Отчет по лабораторной работе №5

Модель хищник-жертва

Легиньких Галина Андреевна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Изучить модель хищник-жертва и построить эту модель.

2 Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях: [3]

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает
3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается
5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (-ax(t) + by(t)x(t)) \\ \frac{dy}{dt} = (cy(t) - dy(t)x(t)) \end{cases}$$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Математический анализ этой (жёсткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние, всякое же другое начальное состояние приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени такая система вернётся в изначальное состояние.

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решения) будет находиться в точке $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

3 Задание

Мой вариант 18.

Для модели «хищник-жертва»:

$$
\begin{cases}
\frac{dx}{dt} = -0.37x(t) + 0.038y(t)x(t) \\
\frac{dy}{dt} = 0.36y(t) - 0.037y(t)x(t)
\end{cases}
$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 9, y_0 = 20$. Найдите стационарное состояние системы.

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Julia

Нестационарное состояние (рис. 4.1) (рис. 4.2):

```
using Plots
using DifferentialEquations

x0 = 9
y0 = 20
a = 0.37
b = 0.038
c = 0.36
d = 0.037

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end

v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
```

```
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi=300, legend=false)
plot!(plt, X, Y, label="Зависимость численности хищников от численности жертв", colo
savefig(plt, "model_1.png")


plt2 = plot(dpi=300, legend=true)
plot!(plt2, T, X, label="Численность жертв", color=:green)
plot!(plt2, T, Y, label="Численность хищников", color=:red)
savefig(plt2, "model_2.png")
```

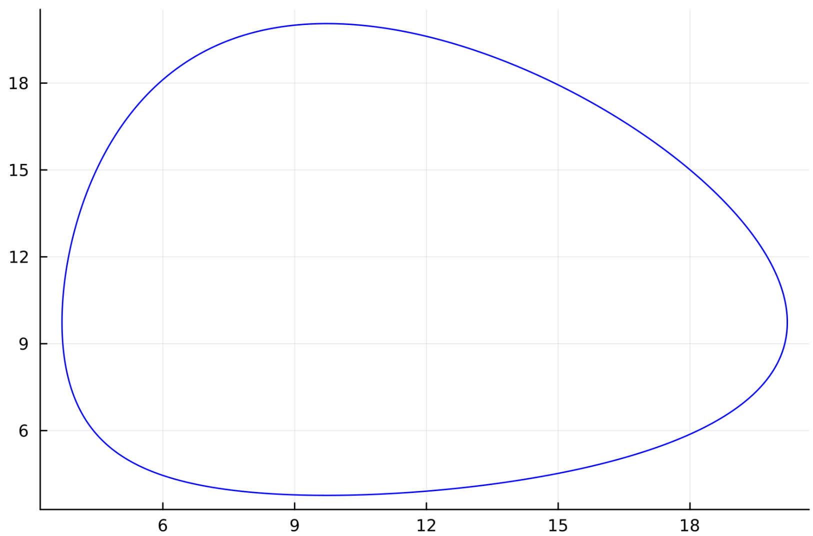

Рис. 4.1: График численности хищников от численности жертв

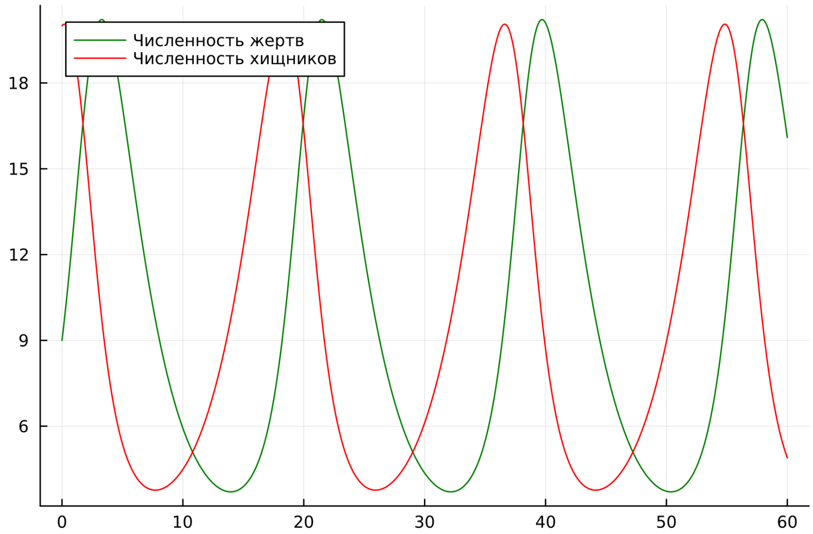

Рис. 4.2: График численности жертв и хищников от времени

Стационарное состояние (рис. 4.3):

```
using Plots
using DifferentialEquations

a = 0.37
b = 0.038
c = 0.36
d = 0.037
x0 = c / d
y0 = a / b

function ode_fn(du, u, p, t)
    x, y = u
    du[1] = -a*u[1] + b * u[1] * u[2]
    du[2] = c * u[2] - d * u[1] * u[2]
end
```

```
v0 = [x0, y0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax=0.05)
X = [u[1] for u in sol.u]
Y = [u[2] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi=300, legend=true)
plot!(plt, T, X, label="Численность жертв", color=:green)
plot!(plt, T, Y, label="Численность хищников", color=:red)
savefig(plt, "model_3.png")
```

В стационарном состоянии решение вида $y(x) = some function$ будет представлять собой точку.

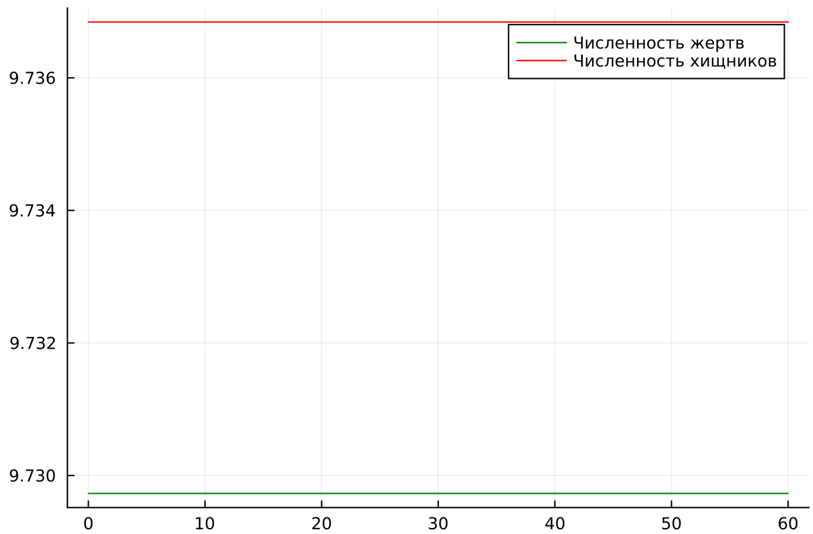

Рис. 4.3: Стационарное состояние

4.2 OpenModelica

Нестационарное состояние (рис. 4.4) (рис. 4.5):

```
model lab5
Real a = 0.37;
Real b = 0.038;
Real c = 0.36;
Real d = 0.037;
Real x;
Real y;
initial equation
x = 9;
y = 20;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5;
```

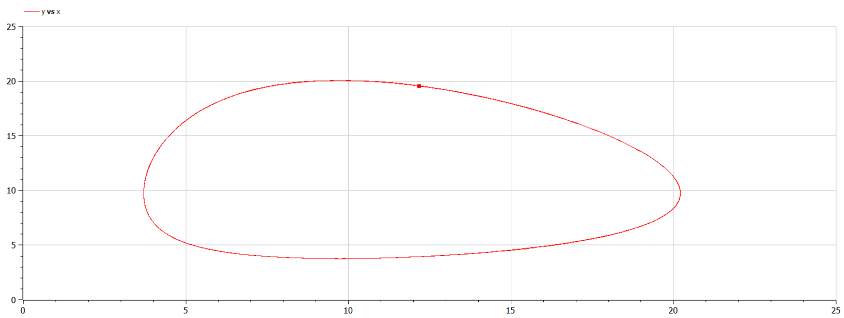

Рис. 4.4: График численности хищников от численности жертв

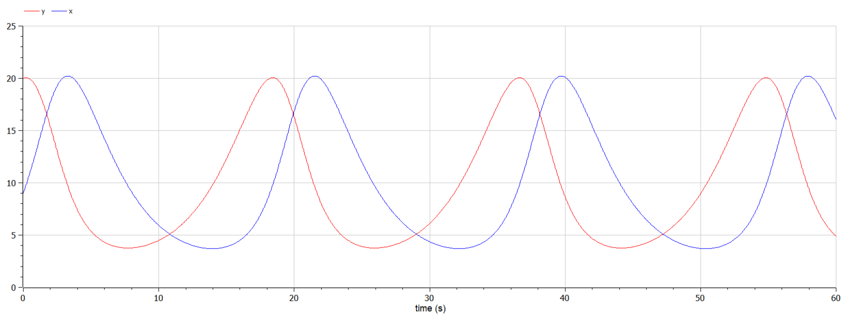

Рис. 4.5: График численности жертв и хищников от времени

Стационарное состояние (рис. 4.6):

```
model lab5_2
Real a = 0.37;
Real b = 0.038;
Real c = 0.36;
Real d = 0.037;
Real x;
Real y;
initial equation
x = c / d;
y = a / b;
equation
der(x) = -a*x + b*x*y;
der(y) = c*y - d*x*y;
end lab5_2;
```

В стационарном состоянии решение вида $y(x) = somefunction$ будет представлять собой точку.

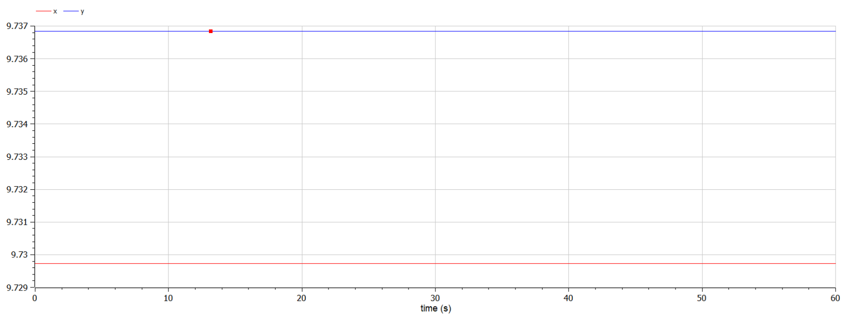

Рис. 4.6: Стационарное состояние

5 Анализ полученных результатов. Сравнение языков.

В итоге проделанной работы мы построили график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв на языках Julia и OpenModelica. Построение модели хищник-жертва на языке openModelica занимает меньше строк, чем аналогичное построение на Julia.

6 Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель хищник-жертва и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

7 Список литературы. Библиография

[1] Документация по Julia: https://docs.julialang.org/en/v1/

[2] Документация по OpenModelica: https://openmodelica.org/

[3] Модель Лотки—Вольтерры: https://math-it.petrsu.ru/users/semenova/MathECO/Lections/L