משוואות דיפרנציאליות רגילות

חורף - תשפ"ו

גלית לבדב

תוכן עניינים

1 הרצאה 1

1.1 הגדרות בסיסיות

1.1.1 מה זה מד"ר בכלל???

משוואה דיפרנציאלית רגילה

משוואה שמערבת פונקציה ונגזרות שלה.

$$F((t, y(t), ..., y^n(t)) = 0$$

1.1.2 מד"ר מסדר n

$$y^n = f(t, ..., y^{n-1})$$

1.1.3 מד"ר לינארית

$$a_0 + a_1(t) \cdot y(t) + ... + a_n(t) \cdot y^n(t) = b(t)$$

אם $b(t) = 0$ המשוואה נקראת **הומוגנית**.

1.1.4 משוואה אוטונומית מסדר ראשון

$$y'(t) = f\left(y(t)\right)$$

1.2 מערכת משוואות דיפרנציאליות

1.2.1 הגדרה כללית

שתי משוואות בשתי פונקציות:

$$F_1(y_1^n, y_2^n, ..., y_1, y_2) = 0$$
$$F_2(y_1^n, y_2^n, ..., y_1, y_2) = 0$$

בדרך כלל נשתמש בצורה הבאה:

1.2.2 הצורה הנפוצה יותר

$$F_1(t, y_1, y_2) = 0$$
$$F_2(t, y_1, y_2) = 0$$

הערה: לפעמים יהיו k משוואות בk פונקציות.

1.2.3 פתרון מד"ר

נפתור את המשוואה $y'(t) = y(t)$. ראשית, נניח כי $y(t) = 0$. כעת ניתן לחלק ב$y(t)$.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$$

אם y תמיד חיובית: נשים לב שזו נגזרת מוכרת.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = (\log(y(t)))' = 1$$

נבצע אינטגרל לשני האגפים,

$$\log(y(t)) = t + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

נעלה לחזקת e, ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = e^t \cdot e^c \quad , c \in \mathbb{R}$$

אם y תמיד שלילית: נעשה את אותו דבר אבל על $\log(-y(t))$ ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = -e^t \cdot e^c \quad , c \in \mathbb{R}$$

לסיכום, אוסף הפתרונות הוא:

$$y(t) = e^t \cdot C \quad , C := e^c \quad , c \in \mathbb{R}$$

נבדוק שזה פתרון:

$$y'(t) = e^t \cdot C = y(t)$$

נראה שאין עוד פתרונות: נשתמש בפונקציית עזר:

$$g(t) = \frac{y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = \frac{y'(t)e^t - y(t)e^t}{\left(e^t\right)^2} = \frac{y'(t) - y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = 0 \iff g \text{ קבועה} \iff y(t) = c \cdot e^t$$

1.2.4 הערות על מד"ר אוטונומיות

1. אם y_0 פתרון של $y'(t) = f(y(t))$ אז גם $y_c(t) = y_0(t+c)$ פתרון לכל בחירה של c

2 הרצאה 2

2.1 דוגמאות למד"רים

2.1.1 גידול אוכלוסיה

$N(t)$ - גודל האוכלוסייה בזמן t, K - קבוע שתלוי באוכלוסייה.

$$N'(t) = K \cdot N(t)$$

באופן דומה לפתרון המד"ר שראינו בהרצאה 1,

$$N(t) = e^{kt} \cdot C'$$

נסמן כתנאי התחלה את $N(0)$, כלומר - הגודל ההתחלתי של האוכלוסיה

$$N(0) = C$$

לכן ניתן לכתוב,

$$N(t) = e^{k \cdot t} \cdot N(0)$$

2.1.2 התפרקות רדיואקטיבית

נסמן ב-$N(t)$ את מספר החלקיקים באיזשהו חומר רדיואקטיבי.

המד"ר שלנו יהיה

$$N'(t) = -K \cdot N(t)$$

ואז נקבל (שוב, באופן דומה להרצאה 1)

$$N(t) = e^{-k \cdot t} \cdot N(0)$$

2.1.3 המשוואה הלוגיסטית

מידול לגודל האוכלוסיה עם משאבים מוגבלים.

כלומר, אם האוכלוסיה לא יכולה לעבור ספ C. (כלומר - $N(0) < C$).

המשוואה תהיה

$$N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{C}\right) = K \cdot N(t) - \frac{K}{C} \cdot N(t)^2$$

2.2 דוגמאות למערכות של משוואות

2.2.1 מודל SIR

נחלק את כלל האוכלוסיה ל-3 סוגים:

1. $S(t)$Susceptible- "רגישים"
2. $I(t)$Infected- "נדבק - כרגע חולה"
3. $R(t)$Recovered- "מחלימים"

עבור קבועים $\beta > 0, \quad \gamma > 0$ נקבל:

$$\begin{aligned} &S'(t) = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\ &I'(t) = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \\ &R'(t) = \gamma \cdot I(t) \end{aligned}$$

(*) - זו מערכת אוטונומית מסדר ראשון אך אינה לינארית.

בדיקת שפיות למערכת:

נשים לב שסך האוכלוסיה = $S + I + R$

אוכלוסייה בזמן 0 = $(S + I + R)(0)$ ואז:

$$(S + I + R)'(t) = S' + I' + R' = 0$$

כלומר קבוע לאורך כל הזמן.

2.2.2 מודל טורף-נטרף (Lotka-Voltera)

נסמן:

- $x(t)$: כמות הנטרפים (צמחוניים/ארנבות).
- $y(t)$: כמות הטורפים (אריות).

המערכת:

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), \qquad && a > 0,\, b > 0 \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t), \qquad && c > 0,\, d > 0 \end{aligned}$$

דוגמא לפתרון:

$$\begin{cases} y \equiv 0 \\ x(t) = x(0)e^{at} \end{cases}$$

2.2.3 דוגמא מפיזיקה :(

חוק שני של ניוטון - $F = m \cdot a$

$x(t)$ - מיקום של חלקיק גוף בזמן t.

$x''(t)$ - תאוצה של חלקיק גוף בזמן t.

m - מסה של הגוף.

$$x''(t) \cdot m = f(x(t), x'(t), ...)$$

3 הרצאה 3

3.1 פתרון משוואה לינארית מסדר ראשון

3.1.1 הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = 0$$

תמיד קיים פתרון האפס - "הפתרון הטריוויאלי". נרצה למצוא את שאר הפתרונות.

נניח ש-$y \neq 0$,

$$\frac{y'}{y} = -p$$

מההנחה שלנו, והנחה נוספת ש-y פונקציה רציפה: y תמיד חיובית או תמיד שלילית.

בהתאם, הפתרון יהיה:

$$(\ln(|y|))' = (\ln(\pm y))' = -p$$

נניח למשל ש-y חיובית ממש.

הפונקציות הקדומות של $p(x)$ הן מהצורה: $C - \int_a^x p(t)dt$. (המשפט היסודי).

לכן,

$$\ln|y| = C - \int_a^x p(t)dt, \quad C \text{ שרירותי}, a \text{ קבוע}$$

נפעיל אקספוננט,

$$|y(x)| = e^C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

שקול ל-

$$\forall x, \quad y(x) = D \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}, \ D := e^C, \quad D > 0$$

מצאנו **פונקציות מועמדות לפתרון**. נראה:

1. הן אכן פתרונות:

   עבור קבוצת הפתרונות שמצאנו,

   $$y(x) = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

   נגזור: $y' = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x))$

   ונקבל: $y' + p \cdot y = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x)) + (D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}) \cdot (p(x)) = 0$.

   כלומר - הקבוצה מקיימת את המשוואה המקורית.

2. אלו כל הפתרונות: ניקח פתרון כלשהו, y.

   נגדיר פונקציית עזר:

   $$g(x) := \frac{y(x)}{e^{-\int_a^x p(t)dt}}$$

נגזור:

$$g' = y' \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p$$

נציב $y' = -p \cdot y$ ונקבל:

$$(-p \cdot y) \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p = 0$$

ולכן,

$$g' = 0 \iff g \text{ קבועה } \iff C \in \mathbb{R}, \quad g = C$$

לסיכום,

$$y(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

מה אם נוסיף תנאי התחלה?

$$y(x_0) = y_0$$

נציב $a = x_0,\ C = y_0$ ונקבל:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

זהו **הפתרון היחיד לבעיית הערך ההתחלתי** הזו.

3.1.2 לא הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = q(x)$$

נניח שקיים פתרון ונכפול את 2 האגפים בפונקציה μ (**גזירה** ואף פעם **לא מתאפסת**).

$$\mu \cdot y' + \mu \cdot p \cdot y = \mu \cdot q \tag{1}$$

היה לנו שימושי אם "במקרה" אגף שמאל הוא בדיוק $(\mu \cdot y)'$. נרצה לבחור μ שתקיים את זה.

ננסה להבין כיצד לבחור את μ הזו.

מכלל המכפלה:

$$(\mu \cdot y)' = \mu' \cdot y + \mu \cdot y'$$

לכן, בהתבסס על המשוואה המקורית (1) - נרצה: $\mu' \cdot y = \mu \cdot p \cdot y$.

כלומר, באופן שקול, נרצה לדרוש: $\mu' = \mu \cdot p$.

וע"י העברת אגפים,

$$\mu' - \mu \cdot p = 0$$

רגע, זו משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון! לכן, ניקח:

$$\mu(x) = e^{-\int_a^x -p(t)dt} = e^{\int_a^x p(t)dt}$$

אחרי שבחרנו את μ, נחזור לפתרון המד"ר שלנו:

כאמור, בחרנו את μ כך שמתקיים:

$$(\mu \cdot y)' = \mu \cdot q$$

נעשה אינטגרל על שני הצדדים,

$$\mu \cdot y = \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + C$$

נחלק ב-μ,

$$y(x) = \frac{1}{\mu} \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + \frac{C}{\mu}$$

כאשר $\mu(x) = e^{\int_a^x p(t)dt}$

מצאנו פתרון **כללי** למשוואה לינארית לא-הומוגנית.

בדיקת שפיות

1. להציג את הפתרון הכללי ולוודא שהוא פתרון.
2. מה אם $q = 0$? כל הפתרונות נתונים ע"י $\frac{C}{\mu} = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$. שזה אכן הפתרון שיצא לנו עבור מערכת הומוגנית.
3. נניח שy_1, y_2 פותרים את המד"ר.

   נסתכל על ההפרש: $\Delta = y_1 - y_2$.

   $$\Delta' + p\Delta = y_1' + py_1 - y_2' + py_2 = 0$$

   כלומר, הפרש פתרונות של מד"ר לא הומוגני הוא פתרון של מד"ר הומוגני.

אפשר לנסות למצוא פתרונות ל-$y' + py = q$ ע"י הצבת $C(x)$. כלומר, לפתור משוואה ב-$C(x)$. (נציב C שרירותי, ואז נמצא אותו במדויק).

נציב $y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$ במשוואה הלא הומוגנית:

$$y' + py = C' \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} + C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p) + p \cdot C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} = q$$

$$\Rightarrow C' \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} = q$$

נכפיל את שני האגפים ב-$e^{\int_a^x p(t)dt}$:

$$C' = q \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}$$

זו משוואה שקולה (במשתנה חדש $C(x)$).

מהמשפט היסודי נקבל:

$$C(x) = \int_a^x q(t) e^{\int_a^x p(t)dt} dt + D \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

3.2 דוגמאות לשימוש בפתרון הכללי

3.2.1 דוגמא 1 - הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x$$

כלומר $p(x) = \sin(x)$ ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C \cdot e^{-\int_a^x -\sin(t)dt} = C \cdot e^{-\cos x + \cos a} = D \cdot e^{-\cos x}$$

(C יכול לקבל כל ערך, לכן גם $D := C \cdot e^{\cos a}$ יכול לקבל כל ערך).

3.2.2 דוגמא 2 - לא הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x + \cos x$$

פתרון כללי יהיה:

$$y = D \cdot e^{-\cos x} + \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x e^{\cos t} \cos(t) dt}{e^{\cos x}}$$

4 הרצאה 4

4.1 משוואות ניתנות להפרדה

הגדרה

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

4.1.1 מקרה פרטי $g = 1$

מד"ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = h(y(t))$$

נניח ש-y פתרון, כך ש-$h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב-$h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = 1$$

נשים לב שאם $H(t)$ זו פונקציה קדומה של $\frac{1}{h(t)}$,

$$(H(y))' = \frac{y'}{h(y)}$$

לכן המשוואה שקולה למשוואה

$$(H(y))' = 1 \Rightarrow H(y(t)) = C + t$$

איך נמצא את y? קיימת ל-H הופכית בתחום שאנו עובדים בו בגלל שהיא מוגדרת כך

$$H(t) = \int_{x_0}^{t} \frac{1}{h(x)} dx + \text{קבוע}$$

נשים לב, שלפי ההנחה שלנו - h לא מתאפסת. בפרט $\frac{1}{h}$ בעלת סימן קבוע - חח"ע. לכן גם H חח"ע. לכן, כדי למצוא את y, נרצה להפעיל את $H^{-1}(t)$ על שני האגפים.

נקבל את הפתרון:

$$\forall C, \quad y(t) = H^{-1}(C + t)$$

4.1.2 מקרה כללי

מד"ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

נמשיך עם ההנחה $h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב-$h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

ניקח H קדומה של $\frac{1}{h}$, G קדומה של g ונקבל,

$$\frac{y'}{h(y)} = (H(y))' = G' \Rightarrow H(y) = G$$

נפעיל H^{-1} על שני האגפים,

$$\forall C \in \mathbb{R}, \quad y(t) = H^{-1}(G(t)) + C$$

אלו כל הפתרונות כך ש-$h(y) \neq 0$ בתחום.

בדיקת שפיות אפשר להשלים (אין לי כוח), אין צורך בבדיקת שפיות אם כל הצעדים בהוכחה הם אמ"מ.

4.1.3 בעיית תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה

נוסיף תנאי התחלה לבעיה,

$$\begin{cases} y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור את זה כאשר מניחים שוב ש-$h(y) \neq 0$ בתחום.

נחלק את שני האגפים ב-$h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

נעשה אינטגרל בקטע $[x_0, x]$,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'}{h(y)} dt = \int_{x_0}^{x} g(t) dt$$

נעשה החלפת משתנים $y(t) = v$

$$\Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dv}{h(v)} = \int_{x_0}^{x} g(t) dt$$

ניקח G קדומה של g, H קדומה של $\frac{1}{h}$, ונקבל:

$$G'(x) - G'(x_0) = H(y(x)) - H(y(x_0))$$

נוסיף $H(y(x_0))$ לשני האגפים,

$$H(y(x)) = G'(x) - G'(x_0) + H(y(x_0))$$

נרכיב את H^{-1},

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y(x_0)$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל,

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y_0$$

5 הרצאה 5

5.1 דוגמא למד"ר ניתנת להפרדה - פתרון המשוואה הלוגיסטית

תזכורת

$$\begin{cases} N'(t) = K \cdot N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \\ N(t_0) = N_0 \in (0, L) \end{cases}$$

זו משוואה אוטונומית.

נשים לב,

$$g(t) = 1, \quad h(N(t)) = K \cdot N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{L}\right)$$

כלומר, המשוואה ניתנת להפרדה:

$$N'(t) = g(t) \cdot h(N(t))$$

נרצה למצוא (חלק) מפתרונות המד"ר.

נניח: $h(t) \neq 0$ בתחום ההגדרה של $N(t)$.

נחלק ב$h(N)$, ואז לכל t בתחום (קטע פתוח שמכיל את t_0):

$$\frac{N'}{h(N)} = 1$$

נעשה אינטגרציה לשני האגפים, ואז לכל t בתחום:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{N'}{h(N)} dx = \int_{t_0}^{t} 1 dx$$

נעשה החלפת משתנים, $N = v, \quad N' \cdot dx = dv$ ואז:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = t - t_0$$

בשביל לחשב את אגף שמאל - צריך למצוא פונקציה קדומה של $\frac{1}{h}$, נסמן ב-H. נשתמש בפירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{h(v)} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v(1 - \frac{v}{L})}\right) = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v} + \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{v}{L}}\right)$$

וסה"כ, ע"י שימוש בנגזרת של $\ln$ נקבל:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = \frac{1}{K}\left(\log v - \log(1 - \frac{v}{L})\right)\Big|_{N(t_0)}^{N(t)}$$

מסקנה:

$$\frac{1}{K}\left(\log N(t) - \log(1 - \frac{N(t)}{L})\right) - \frac{1}{K}\left(\log N_0 - \log(1 - \frac{N_0}{L})\right) = t - t_0$$

נכפול בK,

$$\left(\log N(t) - \log(1 - \frac{N(t)}{L})\right) - \left(\log N_0 - \log(1 - \frac{N_0}{L})\right) = K(t - t_0)$$

נעביר אגפים ונפעיל אקספוננט:

$$\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{L}} = \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \cdot e^{K(t-t_0)}$$

קיבלנו משוואה לינארית ב$N(t)$:

$$\boxed{N(t) = \frac{N_0}{\frac{N_0}{L} + \left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \cdot e^{-K(t-t_0)}}}$$

5.1.1 הערה כללית

אם נתונה משוואה מהצורה $y' = h(y)$ (h רציפה), y_0 נקודה כך ש-$h(y_0) = 0$, **אז** $y(t) = y_0$ היא פתרון.

5.2 שיטה לפתירת מד"ר מסדר ראשון - החלפת משתנים

שינוי משתנים/ הצבה

נתונה מד"ר מסדר ראשון עם תנאי התחלה,

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור ע"י שינוי משתנים $\frac{y(t)}{t} = z(t)$:

קיבלנו מד"ר שקולה:

$$z'(t) \cdot t + z(t) = f(z(t))$$

נעביר אגפים ונחלק ב-t:

$$z'(t) = \frac{f(z(t)) - z(t)}{t} = \frac{1}{t} \cdot (f(z(t)) - z(t))$$

נשים לב, זו **מד"ר ניתנת להפרדה**. ($h(z) = f(z) - z, \quad g = \frac{1}{t}$)

נסמן:

$$\frac{z'}{h(z)} = \frac{1}{t} \Leftarrow z' = \frac{1}{t} \cdot h(z)$$

ניקח G קדומה של $\frac{1}{x}$, H קדומה של $\frac{1}{f(x)-x}$, ונקבל:

$$H(z(t)) - H(z(t_0)) = G(t) - G(t_0)$$

G קדומה של $\frac{1}{x}$, כלומר $G = \ln t$:

$$H(z(t)) = H(\frac{y_0}{t_0}) + \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

נרכיב את H^{-1},

$$z(t) = H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) - \ln(t_0) + \ln(t)\right)$$

סה"כ,

$$\boxed{y(t) = t \cdot H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) + \ln t - \ln t_0\right)}$$

זהו פתרון שמקיים את תנאי ההתחלה.

6 הרצאה 6

יהי מד"ר מסדר ראשון, כאשר f רציפה.

המשפט מבטיח קיום ויחידות של פתרון למד"ר שמקיים תנאי התחלה $y(x_0) = x_0$.

בשביל לנסח את המשפט, נגדיר פונקציית ליפשיץ.

פונקציית ליפשיץ

פונקצייה $f(x)$ בקטע I היא ליפשיצית עם קבוע K אם מתקיים: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$

הערה 1: אם f גזירה, והנגזרת חסומה ב-I, אז f ליפשיץ: $\exists c \in (x_1, x_2), \ \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f(c)$

הערה 2: אם f ליפשיץ, אז היא רציפה.

6.1 משפט הקיום והיחידות - פיקרד לינדלוף

תהי $f(x,y)$ פונקצייה בתחום D קשיר (לרוב מלבן $I \times J$).
אם f רציפה ב-x וליפשיץ ב-y, וקבוע הליפשיץ אינו תלוי ב-x: $\forall x, \ |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$

אזי, לכל (x_0, y_0) בפנים של D, קיים $\varepsilon > 0$ כך שיש פתרון y למשוואה

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

והוא מוגדר עבור $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. יתר על כן - הפתרון יחיד.

6.1.1 הוכחה

יחידות נניח בשלילה שקיימים 2 פתרונות שונים y, Y לבעיית הערך ההתחלתי הנתונה.
אם $y' = f(x,y)$ בקטע $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ ו-$y(x_0) = y_0$, אז,

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \Rightarrow y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

אם $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$, אז $y(x_0) = y_0 + 0$. כלומר, y פותרת את בעיית הערך ההתחלתי בקטע.
נשים לב, שאם y, Y פותרים את $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ והן רציפות, אז:

$$Y(x) - y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t)) - f(t, y(t))dt$$

נפעיל ערך מוחלט על שני האגפים,

$$|Y(x) - y(x)| = |\int_{x_0}^{x} f(t, Y(t)) - f(t, y(t))dt| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, Y(t)) - f(t, y(t))|dt$$

לפי תנאי המשפט, f ליפשיץ לפי y ולכן,

$$\int_{x_0}^{x} |f(t,Y(t)) - f(t,y(t))|\, dt \le \int_{x_0}^{x} K \cdot |Y(t) - y(t)| dt$$

נגדיר $g(t) = |Y(t) - y(t)|$.

נשים לב שהפונקציה g רציפה, אי שלילית וקודם הראנו שמתקיים $g(x) \le K \cdot \int_{x_0}^{x} g(t)dt$.

לכן נוכל להשתמש ב**למה של גרונוול**. לפי הלמה, $g(t) = |Y(t) - y(t)| = 0$ ולכן:

$$\forall x \ge x_0,\, Y(x) = y(x)$$

6.1.2 הלמה של גרונוול

תהי g רציפה, אי שלילית בקטע $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.
אם $g(x) \le K \cdot \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ לכל $x \ge x_0$, אז $g(x) = 0$ לכל $x \ge x_0$.

הוכחת הלמה:

נגדיר $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$. כלומר - $G'(x) = g(x) \ge 0$.

$$G'(x) \le K \cdot G(x)$$

נחלק את שני האגפים בe^{Kx},

$$G'(x) \cdot e^{-Kx} \le K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx}$$

נעביר אגפים,

$$(G(x) \cdot e^{-Kx})' = G'(x) \cdot e^{-Kx} - K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx} \le 0$$

כלומר, ל-$G(x) \cdot e^{-Kx}$ בעלת נגזרת אי-חיובית ולכן $(G(x) \cdot e^{-Kx}$ יורדת.

לכן, עבור $x \ge x_0$:

$$G(x) \cdot e^{-Kx} \le G(x_0) \cdot e^{-Kx_0} \le 0$$

נשים לב ש-$e^{-Kx} > 0$, לכן נוכל לכפול את האי-שיוויון ולקבל

$$G(x) \le 0$$

סה"כ,

$$0 \le g(x) \le K \cdot G(x) \le 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

קיום נגדיר סדרת פונקציות באופן הבא:

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \end{cases}$$

שלבי ההוכחה:

1. נבנה מלבן $S \subseteq D$ כך ש-(x_0, y_0). נגדיר מלבן מצומצם ע"י a'.
2. נראה שסדרת הפונקציות y_n חסומות במלבן D.
3. נראה התכנסות של הסדרה: $y_n \to y$.
4. נוכיח התכנסות במ"ש ע"י מבחן M של ויירשטראס.
5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי.

1. נגדיר מלבן סביב הנקודה (x_0, y_0):

$$S = \{|x - x_0| \leq a\} \times \{|y - y_0| \leq b\} \subseteq D$$

f רציפה ב-S, לכן לפי ויירשטראס, f מקבלת בו מקסימום ונסמן: $M := \max\{|f(t, y)|\}$

נציב את המד"ר ($y' = f(x, y)$) ונקבל:

$$|y'| \leq M$$

נסתכל על $y_1 - y$:

$$|y_1(x) - y(x)| \leq M|x - x_0| \leq M \cdot a$$

על מנת לא לצאת מהמלבן, ($|y_1 - y| \leq b$), נרצה שיתקיים $a \leq \frac{b}{M}$.

נגדיר מלבן מצומצם ע"י

$$S' = \{|x - x_0| \leq a'\} \times \{|y - y_0| \leq b\} \subseteq D$$
$$a' = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

2. סדרת הפונקציות y_n חסומות במלבן D

נראה שאם $|y_n - y_0| \leq b$ וגם $|x_0 - x| \leq a'$ אז $|y_{n+1} - y_0| \leq b$, באמצעות **אינדוקציה**.

עבור $n = 0$, $y_0(x) = y_0$.

נניח ש-$|y_n - y_0| \leq b$ ונראה עבור $n + 1$.

$$|y_{n+1} - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt \leq M(x - x_0) \leq M \cdot a' \leq b$$

סה"כ, הראנו שy_n נשארות בתוך המלבן, לכן - $f(y_n, t)$ הוא ביטוי מוגדר בתחום הגדרתה של f ונוכל להמשיך בהוכחה.

3. נראה התכנסות של הסדרה: $y_n \to y$

נמצא חסם על $|y_{n+1} - y_n|$

$$|y_{n+1} - y_n| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})dt| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})|dt$$

נשתמש בליפשיציות של f ונקבל,

$$\int_{x_0}^{x} |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})|dt \leq K \cdot \int_{x_0}^{x} |y_n - y_{n-1}|dt$$

באינדוקציה, נראה $|y_{n+1} - y_n| \leq \frac{M \cdot K^n (x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

$n = 0$:

$$|y_1 - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0(t))|dt \leq M(x - x_0)$$

נניח עבור n ונראה עבור $n + 1$.

הראנו קודם ש-

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| \leq K \cdot \int_{x_0}^{x} |y_{n+1} - y_n|dt$$

מהנחת האינדוקציה נקבל,

$$\leq K \cdot \frac{M \cdot K^n}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n+1} dt = \frac{MK^{n+1}(x - x_0)^{n+2}}{(n+2)!}$$

סיימנו. כעת נראה התכנסות של y_n עם הגדרת הגבול לפי קושי.

יהיו $m, n \in \mathbb{N}$ כך ש-$m < n$:

$$\begin{aligned}
|y_n - y_m| &= |(y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + ... + (y_{m+1} - y_m)| \\
&\leq |y_n - y_{n-1}| + ... + |y_{m+1} - y_m| \\
&\leq \sum_{i=m}^{n-1} \frac{M \cdot K^i (x - x_0)^{i+1}}{(i+1)!} < \varepsilon
\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שהאיבר האחרון הוא זנב של טור מתכנס - לכן, עבור m גדול מספיק, יהיה קטן מ-ε.

סה"כ - הראנו כי קיים ל-y_n גבול סופי.

4. נראה התכנסות במ"ש ע"י מבחן M של ויירשטראס

תזכורת - מבחן M

אם $f_n(x)$ סדרה של פונקציות בקטע I וקיימת M_n כך ש-$|f_n(x)| \leq M_n$ לכל n.
ובנוסף $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ מתכנס, אזי: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ מתכנס במידה שווה.

נגדיר סדרת פונקציות חדשה:

$$\begin{cases} h_0 = y_0 \\ h_i = y_i - y_{i-1} & i \geq 1 \end{cases}$$

נשים לב,

$$|h_i| = |y_i - y_{i-1}| \leq \frac{M \cdot K^{i-1}(x-x_0)^i}{(i)!} \leq \frac{M \cdot K^{i-1}(a')^i}{(i)!}$$

מתקיימים תנאי מבחן M ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במידה שווה.

ניתן לרשום:

$$y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + ... + (y_n - y_{n-1}) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n$$

ולכן: $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במ"ש $\iff$ y_n מתכנס במ"ש

5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי

y_n רציפות ו-$y_n \to y$ במ"ש, לכן - ממשפט מאינפי 2, פונקציית הגבול y רציפה.

בנוסף, מרציפות f, $f(t,y_n)$ רציפה ובנוסף מתקיים:

$$|f(t,y_n) - f(t,y)| \leq K \cdot |y_n - y| \leq \varepsilon$$

כלומר, $f(t,y_n)$ מתכנסת במ"ש ל-$f(t,y)$.

ממשפט מאינפי 2, הראנו ש-$y_n \to y$ במ"ש, ולכן:

$$\int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$$

סה"כ, פונקציית הגבול, y היא מהצורה:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$$

כלומר, y מקיימת את המשוואה האינטרלית[1] ורציפה, לכן היא מקיימת את המדר: $y' = f(x,y)$ עם תנאי התחלה $y(x_0) = y_0$.

---

[1]משוואה אינטגרלית - משוואה מהצורה: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$

7 הרצאה 7

7.1 דוגמא לשימוש במשפט

עבור המד"ר:

$$y' = \frac{y}{y^2 - x}$$

עם תנאי התחלתי, נראה קיום ויחידות פתרון.

נדרוש $y_0^2 \neq x_0$

ניקח מלבן D סביב (x_0, y_0) שלא "נוגע" ב-$x = y^2$. נרצה להפעיל את המשפט על $f(x,y) = fracyy^2 - x$, תחום D, והנקודה (x_0, y_0).

נבדוק שמתקיים תנאי ליפשיץ נשים לב שf גזירה.

התנאי הדרוש מתקיים אם $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ חסומה בתחום. (משפט לגרנז').

נגזור,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2 - x - y \cdot 2y}{(y^2 - x)^2} = -\frac{y^2 + x}{(y^2 - x)^2}$$

הנגזרת חסומה כי היא רציפה בתחום סגור (ויירשטראס).

8 הרצאה 8

תחת התנאים של משפט הקיום והיחידות נקבל כמה מסקנות.

8.1 עקרון היחידות

תהי (x_0, y_0) נקודה בפנים של D. נניח ש-y_1, y_2 2 פתרונות למד"ר שנחתכים בתחום. נניח שנחתכים ב(x_0, y_0).

אזי, הפתרונות חייבים להסכים בכל D. כלומר - לכל x בתחום - $y_1(x) = y_2(x)$

הוכחה נסמן $L = \{t < x_0 \mid \forall x \in (t, x_0] : y_1(x) = y_2(x)\}$

נשים לב ש-L הוא קטע וממשפט קיום ויחידות, L אינו ריק.

לL יש 2 אפשרויות:

1. $L = (\ell, x_0)$
2. $L = [\ell, x_0)$

אבל נשים לב ש-L תמיד באפשרות 2. אם L קטע פתוח אז, y_1 ו-y_2 מסכימים על $t > \ell$, ומרציפות - הן מסכימות גם ב -ℓ, כלומר - בהכרח $L = [\ell, x_0)$.

אם L בשפה של D, סיימנו. אחרת, L בפנים של D. בפרט - ℓ נקודה פנימית ב-D.

ממשפט הקיום והיחידות, קיימת סביבה כלשהי של ℓ כך ש-y_1, y_2 מסכימים בסביבה כלשהי של ℓ - בסתירה להגדרה של L. לכן, בהכרח ℓ בקצה של D (קיום ויחידות ניתן להפעיל רק בפנים של D).

8.1.1 דוגמא - משוואה לוגיסטית

מצאנו את כל הפתרונות ל-$y' = K \cdot y(1 - \frac{y}{2})$ שמקיימים $0 < y < L$.

מצאנו פתרונות סינגולריים:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = L \end{cases}$$

טענה: אם פתרון y חותך את $y = 0$ אז $y \equiv 0$.

הסבר: יהי $T \geq 1$. נראה ש-$y \equiv 0$ עבור $-T \leq t \leq T$.

נגדיר

$$D = \{[-2T, 2T] \times [-M, M]\}$$

נבחר M מספר כך ש-$(x, y(x))$ נמצא בפנים של D.

$$M = \max_{|t| \leq 2T} |y(t)| + 1$$

$y(t)$ ופתרון האפס נחתכים ב-D. בנוסף, תנאי הליפשיציות של f מתקיימים:

$$\frac{\partial(K \cdot y(1-\frac{y}{2})}{\partial y} = y\text{-פונקציה לינארית ב}$$

y חסום $\Leftarrow$ נגזרת חסומה $\Leftarrow$ ליפשיציות

לכן, לפי עיקרון היחידות: $y(x) = 0$ לכל x בתחום.

8.2 עקרון ההמשכה

תחת אותם תנאים של משפט הקיום והיחידות. אם מצאנו פתרון y לבעיית תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אז, ניתן להמשיך אותו עד שנתקע בשפה.

הוכחה נגדיר

$$L = \{t < x_0 \mid (t, x_0) \text{ -יש פתרון } y_t \text{ פתרון לבעיית תנאי התחלתי ומוגדר ב}\}$$

נשים לב, L הוא קטע לא ריק.

אם $L = (\ell, x_0)$, אז נוכל להגדיר: $y(\ell) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} y(y+\varepsilon)$.

נראה שגבול זה קיים, ע"י קריטריון קושי. לכל $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$:

$$|y(\ell+\varepsilon_1) - y(\ell+\varepsilon_2)| = \left|\int_{\ell+\varepsilon_1}^{\ell+\varepsilon_2} f(t,y(t))dt\right| \le M|\ell+\varepsilon_2-\ell-\varepsilon_1| = M|\varepsilon_2-\varepsilon_1|$$

y רציפה, לכן $y(t) = y_0 + \int_{x_0}^{\ell} f(t,y(t))dt$. כלומר - ניתן להמשיך את y לקטע הסגור $[\ell, x_0)$. אם L קטע סגור, נוכל להשתמש שוב בקיום ויחידות בקצה של L עד שנגיע לשפת D.

8.3 פתרון גלובלי

יהי $D = \{|x-a| \le b\} \times \mathbb{R}$ מלבן סגור אינסופי. תהא בעיית תנאי התחלתי:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

f ליפשיצית ב-D לפי y. אזי, קיים פתרון יחיד $y(x)$ למד"ר שמוגדר לכל $a-b \le x \le a+b$

הוכחה נגדיר

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \end{cases}$$

הראנו בהוכחה של קיום ויחידות.

8.4 דוגמאות מתי משפט הקיום והיחידות לא עובד

דוגמה 1: אינסוף פתרונות או העדר פתרון בנקודה סינגולרית

$$y' - \frac{y}{x} = x$$

הפתרון למשוואה ההומוגנית הוא: $y(x) = e^{-\int -\frac{1}{t}dt} = e^{ln(x)+c} = x \cdot c$

לכן הפתרון למשוואה הלא הומוגנית הוא: $y(x) = x \cdot (\int x \cdot \frac{1}{x}dx) = x^2 + C$. הפתרון מוגדר ב-$\mathbb{R}$ ופותר את המד"ר בתחום הגדרתו.

נשים לב שעבור $C \in \mathbb{R}$ - הפתרון $y_C = x^2 + C$ פותר את בעיית התנאי ההתחלתי:

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

כלומר, קיימים אינסוף פתרונות לבעיית התנאי ההתחלתי.

דוגמה 2: עקרון ההדבקה ואי-יחידות

$y' = -2\sqrt{y}, \quad y \geq 0$ - זו משוואה ניתנת להפרדה ואוטונומית.

פתרון אחד הוא $y(x) = (c-x)^2$. גם $y = 0$ הוא פתרון. נשים לב שהתנאי למשפט ליפשיץ לא מתקיים ב-$y = 0$ (הנגזרת של $\sqrt{y}$ שואפת לאינסוף), ולכן אין יחידות.

ניתן להגדיר פתרון חדש על ידי הדבקה של שני הפתרונות. נגדיר:

$$y_c(x) = \begin{cases} (c-x)^2 & x \leq c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

פונקציה זו גזירה ומקיימת את המד"ר. מכאן שדרך הנקודה $(0,0)$ עוברים אינסוף פתרונות (עבור כל $c \geq 0$).

מסקנה מדוגמא זו היא:

8.4.1 עקרון ההדבקה

נניח שקיים פתרון סינגולרי: $y(x) = y_0$ בתחום אחד, ופתרון אחד y_2 בתחום השני, ונניח שהתחומים נחתכים בנקודה אחת.
אם הם מסכימים בנקודת החיתוך, ניתן להגדיר פתרון חדש ע"י הדבקת הפתרונות.

דוגמה 3: תחום הגדרה חסום

נתונה המשוואה $y' = -\frac{x}{y}$. זוהי משוואה ניתנת להפרדה:

$$yy' = -x \implies \frac{(y^2)'}{2} = -x \implies \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

לאחר סידור נקבל משוואת מעגל:

$$x^2 + y^2 = 2C$$

לכל $C \geq 0$ נקבל זוג פתרונות $y(x) = \pm\sqrt{2C - x^2}$.

תחום ההגדרה הוא $|x| \leq \sqrt{2C}$. הנגזרת מתפוצצת כאשר $x \to \pm\sqrt{2C}$, ולכן לא ניתן להמשיך את הפתרון מעבר לנקודות אלו.

דוגמה 4: התפוצצות בזמן סופי

נתונה המשוואה $y' = y^2$. פתרונה הוא:

$$y(x) = \frac{1}{C - x}$$

(בנוסף קיים פתרון סינגולרי $y = 0$). הפתרון מוגדר עבור $x < C$ או $x > C$.

דוגמה מספרית: נניח $y(1) = 2$. אז $2 = \frac{1}{C-1} \implies C = 1.5$. הפתרון הוא:

$$y(x) = \frac{1}{1.5 - x}$$

התחום המקסימלי המכיל את $x = 1$ הוא $x < 1.5$. הפתרון שואף לאינסוף ככל שמתקרבים ל-1.5 ("התפוצצות"). זה מראה שמשפט הקיום והיחידות מבטיח קיום **מקומי** בלבד, ולא גלובלי.

9 הרצאה 9

9.1 המשך דוגמאות

9.1.1 אין ליפשיציות, אין יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נשים לב, כי למרות ש-$y^{\frac{1}{3}}$ מוגדרת ב-$x = 0$, היא אינה ליפשיצית שם. (נוכל להראות ע"י נגזרת לא רציפה ב-0 או בעזרת כפל בצמוד).

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} = 1$$
$$\int_0^{y(x)} \frac{dv}{v^{\frac{1}{3}}} \underset{y(t):=v}{=} \int_0^x \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} dt = \int_0^x dt$$
$$\frac{3}{2}(y(x))^{\frac{2}{3}} = x$$

כלומר, יש 2 פתרונות לבעיית התנאי ההתחלתי: $y(x) = \pm\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$

נשים לב שקיים גם הפתרון הטריוויאלי: $y = 0$.

מצד שני, מצאנו 2 פתרונות נחתכים בתוך תצחום שלא מכיל את $y = 0$, אז הם יהיו שווים, מעיקרון היחידות.

9.1.2 איו ליפשיציות, כן יש יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} = 1$$

זו משוואה ניתנת להפרדה, כאשר $h = x^{\frac{1}{3}} + 1$. נסמן H פונקציה קדומה של $\frac{1}{h}$.

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} = 1$$
$$H(y(x)) = \int_0^x \frac{1}{h(y(t))} dt = \int_0^x 1 dt = x + c$$

ע"י הפעלת הופכית של H, נקבל: $y(x) = H^{-1}(x + c)$.

מתקיים $y(0)=0$ ולכן:
$$0=y(0)=H^{-1}(c)\Rightarrow c=H(0)$$

נשים לב: $y(x)=H^{-1}(x+H(0))$ פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי בסביבת $x=0$.

9.1.3 דוגמא לשימוש במשפט הפתרון הגלובלי

$$\begin{cases} y'=\tan x\cdot\sin y \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

נראה שיש פתרון יחיד שמוגדר ב-$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

נרצה להפעיל את משפט הפתרון הגלובלי ב"פס": $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times K$ - אבל אסור. :(

ניקח פס סגור בתוך הפס הפתוח:

$$D=\{x_0+a\leq x\leq x_0+b\}\times R$$

כאשר a,b נבחרו כך ש-$-\frac{\pi}{2}-x_0<a<0$, $\quad 0<b<\frac{\pi}{2}-x_0$

לכן, ממשפט הפתרון הגלובלי - יש פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי.

נוודא ליפשיציות:
$$\frac{\partial(\tan x\cdot\sin y)}{\partial y}=\tan x\cdot\cos y$$

נשים לב, ש-$x=\pm\frac{\pi}{2}$ ולכן $\tan x$ חסום, $\cos y$ חסום גם הוא ולכן - הנגדרת לפי y חסומה ולכן, הפונקצייה ליפשיצית.

נבנה פתרון כללי בפס עצמו, ע"י הדבקה. לכל $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ נרחיב את הפס עד שיכיל את x, ואז נגדיר את $y(x)$ לפי המשפט הקיום הגלובלי.

y מוגדרת היטב שכן אם יש 2 פתרונות שנחתכים בנקודה, אז נפעיל את המשפט על פס סגור שמכיל את נקודת החיתוך.

10 הרצאה 10

תזכורת באמצעות משפט פיקרד לינדלוף, הוכחנו שמתקיימים עיקרון היחידות ועיקרון ההמשכה, בתחום בו: f רציפה וליפשיצית מקומית ב-y.

תזכורת

עקרון ההמשכה: בהינתן $y' = f(x,y)$ ו-D כנ"ל ובהינתן קבוצה קומפקטית $K \subseteq D$, $(x_0, y_0) \in K$.
אזי, יש פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי הנתונה שיוצא מ-K (יוצא גם משמאל ל-x_0 וגם ומימן ל-x_0).

10.1 חקירה איכותית של מד"ר

היום, נדבר על $y' = f(y)$ במקרה בו f ליפשיצית מקומית.

תזכורת אם α מספר כך ש-$f(\alpha) = 0$ אז $y = \alpha$ פתרון ל-$y' = f(y)$. נקרא לו סינגולרי.

10.1.1 משפט

יהיו $\alpha < \beta$ שני פתרונות סינגולריים עוקבים, המקיימים:

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0 \quad \text{וכן} \quad \forall \gamma \in (\alpha, \beta) : f(\gamma) \neq 0$$

יהי $y(x)$ הפתרון לבעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר $y_0 \in (\alpha, \beta)$. אזי מתקיים:

1. הפתרון $y(x)$ מוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$.
2. הפונקציה $y(x)$ מונוטונית ממש (עולה או יורדת בהתאם לסימן של f בתחום).
3. y מקבל כל ערך בין α ל-β.
   - אם y עולה (כאשר $f(y) > 0$ בתחום):

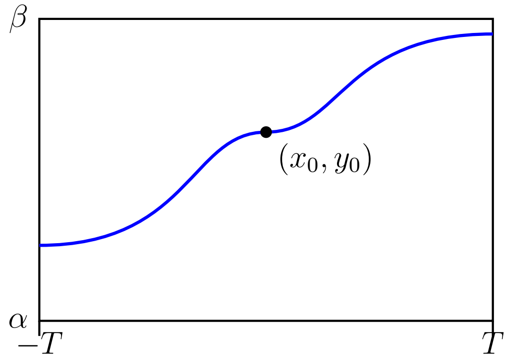
$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \beta, \quad \lim_{x \to -\infty} y(x) = \alpha$$

   - אם y יורדת (כאשר $f(y) < 0$ בתחום):

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \alpha, \quad \lim_{x \to -\infty} y(x) = \beta$$

הוכחה נבחין שקיים y פתרון לבעיית תנאי ההתחלתי. הפתרון לא חותך את $y = \alpha, y = \beta$ לכן $\alpha < y(x) < \beta$ עבור x בתחום ההגדרה.

למה מוגדר ב-$\mathbb{R}$? כדי להראות שמוגדר עבור $|x| \le T$ לכל T, נשתמש בעיקרון ההמשכה:



$$K = [-T, T] \times [\alpha, \beta]$$

נקח מלבן $K = [-T, T] \times [\alpha, \beta]$.הפיתרון יוצא מהמלבן הקומפקטי - אבל לא מהצלע העליונה או מהצלע התחתונה - לכן יוצא מהצדדים ומוגדר בפרט ל-$|x| \le T$.

למה y מונוטונית? כי $y' = f(y)$, y בין α ל-β, f מקבלת סימן קבוע בקטע, לכן אם f מקבלת סימן חיובי אז y עולה ממש. בהתאם גם עבור סימן שלילי.

נותר חלק 3:

לשם הפשטות, נניח y עולה ממש. לכן הגבול $\lim_{x\to\infty} y(x)$ קיים וסופי. נסמן אותו ב-L.

נניח בשלילה: $L < \beta$. בפרא - $y' = f(y) \to f(L) > 0$. זה גורר y לא חסומה ולכן סתירה. לכן $L = \beta$.

למה y לא חסומה?

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_1) &= \int_{x_1}^{x} y'(t)dt \\ &\ge \int_{x_1}^{x} \frac{f(L)}{2} dt \underset{x\to\infty}{\rightarrow} \infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שאם $\lim_{x\to\infty} y(x) = f(L) > 0$ אז יש x_1 כך ש-$y'(x) = \frac{f(L)}{2}$ לכל $x \ge x_1$.

בדומה, $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \alpha$ למה? אחרת נקרא לגבול L_2. $\alpha < L_2$ נמשיך כמו קודם ונסיים.

10.2 משפט משלים

שוב, f ליפשיצית מקומית. נניח $y = \alpha$ פיתרון סינגולרי מקסימלי.
לבעיית התנאי ההתחלתי יש פתרון עם התכונות הבאות:

1. מונוטוני ממש
2. מקבל את כל הערכים -(α, ∞)
3. אם y עולה אז תחום ההגדרה הוא $(-\infty, x_+)$ עבור $x_+ = x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(t)} dt$ או $x_+ = \infty$ אם האינטגרל מתבדר.

הוכחה קיימים 2 מקרים:

1. $f(x) > 0$ ולכן $x > \alpha$
2. $f(x) < 0$ ולכן $x > \alpha$

נוכיח תחת מקרה 1.

למה מונוטוני ממש? כי $y' = f(y)$ (לפי עיקרון היחידות, y לא חותך את $y = \alpha$), לכן y נשאר מעל α לאורך תחום ההגדרה.

למה y מקבל את כל הערכים - (α, ∞)? נסתכל על הגבול $\lim_{x\to-\infty} y(x) = L$. אם $L = \alpha$ סיימנו. אחרת, נניח בשלילה כי $L > \alpha$ אז y מתנהגת כמו פונקציה לינארית ב-$-\infty$.

$$f(y(x)) \to f(L) > 0$$

מכאן:

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_1) &= \int_{x_1}^{x} f(t)dt \\ &\geq \int_{x_1}^{x} \frac{f(L)}{2} dt \underset{x\to-\infty}{\to} -\infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שקיים x_1 כך ש-$\frac{f(L)}{2} \geq f(x)$ לכל $x \leq x_1$.

תחום הגדרה: למה הפתרון ניתן להמשכה עד $-\infty$? כי נוכל להפעיל עיקרון ההמשכה על $K = [-T, x_0] \times [\alpha, y_y]$ לכל $T > \infty$.

נוכיח את 3: בשביל x_+ נפריד משתנים:

$$\begin{aligned} y' &= f(y) \\ \frac{y'}{f(y)} &= 1 \\ \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} \underset{V=y(t)}{=} \int_{x_0}^{x} \frac{y'}{f(y)} dt &= \int_{x_0}^{x} dt = x - x_0 \end{aligned}$$

כאשר $x \to x_+$ משמאל, אז $y(x)$ שואף לאינסוף. נשאיף את x ל-x_+ משמאל במשוואה שקיבלנו:

$$x_0 + \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} = x$$

$$x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{dV}{f(V)} = x_+$$

10.3 גדרות

נסתכל על $y' = f(x, y)$ כאשר f רציפה בתחום D וליפשיצית מקומית.

גדר תחתית

פונקציה $\alpha : I \to \mathbb{R}$ גזירה נראית **גדר תחתית** של המד"ר אם:

$\alpha'(x) < f(x, \alpha(x))$ לכל $x \in I-$ קטע פתוח.

גדר עילית

פונקציה $\alpha : I \to \mathbb{R}$ גזירה נראית **גדר עילית** של המד"ר אם:

$\alpha'(x) > f(x, \alpha(x))$ לכל $x \in I-$ קטע פתוח.

10.3.1 משפט המד"ר

נסתכל על פתרון y לבעיית התנאי ההתחלתי. כאשר f רציפה וליפשיצית מקומית ב-$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y(x) > \alpha(x)\}$.
אם $(x, y) \in D$ אז $y(x) > \alpha(x)$ לכל $x \in I \cap [x_0, \infty)$

הוכחה נסתכל על $g(x) = y(x) - \alpha(x)$. נניח בשלילה שהמשפט לא נכון.

$g(x_0) > 0$ אבל יש $x_0 < x$ כך ש-$g(x) \leq 0$. ניקח x מינימלי שמקיים $g(x) \leq 0$.

נסתכל על שיפוע g בנקודה x.

$$g'(x) = y'(x) - \alpha'(x) > f(x, y(x)) - f(x, \alpha(x)) = 0$$

כאשר $y(x) = \alpha(x)$ בנקודה x כי היא מינימלית.

מצד שני, $0 \geq \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h \to 0^-} g'(x) =$ מכיוון ש-$h < 0$.

סה"כ הגענו ל-$0 < g(x) \leq 0$ - סתירה! לכן המשפט נכון.

10.3.2 מסקנה - משפט המשפך

נניח $y' = f(x, y)$ מד"ר עם α גדר תחתית ו-β גדר עילית.
אם f ליפשיצית מקומית ב-y בתחום

$$D = \{(x, y) \mid x \in I,\, \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אז, הפתרון y לבעיית התנאי ההתחלתי מקיים: $\alpha(x) < y(x) < \beta(x)$ עבור $x \geq x_0$ בתחום ההגדרה.

D נקרא **משפך**. עיקרון כללי: אפשר למצוא גדרות ע"י איזוקלינות.

איזוקלינות

בהנתן מד"ר $y' = f(x, y)$, אלו אוסף הנקודות המקיים $f(x, y) = k$

להשלים את כל החרא שהוא כתב ב2:00

10.4 דוגמאות

דוגמא 1

$$y' = x^4 - y^4 = f(x,y)$$

נשים לב ש-f רציפה וליפשיצית.

דוגמא לגדר עילית: $\beta(x) = x$. נראה שזו אכן גדר עילית:

$$x^4 - (\beta(x))^4 = x^4 - x^4 = 0 < 1 = \beta'(x)$$

דוגמא לגדר תחתית: $\alpha(x) = 0$. נראה שזו גדר תחתית:

$$x^4 - (\alpha(x))^4 = x^4 > 0 = \alpha'(x)$$

דוגמא 2

$$y' = y^2 - x = f(x,y)$$

דוגמא לגדר עילית: $\beta(x) = -\sqrt{x-1}$.

דוגמא לגדר תחתית: $\alpha(x) = -\sqrt{x+1}$.