KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN,
RISET, DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI SURABAYA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
Jalan Ketintang Gedung D1 Lantai 1, Surabaya 60231
Telepon/Faksmile: +62-31 829 6427
Laman: http://fmipa.unesa.ac.id Surel: info-fmipa@unesa.ac.id

NASKAH SOAL UJIAN AKHIR SEMESTER GENAP
TAHUN AKADEMIK 2024/2025

Mata Kuliah/Kode	:	Fisika Matematika 4
Dosen Pengampu	:	Dr. Nugrahaning Primary Putri, M.Si. Arie Realita, M.Si
Program Studi/Kelas	:	S1 Fisika/ 2023 B
Hari & Tanggal	:	Rabu, 11 Juni 2025
Durasi/Waktu	:	3 Hari
Sifat	:	Projek

PETUNJUK:

a. Selesaikan semua soal di bawah ini dengan baik & benar !
b. Kerjakan soal berikut dalam kelompok beranggotakan 2 - 3 orang. Setiap kelompok mengerjakan 2 soal yang terdiri dari soal tensor dan kalkulus variasi.
c. Tuliskan hasil pengerjaan dengan pendekatan analitik dan komputasi menggunakan bahasa Python
d. Kumpulkan hasil pengerjaan dalam bentuk PDF dengan format penamaan No kelompok_FB 2023_Fismat4, berisi *scan* analitik, *screenshot* hasil komputasi dan link Google Colab yang **dapat diakses**
e. Kirim PDF hasil pengerjaan pada Google Drive dengan link berikut: https://drive.google.com/drive/folders/1M_FpVqLAdNMWjy2FOb-oRP9Mv0GsFdeR?usp=sharing

SOAL TENSOR:

1. Seorang teknisi mekanik sedang merancang sistem engsel pada lengan robotik. Sistem tersebut melibatkan dua partikel: partikel pertama memiliki massa 2 kg dan terletak pada posisi (1, 0, 0) meter, sedangkan partikel kedua memiliki massa 1 kg dan berada pada posisi (0, 1, 0) meter dari titik pangkal. Tentukan tensor inersia sistem ini terhadap titik asal serta nilai dan arah dari sumbu utama momen inersianya.
2. Dalam analisis dinamika struktur pesawat, dua sensor inersia dipasang di lokasi berbeda: sensor pertama dengan massa 3 kg berada di titik (1, 1, 1) meter, sedangkan sensor kedua bermassa 1 kg diletakkan di titik (-1, 1, 0) meter. Hitung tensor inersia sistem terhadap pusat massa dan tentukan sumbu-sumbu utama inersia.
3. Sebuah model sederhana untuk pesawat mini terdiri dari tiga beban: massa 1 kg di (2, 0, 0), massa 2 kg di (0, 2, 0), dan massa 1 kg di (0, 0, 1). Untuk menganalisis kestabilan rotasi, tentukan tensor inersia sistem terhadap titik asal dan tentukan nilai-nilai eigen dan arah eigennya.
4. Dalam eksperimen simulasi gempa, dua bola bermassa sama (1 kg) ditempatkan secara simetris di ruang tiga dimensi pada posisi (1, 2, 3) dan (-1, -2, -3). Hitung tensor inersia sistem terhadap titik pusat dan tentukan principal axes yang menunjukkan arah alami rotasi.

5. Untuk mensimulasikan gaya yang bekerja pada struktur jembatan gantung mini, dua partikel bermassa 2 kg masing-masing diletakkan pada titik (1, 1, 0) dan (-1, 1, 0). Hitung tensor inersia sistem terhadap titik asal dan cari nilai eigen dan arah sumbu utama rotasinya.
6. Sebuah benda komposit terdiri atas tiga bagian dengan distribusi massa sebagai berikut: bagian pertama (massa 3 kg) terletak di (1, 0, 0), bagian kedua (1 kg) di (0, 1, 0), dan bagian ketiga (2 kg) di (0, 0, 1). Tentukan tensor inersia sistem dan sumbu-sumbu utama rotasi.
7. Dalam sistem pengujian getaran, tiga beban kecil ditempatkan pada posisi (1, 2, 2), (-1, -2, 2), dan (0, 0, -1) dengan massa masing-masing 1 kg, 1 kg, dan 2 kg. Hitung tensor inersia dan temukan principal moments untuk evaluasi dinamika rotasi sistem tersebut.
8. Sebuah sistem massa kontinu berbentuk setengah bola dengan jari-jari 1 meter ditempatkan di atas meja eksperimen, hanya mencakup bagian dengan $z > 0$. Dengan menggunakan densitas seragam dan koordinat bola, hitung tensor inersia sistem serta nilai-nilai eigennya.
9. Empat massa masing-masing 1 kg diletakkan pada sudut-sudut persegi datar di bidang *xy*: (1, 0, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 0), dan (0, -1, 0). Tentukan tensor inersia sistem terhadap titik pusat dan temukan arah alami rotasi atau sumbu-sumbu utama.
10. Sebuah bola homogen berisi massa kontinu dengan jari-jari 1 meter berada dalam ruang simulasi rotasi. Gunakan integral dalam koordinat bola untuk menghitung tensor inersia sistem dan tentukan nilai eigen dan sumbu utamanya.
11. Tiga beban kecil masing-masing 1 kg, 2 kg, dan 1 kg diletakkan pada titik (0, 1, 1), (1, 0, 1), dan (1, 1, 0) untuk menganalisis distribusi inersia dalam sistem struktur kendaraan. Hitung tensor inersia dan tentukan nilai serta arah sumbu rotasi alami.
12. Dalam sistem mekanika klasik, dua massa diletakkan di sepanjang sumbu x: 2 kg di (2, 0, 0) dan 3 kg di (-2, 0, 0). Tentukan tensor inersia terhadap titik asal dan temukan vektor inersianya dari sistem tersebut.
13. Sebuah benda berbentuk seperempat silinder padat memiliki jari-jari 1 meter dan tinggi 1 meter, hanya mencakup wilayah $x > 0$ dan $y > 0$. Dengan menggunakan integral dalam koordinat silinder, hitung tensor inersia dan analisis kesimetrian komponen-komponennya.
14. Empat partikel dengan massa 1 kg masing-masing diletakkan pada titik (1, 1, 1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), dan (1, -1, -1). Sistem ini membentuk konfigurasi simetris tiga dimensi. Hitung tensor inersia dan interpretasikan arti geometris dari nilai eigen dan arahnya.
15. Sebuah kubus homogen dengan sisi panjang 2 meter memiliki pusat massa di titik asal. Dengan melakukan integral volume pada bentuk kubus tersebut, hitung tensor inersia dan tentukan nilai-nilai eigen serta arah sumbu utama inersianya.

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN,
RISET, DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS NEGERI SURABAYA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
Jalan Ketintang Gedung D1 Lantai 1, Surabaya 60231
Telepon/Faksmile: +62-31 829 6427
Laman: http://fmipa.unesa.ac.id Surel: info-fmipa@unesa.ac.id

SOAL KALKULUS VARIASI:

1. Seorang insinyur ingin memasang kabel listrik dengan massa per panjang ρ di antara dua tiang setinggi 20 meter, yang berjarak horizontal 50 meter. Kabel dipengaruhi gravitasi sehingga memiliki energi potensial. Bentuk lintasan kabel yang tergantung antara kedua tiang ini dinyatakan dengan fungsi $y(x)$, dengan $y(a)$=20 m dan $y(b)$=20 m. Fungsional energi potensialnya adalah:

$$J(y) = \int_a^b \rho\, g\, y(x) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Tentukan bentuk lintasan kabel $y(x)$ yang meminimalkan energi potensial ini menggunakan kalkulus variasi!

2. Sebuah drone pengiriman akan bergerak dari titik A ke titik B di sebuah kota. Kota tersebut memiliki zona dengan angin kencang, yang menyebabkan drone menghabiskan energi ekstra untuk menjaga kestabilannya. Drone ingin bergerak di jalur optimal yang meminimalkan konsumsi energi, dengan mempertimbangkan zona angin $W(x,y)$. Tentukan lintasan optimal $y(x)$ drone tersebut menggunakan persamaan fungsional:

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, .W\big(x, y(x)\big)\, dx$$

dengan
- Titik awal: $A = (0,0)$
- Titik akhir: $B = (1,1)$
- Fungsi intensitas arus: $W(x,y) = 1 + 2.5e^{-25[(x-0.5)^2 + (y-0.5)^2]}$

3. Sinar cahaya bergerak dalam suatu medium di mana indeks bias bergantung pada posisi horizontal x, dan diberikan oleh:

$$n(x) = x^{-1/2}$$

Sinar cahaya bergerak dari titik $A(1,0)$ ke titik $B(4,1)$. Tentukan lintasan optimal $y(x)$ yang meminimalkan waktu tempuh cahaya berdasarkan Prinsip Fermat.

4. Sebuah robot inspeksi bergerak di atas atap parabolik dari sebuah hanggar yang memiliki bentuk:

$$y = x^2$$

Robot bergerak dari satu titik ke titik lain di permukaan atap sambil membawa sensor untuk mendeteksi retakan. Agar efisien secara energi dan waktu, lintasan gerak robot harus meminimalkan panjang lintasan di permukaan tersebut. Tentukan bentuk lintasan $z(x)$ di atas permukaan tersebut yang merupakan geodesik.

5. Dalam percobaan fisika, seorang mahasiswa menyusun dua lingkaran kawat yang disusun secara horizontal dengan radius berbeda, kemudian lapisan sabun terbentuk di antara keduanya. Bentuk lapisan sabun ini ditentukan oleh fungsi tinggi $y(x)$, dengan radius x berubah dari $x = a$ ke $x = b$. Lapisan ini meminimalkan energi tegangan permukaan sabun, dengan bentuk fungsional:

$$J(y) = \int_a^b 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Gunakan kalkulus variasi untuk menentukan persamaan bentuk permukaan sabun tersebut!

6. Seorang pendaki ingin mendaki dari titik awal di lembah ke titik akhir di puncak bukit. Daerah tersebut memiliki area curam yang meningkatkan tingkat kesulitan dan energi yang diperlukan secara drastis. Pendaki ingin memilih jalur optimal yang meminimalkan total energi, mempertimbangkan kecuraman medan $S(x,y)$. Tentukan lintasan optimal $y(x)$ pendaki tersebut menggunakan persamaan fungsional:

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . S(x, y(x))\, dx$$

dengan
- Titik awal: $A = (0,0)$
- Titik akhir: $B = (1,1)$
- Fungsi intensitas arus: $S(x, y) = 1 + 5e^{-40[(x-0.3)^2+(y-0.7)^2]}$

7. Dalam suatu eksperimen optik, sebuah sinar bergerak dari titik $A(0,0)$ ke titik $B(2,1)$. Medium memiliki indeks bias yang berubah terhadap posisi horizontal x, dan diberikan oleh:

$$n(x) = (2x + 5)^{-1/2}$$

Tentukan lintasan cahaya $y(x)$ yang meminimalkan waktu tempuhnya sesuai dengan Prinsip Fermat.

8. Sebuah jembatan kayu sepanjang 10 meter ditopang pada kedua ujungnya. Beban berat ditempatkan tepat di tengah jembatan menyebabkan balok mengalami lenturan. Bentuk defleksi jembatan dinyatakan dengan fungsi $y(x)$, dan energi lenturannya dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$J(y) = \int_0^{10} \frac{1}{2} EI \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 dx$$

Tentukan bentuk lenturan balok yang menyebabkan energi lenturannya minimum menggunakan pendekatan kalkulus variasi!

9. Seorang teknisi ingin menarik kabel komunikasi di sepanjang permukaan menara yang memiliki bentuk silinder bergelombang, dengan radius berubah terhadap sudut azimutal θ menurut fungsi:
$$r(\theta) = 1 + cos\theta$$
Kabel harus ditarik dari titik A di dasar menara ($z = 0,\ \theta = 0$) ke titik B di puncak menara ($z = h,\ \theta = \pi$). Untuk menghemat bahan, lintasan kabel harus mengikuti lintasan terpendek (geodesik) di permukaan menara tersebut. Tentukan bentuk lintasan $z(\theta)$ yang meminimalkan panjang kabel di permukaan silinder.

10. Sebuah wahana luncuran air dirancang untuk meminimalkan waktu tempuh. Benda meluncur dari ketinggian awal $y(a)=0$ m ke ketinggian akhir $y(b)=-15$ m. Bentuk lintasan luncuran ini adalah $y(x)$, dan waktu tempuh minimum yang diinginkan memiliki fungsional:
$$J(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2g|y(x)|}}\, dx$$
Gunakan kalkulus variasi untuk mencari persamaan lintasan yang memberikan waktu tempuh minimum!

11. Sebuah robot pembersih otomatis akan bergerak dari titik A ke titik B dalam ruangan. Ruangan tersebut memiliki area yang sangat kotor yang memerlukan energi ekstra untuk membersihkan jika dilewati. Tentukan lintasan optimal robot tersebut $y(x)$ agar total energi yang dikeluarkan menjadi minimum, mempertimbangkan tingkat kekotoran ruangan $D(x,y)$ menggunakan persamaan fungsional:
$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, .D\big(x, y(x)\big)\, dx$$
dengan
- Titik awal: $A = (0,0)$
- Titik akhir: $B = (1,1)$
- Fungsi intensitas arus: $D(x,y) = 1 + 3e^{-20[(x-0.4)^2+(y-0.6)^2]}$

12. Seorang musisi sedang membuat drum dengan membran bundar berjari-jari $R = 25$ cm. Untuk memperoleh kualitas suara yang baik, diperlukan mode getaran alami membran, yaitu fungsi amplitudo getaran $u(x,y)$ dengan energi elastis minimal:
$$J(y) = \frac{1}{2}\int_A \sigma\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dA$$

Gunakan pendekatan kalkulus variasi untuk menentukan mode alami getaran membran tersebut!

13. Setelah hujan deras, air hujan mengalir di sepanjang lereng gunung berbentuk kerucut, dengan permukaan diberikan oleh:

$$z = r\cot\alpha, \text{ dengan } r^2 = x^2 + y^2$$

Salah satu aliran air mengalir dari titik di pinggir dasar kerucut menuju lereng yang lebih tinggi. Untuk mempelajari jalur tercepat aliran alami air, seorang geofisikawan ingin menentukan lintasan geodesik air tersebut. Tentukan lintasan $\phi(r)$ yang meminimalkan jarak yang dilalui air di permukaan kerucut tersebut.

14. Sebuah sinar laser melewati medium tidak seragam di mana indeks bias berubah sesuai dengan tinggi y, mengikuti fungsi:

$$n(y) = (y-1)^{-1/2}$$

Sinar bergerak dari titik $A(0,2)$ ke titik $B(1,4)$. Tentukan bentuk lintasan $y(x)$ yang ditempuh cahaya untuk waktu tercepat.

15. Sebuah kapal kecil akan bergerak dari pelabuhan titik A ke pelabuhan titik B di seberang teluk. Daerah teluk tersebut memiliki zona arus kuat yang menghambat laju kapal, sehingga energi yang dikeluarkan kapal untuk melewati area ini meningkat signifikan. Tentukan lintasan optimal $y(x)$ kapal sehingga kapal dapat bergerak dengan usaha minimum, memperhitungkan intensitas arus kuat $C(x,y)$ menggunakan persamaan fungsional:

$$J(y) = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, . \, C\big(x, y(x)\big)\, dx$$

dengan

- Titik awal: $A = (0,0)$
- Titik akhir: $B = (1,1)$
- Fungsi intensitas arus: $C(x,y) = 1 + 4e^{-30\left[(x-0.6)^2 + (y-0.4)^2\right]}$

RUBRIK PENILAIAN :

Komponen	**Sub-komponen**	**Kriteria Penilaian**	**Skor Maksimal**
Pengerjaan Analitik **(CPMK 4)**	Penyusunan komponen tensor inersia	Tensor disusun dari definisi, elemen-elemen dihitung dan dijumlahkan dengan benar	10
	Penyelesaian solusi eigen sistem tensor	Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dengan menjelaskan prosedur determinan, solusi karakteristik, dan diagonalisasi	15
	Penurunan persamaan Euler–Lagrange	Menurunkan persamaan Euler–Lagrange dengan langkah matematis benar dan terstruktur	10
	Solusi atau bentuk lintasan	Menyediakan solusi eksplisit atau menyusun bentuk diferensialnya untuk dianalisis	15
Penerapan Komputasi **(CPMK 2)**	Kode Python (fungsi & input data)	Menggunakan pendekatan programatik (NumPy, SymPy, Scipy) yang relevan dan bersih	10
	Plot visualisasi / output numerik	Hasil visualisasi (grafik lintasan/eigenvalue/surface) jelas dan akurat	10
	Kesesuaian hasil numerik dengan solusi analitik	Validasi hasil numerik vs. analitik disertai justifikasi jika berbeda	10
Analisis dan Interpretasi **(CPMK 3)**	Interpretasi fisik hasil (momen inersia dan lintasan)	Menyajikan makna fisik hasil tensor, *principal axes*, dan lintasan minimum energi / waktu	10
Format Penulisan	Keterpaduan dan format laporan	Format PDF rapi, memuat scan analitik, screenshot kode & grafik, serta tautan Colab dapat diakses	10