

# משוואות דיפרנציאליות רגילים

## חורף - תשפ"ו

גלית לנץ

## תוכן עניינים

5	1	הרצאה 1
5	1.1	הגדירות בסיסיות .....
5	1.1.1	מה זה מד"ר בכל???
5	1.1.2	מד"ר מסדר ח .....
5	1.1.3	מד"ר לינארית .....
5	1.1.4	משוואת אוטונומית מסדר ראשון .....
6	1.2	מערכת משוואות דיפרנציאליות .....
6	1.2.1	הגדירה כללית .....
6	1.2.2	הצורה הנפוצה יותר .....
6	1.2.3	פתרון מד"ר .....
7	1.2.4	הערות על מד"ר אוטונומיות .....
8	2	הרצאה 2
8	2.1	דוגמאות למד"רים .....
8	2.1.1	גידול אוכלוסייה .....
8	2.1.2	התפרקות רדיואקטיבית .....
8	2.1.3	המשוואת הלוגיסטית .....
9	2.2	דוגמאות למערכות של משוואות .....
9	2.2.1	מודל SIR .....
9	2.2.2	מודל טורף-נטרף (Lotka-Volterra) .....
10	2.2.3	דוגמה מפיזיקה : ( ) .....
11	3	הרצאה 3
11	3.1	פתרון משוואת לינארית מסדר ראשון .....
11	3.1.1	הומוגנית .....
12	3.1.2	לא הומוגנית .....
14	3.2	דוגמאות לשימוש בפתרון הכללי .....
14	3.2.1	דוגמה 1 - הומוגנית .....
14	3.2.2	דוגמה 2 - לא הומוגנית .....
15	4	הרצאה 4
15	4.1	משוואות ניתנות להפרדה .....
15	4.1.1	מקרה פרטי $g = 1$ .....
16	4.1.2	מקרה כללי .....

16	בUPIת תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה	4.1.3
18		<b>5 הרצאה 5</b>
18	דוגמא למד"ר ניתנת להפרדה - פתרון המשוואה הלוגיסטיבית	5.1
19	הערה כללית	5.1.1
20	שיטה לפתרת מד"ר מסדר ראשון - החלפת משתנים	5.2
21		<b>6 הרצאה 6</b>
21	משפט הקיום והיחידות - פיקרד לנDELוף	6.1
21	הוכחה	6.1.1
22	הлемה של גרוןול	6.1.2
26		<b>7 הרצאה 7</b>
26	דוגמא לשימוש במשפט	7.1
27		<b>8 הרצאה 8</b>
27	עקרון היחידות	8.1
27	דוגמא - משואה לוגיסטיבית	8.1.1
28	עקרון המשכה	8.2
29	פתרון גלובלי	8.3
29	דוגמאות מתי משפט הקיום והיחידות לא עובד	8.4
30	עקרון ההדבקה	8.4.1
31		<b>9 הרצאה 9</b>
31	המשך דוגמאות	9.1
31	אין לפישיות, אין יחידות בסביבה	9.1.1
31	או לפישיות, כן יש יחידות בסביבה	9.1.2
32	דוגמא לשימוש במשפט הפתרון הגלובי	9.1.3
33		<b>10 הרצאה 10</b>
33	חקירה אICONית של מד"ר	10.1
33	משפט	10.1.1
34	משפט משלים	10.2
36	גררות	10.3
36	משפט הגדר	10.3.1
37	מסקנה - משפט המשפט	10.3.2
37	דוגמאות	10.4
38		<b>11 הרצאה 11</b>
38	כמה השלמות על משוואות אוטונומיות	11.1
38	טענה	11.1.1
38	טענה	11.1.2

39	שכלול למשפט הגדר . . . . .	11.1.3
39	משפט המשפט ההפוך - "קולן"	11.1.4

# 1 הרצאה 1

## 1.1 הגדרות בסיסיות

### 1.1.1 מה זה מ"ר בכלל???

#### משוואה דיפרנציאלית רגילה

משוואה שמעורבת פונקציה ונגזרות שלה.

$$F((t, y(t), \dots, y^n(t)) = 0$$

### 1.1.2 מ"ר מסדר n

$$y^n = f(t, \dots, y^{n-1})$$

### 1.1.3 מ"ר לינארית

$$a_0 + a_1(t) \cdot y(t) + \dots + a_n(t) \cdot y^n(t) = b(t)$$

אם  $b(t) = 0$  המשוואה נקראת **הומוגנית**.

### 1.1.4 משוואה אוטונומית מסדר ראשון

$$y'(t) = f(y(t))$$

## 1.2 מערכת משוואות דיפרנציאליות

### 1.2.1 הגדרה כללית

שתי משוואות בשתי פונקציות:

$$F_1(y_1^n, y_2^n, \dots, y_1, y_2) = 0$$

$$F_2(y_1^n, y_2^n, \dots, y_1, y_2) = 0$$

בדרך כלל נשמש בצורה הבאה:

### 1.2.2 הזרה הנפוצה יותר

$$F_1(t, y_1, y_2) = 0$$

$$F_2(t, y_1, y_2) = 0$$

הערה: לעיתים יהיו k משוואות בא פונקציות.

### 1.2.3 פתרון מד"ר

נפתרו את המשוואה  $y'(t) = y(t)$ . ראשית, נניח כי  $y(t) \neq 0$ .

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$$

**אם  $y$  תמיד חיובית:** נשים לב שזו נגזרת מוכרת.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = (\log(y(t)))' = 1$$

נבצע אינטגרל לשני האגפים,

$$\log(y(t)) = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

עליה לחזקת  $e$ , ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = e^t \cdot e^c, \quad c \in \mathbb{R}$$

**אם  $y$  תמיד שלילית:** נעשה את אותו דבר אבל על  $-\log(-y(t))$  ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = -e^t \cdot e^c, \quad c \in \mathbb{R}$$

לסיכום, אוסף הפתרונות הוא:

$$y(t) = e^t \cdot C, \quad C := e^c, \quad c \in \mathbb{R}$$

נבדוק שזה פתרון:

$$y'(t) = e^t \cdot C = y(t)$$

**נראה שאין עוד פתרונות:** נשתמש בפונקציית עזר:

$$g(t) = \frac{y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = \frac{y'(t)e^t - y(t)e^t}{(e^t)^2} = \frac{y'(t) - y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = 0 \iff \text{קבועה } g \iff y(t) = c \cdot e^t$$

#### 1.2.4 הערות על מ"ר אוטונומיות

1. אם  $y_0$  פתרון של  $y_c(t) = y_0(t + c)$  או גם  $y'(t) = f(y(t))$  לכל בחירה של  $c$

## 2 הרצאה 2

### 2.1 דוגמאות למד"רים

#### 2.1.1 גידול אוכלוסייה

. $N(t)$  - גודל האוכלוסייה בזמן  $t$ ,  $K$  - קבוע שנתי באוכלוסייה.

$$N'(t) = K \cdot N(t)$$

באופן דומה לפתרון המד"ר שראינו בהרצאה 1,

$$N(t) = e^{kt} \cdot C'$$

נסמן כתנאי התחלת את  $N(0)$ , כלומר - הגודל ההתחלתי של האוכלוסייה

$$N(0) = C$$

לכן ניתן לכתוב,

$$N(t) = e^{kt} \cdot N(0)$$

#### 2.1.2 התפרקות רדיואקטיבית

נסמן ב- $N(t)$  את מספר החלקיקים באיזהו חומר רדיואקטיבי.  
המד"ר שלנו יהיה

$$N'(t) = -K \cdot N(t)$$

ואז נקבל (שוב, באופן דומה להרצאה 1)

$$N(t) = e^{-kt} \cdot N(0)$$

#### 2.1.3 המשוואה הלוגיסטיבית

מידול לגודל האוכלוסייה עם משאבים מוגבלים.  
כלומר, אם האוכלוסייה לא יכולה לעبور סף  $C$ . (כלומר  $N(0) < C$ ). המשוואה תהיה

$$N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{C}\right) = K \cdot N(t) - \frac{K}{C} \cdot N(t)^2$$

## 2.2 דוגמאות למערכות של משוואות

### 2.2.1 מודל SIR

נחלק את כלל האוכלוסייה ל-3 סוגים:

1. "רגשיים"-Susceptible  $S(t)$

2. "נדבק" - Infected  $I(t)$

3. "מחליים"-Recovered  $R(t)$

עבור קבועים  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$  קיבל:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\ I'(t) &= \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \\ R'(t) &= \gamma \cdot I(t) \end{aligned}$$

(\*) - זו מערכת אוטונומית מסדר ראשון אך אינה לינארית.

בדיקת שפויות למערכת:

נשים לב שסכום האוכלוסייה =

אוכלוסייה בזמן 0 =  $(S + I + R)(0)$  ואז:

$$(S + I + R)'(t) = S' + I' + R' = 0$$

כלומר קבוע לאורך כל הזמן.

### 2.2.2 מודל טורף-נטרף (Lotka-Volterra)

נסמן:

$x(t)$ : כמות הנטרפים (צמחוניים/ארנבות).

$y(t)$ : כמות הטורפים (אריות).

המערכת:

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), & a > 0, b > 0 \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t), & c > 0, d > 0 \end{aligned}$$

דוגמא לפתרון:

$$\begin{cases} y \equiv 0 \\ x(t) = x(0)e^{at} \end{cases}$$

### 2.2.3 דוגמא מפיזיקה :

חוק שני של ניוטון -  $F = m \cdot a$   
 $x(t)$  - מיקום של חלקיק הגוף בזמן  $t$ .  
 $x''(t)$  - תאוצה של חלקיק הגוף בזמן  $t$ .  
 $m$  - מסה של הגוף.

$$x''(t) \cdot m = f(x(t), x'(t), \dots)$$

### 3 הרצאה 3

#### 3.1 פתרון משווה לינארי מסדר ראשון

##### 3.1.1 הומוגנית

###### תזכורת

$$y' + p \cdot y = 0$$

תמיד קיים פתרון האפס - "פתרונות הטריוויאלי". נרצה למצוא את שאר הפתרונות.

$$\text{נניח ש- } y \neq 0, \frac{y'}{y} = -p$$

מההנחה שלנו, והנחה נוספת ש- $y$  פונקציה רציפה:  $y$  תמיד חיובית או תמיד שלילית.  
בהתאם, הפתרון יהיה:

$$(\ln(|y|))' = (\ln(\pm y))' = -p$$

נניח למשל ש- $y$  חיובית ממש.

הfonקציות הקדומות של  $p(x)$  הן מהצורה:  $C - \int_a^x p(t)dt$ . (המשפט היסודי).  
לכן,

$$\ln |y| = C - \int_a^x p(t)dt$$

נפעיל אקספוננט,

$$|y(x)| = e^C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

שכל-

$$\forall x, \quad y(x) = D \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}, \quad D := e^C, \quad D > 0$$

מצאו פונקציות מועמדות לפתרון. נראה:

1. הן אכן פתרונות:

עבור קבועות הפתרונות שמצאנו,

$$y(x) = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

נגזרו:  $y' = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x))$

ונקבל:  $y' + p \cdot y = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x)) + (D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}) \cdot (p(x)) = 0$

כלומר - הקבועה מקיימת את המשוואה המקורית.

2. אלו כל הפתרונות: ניקח פתרון כלשהו,  $y$ .

נגדיר פונקציית עזר:

$$g(x) := \frac{y(x)}{e^{-\int_a^x p(t)dt}}$$

נגזרה:

$$g' = y' \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p$$

נציב  $y'$  ונקבל:

$$(-p \cdot y) \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p = 0$$

ולכן,

$$g = C, \quad C \in \mathbb{R} \iff g \text{ קבועה} \iff g' = 0$$

לסיכום,

$$y(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

**מה אם נוסיף תנאי תחיליה?**

$$y(x_0) = y_0$$

נציב  $a = x_0$ ,  $C = y_0$  ונקבל:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

זהו הפתרון היחידי לעקבית הערך ההתחלתי זה.

### 3.1.2 לא הומוגנית

#### תזכורת

$$y' + p \cdot y = q(x)$$

נניח שקיים פתרון ונכפול את 2 האגפים בפונקציה  $\mu$  (גזרה ואף פעמיות לא מתאפסת).

$$\mu \cdot y' + \mu \cdot p \cdot y = \mu \cdot q \quad (1)$$

היה לנו שימושי אם "במקרה" אגף שמאל הוא בדיקת  $y'$ . נרצה לבחור  $\mu$  שתקיים את זה.

ננסה להבין כיצד לבחור את  $\mu$  הזה.

מכלול המכפלת:

$$(\mu \cdot y)' = \mu' \cdot y + \mu \cdot y'$$

לכן, בהתבסס על המשוואה המקורית (1) - נרצה  $\mu' \cdot y + \mu \cdot y' = \mu \cdot p \cdot y$ .

כלומר, באופן שקול, נרצה לדרוש:  $\mu' = \mu \cdot p$ .

ועדי העברת אגפים,

$$\mu' - \mu \cdot p = 0$$

רגע, זו משוואת לינארית הומוגנית מסדר ראשון! לכן, ניקח:

$$\mu(x) = e^{-\int_a^x p(t)dt} = e^{\int_a^x p(t)dt}$$

אחרי שבחרנו את  $\mu$ , נחזר לפתרון המד"ר שלנו:

כאמור, בחרנו את  $\mu$  כך שמתקיים:

$$(\mu \cdot y)' = \mu \cdot q$$

נעשה אינטגרל על שני הצדדים,

$$\mu \cdot y = \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + C$$

נחלק ב- $\mu$ ,

$$y(x) = \frac{1}{\mu} \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + \frac{C}{\mu}$$

$$\text{כאשר } \mu(x) = e^{\int_a^x p(t) dt}$$

מצאנו פתרון כללי למשוואת לינארית לא-הומוגנית.

### בדיקות שפויות

1. להציג את הפתרון הכללי ולודא שהוא פתרון.

2. מה אם  $0 = q$ ? כל הפתרונות נתונים ע"י  $y(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$ . שזה אכן הפתרון שיצא לנו עבור מערכת הומוגנית.

3. נניח ש  $y_1, y_2$  פותרים את המד"ר.  
נסתכל על ההפרש:  $\Delta = y_1 - y_2$

$$\Delta' + p\Delta = y'_1 + py_1 - y'_2 + py_2 = 0$$

כלומר, הפרש פתרונות של מד"ר לא הומוגני הוא פתרון של מד"ר הומוגני.

אפשר לנסות למצוא פתרונות ל- $y' + py = q$  ע"י הצבת  $C(x)$ . כלומר, לפתור משווה ב-( $C(x)$ ). (נציב שירוטי, וזה נמצא אותו במדויק).

נציב  $y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$  במשווה הלא הומוגני:

$$y' + py = C' \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} + C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} \cdot (-p) + p \cdot C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} = q$$

$$\Rightarrow C' \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} = q$$

$$\text{נכפיל את שני האגפים ב-} e^{\int_a^x p(t) dt} \\ C' = q \cdot e^{\int_a^x p(t) dt}$$

זו משווה שcola (במשתנה חדש  $(C(x))$ .

מהמשפט היסודי נקבל:

$$C(x) = \int_a^x q(t) e^{\int_a^t p(t) dt} dt + D \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$$

### 3.2 דוגמאות לשימוש בפתרון הכללי

#### 3.2.1 דוגמא 1 - הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x$$

כלומר  $p(x) = \sin(x)$  ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C \cdot e^{-\int_a^x \sin(t) dt} = C \cdot e^{-\cos x + \cos a} = D \cdot e^{-\cos x}$$

( $C$  יכול לקבל כל ערך, וכן גם  $D := C \cdot e^{\cos a}$  יכול לקבל כל ערך).

#### 3.2.2 דוגמא 2 - לא הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x + \cos x$$

פתרון כללי יהיה:

$$y = D \cdot e^{-\cos x} + \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x e^{\cos t} \cos(t) dt}{e^{\cos x}}$$

## 4.1 משוואות ניתנות להפרדה

הגדירה

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

## 4.1.1 מקרה פרטי 1

מדד'ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = h(y(t))$$

נניח ש- $y$  פתרון, כך ש- $0 \neq h(y)$  בתחום הפתרון.נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$ 

$$\frac{y'}{h(y)} = 1$$

נשים לב שאם  $H(t)$  זו פונקציה קדומה של  $\frac{1}{h(t)}$ 

$$(H(y))' = \frac{y'}{h(y)}$$

לכן המשוואה שකולה למשוואה

$$(H(y))' = 1 \Rightarrow H(y(t)) = C + t$$

איך נמצא את  $y$ ? קיימת ל- $H$  הופכית בתחום שאנו עובדים בו בגלל שהיא מוגדרת כך

$$H(t) = \int_{x_0}^t \frac{1}{h(x)} dx + \text{קבוע}$$

נשים לב, שלפי ההנחה שלנו -  $h$  לא מתאפסת. בפרט  $\frac{1}{h}$  בעלת סימן קבוע - חח"ע. לכן גם  $H$  חח"ע. לכן כדי למצוא את  $y$ , נרצה להפעיל את  $H^{-1}(t)$  על שני האגפים.

נקבל את הפתרון:

$$\forall C, \quad y(t) = H^{-1}(C + t)$$

## 4.1.2 מקרה כללי

מד"ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

נמשיך עם ההנחה  $h(y) \neq 0$  בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$ ,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

ניקח  $H$  קדומה של  $g$ , ונקבל,

$$\frac{y'}{h(y)} = (H(y))' = G' \Rightarrow H(y) = G$$

נפעיל  $H^{-1}$  על שני האגפים,

$$\forall C \in \mathbb{R}, \quad y(t) = H^{-1}(G(t)) + C$$

אלו כל הפתרונות כך ש- $0 \neq h(y)$  בתחום.

**בדיקת שפויות** אפשר להשלים (אין לי כוח), אין צורך בבדיקה שפויות אם כל הצעדים בהוכחה הם אמ"ם.

## 4.1.3 בעיית תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה

נוסיף תנאי התחליה לבעה,

$$\begin{cases} y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור את זה כאשר מניחים שוב ש- $0 \neq h(y)$  בתחום.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$ ,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

نعsha אינטגרל בקטע  $[x_0, x]$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'}{h(y)} dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

نعsha החלפת משתנים  $y(t) = v$

$$\Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dv}{h(v)} = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

נוקח  $G$  קדומה של  $h$ ,  $g$  קדומה של  $\frac{1}{h}$ , ונקבל:

$$G'(x) - G'(x_0) = H(y(x)) - H(y(x_0))$$

נוסיף  $H(y(x_0))$  לשני האגפים,

$$H(y(x)) = G'(x) - G'(x_0) + H(y(x_0))$$

נרכיב את  $H^{-1}$ ,  
 $y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y(x_0)$

נציב את תנאי ההתחלת ונקבל

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y_0$$

## 5 הרצאה 5

### 5.1 דוגמא למד"ר ניתנת להפרדה - פתרון המשוואה הלוגיסטיבית

#### תזכורת

$$\begin{cases} N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \\ N(t_0) = N_0 \in (0, L) \end{cases}$$

זו משוואת אוטונומית.

נשים לב,

$$g(t) = 1, \quad h(N(t)) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right)$$

כלומר, המשוואת ניתנת להפרדה:

$$N'(t) = g(t) \cdot h(N(t))$$

**נרצה למצוא (חלק) מפתרונות המד"ר.**

נניח:  $0 \neq N(t)$  בתחום ההגדרה של  $N(t)$ .

נחלק ב( $N, h(N)$ , ואז לכל  $t$  בתחום (קטע פתוח שמכיל את  $t_0$  :

$$\frac{N'}{h(N)} = 1$$

נעשה אינטגרציה לשני האגפים, ואז לכל  $t$  בתחום:

$$\int_{t_0}^t \frac{N'}{h(N)} dx = \int_{t_0}^t 1 dx$$

נעשה החלפת משתנים, ואז:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = t - t_0$$

בשביל לחשב את אגף שמאל - צריך למצוא פונקציה קדומה של  $\frac{1}{h}$ , נסמן ב- $H$ . נשתמש בפירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{h(v)} = \frac{1}{K} \cdot \left( \frac{1}{v(1 - \frac{v}{L})} \right) = \frac{1}{K} \cdot \left( \frac{1}{v} + \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{v}{L}} \right)$$

וסה"כ, ע"י שימוש בנגזרת של  $\ln$  נקבל:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = \frac{1}{K} \left( \log v - \log(1 - \frac{v}{L}) \right) \Big|_{N(t_0)}^{N(t)}$$

מסקנה:

$$\frac{1}{K} \left( \log N(t) - \log(1 - \frac{N(t)}{L}) \right) - \frac{1}{K} \left( \log N_0 - \log(1 - \frac{N_0}{L}) \right) = t - t_0$$

נכפול ב- $K$ ,

$$\left( \log N(t) - \log\left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \right) - \left( \log N_0 - \log\left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \right) = K(t - t_0)$$

נעביר אגפים ונקט אקספוננט:

$$\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{L}} = \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \cdot e^{K(t-t_0)}$$

קיבלנו משווה לינארית ב- $N(t)$ :

$$N(t) = \frac{N_0}{\frac{N_0}{L} + \left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \cdot e^{-K(t-t_0)}}$$

### 5.1.1 הערה כללית

אם נתונה משווה מהצורה  $y(t) = y_0$  רציפה,  $y_0$  נקודה כך ש- $y' = h(y)$  היא פתרון.

## 5.2 שיטה לפתרת מד"ר מסדר ראשון - החלפת משתנים

**שינויי משתנים/ הצבה**

נתונה מד"ר מסדר ראשון עם תנאי התחלה,

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתחו ע"י שינוי המשתנים  $\frac{y(t)}{t} = z(t)$

קיבלו מד"ר שקולה:

$$z'(t) \cdot t + z(t) = f(z(t))$$

נעביר אגפים ו נחלק ב- $t$ :

$$z'(t) = \frac{f(z(t)) - z(t)}{t} = \frac{1}{t} \cdot (f(z(t)) - z(t))$$

נשים לב, זו מד"ר ניתנת להפרדה. ( $h(z) = f(z) - z$ ,  $g = \frac{1}{t}$ )

נסמן:

$$\frac{z'}{h(z)} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow z' = \frac{1}{t} \cdot h(z)$$

ניקח קדומה של  $H$ ,  $\frac{1}{x}$  ונקבל:

$$H(z(t)) - H(z(t_0)) = G(t) - G(t_0)$$

: $G = \ln t$ ,  $G$  קדומה של  $\frac{1}{x}$ , כלומר

$$H(z(t)) = H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) + \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

$$z(t) = H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) - \ln(t_0) + \ln(t)\right)$$

סה"כ,

$$y(t) = t \cdot H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) + \ln t - \ln t_0\right)$$

זהו פתרון שמקיים את תנאי התחלה.

## 6 הרצאה 6

יהי מד"ר מסדר ראשון, כאשר  $f$  רציפה.  
המשפט מבטיח קיום ויחידות של פתרון למד"ר שמקיים תנאי התחלת  $y(x_0) = x_0$  בשביל לנשח את המשפט, נגידר פונקציית ליפשיץ.

### פונקציית ליפשיץ

פונקציה  $f(x)$  בקטע  $I$  היא ליפשיצית עם קבוע  $K$  אם מתקיים:

הערה 1: אם  $f$  גזירה, והגזרת חסומה ב- $I$ , אז  $f$  ליפשיץ:  
הערה 2: אם  $f$  ליפשיץ, אז  $f$  רציפה.

### 6.1 משפט הקיום והיחידות - פיקרד לנDELof

תהי  $f(x, y)$  פונקציה בתחום  $D$  קשיר (לרוב מלבן  $J \times I$ ).  
אם  $f$  רציפה ב- $x$  וליפשיץ ב- $y$ , וקבוע הליפשיץ אינו תלוי ב- $x$ :

אז, לכל  $(x_0, y_0)$  בפנים של  $D$ , קיים  $0 < \varepsilon$  כך שיש פתרון  $y$  למשוואה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

והוא מוגדר עבור  $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ . יתר על כן - הפתרון יחיד.

#### 6.1.1 הוכחה

**יחידות** נניח בשליליה שקיים 2 פתרונות שונים  $Y, y$  לביעית הערך ההתחלתי הנתונה.

אם  $y(x_0) = y_0$  ו- $y' = f(x, y)$  בקטע  $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$  אז

$$\int_{x_0}^x y'(t)dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt \Rightarrow y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$$

אם  $y(x_0) = y_0 + 0$  ו- $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$  בקטע.

נשים לב, שאם  $y, Y$  פותרים את בעיית הערך ההתחלתי בקטע, אז:

$$Y(x) - y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Y(t))dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt = \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) - f(t, y(t))dt$$

נפעיל ערך מוחלט על שני האגפים,

$$|Y(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) - f(t, y(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, Y(t)) - f(t, y(t))|dt$$

לפי תנאי המשפט,  $f$  ליפשיץ לפי  $y$  ולכן,

$$\int_{x_0}^x |f(t, Y(t)) - f(t, y(t))| dt \leq \int_{x_0}^x K \cdot |Y(t) - y(t)| dt$$

$$\text{נגדיר } g(t) = |Y(t) - y(t)|$$

נשים לב שהפונקציה  $g$  רציפה, אי שלילית וקודם הראנו שמתקיים  $.g(x) \leq K \cdot \int_{x_0}^x g(t) dt$ , اي שילילת בקטע  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$  וקיים  $x \geq x_0$  כך  $g(x) = 0$ . לפי הлемה,  $g(t) = |Y(t) - y(t)| = 0$  ולכן:

$$\forall x \geq x_0, Y(x) = y(x)$$

### 6.1.2 הлемה של גרונוול

**תהי  $g$  רציפה, אי שלילית בקטע  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$**   
**אם  $x \geq x_0$  אז  $g(x) = 0$  לכל  $x \geq x_0$  כך  $\int_{x_0}^x g(t) dt \leq K \cdot \int_{x_0}^x g(t) dt$**

הוכחת הлемה:

$$\text{נגדיר } G'(x) = g(x) \geq 0. \text{ ככלומר - } G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

$$G'(x) \leq K \cdot G(x)$$

$$\text{נחלק את שני האגפים ב } e^{Kx}, \text{ נקבל}$$

$$G'(x) \cdot e^{-Kx} \leq K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx}$$

נעביר אגפים,

$$(G(x) \cdot e^{-Kx})' = G'(x) \cdot e^{-Kx} - K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx} \leq 0$$

כלומר,  $G(x) \cdot e^{-Kx}$  בעלת נזרת אי- חיובית ולכן יורדת.

$$\text{לכן, עבור } x \geq x_0 \text{ נקבל}$$

$$G(x) \cdot e^{-Kx} \leq G(x_0) \cdot e^{-Kx_0} \leq 0$$

נשים לב ש-  $e^{-Kx} > 0$ , לכן נוכל לכפול את האי- שיוויון ולקבל

$$G(x) \leq 0$$

סה"כ,

$$0 \leq g(x) \leq K \cdot G(x) \leq 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

**קיום** נגדיר סדרת פונקציות באופן הבא:

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \end{cases}$$

**שלבי הוכחה:**

1. נבנה מלבן  $D \subseteq \mathbb{C}$  ש- $(x_0, y_0)$ . נגדיר מלבן מצומצם ע"י  $a'$ .

2. נראה שסדרת הפונקציות  $y_n$  חסומות במלבן  $D$ .

3. נראה התכונות של הסדרה:  $y_n \rightarrow y$ .

4. נוכחות התכנסות במ"ש ע"י מבחן  $M$  של ויירשטראס.

5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי.

1. נגדיר מלבן סביב הנקודה  $(x_0, y_0)$ :

$$S = \{|x - x_0| \leq a\} \times \{|y - y_0| \leq b\} \subseteq D$$

$f$  רציפה ב- $S$ , לכן לפי ויירשטראס,  $f$  מקבלת בו מקסימום ונסמן:

מציב את המדר'  $y' = f(x, y)$  ונקבל:

$$|y'| \leq M$$

נסתכל על  $y_1 - y$ :

$$|y_1(x) - y(x)| \leq M|x - x_0| \leq M \cdot a$$

על מנת לא לצאת מהמלבן,  $|y_1 - y| \leq b$ , נראה שיתקיים

נגדיר מלבן מצומצם ע"י

$$S' = \{|x - x_0| \leq a'\} \times \{|y - y_0| \leq b\} \subseteq D$$

$$a' = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

2. **סדרת הפונקציות  $y_n$  חסומות במלבן  $D$**

נראה שאם  $|y_{n+1} - y_0| \leq b$  או  $|x_0 - x| \leq a'$  ו גם  $|y_n - y_0| \leq b$  בנסיבות אינדוקציה.

עבור  $y_0(x) = y_0$ ,  $n = 0$

נניח ש- $y_n$  ו  $y_{n+1}$  עבור  $|y_n - y_0| \leq b$

$$|y_{n+1} - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t))| dt \leq M(x - x_0) \leq M \cdot a' \leq b$$

סה"כ, הראנו  $y_n$  נשארות בתחום המלבן, שכן  $f(y_n, t)$  הוא ביוטי מוגדר בתחום הגדרתה של  $f$  ונוכל להמשיך בהוכחה.

**3. נראה הוכחות של הסדרה:**  $y_n \rightarrow y$

נמצא חסם על  $|y_{n+1} - y_n|$

$$|y_{n+1} - y_n| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n) - f(t, y_{n-1}) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})| dt$$

נשתמש בלייפשיציות של  $f$  ונקבל,

$$\int_{x_0}^x |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})| dt \leq K \cdot \int_{x_0}^x |y_n - y_{n-1}| dt$$

באיינדוקציה, נראה  $|y_{n+1} - y_n| \leq \frac{M \cdot K^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0(t))| dt \leq M(x - x_0)$$

נניח עבור  $n$  ונראה עבור  $n + 1$ .

הראנו קודם ש-

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| \leq K \cdot \int_{x_0}^x |y_{n+1} - y_n| dt$$

מהנחה האינדוקציה נקבל,

$$\leq K \cdot \frac{M \cdot K^n}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (t - x_0)^{n+1} dt = \frac{MK^{n+1}(x - x_0)^{n+2}}{(n+2)!}$$

סימנו. כעת נראה הוכחות של  $y_n$  עם הגדרת הגבול לפי קושי.

יהיו  $m < n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} |y_n - y_m| &= |(y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + (y_{m+1} - y_m)| \\ &\leq |y_n - y_{n-1}| + \dots + |y_{m+1} - y_m| \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \frac{M \cdot K^i (x - x_0)^{i+1}}{(i+1)!} < \varepsilon \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שהאיבר האחרון הוא זנב של טור מתכנס - לכן, עבור  $m$  גדול מספיק, יהיה קטן מ- $\varepsilon$ .

סה"כ - הראנו כי קיימים  $L$ -גבול סופי.

#### 4. נראה התכונות במ"ש ע"י מבחן $M$ של ויירשטראס

##### תזכורת - מבחן $M$

אם  $(f_n)$  סדרה של פונקציות בקטע  $I$  וקיימת  $M_n$  כך ש-  $|f_n(x)| \leq M_n$  לכל  $n$ .  
ובנוסף, אז:  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  מתכנס במידה שווה.

נגיד סדרת פונקציות חדשה:

$$\begin{cases} h_0 = y_0 \\ h_i = y_i - y_{i-1} & i \geq 1 \end{cases}$$

נשים לב,

$$|h_i| = |y_i - y_{i-1}| \leq \frac{M \cdot K^{i-1} (x - x_0)^i}{(i)!} \leq \frac{M \cdot K^{i-1} (a')^i}{(i)!}$$

מתקיים תנאי מבחן  $M$  ולכן  $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$  מתכנס במידה שווה.

ניתן לרשום:

$$y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n$$

ולכן:  $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$  מתכנס במ"ש  $\iff y_n$  מתכנס במ"ש

#### 5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לעיית התנאי ההתחלתי

$y_n$  רציפות ו-  $y \rightarrow y$  במ"ש, שכן - ממשפט מאינפי 2, פונקציית הגבול  $y$  רציפה.

בנוסף, מרציפות  $f$ ,  $f(t, y_n)$  רציפה ובנוסף מתקיים:

$$|f(t, y_n) - f(t, y)| \leq K \cdot |y_n - y| \leq \varepsilon$$

כלומר,  $f(t, y_n)$  מתכנסת במ"ש ל-  $f(t, y)$ .

משפט מאינפי 2, הראנו ש-  $y \rightarrow y$  במ"ש, ולכן:

$$\int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

סה"כ, פונקציית הגבול,  $y$  היא מהצורה:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

כלומר,  $y$  מקיימת את המשוואה האינטגרלית<sup>1</sup> ורציפה, שכן היא מקיימת את המדר:  $y' = f(x, y)$  עם תנאי התחלתי  $y(x_0) = y_0$ .

<sup>1</sup>משוואת אינטגרלית - משוואת מהצורה:  $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$

## 7 הרצאה 7

### 7.1 דוגמא לשימוש במשפט

עבור המד"ר:

$$y' = \frac{y}{y^2 - x}$$

עם תנאי התחלתי, נראה קיום ויחידות פתרון.

נדרוש  $y_0^2 \neq x_0$

נניח מלבד  $D$  סביבה  $f(x, y) = \frac{y}{y^2 - x}$  שלא "נווגע" ב- $x = y^2$ . נרצה להפעיל את המשפט על  $(x_0, y_0)$ , תחום  $D$ , והנקודה  $(x_0, y_0)$ .

נבדוק **שמתקיים תנאי לפישיז** נשים לב ש  $f$  גזירה.

התנאי הדרושים מתקיים אם  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  חסומה בתחום. (משפט לגרנץ').

נגזר,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{y^2 - x - y \cdot 2y}{(y^2 - x)^2} = -\frac{y^2 + x}{(y^2 - x)^2}$$

הנגזרת חסומה כי היא רציפה בתחום סגור (וירשטראס).

## 8 הרצאה 8

תחת התנאים של משפט הקיום והיחידות נקבל כמה מסקנות.

### 8.1 עקרון היחידות

תהי  $(x_0, y_0)$  נקודה בפנים של  $D$ . נניח ש-  $y_1, y_2$  פתרונות למד"ר שנחטכים בתחום. נניח שנחטכים ב-  $(x_0, y_0)$ .

אז, הפתרונות חייבים להסכימים בכל  $D$ . כלומר - לכל  $x$  בתחום -

$$L = \{t < x_0 \mid \forall x \in (t, x_0] : y_1(x) = y_2(x)\}$$

נשים לב ש-  $L$  הוא קטע וממשפט קיום ויחידות,  $L$  אינו ריק.

ל-  $L$  יש 2 אפשרויות:

$$L = (\ell, x_0) \quad .1$$

$$L = [\ell, x_0) \quad .2$$

אבל נשים לב ש-  $L$  תמיד אפשרות 2. אם  $L$  קטע פתוח אז,  $y_1$  ו-  $y_2$  מסכימים על  $\ell > t$ , ומרציפות - הן מסכימים גם ב-  $\ell$ , כלומר - בהכרח  $L = [\ell, x_0]$ .

אם  $L$  בשפה של  $D$ , סימנו. אחרת,  $L$  בפנים של  $D$ . בפרט -  $\ell$  נקודה פנימית ב-  $D$ .

ממשפט הקיום והיחידות, קיימת סביבה של  $\ell$  כך ש-  $y_1, y_2$  מסכימים בסביבה של  $\ell$  - בסתירה להגדרה של  $L$ . לכן, בהכרח  $\ell$  בקצת של  $D$  (קיים ויחידות ניתן להפעיל רק בפנים של  $D$ ).

#### 8.1.1 דוגמא - משואה לוגיסטית

מצאנו את כל הפתרונות ל-  $y' = K \cdot y(1 - \frac{y}{2})$

מצאנו פתרונות סינגולריים:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = L \end{cases}$$

טענה: אם פתרון  $y$  חותך את  $0$   $y \equiv 0$  אז  $y \equiv 0$ .

הסביר: יהי  $T \geq 1$ . נראה ש-  $0 \leq y \leq T$ .

נגדיר

$$D = \{[-2T, 2T] \times [-M, M]\}$$

נבחר  $M$  מספר כך ש-  $(x, y(x))$  נמצא בפנים של  $D$ .

$$M = \max_{|t| \leq 2T} |y(t)| + 1$$

$y$  ופתרון האפס נחכמים ב- $D$ . בנוסף, תנאי הליפшиציגות של  $f$  מתקיימים:

$$\frac{\partial(K \cdot y(1 - \frac{y}{2}))}{\partial y} = y$$

פונקציה לינארית ב- $y$

$y$  חסום  $\Leftrightarrow$  נזרת חסומה  $\Leftrightarrow$  ליפшиציגות

לכן, לפי עיקרונו היחידות:  $0 = y(x)$  לכל  $x$  בתחום.

## 8.2 עקרון המשכה

תחת אוטם תנאים של משפט הקיום והיחידות. אם מצאנו פתרון  $y$  לבעיית תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אז, ניתן להמשיך אותו עד שנטקע בשפה.

### הוכחה נגדיר

$L = \{t < x_0 \mid (t, x_0) \text{ פתרון לבעיית תנאי התחלתי ומוגדר ב-} D\}$  יש פתרון  $y_t$  לבעיית תנאי התחלתי ומוגדר ב-

נשים לב,  $L$  הוא קטע לא ריק.

אם  $y(\ell) = (\ell, x_0)$ , אז נוכל להגיד:  $L = (\ell, x_0)$ .

נראה שגבול זה קיים, ע"י קритריון קושי. לכל  $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2$ :

$$|y(\ell + \varepsilon_1) - y(\ell + \varepsilon_2)| = \left| \int_{\ell + \varepsilon_1}^{\ell + \varepsilon_2} f(t, y(t)) dt \right| \leq M |\ell + \varepsilon_2 - \ell - \varepsilon_1| = M |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|$$

$y$  רציפה, לכן  $y(\ell) = y_0 + \int_{x_0}^{\ell} f(t, y(t)) dt$ . כמובן - ניתן להמשיך את  $y$  לקטע הסגור  $[\ell, x_0]$ . אם  $L$  קטע סגור, נוכל להשתמש שוב בקיום וייחידות בקצתה של  $L$  עד שנגיע לשפת  $D$ .

### 8.3 פתרון גלובלי

יהי  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  מלבן סגור אינסופי. תהא בעית תנאי התחלתי:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$f$  ליפשיצית ב- $D$  לפי  $y$ . אז, קיימם פתרון ייחיד ( $y(x)$  למד"ר שמודדר לכל  $b$   $a - b \leq x \leq a + b$ )

הוכחה נגידיר

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \end{cases}$$

הראנו בהוכחה של קיום ויחידות.

### 8.4 דוגמאות מתי משפט הקיום והיחidot לא עובד

**דוגמא 1: אינסוף פתרונות או העדר פתרון בנקודת סינגולריות**

$$y' - \frac{y}{x} = x$$

הפתרון למשוואת ההומוגנית הוא:  $y(x) = e^{-\int -\frac{1}{t} dt} = e^{ln(x)+c} = x \cdot c$

לכן הפתרון למשוואת הלא הומוגנית הוא:  $y(x) = x \cdot (\int x \cdot \frac{1}{x} dx) = x^2 + C$ . הפתרון מוגדר ב- $\mathbb{R}$  ופותר את המד"ר בתחום הגדרתו.

נשים לב שעבור  $C \in \mathbb{R}$  - הפתרון  $y_C = x^2 + C$  פותר את בעית תנאי התחלתי:

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

כלומר, קיימים אינסוף פתרונות בעית תנאי התחלתי.

**דוגמא 2: עקרון הדבקה ואי-יחידות**

$y' = -2\sqrt{y}$ ,  $y \geq 0$  - זו משואה ניתנת להפרדה ואוטונומית.

פתרון אחד הוא  $y(x) = (c - x)^2$ . גם  $y(x) = 0$  הוא פתרון. נשים לב שהתנאי למשפט ליפשיץ לא מתקיים ב- $y = 0$  (הנגזרת של  $\sqrt{y}$  שואפת לאינסוף), ולכן אין יחידות.

ניתן להגדיר פתרון חדש על ידי הדבקה של שני הפתרונות. נגידיר:

$$y_c(x) = \begin{cases} (c - x)^2 & x \leq c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

פונקציה זו גירה ומקיימת את המד"ר. מכאן שדרך הנקודה  $(0, 0)$  עוברים אינסוף פתרונות (עבור כל  $c \geq 0$ ).

מסקנה מדוגמה זו היא:

## 8.4.1 עקרון הבדיקה

נניח שקיים פתרון סינגולרי:  $y_0 = y(x)$  בתחום אחד, ופתרון אחד  $y_2$  בתחום השני, ונניח שהתחומים נחכמים בנקודת אחת.  
אם הם מסכימים בנקודת החיתוך, ניתן להגדיר פתרון חדש ע"י הדבקת הפתרונות.

**דוגמה 3: תחום הגדרה חסום**  
נתונה המשוואה  $y' = -\frac{x}{y}$ . זוהי משווה ניתנת להפרדה:

$$yy' = -x \implies \frac{(y^2)'}{2} = -x \implies \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

לאחר סידור קיבל משווה מעגל:

$$x^2 + y^2 = 2C$$

לכל  $C \geq 0$  קיבל זוג פתרונות  $y(x) = \pm\sqrt{2C - x^2}$ . הנזרת מתפוצצת כאשר  $x \rightarrow \pm\sqrt{2C}$ , ולכן לא ניתן להמשיך את הפתרון מעבר לנקודות אלו.

**דוגמה 4: התפוצצות בזמן סופי**  
נתונה המשוואה  $y' = y^2$ . פתרונה הוא:

$$y(x) = \frac{1}{C-x}$$

(בנוסך קיים פתרון סינגולרי  $0 = y$ ). הפתרון מוגדר עבור  $x < C$  או  $x > C$ .

דוגמה מספרית: נניח  $2 = y(1)$ . אז  $2 = \frac{1}{C-1} \implies C = 1.5$ . הפתרון הוא:

$$y(x) = \frac{1}{1.5-x}$$

התחום המksamלי המכיל את  $x = 1$  הוא  $x < 1.5$ . הפתרון שואף לאינסוף ככל שמתקרבים ל-1.5 ("התפוצצות"). זה מראה שמשפט הקיום והיחידות מבטיח קיום **مכוומי** בלבד, ולא גלובלי.

## 9 הרצאה 9

### 9.1 המשך דוגמאות

#### 9.1.1 אין לפישיות, אין יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נשים לב, כי למורoutes ש- $y^{\frac{1}{3}}$  מוגדרת ב- $x=0$ , היא אינה לפישית שם. (אפשר להראות ע"י נגזרת לא רציפה ב- $x=0$  או בעזרת כפל בcmathod).

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} &= 1 \\ \int_0^{y(x)} \frac{dv}{v^{\frac{1}{3}}} &\stackrel{y(t):=v}{=} \int_0^x \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} dt = \int_0^x dt \\ \frac{3}{2}(y(x))^{\frac{2}{3}} &= x \end{aligned}$$

כלומר, יש 2 פתרונות לביעית התנאי ההתחלתי:  $y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$

נשים לב שקיים גם הפתרון הטריוויאלי:  $y=0$ .

מצד שני, מצאנו 2 פתרונות נחטכים בתחום שלא מכיל את  $x=0$ , אז הם יהיו שווים, מעיקרונו היחידות.

#### 9.1.2 או לפישיות, כן יש יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} = 1$$

זו משווהה ניתנת להפרדה, כאשר  $.h = x^{\frac{1}{3}} + 1$ . נסמן  $H$  פונקציה קדומה של  $\frac{1}{h}$ .

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} &= 1 \\ H(y(x)) &= \int_0^x \frac{1}{h(y(t))} dt = \int_0^x 1 dt = x + c \end{aligned}$$

ע"י הפעלת הופכית של  $H$ , נקבל:  $.y(x) = H^{-1}(x + c)$

מתקיים  $0 = y(0) = H^{-1}(c) \Rightarrow c = H(0)$  ולכן:

נשים לב:  $y(x) = H^{-1}(x + H(0))$  פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי בסביבת  $x = 0$ .

### 9.1.3 דוגמא לשימוש במשפט הפתרון הгалובלי

$$\begin{cases} y' = \tan x \cdot \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נראה שיש פתרון יחיד שמוגדר ב- $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

נרצה להפעיל את משפט הפתרון הгалובלי ב"פס":  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times K$  - אבל אסור.

ניקח פס סגור בתחום הפס הפתוח:

$$D = \{x_0 + a \leq x \leq x_0 + b\} \times R$$

כאשר  $a, b$  נבחרו כך ש- $0 < b < \frac{\pi}{2} - x_0$ ,  $-a < \frac{\pi}{2} - x_0$

לכן, שימוש משפט הפתרון הгалובלי - יש פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי.

נוודא לפישיות:

$$\frac{\partial(\tan x \cdot \sin y)}{\partial y} = \tan x \cdot \cos y$$

נשים לב, ש- $\tan x$  ו- $\cos y$  חסום גם הוא ולכן - הנדרת לפי  $y$  חסומה ולכן, הפונקציה לפישית.

בננה פתרון כללי בפס עצמו, ע"י הדבקה. לכל  $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  נרchieב את הפס עד שייכיל את  $x$ , ואז נגדיר את  $y(x)$  לפי המשפט הקיום הгалובלי.

ו מוגדרת היטב שכן אם יש 2 פתרונות שנחטכים בנקודה, אז נפעיל את המשפט על פס סגור שמכיל את נקודת החיתוך.

**תזכורת** באמצעות משפט פיקרד לינדרוף, הוכחנו שמתקיימים עיקרונות היחידות ועיקרונות המשכה, בתחום בו:  $f$  רציפה וליפשיצית מקומית ב- $y$ .

### תזכורת

**עיקרונות המשכה:** בהינתן  $D \subseteq K$ ,  $y' = f(x, y)$  כמו בקיום ויחידות. בנוסף, תהא קבוצה קומפקטיבית  $K \subseteq D$ , כך ש- $x_0, y_0 \in K$ . אז, יש פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי הנתונה שיצא מ- $K$  (יצא גם משמאלי  $x_0$  וגם מימני  $x_0$ ).

### 10.1 חקירה אינטואיטיבית של מד"ר

היום, נדבר על  $y' = f(y)$  במקרה בו  $f$  ליפשיצית מקומית.

**תזכורת** אם  $\alpha$  מספר כך ש- $y = f(\alpha) = 0$  או  $y = f(\alpha) = 0$  פתרון ל- $y' = f(y)$ . נקרא לו סינגולרי.

#### 10.1.1 משפט

יהיו  $\beta < \alpha$  שני פתרונות סינגולריים עוקבים, המקיימים:

$$\forall \gamma \in (\alpha, \beta) : f(\gamma) \neq 0 \quad \text{וכן} \quad f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

יהי  $y(x)$  הפתרון לבעיית ההתחלתה:

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר  $y_0 \in (\alpha, \beta)$ . אז מתקיימים:

1. הפתרון  $y(x)$  מוגדר לכל  $x \in \mathbb{R}$ .

2. הfonקציה  $y(x)$  מונוטונית ממש (עולה או יורדת בהתאם לסימן של  $f$  בתחום).

3.  $y$  מקבל כל ערך בין  $\alpha$  ל- $\beta$ .

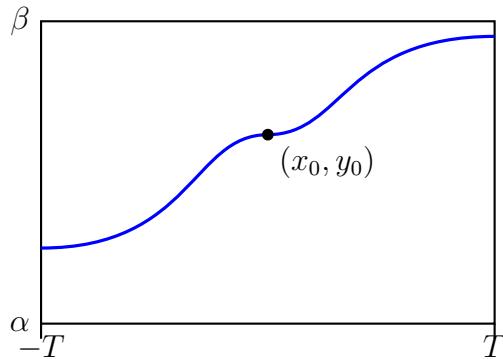
□ אם  $y$  עולה (כאשר  $f(y) > 0$  בתחום):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \beta, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \alpha$$

□ אם  $y$  יורדת (כאשר  $f(y) < 0$  בתחום):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \beta$$

**הוכחה** נבחן שקיימים  $y$  פתרון לבעיית תנאי ההתחלה. הפתרון לא חותך את  $y = \beta$  או  $y < \beta$  עבור  $x$  בתחום ההגדרה. למה מוגדר ב- $\mathbb{R}$ ? כדי להראות שמדובר עבור  $T \leq |x|$  לכל  $T$ , השתמש בעיקרו המשכה:



נקח מלבן  $K = [-T, T] \times [\alpha, \beta]$ . הפתרון יוצא מהמלבן הקומפקטי - אבל לא מהצלע העליונה או מהצלע התחתונה - לכן יוצאה מהצדדים ומוגדר בפרט ל- $|x| \leq T$ .

למה  $y$  מונוטונית? כי  $y' = f(y)$  בין  $\alpha$  ל- $\beta$ ,  $f$  מקבלת סימן קבוע בקטע, לכן אם  $f$  מקבלת סימן חיובי אז  $y$  עולה ממש. בהתאם גם עבור סימן שלילי.

נותר חלק 3:

לשם הפשטות, נניח  $y$  עולה ממש. לכן הגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$  קיים וסופי. נסמן אותו ב- $L$ .

נניח בשליליה:  $\beta < L$ . בפרא -  $y' = f(y) \rightarrow f(L) > 0$ . זה גורר  $y$  לא חסומה ולכן סטירה. לכן  $\beta = L$ . למה  $y$  לא חסומה?

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_1) &= \int_{x_1}^x y'(t) dt \\ &\geq \int_{x_1}^x \frac{f(L)}{2} dt \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שאם  $0 < x \leq x_1$  יש  $y'(x) = f(L) > 0$  לכל  $x$ .

בדומה,  $\alpha < L_2$  למה? אחרת נקרה גבול  $L_2 < \alpha$  ממשיך כמו קודם ונסיים.

## 10.2 משפט משלים

שוב,  $f$  ליפשיצית מקומית. נניח  $\alpha = y$  פתרון סינגולרי מקסימלי. לביעית התנאי ההתחלה יש פתרון עם התכונות הבאות:

1. מונוטוני ממש

2. מקבל את כל הערכים  $(\alpha, \infty)$

3. אם  $y$  עולה אז תחום ההגדרה הוא  $(-\infty, x_+)$  עבור  $x_+ = x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(t)} dt$  או  $\infty$  ואם האינטגרל מתבדר.

**הוכחה קיימים 2 מקרים:**

$$x > \alpha \text{ ו } f(x) > 0 .1$$

$$x > \alpha \text{ ו } f(x) < 0 .2$$

nocich תחת מקרה 1.

למה מונוטוני ממש? כי  $y' = f'(y)$  (לפי עיקרונו היחידות,  $y$  לא חותך את  $\alpha = y$ ), לכן  $y$  נשאר מעל  $\alpha$  לאורך תחום ההגדרה.

למה  $y$  מקבל את כל הערכים -  $(\alpha, \infty)$ ? נסתכל על הגבול  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = L$ . אם  $L = \alpha$  סיימנו. אחרת, נניח בsvilleה כי  $\alpha > L$  אז  $y$  מתנהגת כמו פונקציה לינארית ב- $-\infty$ .

$$f(y(x)) \rightarrow f(L) > 0$$

מכאן:

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_1) &= \int_{x_1}^x f(t) dt \\ &\geq \int_{x_1}^x \frac{f(L)}{2} dt \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שקיים  $x_1 < x$  כך ש- $f(x) \geq \frac{f(L)}{2}$ .

תחום הגדרה: ומה הפתרון ניתן להמשך עד  $\infty$ ? כי נוכל להפעיל עיקרון המשכה על  $K = [-T, x_0]$  לכל  $T > \alpha, y_T$ .

nocich את 3: בשביל  $x_+$  נפריד משתנים:

$$\begin{aligned} y' &= f(y) \\ \frac{y'}{f(y)} &= 1 \\ \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} &\stackrel{V=y(t)}{=} \int_{x_0}^x \frac{y'}{f(y)} dt = \int_{x_0}^x dt = x - x_0 \end{aligned}$$

כasher  $x \rightarrow x_+$  משמאלי, אז  $y(x)$  שואף לאינסוף. נשייף את  $x$  ל- $x_+$  משמאלי במשוואה שקיבliśmy:

$$x_0 + \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} = x$$

$$x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{dV}{f(V)} = x_+$$

### 10.3 גדרות

נסתכל על  $y' = f(x, y)$  כאשר  $f$  רציפה בתחום  $D$  וליפשיצית מקומית.

#### גדר תחתית

פונקציה  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה נראית **גדר תחתית** של המד"ר אם:

$$\forall x \in I - \text{כל } x \in I \text{ קטע פתוח. } \alpha'(x) < f(x, \alpha(x))$$

#### גדר עילית

פונקציה  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$  גזירה נראית **גדר עילית** של המד"ר אם:

$$\forall x \in I - \text{כל } x \in I \text{ קטע פתוח. } \alpha'(x) > f(x, \alpha(x))$$

#### 10.3.1 משפט הגדר

נסתכל על פתרון  $y$  לבעיית התנאי ההתחלתי.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y(x) > \alpha(x) \text{ רציפה וליפשיצית מקומית ב-} \} \\ \text{או } (x, y) \in D \text{ אם } x \in I \cap [x_0, \infty) \text{ ו } y(x) > \alpha(x), \text{ לכל } y(x) > \alpha(x)$$

**הוכחה** נסתכל על  $g(x) = y(x) - \alpha(x)$ . נניח בשלילה שהמשפט לא נכון.

$g(x_0) > 0$  אבל יש  $x < x_0$  כך ש- $0 < g(x) \leq 0$ . ניקח  $x$  מינימלי שקיימים  $0 < g(x) \leq 0$ .

נסתכל על שיפוע  $g$  בנקודת  $x$ .

$$g'(x) = y'(x) - \alpha'(x) > f(x, y(x)) - f(x, \alpha(x)) = 0$$

כאשר  $y(x) = \alpha(x)$  בנקודת  $x$  כי היא מינימלית.

$$\text{מצד שני, } 0 < g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq 0 \text{ מכיוון ש-} 0 < h < 0$$

סה"כ הגיענו ל- $0 < g'(x) \leq 0$  - סתירה! לכן המשפט נכון.

עיקרונו כלל: אפשר למצוא גדרות ע"י איזוקלינות.

#### איזוקלינות

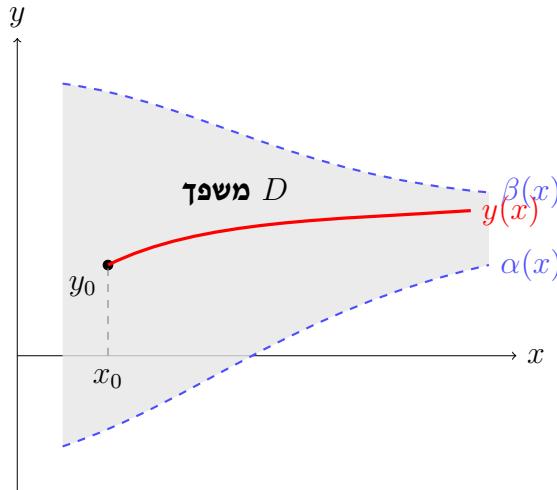
$$\text{בהתן מ"ר } f(x, y) = k, \text{ זה אומר הנקודות המקיימים}$$

### 10.3.2 מסקנה - משפט המשפט

נניח  $y' = f(x, y)$  מד"ר עם  $\alpha$  גדר תחתית ו- $\beta$  גדר עילית.  
אם  $f$  ליפשיצית מקומיות ב- $y$  בתחום

$$D = \{(x, y) \mid x \in I, \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אז, הפתרו  $y$  לביעית התנאי ההתחלתי מקיים:  $\alpha(x) < y(x) < \beta(x)$  בתחום ההגדרה.



### 10.4 דוגמאות

#### דוגמה 1

$$y' = x^4 - y^4 = f(x, y)$$

נשים לב ש- $f$  רציפה וליפשיצית.

דוגמא לגדר עילית:  $\beta(x) = x$ . נראה שזו אכן גדר עילית:

$$x^4 - (\beta(x))^4 = x^4 - x^4 = 0 < 1 = \beta'(x)$$

דוגמא לגדר תחתית:  $\alpha(x) = 0$ . נראה שזו גדר תחתית:

$$x^4 - (\alpha(x))^4 = x^4 > 0 = \alpha'(x)$$

#### דוגמה 2

$$y' = y^2 - x = f(x, y)$$

דוגמא לגדר עילית:  $\beta(x) = -\sqrt{x-1}$

דוגמא לגדר תחתית:  $\alpha(x) = -\sqrt{x+1}$

## 11 הרצאה 11

### 11.1 כמה השלכות על משוואות אוטונומיות

#### 11.1.1 טענה

יהא  $y$  פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי:

$$\begin{cases} f' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ובוור  $\alpha, \beta$  פתרונות סינגולריים עוקבים המקיימים:  $f(\alpha) = f(\beta) = 0$  מתקיים:

$$y_0 \in (\alpha, \beta)$$

אז, קיימת נקודה  $x_1$  כך ש-

הערה: לפחות  $x_1$  תהיה נקודת פיתול.

**הוכחה**  $y$  מקיים  $y' = f(y)$ . נגזר את 2 האגפים:

$$y'' = y' \cdot f'(y)$$

נרצה להראות שקיים  $x_1$  כך ש-  $y''(x_1) = 0$ . אכן, לפי משפט רול -  $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$  ולכן קיימים  $\gamma$  ו-  $x_1$  כך ש-  $\alpha < \gamma < x_1 < \beta$ .

נרצה:  $y(x_1) = \gamma$ . נשים לב שהוכחנו ש-  $y$  מקבל את כל הערכים בין  $\alpha$  ל-  $\beta$  שכן בהכרח קיים  $x_1$  כזה.  $\square$

ראינו בתחילת הסמסטר: אם  $y$  פתרון למשואה אוטונומית  $y' = f(y)$ , אז גם  $y(x+c)$  פתרון לכל  $\mathbb{R}$

#### 11.1.2 טענה

תהי  $y' = f(y)$  משואה אוטונומית,  $f$  ליפשיצית מקומית ב-  $\mathbb{R}$ .  
נניח שקיים 2 פתרונות:  $x_1, x_2$  ו-  $y_1, y_2$  כך ש-  $y_1(x_1) = y_2(x_2)$ . אז:

$$x \text{ לכל } , y_1(x + x_1 - x_2) = y_2(x)$$

**הוכחה** נסמן  $(c := x_1 - x_2)$ . ( $c$  מושפט שראינו).  
נשים לב ש-  $\tilde{y} = y_1(x + x_1 - x_2)$  מושפט למד"ר. (משפט שראינו:  $y_1(x_1) = y_2(x_2)$ ).

$$\tilde{y}(x_2) = y_1(x_2 + x_1 - x_2) = y_1(x_1) \underset{\text{הגדלה}}{=} y_2(x_2)$$

לכן, מעירקון היחידות -  $\tilde{y} = y_2$  לכל  $x$ .  $\square$

נוסיף שכולול למשפט הגדר:

### 11.1.3 שכולול למשפט הגדר

יהא  $y$  פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי :

$$\begin{cases} f' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

תהי  $\alpha$  כמו במשפט הגדר. נניח שמתקיים:

$$\alpha(x_0) \geq y(x_0)$$

אם מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות ב -  $\{ (x, y) \mid x \in I, y(x) \leq \alpha(x) \}$  אז, לכל  $x \in I$  עבورو הפתרונות מוגדרים:

$$\forall x > x_0, \quad y(x) < \alpha(x)$$

**הוכחה** אם  $\alpha(x_0) = y(x_0)$  - סימנו (משפט הגדר). אחרת, נניח  $\alpha(x_0) > y(x_0)$ . נניח  $g(x) = \alpha(x) - y(x)$  מקיימת:

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \alpha'(x_0) - y'(x_0) >_{\text{גד' עליית}} f(x_0, \alpha(x_0)) - f(x_0, y(x_0)) &=_{y(x_0)=\alpha(x_0)} 0 \\ g(x_0) &= \alpha(x_0) - y(x_0) = 0 \end{aligned}$$

מסקנה: יש סביבה  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$  בה  $g$  חיובית, כלומר, לכל  $y$  ב-  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$  מתקיים  $y < \alpha$ .

נפעיל את משפט הגדר על הסדרה:

$$x_n = x_0 + \frac{\varepsilon}{n}$$

נובע:  $x > x_0$  עבור  $x_n \geq x$ . אם נשאיר את  $n \rightarrow \infty$  נקבל:  $y(x) < \alpha(x)$ .

□

נרחיב על משפט הפוך למשפט המשפט.

### 11.1.4 משפט המשפט ההפוך - "קולן"

קולן - Diffuser  
(הגדר התחלתית מעל הגדר העילית)

אם  $\beta > \alpha$  מ"ר,  $\beta$  גדר תחתית,  $\alpha$  גדר עילית. מתקאים:  $\alpha$

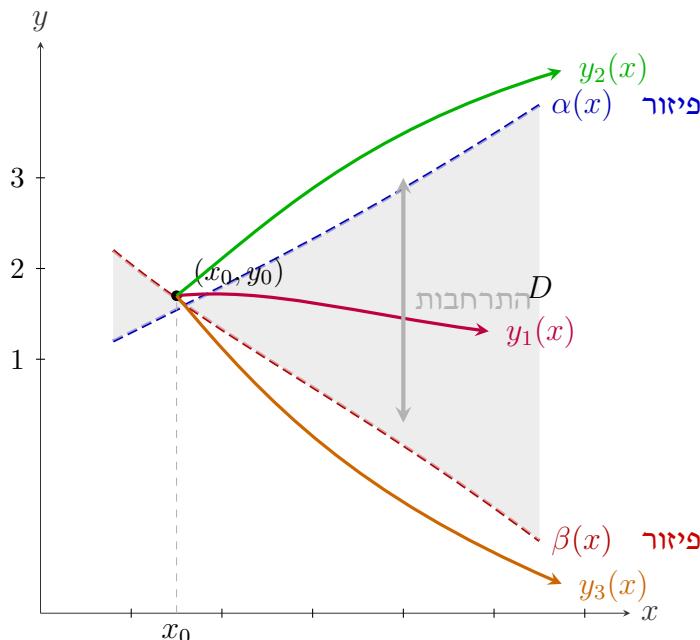
ונגיד משפט ההפוך:

$$D := \{(x, y) \mid x \in I, \quad \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אם מתקאים קיום ויחידות ב- $D$ , אז:

1. יש פתרון למ"ר שנמצא בתחום  $D - D$  לכל  $x \in I$  ( $x, y(x)) \in D - D$ .

2. נניח  $I = [a, \infty)$ . אז  $\frac{\partial f}{\partial y} \geq 0$  ואם  $\beta - \alpha \rightarrow 0$   $x \rightarrow \infty$  הינו ייחיד.



### הוכחה נתיחה בסעיף 2:

נניח בשילhouette שיש זוג פתרונות  $y_1, y_2$  ש모וגדרת לכל  $x \geq a$ , פותרים את המ"ר ונשארים בתחום  $D - D$  המשפט הההפוך.

ונגיד את פונקציית ההפרש:  $g = y_1 - y_2$ . נשים לב שמתקיים:

$$0 \xleftarrow[x \rightarrow \infty]{} \alpha - \beta < y_1 - y_2 < \beta - \alpha \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} 0$$

לכן לפי סנדוויץ',  $0 \xrightarrow[x \rightarrow \infty]{} g$ . נגזר את  $g$ :

$$g' = f(x, y_1) - f(x, y_2)$$

מעקרונו היחידות:  $y_1, y_2$  לא נחתכים, לכן  $g$  בעלת סימן קבוע. בה"כ:  $g > 0$  לכל  $a \leq x$ . כלומר -

$$g' = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial}{\partial y} f(x, t) dt \geq 0$$

מסקנה:  $g$  עולה ממש ויש לה גבול, לכן מתכנסת לסופרים שלה -  $\sup y_1 - y_2$  בסתירה להנחה שלנו.

□