תרגיל בית מס' 4- גלי גלר 207704842

שאלה 1

סעיף א

מס הדרכים בהן ניתן לסדר את איברי הרשימה [1,2,…n] בשורה שקול לפתרון השאלה הקומבינטורית "בכמה דרכים שונות ניתן לסדר n אנשים בשורה?" ראינו בבדידה שהתשובה היא n! כי יש n אפשרויות לבחור את האדים הראשון ואז n-1 אפשרויות לבחור את השני עד שמגיעים למצב בו יש רק אדם אחד שעוד לא נבחר לו מקום, לכן גם מספר הדרכים בהן ניתן לסדר את איברי הרשימה הוא **n!**

סעיף ב

נרצה למצוא את מספר הסידורים של הרשימה עבורם הפונקציה det\_quicksort תרוץ בזמן הארוך ביותר.

ראשית, נשים לב שהמקרה בו det\_quicksort תרוץ בזמן הארוך ביותר הוא המקרה שבו smaller ריקה או greater ריקה, כלומר lst[0] הוא האיבר הגדול ביותר ברשימה או הקטן ביותר. נפתור בעזרת נוסחה רקורסיבית:

נתון כי n טבעי וחיובי, לכן מתקיים n > 0. עבור n = 1 יש רק אופציה אחת כי ברשימה יש איבר אחד, ועבור n = 2 יש שני איברים שונים לכן יש שתי אפשרויות שונות וסה"כ נקבל שתנאי העצירה הם:

נמצא את האיבר הכללי :

לאיבר הראשון בסידור הרשימה יש שתי אפשרויות: הקטן ביותר או הגדול ביותר. נניח בלי הגבלת הכלליות שהאיבר שנבחר הוא הגדול ביותר. בצעד הבא נוכל לבחור את הקטן ביותר, שאחריו בעיה שקולה לסידור רשימה בגודל n-2. אחרת, נבחר באיבר השני בגודלו ברשימה, וגם במקרה זה הבעיה תהיה שקולה לסידור רשימה בגודל n-2.

לסיכום, נקבל:

נפתור את נוסחת הנסיגה שקיבלנו בעזרת פולינום אופייני:

ראינו בבדידה שהפולינום האופייני יהיה נציב בנוסחאת הנסיגה עם תנאי העצירה:

לכן A = 0.5, B = 0 ולכן האיבר הכללי הוא:

סה"כ קיבלנו כי מספר הסידורים של הרשימה עבורם הפונקציה תרוץ בזמן האיטי ביותר היא

סעיף ג

כעת נחשב את הגבול:

מהסעיפים הקודמים p(n) = n! ו w(n) =

ומתקיים:

כי לכל i בין 2 לn ולכן יקטין את המכפלה שבצד הימני ביותר באי השוויון

כמו כן, מתקיים:

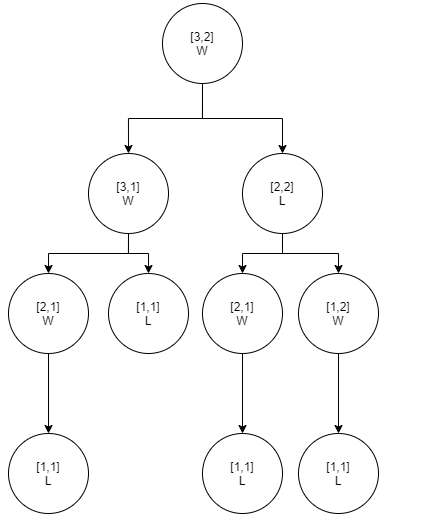
ולכן מכלל הסנדוויץ' שנלמד בקורס חדו"א1 מתקיים

ניתן להסיק מכך שככל שn גדל הסיכוי לכך שזמן הריצה של האלגוריתם יהיה גרוע ביותר קטן

שאלה 2

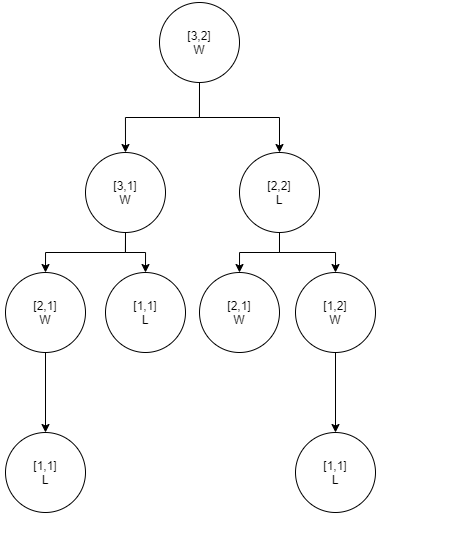
סעיף ב

הקונפיגורציה 1,1 מופיעה 4 פעמים בעץ



סעיף ד

הקונפיגורציה 1,1 מופיעה 3 פעמים בעץ



שאלה 3

סעיף א

נוכיח שלכל n במטריצה had(n) כל שורה מלבד השורה העליונה מכילה מספר זהה של אפסים ואחדות.

עבור n=0 זה מתקיים באופן ריק כי had(0) = [0] כי במטריצה יש רק שורה אחת.

נראה שזה אכן מתקיים עבור n=1:

*ואכן בשורה השנייה יש 0 אחד ו1 אחד כנדרש.*

*צעד האינדוקציה: נניח שעבור מטריצה בגודל n אכן מתקיימת התכונה, ונוכיח עבור מטריצה בגודל n+1:*

*מההגדרה של had(n+1) נקבל:*

*קיבלנו מטריצת בלוקים שמורכבת מhad(n) ומ. מהנחת האינדוקציה בכל שורה בhad(n) מלבד השורה הראשונה מספר ה1 שווה למספר ה0, ו השורות הראשונות של had(n+1) הן "הכפלה" של השורות של had(n), ולכן למעט השורה הראשונה מספר ה0 וה1 בהן שווה.*

*מההגדרה ב יש 0 איפה שבhad(n) יש 1 ולהפך, לכן בשורה הראשונה של השורות האחרונות של had(n+1) יהיה את אותו המספר של 0 ו1, ומאותה סיבה היחס יישמר גם בשאר השורות.*

*לכן נסיק כי התכונה אכן מתקיימת לכל n*

*סעיף ג:*

*ננתח את סיבוכיות הקוד בהנחה ש pow(2,n) = O(n):*

def is\_in\_inverse(n, i, j):  
 size\_of\_block = pow(2, n-1) # O(n)  
  
 return (i >= size\_of\_block) and (j >= size\_of\_block) # O(1)  
  
def had\_local(n, i, j):  
 if n == 0:  
 return 0  
 size = pow(2, n-1) # O(n)  
  
 if is\_in\_inverse(n, i, j): # O(n)  
 return 1 - had\_local(n-1, i - size, j - size)  
 if i >= size:  
 i = i – size # O(1)  
  
 if j >= size:  
 j = j – size # O(1)  
  
 return had\_local(n-1, i, j)

*כפי שניתן לראות, מלבד הקריאה ל is\_in\_inverse שהיא O(n) כל שאר הפעולות הן O(1), ויתבצעו n קריאות לפונקציה לכן הסיבוכיות היא*

*שאלה 5*

*מספר הביטים של a- n  
מספר הביטים של b – m*

*ראשית, הלולאה הראשונה תרוץ O(****m)*** *פעמים- בכל איטרציה של הלולאה מחלקים את b ב-2, ולכן הייצוג הבינארי של b מאבד ביט*

*בנוגע לפעולות שקורות בתוך הלולאה, מהנתון ניתן להניח שכולן חוץ מפעולות הכפל והחילוק הן O(1), כמו כן נתון כי b//2 = O(m), לכן הסיבוכיות של כל הפונקציה היא m\*O(result \* a + a\*a)*

*ראשית, נחשב את הסיבוכיות של a\*a:*

*כפי שניתן לראות בדוגמת הכפל למעלה, יתרחשו הכפלות של a בסדר גודל של - הכפלה של a בכל ביט של עצמו, והן יהיו מוזחות, לכן נקבל של a\*a יש בערך 2|a| ביטים, ויתרחשו פעולות חיבור בסדר גודל של |a|, לכן a\*a =*

*נשים לב כי |result| בכל איטרציה, לכן result \* a = O(a\*a)*

*כדי לחשב את מספר הפעולות כתלות בn, נשים לב כי באיטרציה הראשונה יתבצעו O() פעולות ובאיטרציה השנייה יתבצעו O( פעולות ובאופן כללי, אם i הוא מספר האיטרציה, יתרחשו O()*

*נשים לב שכאשר b=1 הלולאה לא תתבצע, לכן מתרחשות m-1 איטרציות. נחשב את סכום סדרת הi:*

*ולכן הסיבוכיות הכוללת היא*

*שאלה 6*

*סעיף ב*

*סיבוכיות זמן הקוד שכתבתי היא אקספוננציאלית כי במקרה הגרוע שבו כל האותיות שונות לכל קריאה רקורסיבית בעץ הרקורסיה יש שלושה בנים, וראינו בכיתה שסיבוכיות הריצה של עץ כזה היא אקספוננציאלית.*