

משוואות דיפרנציאליות רגילות

חורף - תשפ"ו

גלית לבדב

תוכן עניינים

5	1 הרצאה 1
5	1.1 הגדרות בסיסיות
5	1.1.1 מה זה מד"ר בכלל???
5	1.1.2 מד"ר מסדר n
5	1.1.3 מד"ר לינארית
5	1.1.4 משוואה אוטונומית מסדר ראשון
6	1.2 מערכת משוואות דיפרנציאליות
6	1.2.1 הגדרה כללית
6	1.2.2 הצורה הנפוצה יותר
6	1.2.3 פתרון מד"ר
7	1.2.4 הערות על מד"ר אוטונומיות
8	2 הרצאה 2
8	2.1 דוגמאות למד"רים
8	2.1.1 גידול אוכלוסיה
8	2.1.2 התפרקות רדיואקטיבית
8	2.1.3 המשוואה הלוגיסטית
9	2.2 דוגמאות למערכות של משוואות
9	2.2.1 מודל SIR
9	2.2.2 מודל טורף-נטרף (Lotka-Volterra)
10	2.2.3 דוגמא מפיזיקה:)
11	3 הרצאה 3
11	3.1 פתרון משוואה לינארית מסדר ראשון
11	3.1.1 הומוגנית
12	3.1.2 לא הומוגנית
14	3.2 דוגמאות לשימוש בפתרון הכללי
14	3.2.1 דוגמא 1 - הומוגנית
14	3.2.2 דוגמא 2 - לא הומוגנית
15	4 הרצאה 4
15	4.1 משוואות ניתנות להפרדה
15	4.1.1 מקרה פרטי $g = 1$
16	4.1.2 מקרה כללי

16	4.1.3	בעיית תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה
18	5	הרצאה 5
18	5.1	דוגמא למד"ר ניתנת להפרדה - פתרון המשוואה הלוגיסטית
19	5.1.1	הערה כללית
20	5.2	שיטה לפתירת מד"ר מסדר ראשון - החלפת משתנים
21	6	הרצאה 6
21	6.1	משפט הקיום והיחידות - פיקרד לינדלוף
21	6.1.1	הוכחה
22	6.1.2	הלמה של גרנוול
26	7	הרצאה 7
26	7.1	דוגמא לשימוש במשפט
27	8	הרצאה 8
27	8.1	עקרון היחידות
27	8.1.1	דוגמא - משוואה לוגיסטית
28	8.2	עקרון ההמשכה
29	8.3	פתרון גלובלי
29	8.4	דוגמאות מתי משפט הקיום והיחידות לא עובד
30	8.4.1	עקרון ההדבקה
31	9	הרצאה 9
31	9.1	המשך דוגמאות
31	9.1.1	אין ליפשיציות, אין יחידות בסביבה
31	9.1.2	אין ליפשיציות, כן יש יחידות בסביבה
32	9.1.3	דוגמא לשימוש במשפט הפתרון הגלובלי
33	10	הרצאה 10
33	10.1	חקירה איכותית של מד"ר
33	10.1.1	משפט
34	10.2	משפט משלים
36	10.3	גדרות
36	10.3.1	משפט הגדר
37	10.3.2	מסקנה - משפט המשפך
37	10.4	דוגמאות
38	11	הרצאה 11
38	11.1	כמה השלמות על משוואות אוטונומיות
38	11.1.1	טענה
38	11.1.2	טענה

39	שכלול למשפט הגדר	11.1.3
39	משפט המשפך ההפוך - "קולן"	11.1.4

1 הרצאה 1

1.1 הגדרות בסיסיות

1.1.1 מה זה מד"ר בכלל???

משוואה דיפרנציאלית רגילה

משוואה שמערבת פונקציה ונגזרות שלה.

$$F(t, y(t), \dots, y^n(t)) = 0$$

1.1.2 מד"ר מסדר n

$$y^n = f(t, \dots, y^{n-1})$$

1.1.3 מד"ר לינארית

$$a_0 + a_1(t) \cdot y(t) + \dots + a_n(t) \cdot y^n(t) = b(t)$$

אם $b(t) = 0$ המשוואה נקראת הומוגנית.

1.1.4 משוואה אוטונומית מסדר ראשון

$$y'(t) = f(y(t))$$

1.2 מערכת משוואות דיפרנציאליות

1.2.1 הגדרה כללית

שתי משוואות בשתי פונקציות:

$$F_1(y_1^n, y_2^n, \dots, y_1, y_2) = 0$$

$$F_2(y_1^n, y_2^n, \dots, y_1, y_2) = 0$$

בדרך כלל נשתמש בצורה הבאה:

1.2.2 הצורה הנפוצה יותר

$$F_1(t, y_1, y_2) = 0$$

$$F_2(t, y_1, y_2) = 0$$

הערה: לפעמים יהיו k משוואות ב- k פונקציות.

1.2.3 פתרון מד"ר

נפתור את המשוואה $y'(t) = y(t)$. ראשית, נניח כי $y(t) = 0$. כעת ניתן לחלק ב- $y(t)$.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$$

אם y תמיד חיובית: נשים לב שזו נגזרת מוכרת.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = (\log(y(t)))' = 1$$

נבצע אינטגרל לשני האגפים,

$$\log(y(t)) = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

נעלה לחזקת e , ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = e^t \cdot e^c, \quad c \in \mathbb{R}$$

אם y תמיד שלילית: נעשה את אותו דבר אבל על $\log(-y(t))$ ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = -e^t \cdot e^c, \quad c \in \mathbb{R}$$

לסיכום, אוסף הפתרונות הוא:

$$y(t) = e^t \cdot C, \quad C := e^c, \quad c \in \mathbb{R}$$

נבדוק שזה פתרון:

$$y'(t) = e^t \cdot C = y(t)$$

נראה שאין עוד פתרונות: נשתמש בפונקציית עזר:

$$g(t) = \frac{y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = \frac{y'(t)e^t - y(t)e^t}{(e^t)^2} = \frac{y'(t) - y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = 0 \iff g \text{ קבועה} \iff y(t) = c \cdot e^t$$

1.2.4 הערות על מד"ר אוטונומיות

1. אם y_0 פתרון של $y'(t) = f(y(t))$ אז גם $y_c(t) = y_0(t + c)$ פתרון לכל בחירה של c

2 הרצאה 2

2.1 דוגמאות למד"רים

2.1.1 גידול אוכלוסיה

$N(t)$ - גודל האוכלוסייה בזמן t , K - קבוע שתלוי באוכלוסייה.

$$N'(t) = K \cdot N(t)$$

באופן דומה לפתרון המד"ר שראינו בהרצאה 1,

$$N(t) = e^{kt} \cdot C'$$

נסמן כתנאי התחלה את $N(0)$, כלומר - הגודל ההתחלתי של האוכלוסיה

$$N(0) = C$$

לכן ניתן לכתוב,

$$N(t) = e^{k \cdot t} \cdot N(0)$$

2.1.2 התפרקות רדיואקטיבית

נסמן ב- $N(t)$ את מספר החלקיקים באיזושהו חומר רדיואקטיבי.

המד"ר שלנו יהיה

$$N'(t) = -K \cdot N(t)$$

ואז נקבל (שוב, באופן דומה להרצאה 1)

$$N(t) = e^{-k \cdot t} \cdot N(0)$$

2.1.3 המשוואה הלוגיסטית

מידול לגודל האוכלוסיה עם משאבים מוגבלים.

כלומר, אם האוכלוסיה לא יכולה לעבור סף C . (כלומר - $N(0) < C$).

המשוואה תהיה

$$N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{C}\right) = K \cdot N(t) - \frac{K}{C} \cdot N(t)^2$$

2.2 דוגמאות למערכות של משוואות

2.2.1 מודל SIR

נחלק את כלל האוכלוסיה ל-3 סוגים:

1. $S(t)$ - Susceptible "רגישים"

2. $I(t)$ - Infected "נדבק - כרגע חולה"

3. $R(t)$ - Recovered "מחלימים"

עבור קבועים $\beta > 0$, $\gamma > 0$ נקבל:

$$\begin{aligned}S'(t) &= -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\I'(t) &= \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \\R'(t) &= \gamma \cdot I(t)\end{aligned}$$

(*) - זו מערכת אוטונומית מסדר ראשון אך אינה לינארית.

בדיקת שפיות למערכת:

נשים לב שסך האוכלוסיה $S + I + R =$

אוכלוסייה בזמן $(S + I + R)(0) = 0$ ואז:

$$(S + I + R)'(t) = S' + I' + R' = 0$$

כלומר קבוע לאורך כל הזמן.

2.2.2 מודל טורף-נטרף (Lotka-Volterra)

נסמן:

$x(t)$: כמות הנטרפים (צמחוניים/ארנבות). □

$y(t)$: כמות הטורפים (אריות). □

המערכת:

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), & a > 0, b > 0 \\y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t), & c > 0, d > 0\end{aligned}$$

דוגמא לפתרון:

$$\begin{cases} y \equiv 0 \\ x(t) = x(0)e^{at} \end{cases}$$

2.2.3 דוגמא מפיזיקה :)

חוק שני של ניוטון - $F = m \cdot a$

$x(t)$ - מיקום של חלקיק גוף בזמן t .

$x''(t)$ - תאוצה של חלקיק גוף בזמן t .

m - מסה של הגוף.

$$x''(t) \cdot m = f(x(t), x'(t), \dots)$$

3 הרצאה 3

3.1 פתרון משוואה לינארית מסדר ראשון

3.1.1 הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = 0$$

תמיד קיים פתרון האפס - "הפתרון הטריטוריאלי". נרצה למצוא את שאר הפתרונות.

נניח ש- $y \neq 0$,

$$\frac{y'}{y} = -p$$

מההנחה שלנו, והנחה נוספת ש- y פונקציה רציפה: y תמיד חיובית או תמיד שלילית.

בהתאם, הפתרון יהיה:

$$(\ln(|y|))' = (\ln(\pm y))' = -p$$

נניח למשל ש- y חיובית ממש.

הפונקציות הקדומות של $p(x)$ הן מהצורה: $C - \int_a^x p(t)dt$. (המשפט היסודי).

לכן,

$$\ln |y| = C - \int_a^x p(t)dt, \quad C \text{ שרירותי, } a \text{ קבוע}$$

נפעיל אקספוננט,

$$|y(x)| = e^C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

שקול ל-

$$\forall x, \quad y(x) = D \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}, \quad D := e^C, \quad D > 0$$

מצאנו פונקציות מועמדות לפתרון. נראה:

1. הן אכן פתרונות:

עבור קבוצת הפתרונות שמצאנו,

$$y(x) = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

$$y' = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x))$$

$$\text{ונקבל: } y' + p \cdot y = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x)) + (D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}) \cdot (p(x)) = 0$$

כלומר - הקבוצה מקיימת את המשוואה המקורית.

2. אלו כל הפתרונות: ניקח פתרון כלשהו, y .

נגדיר פונקציית עזר:

$$g(x) := \frac{y(x)}{e^{-\int_a^x p(t)dt}}$$

נגזור:

$$g' = y' \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p$$

נציב $y' = -p \cdot y$ ונקבל:

$$(-p \cdot y) \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p = 0$$

ולכן,

$$g = C, \quad C \in \mathbb{R} \iff g \text{ קבועה} \iff g' = 0$$

לסיכום,

$$y(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

מה אם נוסיף תנאי התחלה?

$$y(x_0) = y_0$$

נציב $a = x_0, C = y_0$ ונקבל:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

זהו הפתרון היחיד לבעיית הערך ההתחלתי הזו.

3.1.2 לא הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = q(x)$$

נניח שקיים פתרון ונכפול את 2 האגפים בפונקציה μ (גזירה ואף פעם לא מתאפסת).

$$\mu \cdot y' + \mu \cdot p \cdot y = \mu \cdot q \quad (1)$$

היה לנו שימושי אם "במקרה" אגף שמאל הוא בדיוק $(\mu \cdot y)'$. נרצה לבחור μ שתקיים את זה.

ננסה להבין כיצד לבחור את μ הזו.

מכלל המכפלה:

$$(\mu \cdot y)' = \mu' \cdot y + \mu \cdot y'$$

לכן, בהתבסס על המשוואה המקורית (1) - נרצה: $\mu' \cdot y = \mu \cdot p \cdot y$.

כלומר, באופן שקול, נרצה לדרוש: $\mu' = \mu \cdot p$.

וע"י העברת אגפים,

$$\mu' - \mu \cdot p = 0$$

רגע, זו משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון! לכן, ניקח:

$$\mu(x) = e^{-\int_a^x -p(t)dt} = e^{\int_a^x p(t)dt}$$

אחרי שבחרנו את μ , נחזור לפתרון המד"ר שלנו:

כאמור, בחרנו את μ כך שמתקיים:

$$(\mu \cdot y)' = \mu \cdot q$$

נעשה אינטגרל על שני הצדדים,

$$\mu \cdot y = \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + C$$

נחלק ב- μ ,

$$y(x) = \frac{1}{\mu} \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + \frac{C}{\mu}$$

$$\text{כאשר } \mu(x) = e^{\int_a^x p(t) dt}$$

מצאנו פתרון כללי למשוואה לינארית לא-הומוגנית.

בדיקת שפיות

1. להציג את הפתרון הכללי ולוודא שהוא פתרון.

2. מה אם $q = 0$? כל הפתרונות נתונים ע"י $\frac{C}{\mu} = C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$. שזה אכן הפתרון שיצא לנו עבור מערכת הומוגנית.

3. נניח ש y_1, y_2 פותרים את המד"ר.

נסתכל על ההפרש: $\Delta = y_1 - y_2$.

$$\Delta' + p\Delta = y_1' + py_1 - y_2' + py_2 = 0$$

כלומר, הפרש פתרונות של מד"ר לא הומוגני הוא פתרון של מד"ר הומוגני.

אפשר לנסות למצוא פתרונות ל- $y' + py = q$ ע"י הצבת $C(x)$. כלומר, לפתור משוואה ב- $C(x)$. (נציב C שרירותי, ואז נמצא אותו במדויק).

נציב $y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$ במשוואה הלא הומוגנית:

$$y' + py = C' \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} + C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} \cdot (-p) + p \cdot C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} = q$$

$$\Rightarrow C' \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} = q$$

נכפיל את שני האגפים ב- $e^{\int_a^x p(t) dt}$:

$$C' = q \cdot e^{\int_a^x p(t) dt}$$

זו משוואה שקולה (במשתנה חדש $C(x)$).

מהמשפט היסודי נקבל:

$$C(x) = \int_a^x q(t) e^{\int_a^t p(t) dt} dt + D \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$$

3.2 דוגמאות לשימוש בפתרון הכללי

3.2.1 דוגמא 1 - הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x$$

כלומר $p(x) = \sin(x)$ ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C \cdot e^{-\int_a^x \sin(t) dt} = C \cdot e^{-\cos x + \cos a} = D \cdot e^{-\cos x}$$

(C יכול לקבל כל ערך, לכן גם $D := C \cdot e^{\cos a}$ יכול לקבל כל ערך).

3.2.2 דוגמא 2 - לא הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x + \cos x$$

פתרון כללי יהיה:

$$y = D \cdot e^{-\cos x} + \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x e^{\cos t} \cos(t) dt}{e^{\cos x}}$$

4 הרצאה 4

4.1 משוואות ניתנות להפרדה

הגדרה

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

4.1.1 מקרה פרטי $g = 1$

מד"ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = h(y(t))$$

נניח ש- y פתרון, כך ש- $h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = 1$$

נשים לב שאם $H(t)$ זו פונקציה קדומה של $\frac{1}{h(t)}$,

$$(H(y))' = \frac{y'}{h(y)}$$

לכן המשוואה שקולה למשוואה

$$(H(y))' = 1 \Rightarrow H(y(t)) = C + t$$

איך נמצא את y ? קיימת ל- H הופכית בתחום שאנו עובדים בו בגלל שהיא מוגדרת כך

$$H(t) = \int_{x_0}^t \frac{1}{h(x)} dx + \text{קבוע}$$

נשים לב, שלפי ההנחה שלנו - h לא מתאפסת. בפרט $\frac{1}{h}$ בעלת סימן קבוע - חח"ע. לכן גם H חח"ע. לכן, כדי למצוא את y , נרצה להפעיל את $H^{-1}(t)$ על שני האגפים.

נקבל את הפתרון:

$$\forall C, \quad y(t) = H^{-1}(C + t)$$

4.1.2 מקרה כללי

מד"ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

נמשיך עם ההנחה $h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

ניקח H קדומה של $\frac{1}{h}$, G קדומה של g ונקבל,

$$\frac{y'}{h(y)} = (H(y))' = G' \Rightarrow H(y) = G$$

נפעיל H^{-1} על שני האגפים,

$$\forall C \in \mathbb{R}, \quad y(t) = H^{-1}(G(t)) + C$$

אלו כל הפתרונות כך ש- $h(y) \neq 0$ בתחום.

בדיקת שפיות אפשר להשלים (אין לי כוח), אין צורך בבדיקת שפיות אם כל הצעדים בהוכחה הם אמ"מ.

4.1.3 בעיית תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה

נוסיף תנאי התחלה לבעיה,

$$\begin{cases} y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור את זה כאשר מניחים שוב ש- $h(y) \neq 0$ בתחום.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

נעשה אינטגרל בקטע $[x_0, x]$,

$$\int_{x_0}^x \frac{y'}{h(y)} dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

נעשה החלפת משתנים $y(t) = v$

$$\Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dv}{h(v)} = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

ניקח G קדומה של g , H קדומה של $\frac{1}{h}$, ונקבל:

$$G'(x) - G'(x_0) = H(y(x)) - H(y(x_0))$$

נוסיף $H(y(x_0))$ לשני האגפים,

$$H(y(x)) = G'(x) - G'(x_0) + H(y(x_0))$$

נרכיב את H^{-1} ,

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y(x_0)$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל,

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y_0$$

5.1 דוגמא למד"ר ניתנת להפרדה - פתרון המשוואה הלוגיסטית

תזכורת

$$\begin{cases} N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \\ N(t_0) = N_0 \in (0, L) \end{cases}$$

זו משוואה אוטונומית.

נשים לב,

$$g(t) = 1, \quad h(N(t)) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right)$$

כלומר, המשוואה ניתנת להפרדה:

$$N'(t) = g(t) \cdot h(N(t))$$

נרצה למצוא (חלק) מפתרונות המד"ר.

נניח: $h(t) \neq 0$ בתחום ההגדרה של $N(t)$.

נחלק ב $h(N)$, ואז לכל t בתחום (קטע פתוח שמכיל את t_0):

$$\frac{N'}{h(N)} = 1$$

נעשה אינטגרציה לשני האגפים, ואז לכל t בתחום:

$$\int_{t_0}^t \frac{N'}{h(N)} dx = \int_{t_0}^t 1 dx$$

נעשה החלפת משתנים, $N = v$, $N' \cdot dx = dv$, ואז:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = t - t_0$$

בשביל לחשב את אגף שמאל - צריך למצוא פונקציה קדומה של $\frac{1}{h}$, נסמן ב- H . נשתמש בפירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{h(v)} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v(1 - \frac{v}{L})} \right) = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v} + \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{v}{L}} \right)$$

וסה"כ, ע"י שימוש בנגזרת של \ln נקבל:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = \frac{1}{K} \left(\log v - \log \left(1 - \frac{v}{L}\right) \right) \Big|_{N(t_0)}^{N(t)}$$

מסקנה:

$$\frac{1}{K} \left(\log N(t) - \log \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \right) - \frac{1}{K} \left(\log N_0 - \log \left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \right) = t - t_0$$

נכפול ב K ,

$$\left(\log N(t) - \log\left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \right) - \left(\log N_0 - \log\left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \right) = K(t - t_0)$$

נעביר אגפים ונפעיל אקספוננט:

$$\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{L}} = \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \cdot e^{K(t-t_0)}$$

קיבלנו משוואה לינארית ב $N(t)$:

$$N(t) = \frac{N_0}{\frac{N_0}{L} + \left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \cdot e^{-K(t-t_0)}}$$

5.1.1 הערה כללית

אם נתונה משוואה מהצורה $y' = h(y)$ (h רציפה), y_0 נקודה כך ש- $h(y_0) = 0$, **אז** $y(t) = y_0$ היא פתרון.

5.2 שיטה לפתירת מד"ר מסדר ראשון - החלפת משתנים

שינוי משתנים / הצבה

נתונה מד"ר מסדר ראשון עם תנאי התחלה,

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור ע"י שינוי משתנים $z(t) = \frac{y(t)}{t}$:

קיבלנו מד"ר שקולה:

$$z'(t) \cdot t + z(t) = f(z(t))$$

נעביר אגפים ונחלק ב- t :

$$z'(t) = \frac{f(z(t)) - z(t)}{t} = \frac{1}{t} \cdot (f(z(t)) - z(t))$$

נשים לב, זו מד"ר ניתנת להפרדה. $(h(z) = f(z) - z, \quad g = \frac{1}{t})$

נסמן:

$$\frac{z'}{h(z)} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow z' = \frac{1}{t} \cdot h(z)$$

ניקח G קדומה של $\frac{1}{x}$, H קדומה של $\frac{1}{f(x)-x}$, ונקבל:

$$H(z(t)) - H(z(t_0)) = G(t) - G(t_0)$$

G קדומה של $\frac{1}{x}$, כלומר $G = \ln t$:

$$H(z(t)) = H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) + \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

נרכיב את H^{-1} ,

$$z(t) = H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) - \ln(t_0) + \ln(t)\right)$$

סה"כ,

$$y(t) = t \cdot H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) + \ln t - \ln t_0\right)$$

זהו פתרון שמקיים את תנאי ההתחלה.

6 הרצאה 6

יהי מד"ר מסדר ראשון, כאשר f רציפה.
המשפט מבטיח קיום ויחידות של פתרון למד"ר שמקיים תנאי התחלה $y(x_0) = x_0$.
בשביל לנסח את המשפט, נגדיר פונקציית ליפשיץ.

פונקציית ליפשיץ

פונקצייה $f(x)$ בקטע I היא ליפשיצית עם קבוע K אם מתקיים: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$

הערה 1: אם f גזירה, והנגזרת חסומה ב- I , אז f ליפשיץ: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f(c)$ $\exists c \in (x_1, x_2)$
הערה 2: אם f ליפשיץ, אז היא רציפה.

6.1 משפט הקיום והיחידות - פיקרד לינדלוף

תהי $f(x, y)$ פונקצייה בתחום D קשיר (לרוב מלבן $I \times J$).
אם f רציפה ב- x וליפשיץ ב- y , וקבוע הליפשיץ אינו תלוי ב- x : $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$ $\forall x$,

אזי, לכל (x_0, y_0) בפנים של D , קיים $\varepsilon > 0$ כך שיש פתרון y למשוואה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

והוא מוגדר עבור $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. יתר על כן - הפתרון יחיד.

6.1.1 הוכחה

יחידות נניח בשלילה שקיימים 2 פתרונות שונים y, Y לבעיית הערך ההתחלתי הנתונה.

אם $y' = f(x, y)$ בקטע $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ ו- $y(x_0) = y_0$ אזי,

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \Rightarrow y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

אם $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$, אז $y(x_0) = y_0 + 0$. כלומר, y פותרת את בעיית הערך ההתחלתי בקטע.

נשים לב, שאם y, Y פותרים את $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$ והן רציפות, אז:

$$Y(x) - y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) - f(t, y(t)) dt$$

נפעיל ערך מוחלט על שני האגפים,

$$|Y(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) - f(t, y(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, Y(t)) - f(t, y(t))| dt$$

לפי תנאי המשפט, f ליפשיץ לפי y ולכן,

$$\int_{x_0}^x |f(t, Y(t)) - f(t, y(t))| dt \leq \int_{x_0}^x K \cdot |Y(t) - y(t)| dt$$

נגדיר $g(t) = |Y(t) - y(t)|$

נשים לב שהפונקציה g רציפה, אי שלילית וקודם הראנו שמתקיים $g(x) \leq K \cdot \int_{x_0}^x g(t) dt$.
לכן נוכל להשתמש בלמה של גרנוול. לפי הלמה, $g(t) = |Y(t) - y(t)| = 0$ ולכן:

$$\forall x \geq x_0, Y(x) = y(x)$$

6.1.2 הלמה של גרנוול

תהי g רציפה, אי שלילית בקטע $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.
אם $g(x) \leq K \cdot \int_{x_0}^x g(t) dt$ לכל $x \geq x_0$, אז $g(x) = 0$ לכל $x \geq x_0$.

הוכחת הלמה:

נגדיר $G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$. כלומר - $G'(x) = g(x) \geq 0$

$$G'(x) \leq K \cdot G(x)$$

נחלק את שני האגפים ב e^{Kx} ,

$$G'(x) \cdot e^{-Kx} \leq K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx}$$

נעביר אגפים,

$$(G(x) \cdot e^{-Kx})' = G'(x) \cdot e^{-Kx} - K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx} \leq 0$$

כלומר, ל- $G(x) \cdot e^{-Kx}$ בעלת נגזרת אי-חיובית ולכן $(G(x) \cdot e^{-Kx})$ יורדת.

לכן, עבור $x \geq x_0$

$$G(x) \cdot e^{-Kx} \leq G(x_0) \cdot e^{-Kx_0} \leq 0$$

נשים לב ש- $e^{-Kx} > 0$, לכן נוכל לכפול את האי-שוויון ולקבל

$$G(x) \leq 0$$

סה"כ,

$$0 \leq g(x) \leq K \cdot G(x) \leq 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

קיום נגדיר סדרת פונקציות באופן הבא:

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \end{cases}$$

שלבי ההוכחה:

1. נבנה מלבן $S \subseteq D$ כך ש- (x_0, y_0) . נגדיר מלבן מצומצם ע"י a' .

2. נראה שסדרת הפונקציות y_n חסומות במלבן D .

3. נראה התכנסות של הסדרה: $y_n \rightarrow y$.

4. נוכיח התכנסות במ"ש ע"י מבחן M של וירשטראס.

5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי.

1. נגדיר מלבן סביב הנקודה (x_0, y_0) :

$$S = \{|x - x_0| \leq a\} \times \{|y - y_0| \leq b\} \subseteq D$$

f רציפה ב- S , לכן לפי וירשטראס, f מקבלת בו מקסימום ונסמן: $M := \max\{|f(t, y)|\}$

נציב את המד"ר ($y' = f(x, y)$) ונקבל:

$$|y'| \leq M$$

נסתכל על $y_1 - y$:

$$|y_1(x) - y(x)| \leq M|x - x_0| \leq M \cdot a$$

על מנת לא לצאת מהמלבן, ($|y_1 - y| \leq b$), נרצה שיתקיים $a \leq \frac{b}{M}$.

נגדיר מלבן מצומצם ע"י

$$S' = \{|x - x_0| \leq a'\} \times \{|y - y_0| \leq b\} \subseteq D$$

$$a' = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

2. סדרת הפונקציות y_n חסומות במלבן D

נראה שאם $|y_n - y_0| \leq b$ וגם $|x_0 - x| \leq a'$ אז $|y_{n+1} - y_0| \leq b$, באמצעות אינדוקציה.

עבור $n = 0$, $y_0(x) = y_0$.

נניח ש- $|y_n - y_0| \leq b$ ונראה עבור $n + 1$.

$$|y_{n+1} - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_n(t))| dt \leq M(x - x_0) \leq M \cdot a' \leq b$$

סה"כ, הראנו ש- y_n נשארות בתוך המלבן, לכן - $f(y_n, t)$ הוא ביטוי מוגדר בתחום הגדרתה של f ונוכל להמשיך בהוכחה.

3. נראה התכנסות של הסדרה: $y_n \rightarrow y$

נמצא חסם על $|y_{n+1} - y_n|$

$$|y_{n+1} - y_n| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n) - f(t, y_{n-1}) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})| dt$$

נשתמש בליפשיציות של f ונקבל,

$$\int_{x_0}^x |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})| dt \leq K \cdot \int_{x_0}^x |y_n - y_{n-1}| dt$$

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \frac{M \cdot K^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{באינדוקציה, נראה}$$

$n = 0$

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0(t))| dt \leq M(x - x_0)$$

נניח עבור n ונראה עבור $n + 1$.

הראנו קודם ש-

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| \leq K \cdot \int_{x_0}^x |y_{n+1} - y_n| dt$$

מהנחת האינדוקציה נקבל,

$$\leq K \cdot \frac{M \cdot K^n}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (t - x_0)^{n+1} dt = \frac{MK^{n+1}(x - x_0)^{n+2}}{(n+2)!}$$

סיימנו. כעת נראה התכנסות של y_n עם הגדרת הגבול לפי קושי.

יהיו $m, n \in \mathbb{N}$ כך ש- $m < n$:

$$\begin{aligned} |y_n - y_m| &= |(y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + (y_{m+1} - y_m)| \\ &\leq |y_n - y_{n-1}| + \dots + |y_{m+1} - y_m| \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \frac{M \cdot K^i (x - x_0)^{i+1}}{(i+1)!} < \varepsilon \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שהאיבר האחרון הוא זנב של טור מתכנס - לכן, עבור m גדול מספיק, יהיה קטן מ- ε .

סה"כ - הראנו כי קיים ל- y_n גבול סופי.

4. נראה התכנסות במ"ש ע"י מבחן M של וירשטראס

תזכורת - מבחן M

אם $f_n(x)$ סדרה של פונקציות בקטע I וקיימת M_n כך ש- $|f_n(x)| \leq M_n$ לכל n . ובנוסף $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ מתכנס, אזי: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ מתכנס במידה שווה.

נגדיר סדרת פונקציות חדשה:

$$\begin{cases} h_0 = y_0 \\ h_i = y_i - y_{i-1} \quad i \geq 1 \end{cases}$$

נשים לב,

$$|h_i| = |y_i - y_{i-1}| \leq \frac{M \cdot K^{i-1}(x - x_0)^i}{(i)!} \leq \frac{M \cdot K^{i-1}(a')^i}{(i)!}$$

מתקיימים תנאי מבחן M ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במידה שווה.

ניתן לרשום:

$$y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n$$

ולכן: $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במ"ש $\iff y_n$ מתכנס במ"ש

5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי

y_n רציפות ו- $y \rightarrow y_n$ במ"ש, לכן - ממשפט מאינפי 2, פונקציית הגבול y רציפה. בנוסף, מרציפות f , $f(t, y_n)$ רציפה ובנוסף מתקיים:

$$|f(t, y_n) - f(t, y)| \leq K \cdot |y_n - y| \leq \varepsilon$$

כלומר, $f(t, y_n)$ מתכנסת במ"ש ל- $f(t, y)$.

ממשפט מאינפי 2, הראנו ש- $y \rightarrow y_n$ במ"ש, ולכן:

$$\int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

סה"כ, פונקציית הגבול, y היא מהצורה:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

כלומר, y מקיימת את המשוואה האינטרלית¹ ורציפה, לכן היא מקיימת את המדר: $y' = f(x, y)$ עם תנאי התחלה $y(x_0) = y_0$.

¹משוואה אינטגרלית - משוואה מהצורה: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$

7 הרצאה 7

7.1 דוגמא לשימוש במשפט

עבור המד"ר:

$$y' = \frac{y}{y^2 - x}$$

עם תנאי התחלתי, נראה קיום ויחידות פתרון.

נדרוש $y_0^2 \neq x_0$

ניקח מלבן D סביב (x_0, y_0) שלא "נוגע" ב- $y^2 = x$. נרצה להפעיל את המשפט על $f(x, y) = \frac{y}{y^2 - x}$, תחום D , והנקודה (x_0, y_0) .

נבדוק שמתקיים תנאי ליפשיץ נשים לב ש f גזירה.

התנאי הדרוש מתקיים אם $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ חסומה בתחום. (משפט לגרנז').

נגזור,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{y^2 - x - y \cdot 2y}{(y^2 - x)^2} = -\frac{y^2 + x}{(y^2 - x)^2}$$

הנגזרת חסומה כי היא רציפה בתחום סגור (ויירשטראס).

8 הרצאה 8

תחת התנאים של משפט הקיום והיחידות נקבל כמה מסקנות.

8.1 עקרון היחידות

תהי (x_0, y_0) נקודה בפנים של D . נניח ש- y_1, y_2 2 פתרונות למד"ר שנחתכים בתחום. נניח שנחתכים ב- (x_0, y_0) .

אזי, הפתרונות חייבים להסכים בכל D . כלומר - לכל x בתחום - $y_1(x) = y_2(x)$

הוכחה נסמן $L = \{t < x_0 \mid \forall x \in (t, x_0] : y_1(x) = y_2(x)\}$

נשים לב ש- L הוא קטע וממשפט קיום ויחידות, L אינו ריק.

ל- L יש 2 אפשרויות:

$$1. L = (\ell, x_0)$$

$$2. L = [\ell, x_0)$$

אבל נשים לב ש- L תמיד באפשרות 2. אם L קטע פתוח אזי, y_1 ו- y_2 מסכימים על $t > \ell$, ומרציפות - הן מסכימות גם ב- ℓ , כלומר - בהכרח $L = [\ell, x_0)$.

אם L בשפה של D , סיימנו. אחרת, L בפנים של D . בפרט - ℓ נקודה פנימית ב- D .

ממשפט הקיום והיחידות, קיימת סביבה כלשהי של ℓ כך ש- y_1, y_2 מסכימים בסביבה כלשהי של ℓ - בסתירה להגדרה של L . לכן, בהכרח ℓ בקצה של D (קיום ויחידות ניתן להפעיל רק בפנים של D).

8.1.1 דוגמא - משוואה לוגיסטית

מצאנו את כל הפתרונות ל- $y' = K \cdot y(1 - \frac{y}{2})$ שמקיימים $0 < y < L$.

מצאנו פתרונות סינגולריים:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = L \end{cases}$$

טענה: אם פתרון y חותך את $y = 0$ אז $y \equiv 0$.

הסבר: יהי $T \geq 1$. נראה ש- $y \equiv 0$ עבור $-T \leq t \leq T$.

נגדיר

$$D = \{[-2T, 2T] \times [-M, M]\}$$

נבחר M מספר כך ש- $(x, y(x))$ נמצא בפנים של D .

$$M = \max_{|t| \leq 2T} |y(t)| + 1$$

$y(t)$ ופתרון האפס נחתכים ב- D . בנוסף, תנאי הליפשיציות של f מתקיים:

$$\frac{\partial(K \cdot y(1 - \frac{y}{2}))}{\partial y} = y \text{ ב-} y \text{ פונקציה לינארית}$$

y חסום \Leftarrow נגזרת חסומה \Leftarrow ליפשיציות

לכן, לפי עיקרון היחידות: $y(x) = 0$ לכל x בתחום.

8.2 עקרון ההמשכה

תחת אותם תנאים של משפט הקיום והיחידות. אם מצאנו פתרון y לבעיית תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אז, ניתן להמשיך אותו עד שנתקע בשפה.

הוכחה נגדיר

$$L = \{t < x_0 \mid (t, x_0) \text{ ב-} y_t \text{ פתרון לבעיית תנאי התחלתי ומוגדר ב-}\}$$

נשים לב, L הוא קטע לא ריק.

$$\text{אם } L = (\ell, x_0), \text{ אז נוכל להגדיר: } y(\ell) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y(\ell + \varepsilon)$$

נראה שגבול זה קיים, ע"י קריטריון קושי. לכל $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$:

$$|y(\ell + \varepsilon_1) - y(\ell + \varepsilon_2)| = \left| \int_{\ell + \varepsilon_1}^{\ell + \varepsilon_2} f(t, y(t)) dt \right| \leq M |\ell + \varepsilon_2 - \ell - \varepsilon_1| = M |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|$$

y רציפה, לכן $y(t) = y_0 + \int_{x_0}^t f(t, y(t)) dt$. כלומר - ניתן להמשיך את y לקטע הסגור $[\ell, x_0]$. אם L קטע סגור, נוכל להשתמש שוב בקיום ויחידות בקצה של L עד שנגיע לשפת D .

8.3 פתרון גלובלי

יהי $D = \{|x - a| \leq b\} \times \mathbb{R}$ מלבן סגור אינסופי. תהא בעיית התחלתית:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

f ליפשיצית ב- D לפי y . אזי, קיים פתרון יחיד $y(x)$ למד"ר שמוגדר לכל $a - b \leq x \leq a + b$

הוכחה נגדיר

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \end{cases}$$

הראנו בהוכחה של קיום ויחידות.

8.4 דוגמאות מתי משפט הקיום והיחידות לא עובד

דוגמה 1: אינסוף פתרונות או העדר פתרון בנקודה סינגולרית

$$y' - \frac{y}{x} = x$$

הפתרון למשוואה ההומוגנית הוא: $y(x) = e^{-\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln(x)+c} = x \cdot c$

לכן הפתרון למשוואה הלא הומוגנית הוא: $y(x) = x \cdot (\int x \cdot \frac{1}{x} dx) = x^2 + C$ את המד"ר בתחום הגדרתו.

נשים לב שעבור $C \in \mathbb{R}$ - הפתרון $y_C = x^2 + C$ פותר את בעיית התנאי ההתחלתית:

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

כלומר, קיימים אינסוף פתרונות לבעיית התנאי ההתחלתית.

דוגמה 2: עקרון ההדבקה ואי-יחידות

$y' = -2\sqrt{y}$, $y \geq 0$ - זו משוואה ניתנת להפרדה ואוטונומית.

פתרון אחד הוא $y(x) = (c - x)^2$. גם $y = 0$ הוא פתרון. נשים לב שהתנאי למשפט ליפשיץ לא מתקיים ב- $y = 0$ (הנגזרת של \sqrt{y} שואפת לאינסוף), ולכן אין יחידות.

ניתן להגדיר פתרון חדש על ידי הדבקה של שני הפתרונות. נגדיר:

$$y_c(x) = \begin{cases} (c - x)^2 & x \leq c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

פונקציה זו גזירה ומקיימת את המד"ר. מכאן שדרך הנקודה $(0, 0)$ עוברים אינסוף פתרונות (עבור כל $c \geq 0$).

מסקנה מדוגמא זו היא:

נניח שקיים פתרון סינגולרי: $y(x) = y_0$ בתחום אחד, ופתרון אחד y_2 בתחום השני, ונניח שהתחומים נחתכים בנקודה אחת. אם הם מסכימים בנקודת החיתוך, ניתן להגדיר פתרון חדש ע"י הדבקת הפתרונות.

דוגמה 3: תחום הגדרה חסום

נתונה המשוואה $y' = -\frac{x}{y}$. זוהי משוואה ניתנת להפרדה:

$$yy' = -x \implies \frac{(y^2)'}{2} = -x \implies \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

לאחר סידור נקבל משוואת מעגל:

$$x^2 + y^2 = 2C$$

לכל $C \geq 0$ נקבל זוג פתרונות $y(x) = \pm\sqrt{2C - x^2}$

תחום ההגדרה הוא $|x| \leq \sqrt{2C}$. הנגזרת מתפוצצת כאשר $x \rightarrow \pm\sqrt{2C}$, ולכן לא ניתן להמשיך את הפתרון מעבר לנקודות אלו.

דוגמה 4: התפוצצות בזמן סופי

נתונה המשוואה $y' = y^2$. פתרונה הוא:

$$y(x) = \frac{1}{C - x}$$

(בנוסף קיים פתרון סינגולרי $y = 0$). הפתרון מוגדר עבור $x < C$ או $x > C$.

דוגמה מספרית: נניח $y(1) = 2$ אז $C = 1.5$ $\implies \frac{1}{C-1} = 2$. הפתרון הוא:

$$y(x) = \frac{1}{1.5 - x}$$

התחום המקסימלי המכיל את $x = 1$ הוא $x < 1.5$. הפתרון שואף לאינסוף ככל שמתקרבים ל-1.5 ("התפוצצות"). זה מראה שמשפט הקיום והיחידות מבטיח קיום **מקומי** בלבד, ולא גלובלי.

9 הרצאה 9

9.1 המשך דוגמאות

9.1.1 אין ליפשיציות, אין יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נשים לב, כי למרות ש- $y^{\frac{1}{3}}$ מוגדרת ב- $x = 0$, היא אינה ליפשיצית שם. (נוכל להראות ע"י נגזרת לא רציפה ב-0 או בעזרת כפל בצמוד).

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} &= 1 \\ \int_0^{y(x)} \frac{dv}{v^{\frac{1}{3}}} &= \int_0^x \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} dt = \int_0^x dt \\ \frac{3}{2}(y(x))^{\frac{2}{3}} &= x \end{aligned}$$

כלומר, יש 2 פתרונות לבעיית התנאי ההתחלתי: $y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$

נשים לב שקיים גם הפתרון הטריטויאלי: $y = 0$.

מצד שני, מצאנו 2 פתרונות נחתכים בתוך התחום שלא מכיל את $y = 0$, אז הם יהיו שווים, מעיקרון היחידות.

9.1.2 אין ליפשיציות, כן יש יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} = 1$$

זו משוואה ניתנת להפרדה, כאשר $h = x^{\frac{1}{3}} + 1$. נסמן H פונקציה קדומה של $\frac{1}{h}$.

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} &= 1 \\ H(y(x)) &= \int_0^x \frac{1}{h(y(t))} dt = \int_0^x 1 dt = x + c \end{aligned}$$

ע"י הפעלת הופכית של H , נקבל: $y(x) = H^{-1}(x + c)$

מתקיים $y(0) = 0$ ולכן:

$$0 = y(0) = H^{-1}(c) \Rightarrow c = H(0)$$

נשים לב: $y(x) = H^{-1}(x + H(0))$ פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי בסביבת $x = 0$.

9.1.3 דוגמא לשימוש במשפט הפתרון הגלובלי

$$\begin{cases} y' = \tan x \cdot \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נראה שיש פתרון יחיד שמוגדר ב- $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

נרצה להפעיל את משפט הפתרון הגלובלי ב"פס": $K \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ - אבל אסור. (:

ניקח פס סגור בתוך הפס הפתוח:

$$D = \{x_0 + a \leq x \leq x_0 + b\} \times R$$

כאשר a, b נבחרו כך ש- $-\frac{\pi}{2} - x_0 < a < 0 < b < \frac{\pi}{2} - x_0$,

לכן, ממשפט הפתרון הגלובלי - יש פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי.

נוודא ליפשיציות:

$$\frac{\partial(\tan x \cdot \sin y)}{\partial y} = \tan x \cdot \cos y$$

נשים לב, ש- $x = \pm \frac{\pi}{2}$ ולכן $\tan x$ חסום, $\cos y$ חסום גם הוא ולכן - הנגדרת לפי y חסומה ולכן, הפונקצייה ליפשיצית.

נבנה פתרון כללי בפס עצמו, ע"י הדבקה. לכל $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ נרחיב את הפס עד שיכיל את x , ואז נגדיר את $y(x)$ לפי המשפט הקיום הגלובלי.

y מוגדרת היטב שכן אם יש 2 פתרונות שנחתכים בנקודה, אז נפעיל את המשפט על פס סגור שמכיל את נקודת החיתוך.

10 הרצאה 10

תזכורת באמצעות משפט פיקרד לינדלוף, הוכחנו שמתקיימים עיקרון היחידות ועיקרון ההמשכה, בתחום בו: f רציפה וליפשיצית מקומית ב- y .

תזכורת

עקרון ההמשכה: בהינתן $y' = f(x, y)$ ו- D כמו בקיום יחידות. בנוסף, תהא קבוצה קומפקטית $K \subseteq D$, כך ש- $(x_0, y_0) \in K$. אזי, יש פתרון לבעיית ההתחלתי הנתונה שיוצא מ- K (יוצא גם משמאל ל- x_0 וגם ומימין ל- x_0).

10.1 חקירה איכותית של מד"ר

היום, נדבר על $y' = f(y)$ במקרה בו f ליפשיצית מקומית.

תזכורת אם α מספר כך ש- $f(\alpha) = 0$ אז $y = \alpha$ פתרון ל- $y' = f(y)$. נקרא לו סינגולרי.

10.1.1 משפט

יהיו $\alpha < \beta$ שני פתרונות סינגולריים עוקבים, המקיימים:

$$\forall \gamma \in (\alpha, \beta) : f(\gamma) \neq 0 \quad \text{וכן} \quad f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

יהי $y(x)$ הפתרון לבעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר $y_0 \in (\alpha, \beta)$. אזי מתקיים:

1. הפתרון $y(x)$ מוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$.

2. הפונקציה $y(x)$ מונוטונית ממש (עולה או יורדת בהתאם לסימן של f בתחום).

3. y מקבל כל ערך בין α ל- β .

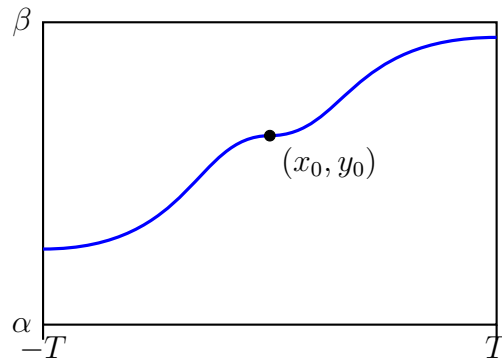
□ אם y עולה (כאשר $f(y) > 0$ בתחום):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \beta, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \alpha$$

□ אם y יורדת (כאשר $f(y) < 0$ בתחום):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \beta$$

הוכחה נבחין שקיים y פתרון לבעיית תנאי ההתחלתי. הפתרון לא חותך את $y = \alpha, y = \beta$ לכן $\alpha < y(x) < \beta$ עבור x בתחום ההגדרה.
 למה מוגדר ב- \mathbb{R} ? כדי להראות שמוגדר עבור $|x| \leq T$, נשתמש בעיקרון ההמשכה:



נקח מלבן $K = [-T, T] \times [\alpha, \beta]$. הפיתרון יוצא מהמלבן הקומפקטי - אבל לא מהצלע העליונה או מהצלע התחתונה - לכן יוצא מהצדדים ומוגדר בפרט ל- $|x| \leq T$.
 למה y מונוטונית? כי $y' = f(y)$, בין α ל- β , f מקבלת סימן קבוע בקטע, לכן אם f מקבלת סימן חיובי אז y עולה ממש. בהתאם גם עבור סימן שלילי.
 נותר חלק 3:

לשם הפשטות, נניח y עולה ממש. לכן הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ קיים וסופי. נסמן אותו ב- L .
 נניח בשלילה: $L < \beta$. בפרא - $y' = f(y) \rightarrow f(L) > 0$. זה גורר y לא חסומה ולכן סתירה. לכן $L = \beta$.
 למה y לא חסומה?

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_1) &= \int_{x_1}^x y'(t) dt \\ &\geq \int_{x_1}^x \frac{f(L)}{2} dt \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שאם $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = f(L) > 0$ אז יש x_1 כך ש- $y'(x) = \frac{f(L)}{2}$ לכל $x \geq x_1$.
 בדומה, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \alpha$, למה? אחרת נקרא לגבול L_2 . $\alpha < L_2$ נמשיך כמו קודם ונסיים.

10.2 משפט משלים

שוב, f ליפשיצית מקומית. נניח $y = \alpha$ פיתרון סינגולרי מקסימלי. לבעיית התנאי ההתחלתי יש פתרון עם התכונות הבאות:

1. מונוטוני ממש
2. מקבל את כל הערכים (α, ∞)
3. אם y עולה אז תחום ההגדרה הוא $(-\infty, x_+)$ עבור $x_+ = x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(t)} dt$ או $x_+ = \infty$ אם האינטגרל מתבדר.

הוכחה קיימים 2 מקרים:

$$1. \quad x > \alpha \text{ ולכן } f(x) > 0$$

$$2. \quad x > \alpha \text{ ולכן } f(x) < 0$$

נוכיח תחת מקרה 1.

למה מונוטוני ממש? כי $y' = f(y)$ (לפי עיקרון היחידות, y לא חותך את $y = \alpha$), לכן y נשאר מעל α לאורך תחום ההגדרה.

למה y מקבל את כל הערכים (α, ∞) ? נסתכל על הגבול $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = L$. אם $L = \alpha$ סיימנו. אחרת, נניח בשלילה כי $L > \alpha$ אז y מתנהגת כמו פונקציה לינארית ב- $-\infty$.

$$f(y(x)) \rightarrow f(L) > 0$$

מכאן:

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_1) &= \int_{x_1}^x f(t) dt \\ &\geq \int_{x_1}^x \frac{f(L)}{2} dt \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שקיים x_1 כך ש- $\frac{f(L)}{2} \leq f(x)$ לכל $x \leq x_1$.

תחום הגדרה: למה הפתרון ניתן להמשכה עד $-\infty$? כי נוכל להפעיל עיקרון ההמשכה על $K = [-T, x_0] \times [\alpha, y_y]$ לכל $T > \infty$.

נוכיח את 3: בשביל x_+ נפריד משתנים:

$$\begin{aligned} y' &= f(y) \\ \frac{y'}{f(y)} &= 1 \\ \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} &\stackrel{V=y(t)}{=} \int_{x_0}^x \frac{y'}{f(y)} dt = \int_{x_0}^x dt = x - x_0 \end{aligned}$$

כאשר $x \rightarrow x_+$ משמאל, אז $y(x)$ שואף לאינסוף. נשאיף את x ל- x_+ משמאל במשוואה שקיבלנו:

$$\begin{aligned} x_0 + \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} &= x \\ x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{dV}{f(V)} &= x_+ \end{aligned}$$

10.3 גדרות

נסתכל על $y' = f(x, y)$ כאשר f רציפה בתחום D וליפשיצית מקומית.

גדר תחתית

פונקציה $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה נראית **גדר תחתית** של המד"ר אם:
 $\alpha'(x) < f(x, \alpha(x))$ לכל $x \in I$ – קטע פתוח.

גדר עילית

פונקציה $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה נראית **גדר עילית** של המד"ר אם:
 $\alpha'(x) > f(x, \alpha(x))$ לכל $x \in I$ – קטע פתוח.

10.3.1 משפט הגדר

נסתכל על פתרון y לבעיית התנאי ההתחלתי.
 f רציפה וליפשיצית מקומית ב- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y(x) > \alpha(x)\}$.
 אם $(x, y) \in D$ אז $y(x) > \alpha(x)$ לכל $x \in I \cap [x_0, \infty)$

הוכחה נסתכל על $g(x) = y(x) - \alpha(x)$. נניח בשלילה שהמשפט לא נכון.
 $g(x_0) > 0$ אבל יש $x_0 < x$ כך ש- $g(x) \leq 0$. ניקח x מינימלי שמקיים $g(x) \leq 0$.
 נסתכל על שיפוע g בנקודה x .

$$g'(x) = y'(x) - \alpha'(x) > f(x, y(x)) - f(x, \alpha(x)) = 0$$

כאשר $y(x) = \alpha(x)$ בנקודה x כי היא מינימלית.

$$\text{מצד שני, } g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq 0 \text{ מכיוון ש- } h < 0.$$

סה"כ הגענו ל- $0 < g(x) \leq 0$ – סתירה! לכן המשפט נכון.

עיקרון כללי: אפשר למצוא גדרות ע"י איזוקלינות.

איזוקלינות

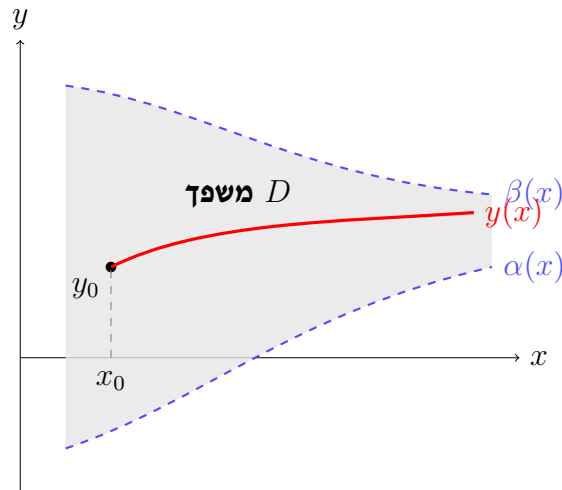
בהנתן מד"ר $y' = f(x, y)$, זה אוסף הנקודות המקיים $f(x, y) = k$

10.3.2 מסקנה - משפט המשפך

נניח $y' = f(x, y)$ מד"ר עם גדר תחתית α ו-גדר עלית β .
אם f ליפשיצית מקומית ב- y בתחום

$$D = \{(x, y) \mid x \in I, \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אז, הפתרון y לבעיית התנאי ההתחלתי מקיים: $\alpha(x) < y(x) < \beta(x)$ עבור $x \geq x_0$ בתחום ההגדרה.



10.4 דוגמאות

דוגמא 1

$$y' = x^4 - y^4 = f(x, y)$$

נשים לב ש- f רציפה וליפשיצית.

דוגמא לגדר עלית: $\beta(x) = x$. נראה שזו אכן גדר עלית:

$$x^4 - (\beta(x))^4 = x^4 - x^4 = 0 < 1 = \beta'(x)$$

דוגמא לגדר תחתית: $\alpha(x) = 0$. נראה שזו גדר תחתית:

$$x^4 - (\alpha(x))^4 = x^4 > 0 = \alpha'(x)$$

דוגמא 2

$$y' = y^2 - x = f(x, y)$$

דוגמא לגדר עלית: $\beta(x) = -\sqrt{x-1}$.

דוגמא לגדר תחתית: $\alpha(x) = -\sqrt{x+1}$.

11 הרצאה 11

11.1 כמה השלמות על משוואות אוטונומיות

11.1.1 טענה

יהא y פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי :

$$\begin{cases} f' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ועבור α, β פתרונות סינגולריים עוקבים המקיימים: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ מתקיים:

$$y_0 \in (\alpha, \beta)$$

אזי, קיימת נקודה x_1 כך ש- $y''(x_1) = 0$

הערה: לפעמים x_1 תהיה נקודת פיתול.

הוכחה y מקיים $y' = f(y)$. נגזור את 2 האגפים:

$$y'' = y' \cdot f'(y)$$

נרצה להראות שקיים x_1 כך ש- $f''(x_1) = 0$. אכן, לפי משפט רול - $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ ולכן קיים $\gamma \in (\alpha, \beta)$ כך ש- $f'(\gamma) = 0$.

נרצה: $y(x_1) = \gamma$. נשים לב שהוכחנו ש- y מקבל את כל הערכים בין α ל- β לכן בהכרח קיים x_1 כזה. \square

ראינו בתחילת הסמסטר: אם y פתרון למשוואה אוטונומית $y' = f(y)$, אז גם $y(x+c)$ פתרון לכל $c \in \mathbb{R}$.

11.1.2 טענה

תהי $y' = f(y)$ משוואה אוטונומית, f ליפשיצית מקומית ב- \mathbb{R} .
נניח שקיימים 2 פתרונות: y_1, y_2 ו- x_1, x_2 כך ש- $y_1(x_1) = y_2(x_2)$. אזי:

$$y_1(x + x_1 - x_2) = y_2(x) \quad \text{לכל } x$$

הוכחה נסמן $\tilde{y} = y_1(x + x_1 - x_2)$. פתרון למד"ר. (משפט שראינו: $c := x_1 - x_2$).

נשים לב ש- \tilde{y} ו- y_2 נחתכים ב- x_2 :

$$\tilde{y}(x_2) = y_1(x_2 + x_1 - x_2) = y_1(x_1) \underset{\text{הגדרה}}{=} y_2(x_2)$$

לכן, מעיקרון היחידות - $\tilde{y} = y_2$ לכל x . \square

נוסיף שכלול למשפט הגדר:

11.1.3 שכלול למשפט הגדר

יהא y פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי :

$$\begin{cases} f' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

תהא α כמו במשפט הגדר. נניח שמתקיים:

$$\alpha(x_0) \geq y(x_0)$$

אם מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות ב - $D = \{(x, y) \mid x \in I, y(x) \leq \alpha(x)\}$ אז, לכל $x \in I$ עבורו הפתרונות מוגדרים:

$$\forall x > x_0, \quad y(x) < \alpha(x)$$

הוכחה אם $\alpha(x_0) > y(x_0)$ - סיימנו (משפט הגדר). אחרת, נניח $\alpha(x_0) = y(x_0)$. נגדיר: $g(x) = \alpha(x) - y(x)$. g מקיימת:

$$g'(x_0) = \alpha'(x_0) - y'(x_0) \underset{\text{גדר עילית}}{>} f(x_0, \alpha(x_0)) - f(x_0, y(x_0)) \underset{y(x_0)=\alpha(x_0)}{=} 0$$
$$g(x_0) = \alpha(x_0) - y(x_0) = 0$$

מסקנה: יש סביבה $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ בה g חיובית, כלומר $y(x) < \alpha(x)$ לכל $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$. נפעיל את משפט הגדר על הסדרה:

$$x_n = x_0 + \frac{\varepsilon}{n}$$

מתקיים $x_n \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ ולכן $y(x_n) < \alpha(x_n)$.

נובע: $y(x) < \alpha(x)$ עבור $x \geq x_n$. אם נשאיף את n ל- ∞ נקבל: $y(x) < \alpha(x)$ לכל $x > x_0$.

□

נרחיב על משפט הפוך למשפט המשפך.

11.1.4 משפט המשפך ההפוך - "קולן"

קולן - Diffuser.

(הגדר התחתית מעל הגדר העילית)

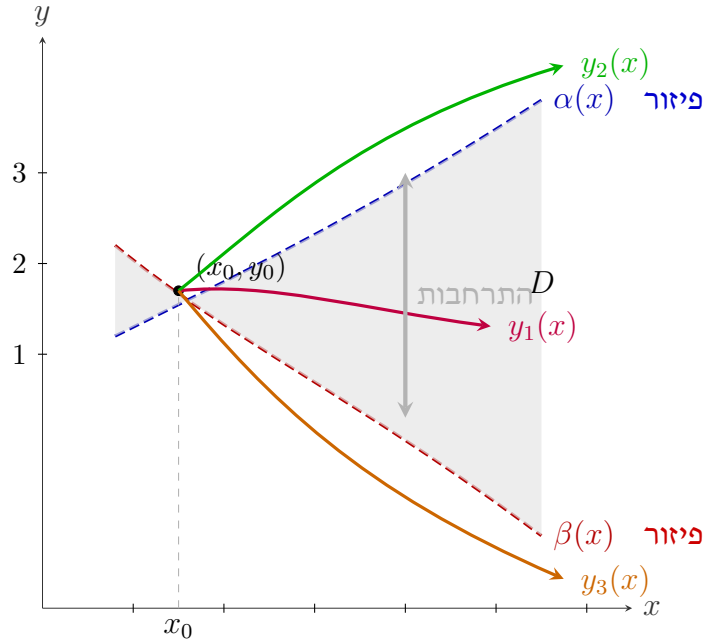
אם $y' = f(x, y)$ מד"ר, β גדר תחתית, α גדר עילית. מתקיים: $\beta > \alpha$.
נגדיר משפך הפוך:

$$D := \{(x, y) \mid x \in I, \quad \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אם מתקיים קיום ויחידות ב- D , אז:

1. יש פתרון למד"ר שנמצא בתוך D - D לכל $x \in I$ $(x, y(x)) \in D$

2. נניח $I = [a, \infty)$ אז $\beta - \alpha \rightarrow 0$ $x \rightarrow \infty$, ואם $\frac{\partial f}{\partial y} \geq 0$ ב- D אז הפתרון בסעיף 1 הוא יחיד.



הוכחה נתחיל בסעיף 2:

נניח בשלילה שיש זוג פתרונות y_1, y_2 שמוגדרת לכל $x \geq a$, פותרים את המד"ר ונשארים בתוך D - המשפך ההפוך.

נגדיר את פונקציית הפרש: $g = y_1 - y_2$. נשים לב שמתקיים:

$$0 \leftarrow \alpha - \beta < y_1 - y_2 < \beta - \alpha \rightarrow 0 \quad x \rightarrow \infty$$

לכן לפי סנדוויץ', $g \rightarrow 0$ $x \rightarrow \infty$. נגזור את g :

$$g' = f(x, y_1) - f(x, y_2)$$

מעקרון היחידות: y_1, y_2 לא נחתכים, לכן g בעלת סימן קבוע. בה"כ: $g > 0$ לכל $x \geq a$. כלומר-

$$g' = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt \geq 0$$

מסקנה: g עולה ממש ויש לה גבול, לכן מתכנסת לסופרימום שלה - $y_1 = y_2 \Rightarrow \sup y_1 - y_2 = 0$ בסתירה להנחה שלנו.

□