Отчет по лабораторной работе №6

Задача об эпидемии

Легиньких Галина Андреевна

Содержание

Список иллюстраций

Список таблиц

1 Цель работы

Изучить и построить модель эпидемии.

2 Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни. До того, как число заболевших не превышает критического значения $I^* $, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей. [3]

Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по следующему закону:

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, & \text{если } I(t) > I^* \\ 0, & \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, то есть:

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & \text{если } I(t) > I^* \\ -\beta I, & \text{если } I(t) \leq I^* \end{cases}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни):

$$\frac{dR}{dt} = \beta I$$

Постоянные пропорциональности α, β - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно. Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) ⩽I^* и I(0)>I^* $

3 Задание

Мой вариант 18.

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове $(N = 10400)$ в момент начала эпидемии $(t = 0)$ число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 144$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 28$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$. Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. $I(0) \leq I^*$
2. $I(0) > I^*$

Построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп S, I, R. Рассмотреть, как будет протекать эпидемия в этих случаях.

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Julia

4.1.1 Код программы для случая $I(0) \leq I^*$ (рис. 4.1):

```
using Plots
using DifferentialEquations

N = 10400
I0 = 144 # заболевшие особи
R0 = 28 # особи с иммунитетом
S0 = N - I0 - R0 # здоровые, но восприимчивые особи
alpha = 0.5 # коэффициент заболеваемости
beta = 0.1 # коэффициент выздоровления

#I0 <= I*
function ode_fn(du, u, p, t)
  S, I, R = u
  du[1] = 0
  du[2] = -beta*u[2]
  du[3] = beta*I
end
```

```
v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi = 300, legend = :topright)

plot!(plt, T, S, label = "Восприимчивые особи", color = :blue)

plot!(plt, T, I, label = "Инфицированные особи", color = :green)

plot!(plt, T, R, label = "Особи с иммунитетом", color = :red)

savefig(plt, "model_1.png")
```

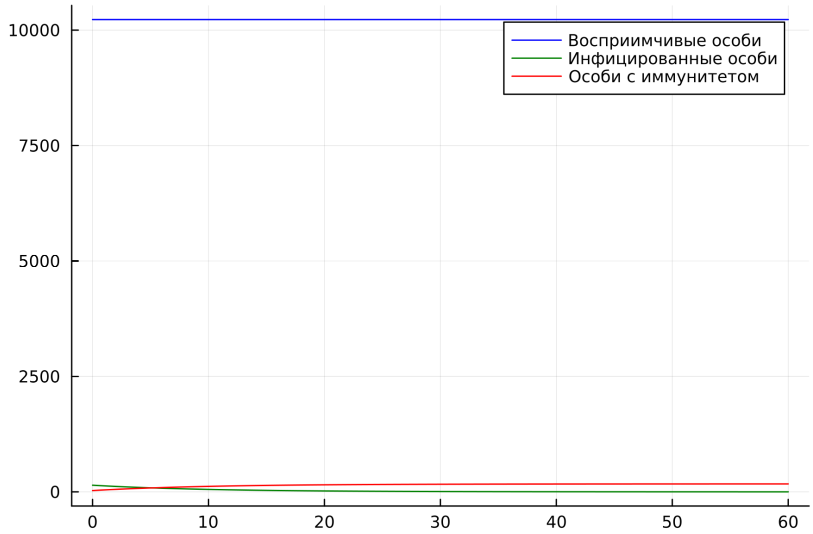

Рис. 4.1: Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные изолированы

4.1.2 Код программы для случая $I(0) > I^*$ (рис. 4.2):

```
using Plots

using DifferentialEquations


N = 10400

I0 = 144 # заболевшие особи

R0 = 28 # особи с иммунитетом

S0 = N - I0 - R0 # здоровые, но восприимчивые особи

alpha = 0.5 # коэффициент заболеваемости ??????

beta = 0.1 # коэффициент выздоровления  ???????


#I0 > I*

function ode_fn(du, u, p, t)

  S, I, R = u

  du[1] = -alpha*u[1]

  du[2] = alpha*u[1] - beta*u[2]
```

```
  du[3] = beta*I
end

v0 = [S0, I0, R0]
tspan = (0.0, 60.0)
prob = ODEProblem(ode_fn, v0, tspan)
sol = solve(prob, dtmax = 0.05)
S = [u[1] for u in sol.u]
I = [u[2] for u in sol.u]
R = [u[3] for u in sol.u]
T = [t for t in sol.t]

plt = plot(dpi = 300, legend = :right)

plot!(plt, T, S, label = "Восприимчивые особи", color = :blue)

plot!(plt, T, I, label = "Инфицированные особи", color = :green)

plot!(plt, T, R, label = "Особи с иммунитетом", color = :red)

savefig(plt, "model_2.png")
```

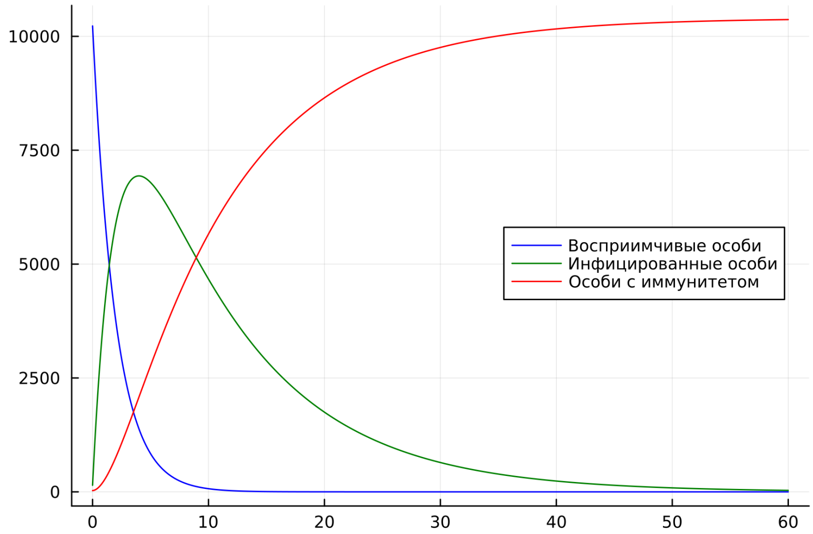

Рис. 4.2: Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные могут заражать особей группы S

4.2 OpenModelica

4.2.1 Код программы для случая $I(0) \leq I^*$ (рис. 4.3):

```
model lab6

Real N = 10400;

Real I;

Real R;

Real S;

Real alpha = 0.6;

Real beta = 0.2;

initial equation

I = 144;

R = 28;

S = N - I - R;

equation

der(S) = 0;
```

```
der(I) = -beta*I;

der(R) = beta*I;

end lab6;
```

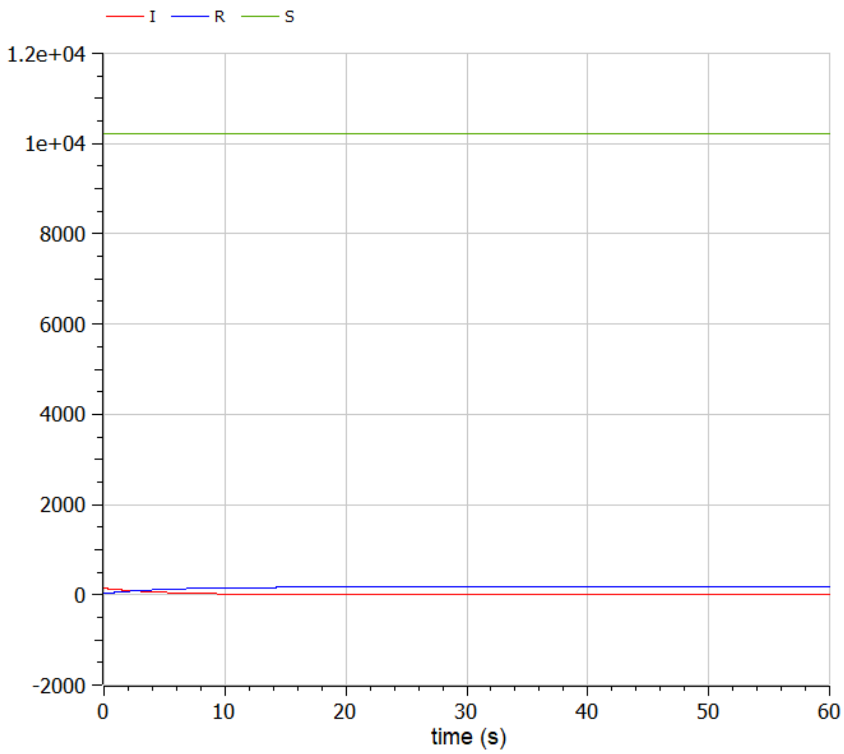

Рис. 4.3: Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные изолированы

4.2.2 Код программы для случая $I(0) > I^*$ (рис. 4.4):

```
model lab6_2

Real N = 10400;

Real I;

Real R;

Real S;

Real alpha = 0.4;

Real beta = 0.1;

initial equation
```

```
I = 144;
R = 28;
S = N - I - R;
equation
der(S) = -alpha*S;
der(I) = alpha*S - beta*I;
der(R) = beta*I;

end lab6_2;
```

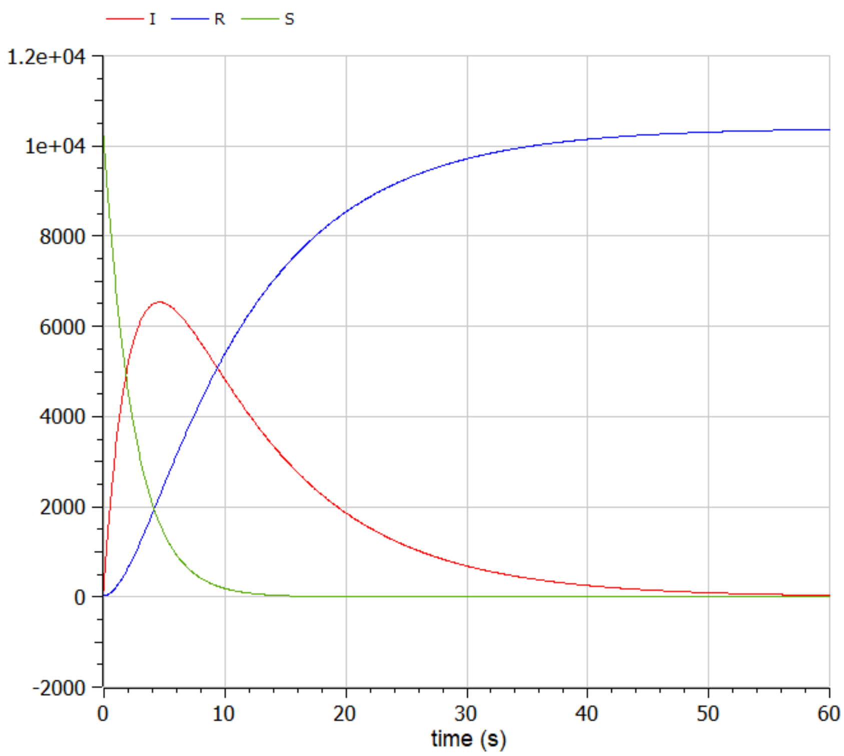

Рис. 4.4: Графики численности особей трех групп S, I, R, построенные на Julia, для случая, когда больные могут заражать особей группы S

5 Анализ полученных результатов. Сравнение языков.

В итоге проделанной работы мы построили графики зависимости численности особей трех групп S, I, R для случаев, когда больные изолированы и когда они могут заражать особей группы S.

Построение модели эпидемии на языке OpenModelica занимает значительно меньше строк, чем аналогичное построение на Julia. Кроме того, построения на языке OpenModelica проводятся относительно значения времени t по умолчанию, что упрощает нашу работу.

6 Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы была изучена модель эпидемии и построена модель на языках Julia и Open Modelica.

7 Список литературы. Библиография.

[1] Документация по Julia: https://docs.julialang.org/en/v1/

[2] Документация по OpenModelica: https://openmodelica.org/

[3] Конструирование эпидемиологических моделей: https://habr.com/ru/post/551682/