2 + 0.6[0.8 \cdot 8.3472 + 0.2 \cdot (-0.5243)] \\ &= 5.9437 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(1, u_1^2) &= 6 + 0.6[0.5 \cdot 8.3472 + 0.5 \cdot (-0.5243)] \\ &= 8.3468 \end{aligned}$$

Выбор: u_1^2 (усиленный режим)

В состоянии 2:

$$\begin{aligned} v(2, u_2^1) &= -3 + 0.6[0.4 \cdot 8.3472 + 0.6 \cdot (-0.5243)] \\ &= -1.1854 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(2, u_2^2) &= -5 + 0.6[0.9 \cdot 8.3472 + 0.1 \cdot (-0.5243)] \\ &= -0.5239 \end{aligned}$$

Выбор: u_2^2 (ремонт специалистами)

2.3.7 Шаг 3: Оценка новой политики

Политика не изменилась: $f_2 = f_1 = (u_1^2, u_2^2)$

2.4 Результат

2.4.1 Оптимальная стационарная стратегия:

Состояние	Оптимальное управление	Интерпретация
1 (исправное)	u_1^2	**Усиленный режим эксплуатации**
2 (неисправное)	u_2^2	**Ремонт с привлечением специалистов**

Оптимальные оценки состояний:

$$v^*(1) = 8.35, \quad v^*(2) = -0.52$$

Вывод: При коэффициенте дисконтирования $\beta = 0.6$ оптимальная стратегия остается той же - усиленный режим эксплуатации и ремонт специалистами, однако абсолютные значения оценок состояний значительно ниже из-за меньшего учета будущих доходов.

3 Решение задачи методом линейного программирования.

3.1 Постановка задачи линейного программирования с $\beta = 0.9$ и $\mu(1) = \mu(2) = 0.5$

3.1.1 Целевая функция

$$z = 2\xi_{1,1} + 6\xi_{1,2} - 3\xi_{2,1} - 5\xi_{2,2} \to \max$$

при ограничениях

$$(1 - 0.9 \cdot 0.8)\xi_{1,1} + (1 - 0.9 \cdot 0.5)\xi_{1,2} - 0.9 \cdot 0.4\xi_{2,1} - 0.9 \cdot 0.9\xi_{2,2} = 0.5$$

$$-0.9 \cdot 0.2\xi_{1,1} - 0.9 \cdot 0.5\xi_{1,2} + (1 - 0.9 \cdot 0.6)\xi_{2,1} + (1 - 0.9 \cdot 0.1)\xi_{2,2} = 0.5$$

$$\xi_{1,1} + \xi_{1,2} + \xi_{2,1} + \xi_{2,2} = \frac{1}{1 - 0.9} = 10$$

$$\xi_{1,1}, \xi_{1,2}, \xi_{2,1}, \xi_{2,2} \geq 0$$

3.1.2 Упрощенные ограничения

$$0.28\xi_{1,1} + 0.55\xi_{1,2} - 0.36\xi_{2,1} - 0.81\xi_{2,2} = 0.5$$

$$-0.18\xi_{1,1} - 0.45\xi_{1,2} + 0.46\xi_{2,1} + 0.91\xi_{2,2} = 0.5$$

3.2 Решение симплекс-методом

3.2.1 Начальная симплекс-таблица

$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	μ
0.28	0.55	-0.36	-0.81	0.5
-0.18	-0.45	0.46	0.91	0.5
1	1	1	1	10

3.2.2 Первая итерация

Выбираем в качестве базиса $\xi_{1,1}$, разрешающий элемент 0.28.

Пересчет первой строки:

$$\begin{aligned}
\xi_{1,1} &: 0.28/0.28 = 1 \\
\xi_{1,2} &: 0.55/0.28 = 1.9643 \\
\xi_{2,1} &: -0.36/0.28 = -1.2857 \\
\xi_{2,2} &: -0.81/0.28 = -2.8929 \\
\mu &: 0.5/0.28 = 1.7857
\end{aligned}$$

Пересчет второй строки:

$$\begin{aligned}
\xi_{1,2} &: -0.45 - \frac{0.55(-0.18)}{0.28} = -0.45 + 0.3536 = -0.0964 \\
\xi_{2,1} &: 0.46 - \frac{-0.36(-0.18)}{0.28} = 0.46 - 0.2314 = 0.2286 \\
\xi_{2,2} &: 0.91 - \frac{-0.81(-0.18)}{0.28} = 0.91 - 0.5207 = 0.3893 \\
\mu &: 0.5 - \frac{0.5(-0.18)}{0.28} = 0.5 + 0.3214 = 0.8214
\end{aligned}$$

Пересчет третьей строки:

$$\xi_{1,2} : 1 - \frac{0.55 \cdot 1}{0.28} = 1 - 1.9643 = -0.9643$$
$$\xi_{2,1} : 1 - \frac{-0.36 \cdot 1}{0.28} = 1 + 1.2857 = 2.2857$$
$$\xi_{2,2} : 1 - \frac{-0.81 \cdot 1}{0.28} = 1 + 2.8929 = 3.8929$$
$$\mu : 10 - \frac{0.5 \cdot 1}{0.28} = 10 - 1.7857 = 8.2143$$

Первая таблица:

Базис	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	μ
$\xi_{1,1}$	1	1.9643	-1.2857	-2.8929	1.7857
	0	-0.0964	0.2286	0.3893	0.8214
	0	-0.9643	2.2857	3.8929	8.2143

3.2.3 Вторая итерация

Третья строка линейно зависима с другими, следовательно, исключаем ее из дальнейшего рассмотрения.

Выбираем в качестве базиса $\xi_{2,1}$, разрешающий элемент 0.2286.

После аналогичного перерасчета получаем обновленную симплекс-таблицу.

Базис	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	μ
$\xi_{1,1}$	1	1.4219	0	-0.7024	6.4057
$\xi_{2,1}$	0	-0.4219	1	1.7039	3.5938

3.2.4 Проверка оптимальности

Вычисляем оценки Δ_i:

$$\Delta_{\xi_{1,1}} = 0$$

$$\Delta_{\xi_{2,1}} = 0$$

$$\Delta_{\xi_{1,2}} = 2 \cdot 1.4219 + (-3) \cdot (-0.4219) - 6 = 2.8438 + 1.2657 - 6 = -1.8905$$

$$\Delta_{\xi_{2,2}} = 2 \cdot (-0.7024) + (-3) \cdot 1.7039 - (-5) = -1.4048 - 5.1117 + 5 = -1.5165$$

$$\Delta_{\mu} = 2 \cdot 6.4057 + (-3) \cdot 3.5938 = 12.8114 - 10.7814 = 2.03$$

Базис	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	μ
$\xi_{1,1}$	1	1.4219	0	-0.7024	6.4057
$\xi_{2,1}$	0	-0.4219	1	1.7039	3.5938
Δ_i	0	-1.8905	0	-1.5165	2.03

Так как в таблице присутствуют значения Δ_i < 0, то найденный план не является оптимальным.

3.2.5 Третья итерация

Вводим в базис $\xi_{1,2}$, разрешающий элемент 1.4219.

Базис	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	μ
$\xi_{1,2}$	0.7031	1	0	-0.4938	4.5039
$\xi_{2,1}$	0.2969	0	1	1.4956	5.4957
Δ_i	1.3279	0	0	-2.4496	10.5363

Новый план не является оптимальным, поскольку $\Delta_{\xi_{2,2}}$<0.

3.2.6 Четвертая итерация

Вводим в базис $\xi_{2,2}$, разрешающий элемент 1.4956.

Базис	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	μ
$\xi_{1,2}$	0.8011	1	0.3298	0	6.3181

Базис	$\xi_{1,1}$	$\xi_{1,2}$	$\xi_{2,1}$	$\xi_{2,2}$	μ
$\xi_{2,2}$	0.1985	0	0.6688	1	3.6742
Δ_i	1.8141	0	1.6348	0	19.5376

3.2.7 Решение

Оптимальное решение

$$\xi = (0; 6.3181; 0; 3.6742)$$

Значение целевой функции

$$z = 6 \cdot 6.3181 + (-5) \cdot 3.6742 = 37.9086 - 18.3710 = 19.5376$$

Оптимальная стратегия

- В состоянии 1: $\xi_{1,2} > 0$ => u_1^2 (усиленный режим)
- В состоянии 2: $\xi_{2,2} > 0$ => u_2^2 (ремонт специалистами)

Оптимальная стратегия: $f^{(2,2)} = (u_1^2, u_2^2)$

3.3 Вывод

Метод линейного программирования подтвердил результат, полученный итерационным методом Ховарда: оптимальная стратегия состоит в использовании усиленного режима эксплуатации исправного оборудования и ремонта неисправного оборудования с привлечением специалистов.