תרגיל בית מס 3- גלי גלר 207704842

תרגיל מס 1

סעיף א

1. **הוכחה:** לכל n>1 מתקיים כי log n לכן מתקיים:

לכן אכן nlogn = O(n!)

1. **הוכחה:**

כי עבור n גדול מספיק מתקיים לכל i בין 0 ל k-1

לכן עבור c = מתקיים כי ולכן אכן

1. **הוכחה:** מהנתון כי ו קיים m טבעי ו כך שלכל m<n מתקיים ו , נסמן: c =

לכן אכן

1. **הפרכה:** נגדיר: f(n) = g(n) = h(n) = , בבירור f(n) וגם לכן אכן מתקיים f(n)=O(g(n)) וגם h(n) = O(g(n)) אך לכן אכן מתקיים:
2. **הוכחה:** מהנתון קיימים כך ש f(n) וg(n) לכן מתקיים:

f(n) , נסמן c = ונקבל כי f(n) לכן אכן f(n) = O(h(n))

1. **הוכחה:**

לכל n > 1 מתקיים: logn > 0 ועבור k מתקיים , כמו כן מתקיים לכן נשתמש בהגדרת הגבול, עם הגבול ( מכלל הסנדוויץ' חדוא1:n )

1. **a: *הפרכה:*** נגדיר: לכל i בין 1 ל n אז מתקיים כי max{}(n) = n ולכן O(max{}(n)) = O(n) אבל

**b: הפרכה:** נגדיר: לכל i בין 1 ל n-1 ו אז מתקיים: max{}(n) = n ולכן O(max{}(n)) = O(n) אבל

*סעיף ב*

1. *ראשית, ננתח את הסיבוכיות של כל פעולה בקוד:*

def f1(L):

n = len(L) **O(1)**

for i in range(n): **O(n)** – the loop runs n times

if i in L: **O(n)** – explanation below

L.append(i) **O(1)** - given

return L

הפעולה i in L עוברת על איברי L ומחפשת את i- במקרה שבו i לא נמצא יתבצעו len(L) מעברים  
כמו כן, len(L) משתנה כאשר i נמצא- לכן הפעולה append תקרה לכל היותר n פעמים, לכן len(L) הוא לכל היותר 2n וסהכ פעולה היא O(n)

הלולאה רצה n פעמים ועבור כל ריצה שלה מתבצעת פעולה שהסיבוכיות שלה היא O(n) הסיבוכיות של הפונקציה היא **O(**

1. *ננתח את הסיבוכיות של כל פעולה בקוד:*

def f2(L):

n = len(L) **O(1)**

res = [] **O(1)**

for i in range(500, n): **O(n)** – the loop runs n – 500 <= n times

for j in range(i,3\*i): **O(n) -** explanation below

k=1 **O(1)**

while k < n: **O(logn)** – explanation below

k+=2

res.append(k)

return res

הלולאה השנייה רצה 2i פעמים לכל i, כמו כן i < n לכן 2i <= 2n והסיבוכיות של הלולאה היא O(n)

ראינו בתרגול שהלולאה השלישית רצה בlogn

לכן סה"כ הסיבוכיות של הפונקציה היא **O(**

סעיף ג

הפונקציה הראשונה יוצאת רשימה חדשה המורכבת מעותק של הרשימה המקורית והאיבר החדש, בעוד שהפונקציה השניה משנה את הרשימה שהיא מקבלת כקלט.

כאשר אלחנן קורא לפונקציה הראשונה, לולאת הfor עוברת על הרשימה המקורית גם לאחר שהמשתנה l כבר לא מצביע עליה- הוא מצביע על הרשימה החדשה שהחזירה הפונקציה, ולכן הלולאה תרוץ רק עד סוף הרשימה המקורית.

לעומת זאת, כאשר אלחנן יקרא לפונקציה השנייה, היא תוסיף איברים לרשימה המקורית בכל איטרציה של הלולאה, ולכן הלולאה לעולם לא תגיע לסוף הרשימה.

שאלה 2 סעיף ט

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 23 | 53 | 101 | 199 | 401 |
| complete\_graph | 72.9 | 221 | 539.5 | 1347 | 2635 |
| cycle | 267.8 | 1188.1 | 4852.8 | 20621.4 | 87783 |
| Inv\_cycle | 122.3 | 424.3 | 1118.2 | 2583.4 | 5451.9 |

נתאר את זמן הכיסוי של כל אחד מהגרפים במושגי big O notation:

Complete\_graph- הגרף בשחור

O(n) – הקלטים גדלים באופן לינארי, ולפי הטבלה כך גם גדלי הפלטים- חלוקה של כל תוצאה בתוצאה שלפניה תהיה בין 2 ל3, כפי שניתן לראות בגרף

הסבר אפשרי לכך הוא שבגרף המלא ניתן להגיע לכל צומת מכל צומת, לכן ככל הנראה יידרש מספר קטן יחסית של צעדים כדי לכסות את כל הגרף

Cycle- הגרף הסגול

O(n^2)- הקלט גדל פי 2 והתוצאה גדלה בערך פי 4, ומתקיים: (2n)^2 / n^2 = 4n^2/n^2 = 4 לן אפשר להסיק שזמן הכיסוי הוא מסדר גודל n^2

הסבר אפשרי לכך הוא שלכל צומת יש שני שכנים, להם סיכויים שווים להיבחר, כלומר לכל צומת ניתן להגיע רך משני צמתים אחרים, ובגלל שניתן "לחזור אחורה" לצומת שבה כבר ביקרנו סביר להניח שיידרשו יותר צעדים כדי לכסות את גרף המעגל מאשר

Inv\_cycle:

O(nlogn)- הקלטים גדלים באופן לינארי, לעומת זאת המנות בין הפלטים הולכים וקטנים- מתחילים במנה של 3.5 בערך ומגיעים למנה של 2.1 ואכן ניתן לראות כי:

הסבר לכך יכול להיות שהגרף מכיל את גרף המעגל, ולכן זמן הכיסוי של גרף המעגל הוא חסם עליון, אך קיימים צמתים עם 3 שכנים, מה שעשוי לקצר את זמן הכיסוי

טבלה עבור random\_graph:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 125 | 250 | 500 | 1000 | 2000 |
| 0.3 | 746.4 | 1484.4 | 3448.8 | 7384.7 | 15998.3 |
| 0.5 | 643.1 | 1570.0 | 3152.0 | 7851.0 | 16449.3 |
| 0.7 | 723.6 | 1448.5 | 3719.2 | 7330.6 | 15840.0 |

להערכתי, זמן הכיסוי הוא O(n) כי לכל p המנה בין תוצאת הרצה לזו שקדמה לה נעה בין 1.9 ל2.5 עבור קלט שגדל פי 2 בכל הרצה. ככל שp גדול יותר סביר שיהיו צמתים עם הרבה שכנים, וכפי שראינו קודם, ככל שלצמתים יש יותר שכנים זמן הכיסוי משתפר.

Return graph:

ראשית, הn המקסימלי עבורו הפונקציה רצה בפחות מדקה הוא 25, לכן ניתן להשתמש בערכי n קטנים יחסית על מנת להבין את סדר הגודל.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 16 | 8 | 4 | 2 | n |
| 39068.5 | 160.4 | 12.9 | 2 | Return\_graph |

O(k^n)- ניתן לראות כי לכל קלט המנה בין הפלט לפלט הקודם היא מספר גדול יחסית (לפחות 6), כמו כן המנה גדלה, לכן ניתן להסיק שזמן הכיסוי אקספוננציאלי, כלומה קיים מספר k כלשהו כך ש k^n חוסם את הפונקציה

שאלה 3 סעיף ב

בקובץ skeleton כתבתי את הפונקציה הבאה:

def generate\_sorted\_blocks(lst, k):  
 result = []  
  
 for i in range(0, len(lst), k):  
 sublist = lst[i: i + k].copy()  
 selection\_sort(sublist)  
 result.append(sublist)  
  
 return result

הלולאה החיצונית רצה n/k פעמים

סיבוכיות זמן הריצה של copy היא k

ראינו בכיתה שסיבוכיות slelection\_sort עבור קלט בגודל k היא k^2

הפעולה append היא O(1)

סה"כ קיבלנו:

נתון כי n לכן מתקיים:

שאלה 3 סעיף ד

קודם מופעלת הפעולה generate\_sorted\_blocks שראינו שהיא O(nk) ואחכ מופעלת הפעולה merge\_sorted\_blocks שנתון שהיא O(m\*t\*log n) על הרשימה שנוצרה בפעולה הקודמת, לכן

סהכ מתבצעות nk + m\*t\*logm = nk + פעולות. כמו כן, נתון כי וt = k

*שאלה 3 סעיף ה*

*הסיבוכיות של merge\_sort היא O(nlogn), כדי שsort\_by\_block\_merge תהיה O(nlogn) צריך להיות c כך שמתקיים 9cnk כלומר הערך האסימפטוטי הגדול ביותר של k כפונקציה שלn הוא* ***logn***