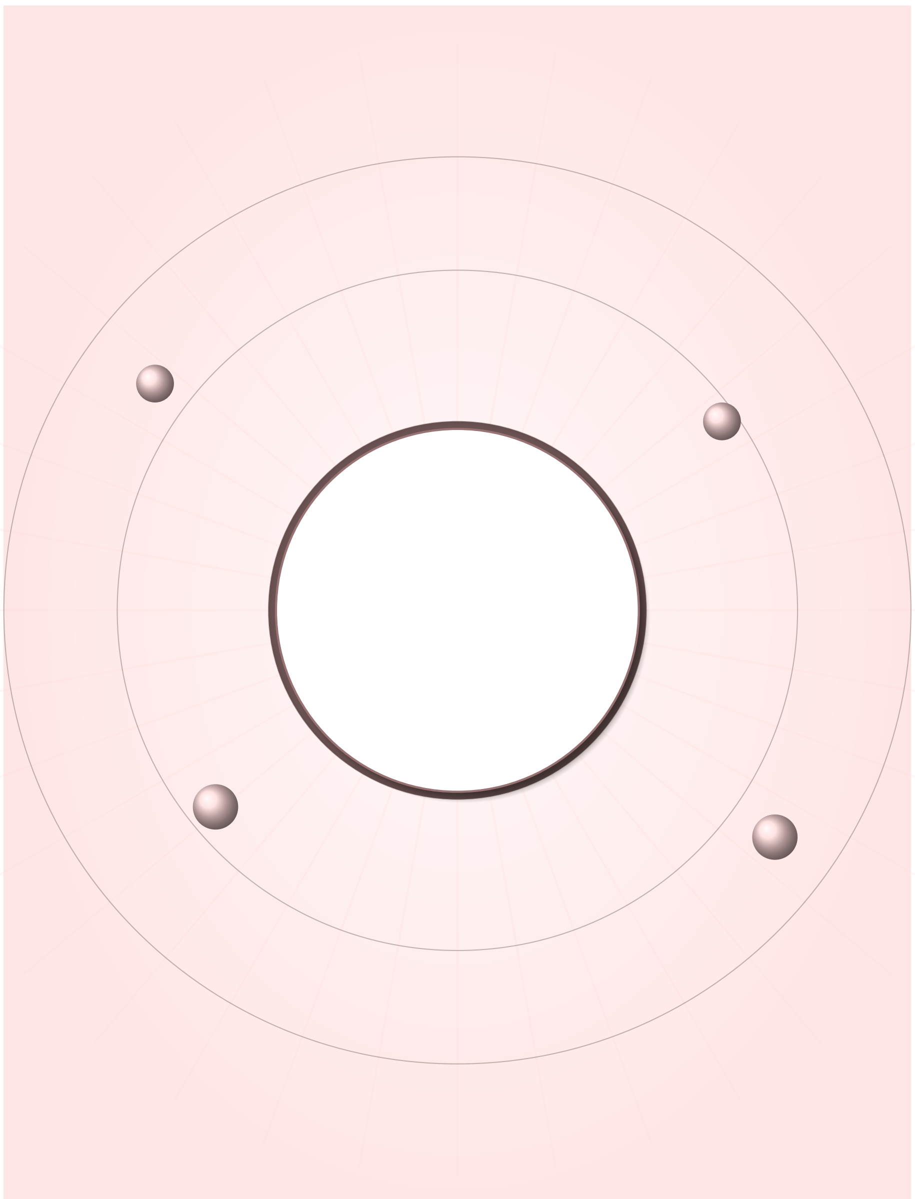
לוגיקה מתמטית - 1060156

גלית לבדב

12 בנובמבר 2025



תוכן עניינים

1 תחשיב הפסוקים

1.1 קשרים

סימן הקשר	שם הקשר	המשמעות	פונקציית האמת
$\neg$	שלילה	לא A	$f_\neg(T) = F$ $f_\neg(F) = T$
$\wedge$	קוּנְיוּנְקְצְיָה	וגם	$f_\wedge(T,T) = T$ $f_\wedge(T,F) = F$ $f_\wedge(F,T) = F$ $f_\wedge(F,F) = F$
$\vee$	דִּיסְיוּנְקְצְיָה	או	$f_\vee(T,T) = T$ $f_\vee(T,F) = T$ $f_\vee(F,T) = T$ $f_\vee(F,F) = F$
$\rightarrow$	גרירה	אם A אז B	$f_\rightarrow(T,T) = T$ $f_\rightarrow(T,F) = F$ $f_\rightarrow(F,T) = T$ $f_\rightarrow(F,F) = T$
$\equiv$	שקילות	אם ורק אם	$f_\equiv(T,T) = T$ $f_\equiv(T,F) = F$ $f_\equiv(F,T) = F$ $f_\equiv(F,F) = T$

1.2 קבוצת הפסוקים

נגדיר את קבוצת הפסוקים בעומק n.

ההגדרה תהיה באינדוקציה על n עומק הפסוק

בסיס: $n = 0$, נסמן $P = p \in AP$ פסוק אטומי.

נניח שהגדרנו פסוקים בעומק $n-1$ ונגדיר בעומק n. עבור A פסוק בעומק n, מתקיים אחד מהבאים:

1. $A = \neg B$ כאשר B מעומק $n-1$.
2. $A = B * C$ כאשר $*$ הוא קשר, ושני הפסוקים B וC מעומק לכל היותר $n-1$ ואחד מהם בדיוק בעומק $n-1$.

קבוצת הפסוקים היא הקבוצה

$$P = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$$

דוגמא הפסוק $(p \wedge \neg q) \equiv (q \rightarrow (\neg(p \vee r)))$ מעומק 4.

1.3 השמות

השמה היא פונקציה

$$m : AP \rightarrow \{T, F\}$$

נסמן ש"p אמיתי תחת m" ב-$m(p) = T$ או $m \models p$.

עבור פסוק מעומק n:

בסיס: $n = 0$, נסמן $A = p \in AP$ פסוק אטומי.

$$m \models A \iff m(p) = T$$

נניח שהגדרנו פסוקים בעומק $n-1$ ונגדיר בעומק n. עבור A פסוק בעומק n, מתקיים אחד מהבאים:

1. $A = \neg B$, אז $m \models A \iff m \not\models B$
2. $A = B \wedge C$, אז $m \models A \iff (m \models B$ וגם $m \models C)$
3. $A = B \vee C$, אז $m \models A \iff (m \models B$ או $m \models C)$
4. $A = B \rightarrow C$, אז $m \models A \iff (m \not\models B$ או $m \models C)$
5. $A = B \equiv C$, אז $m \models A \iff (m \models B \iff m \models C)$

1.3.1 הגדרות נוספות

טאטולוגיה

$A \models m$ לכל השמה m

סתירה

$\neg A \models m$ לכל השמה m

שקילות לוגית

A, B יקראו שקולים לוגית אם $A \equiv B$ הוא טאטולוגיה.

1.3.2 משפט

תהיינה שתי השמות m_1, m_2 ויהיה פסוק A כך שלכל פסוק אטומי p שמופיע ב-A מתקיים $m_1(p) = m_2(p)$, אזי

$$m_1 \models A \iff m_2 \models A$$

1.4 פונקציות n-מקומיות

פונקציית אמת n-מקומית היא פונקצייה מהצורה

$$f : \{T, F\}^n \to \{T, F\}$$

נאמר שפסוק A מייצג את f אם:

- ב-A יש בדיוק n פסוקים אטומיים.
- לכל השמה m,

$$m \models A \iff f(m(p_1), ..., m(p_2)) = T$$

1.5 קבוצת קשרים שלמה

קבוצת קשרים נקראת שלמה אם

לכל $f:\{T,F\}^n \to \{T,F\}$ קיים פסוק שמורכב רק מקשרים מהקבוצה אשר מייצגת את f

במילים אחרות, ניתן לייצג כל פונקציה ב"עולם" ע"י קשרים אלו בלבד.

מסקנה מ-DNF ו-CNF $\{\neg, \wedge, \vee\}$ שלמה.

1.5.1 טענה

כל אחת מהקבוצות הבאות הינה שלמה

1. $\{\neg, \wedge\}$
2. $\{\neg, \vee\}$
3. $\{\neg, \to\}$

הוכחה

1. נוכל לבטא בעזרת דה מורגן: $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$ וכך לקבל מערכת שלמה.
2. באותו אופן, $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$
3. נשים לב כי

$$A \vee B \equiv \neg A \to B$$

ולכן נוכל להשתמש בסעיף 2 כדי ליצור פונקציית אמת כלשהי ע"י $\{\neg, \vee\}$ ולהחליף כל מופע של $\vee$ ע"י השקילות הלוגית לעיל.

2 מערכת הוכחה בתחשיב הפסוקים

מערכת הוכחה בנוייה משני מרכיבים

1. אוסף מיוחד של פסוקים הנקראים **אקסיומות**.
2. אוסף של כללי היסק: כללים אלו מאפשרים לנו להוכיח פסוקים חדשים מפסוקים שהוכחנו.

2.1 הוכחה

בהנתן מערכת הוכחה, קבוצה $\sum$ של פסוקים (הנחות) ופסוק A (מסקנה)

הוכחה של A מתוך $\sum$ זוהי סדרה **סופית** של פסוקים $(B)_{i=1}^{n}$ כך שמתקיים

1. B_i אקסיומה
2. $B_i \in \sum$ הנחה
3. B_i התקבל ע"י הפעלת כללי היסק על פסוקים קודמים

אנו נשתמש בקורס במערכת ההוכחה של הילברט.

2.1.1 מערכת ההוכחה של הילברט

במערכת זו יש כלל היסק יחיד - ניתוק רישא $(mp - \text{modus ponens})$. כלל זה מאפשר להסיק את B בהנתן שהוכחנו את $A, A \to B$.

האקסיומות של מערכת זו הן:

- (A1) $A \to (B \to A)$
- (A2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
- (A3) $(\neg B \to \neg A) \to ((\neg B \to A) \to B)$

אם ניתן להוכיח את A מתוך $\sum$, נסמן $\sum \vdash A$.

מקרה פרטי הוא $\sum = \varnothing$ ונסמנו $\vdash A$ - כלומר ניתן להוכיח את A ללא הנחות.

3 נאותות ושלמות

3.1 נאותות

מערכת הוכחה תקרא **נאותה** אם לכל פסוק A:

$$\models A \Leftarrow \vdash A$$

מערכת הוכחה תקרא **נאותה חזק** אם לכל קבוצת פסוקים Σ ולכל פסוק A:

$$\Sigma \models A \Leftarrow \Sigma \vdash A$$

3.1.1 משפט הנאותות

מערכת ההוכחה הסטנדרטית היא נאותה

הוכחה נוכיח בהרצאה נאותות, הוכחת נאותות חזקה - בתרגיל בית.

יהי A פסוק כך ש$\vdash A$ - קיימת הוכחה ללא הנחות לפסוק המורכבת מ$B_1, ..., B_m = A$.

נראה ש A טאוטולוגיה. כלומר נראה שלכל i, B_i טאוטולוגיה ע"י אינדוקציה על i.

בסיס: B_1 אקסיומה כי הוכחה ללא הנחות מתחילה מאקסיומה. לכן טאוטולוגיה.

צעד: זו הוכחה ללא הנחות ולכן B_i יכולה להיות

1. אקסיומה ולכן מקרה הבסיס.
2. התקבלה ע"י כלל היסק. כלומר, קיימים $j, k < i$ B_k, B_j כך שהוכחנו את $B_j = B_k \to B_i$, B_k. לפי הנחת אינדוקציה, B_j, B_k טאוטולוגיות. לכן מתרגיל בית, B_i טאוטולוגיה.

3.2 שלמות

מערכת הוכחה תקרא **שלמה**, אם לכל פסוק A:

$$\vdash A \Leftarrow \models A$$

מערכת הוכחה תקרא **שלמה חזק** אם לכל Σ ו-A:

$$\Sigma \vdash A \Leftarrow \Sigma \models A$$

3.2.1 משפט השלמות

מערכת ההוכחה הסטנדרטית היא שלמה

הוכחה נשתמש במשפט הבא ע"י להוכיח את משפט השלמות.

3.2.2 משפט הדדוקציה

תהא $\sum$ קבוצת פסוקים ויהיו A,B פסוקים. אזי,

$$\sum \vdash A \to B \iff \sum \cup \{A\} \vdash B$$

הוכחה

$\Rightarrow$ נכתוב הוכחה לB באופן הבא: נכתוב הוכחה מתוך $\sum$ ל$A \to B$. נוסיף את A כהנחה ונפעיל mp כדי להוכיח את B.

$\Leftarrow$ תהא $B_1, ..., B_m = B$ הוכחה לB מתוך $\sum \cup \{A\}$. נוכיח באינדוקציה על i, ש-$\sum \vdash A \to B$.

נתבונן בB_i כלשהו ונחלק למקרים:

1. B_i אקסיומה:

.1	(A_1)	$B_i \to (A \to B_i)$
.2	אקסיומה	B_i
.3	1,2 MP	$A \to B_i$

2. B_i הנחה. נחלק למקרים:

   (א) $B_i \in \sum$: בדומה למקרה 1.

   (ב) $B_i = A$ הראנו בכיתה $\vdash A \to A$ ולכן $\sum \vdash A \to A$.

3. התקבלה ע"י כלל היסק. כלומר, קיימים $j,k < i$ B_k, B_j כך שהוכחנו את B_i $B_k, B_j = B_k \to B_i$.
   לפי הנחת אינדוקציה, $\sum \vdash A \to (B_k \to B_i), B_k$. נכתוב הוכחה:

.1	(A_2)	$(A \to (B_k \to B_i)) \to ((A \to B_k) \to (A \to B_i))$
.2	הנחת אינדוקציה	$A \to (B_k \to B_i)$
.3	1,2 MP	$(A \to B_k) \to (A \to B_i)$
.4	הנחת אינדוקציה	$(A \to B_k)$
.5	3,4 MP	$(A \to B_i)$

להוכחת המשפט דרושות לנו עוד כמה טענות. נגדיר כמה מושגים לצורך כך.

בעלת סתירה

קבוצת פסוקים $\sum$ כך שקיים פסוק A ומתקיים $\sum \vdash A$ וגם $\sum \vdash \neg A$.

עקבית

קבוצת פסוקים $\sum$ שאינה בעלת סתירה. כלומר, קיים פסוק A כך **שלא מתקיים** $\sum \vdash A$ וגם $\sum \vdash \neg A$.

3.2.3 טענת עזר

תהא $\sum$ קבוצת פסוקים. אזי:

$$\sum \text{ בעלת סתירה } \iff \sum \vdash A \quad \forall A$$

הוכחה

$\Rightarrow$ אם לכל A: $\sum \vdash A$, אז בפרט עבור $A = p, \neg p$ מתקיים $\sum \vdash p, \sum \vdash \neg p$ ולכן $\sum$ בעלת סתירה.

$\Leftarrow$ נניח כי קיים B כך ש$\sum \vdash B$ וגם $\sum \vdash \neg B$. יהא פסוק A, נראה $\sum \vdash A$:

.1	יכיח ללא הנחות (דדוקציה)	$\neg B \to (B \to A)$
.2	$\sum \vdash \neg B$	$\neg B$
.3	1,2 MP	$B \to A$
.4	$\sum \vdash B$	B
.5	3,4 MP	A

קבוצת פסוקים שלמה

תהא $\sum$ קבוצת פסוקים כך שלכל פסוק A מתקיים $\sum \vdash A$ **או** $\sum \vdash \neg A$

3.2.4 למה

לכל קבוצת פסוקים $\sum$ ולכל פסוק A,

$$\sum \nvdash A \Leftarrow \sum \cup \{\neg A\} \text{ עקבית}$$

הוכחה נניח בשלילה שאינה עקבית.

ניתן להוכיח כל דבר, לכן מתקיים $\sum \cup \{\neg A\} \vdash A$.

מדדוקציה, $\sum \vdash \neg A \to A$ ולכן מ-MP נקבל $\sum \vdash A$ - בסתירה להנחה.

3.2.5 משפט ההרחבה

תהא Σ קבוצת פסוקים עקבית. אזי, קיימת $\Sigma' \subseteq \Sigma$ כך שΣ' עקבית ושלמה.

הוכחה נניח כי AP בת מניה ולכן קבוצת כל הפסוקים P גם בת מניה.

תהא $A_1, A_2, ...$ מנייה של כל הפסוקים.

נגדיר שרשרת באופן הבא

$$\Sigma = \Sigma_0 \subseteq ... \subseteq \Sigma_n$$

כאשר

$$\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n & \Sigma_n \vdash A_n \\ \Sigma_n \cup \{\neg A_n\} & otherwise \end{cases}$$

נשים לב שΣ_n עקבית (ניתן להוכיח באינדוקציה בשימוש בלמה).

3.2.6 טענה

נגדיר

$$\sum_{\infty} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$$

1. $\sum_\infty$ עקבית
2. $\sum_\infty$ שלמה

3.2.7 משפט

תהא $\sum$ קבוצת פסוקים עקבית ושלמה. אזי, קיימת השמה m כך שלכל פסוק A:

$$\sum \vdash A \iff m \models A$$

הוכחה להשלים

3.3 הוכחת משפט השלמות

3.3.1 תזכורת

מערכת ההוכחה הסטנדרטית היא שלמה

שלמה חזק

לכל Σ ו-A:

$$\Sigma \vdash A \Leftarrow \Sigma \models A$$

הוכחה נראה: $\nvDash A \quad \Leftarrow \quad \nvdash A$ - כלומר A לא טאוטולוגיה.

מלמה 3.2.4 - $\{\neg A\}$ עקבית.

ממשפט ההרחבה, קיימת Σ' עקבית ושלמה כך ש-$\neg A \in \Sigma'$.

ממשפט 3.2.7 - קיימת m כך שלכל פסוק B מתקיים $m \models B \iff \Sigma' \vdash B$.

$$\neg A \in \Sigma' \Rightarrow \neg A \vdash \Sigma' \iff m \models \neg A \iff m \nvDash A$$

כלומר - A לא טאוטולוגיה. מ.ש.ל.

4 קומפקטיות

4.1 משפט הקומפקטיות

לכל קבוצת פסוקים Σ מתקיים:

ל-Σ יש מודל $\Leftrightarrow$ לכל $\Sigma' \subseteq \Sigma$ סופית יש מודל.

4.2 שימושים של קומפקטיות

נוכיח את המשפט הבא:

יהא $G=(V,E)$ גרף ויהא $k \in \mathbb{N}$. אזי:

לכל תת גרף סופי של G יש צביעה בk צבעים $\Leftarrow$ יש צביעה של G עם k צבעים

הוכחה

נגדיר קבוצת פסוקים אטומיים - לכל קודקוד $v \in V$ ולכל צבע $c \in \{1,..,k\}$ יהיה פסוק אטומי $p_{v,c}$.

$$p_{v,c} = \{\text{קודקוד v צבוע בצבע c}\}$$

נגדיר את Σ - התנאים שהצביעה צריכה לקיים

1. $A_v = \bigvee_{c\in\{1,..,k\}} p_{v,c}$ - לכל קודקוד יש לפחות צבע אחד
2. $B_v = \bigwedge_{c_1 \neq c_2} \neg(p_{v,c_1} \vee p_{v,c_2})$ - לכל קודקוד יש לכל היותר צבע אחד.
3. $C_{v,u} = \bigwedge_{c\in[k]} \neg(p_{v,c} \wedge p_{u,c})$ - לכל u,v המחוברים בקשת - יש צבעים שונים.

נגדיר

$$\Sigma = \{A_v, B_v \mid v \in V\} \cup \{V_{\{u,v\}} \mid \{u,v\} \in E\}$$

נראה שΣ ספיקה אמ"מ קיימת ל-G צביעה בk צבעים

מקומפקטיות, מספיק להראות כי כל תת קבוצה $\Sigma' \subseteq \Sigma$ סופית היא ספיקה.

תהא Σ' תת קבוצה סופית. נגדיר תת גרף G' של G ע"י

$$V' = \{v \in V \mid \text{v אינדקס של פסוק ב}\Sigma'\}, E' = \{e \in E \mid \text{כל הצלעות ב-E שמחברות קודקודים ב-V'}\}$$

כיוון 1: נתון מודל m של Σ' - **נבנה צביעה** לפיו $c: U \to [k], c(u) = i \iff m(p_{u,i}) = T$

כיוון 2: נתונה צביעה c- **נבנה מודל** לפיה $m(p_{u,i}) = \begin{cases} T & c(u) = i, u \in U \\ F & c(u) \neq i, u \in U \\ arbitrary & u \notin U \end{cases}$

5 גדירות

עבור קבוצת פסוקים Σ, נגדיר:

$$M(\Sigma) = \{v \mid v \models \Sigma\} \subseteq \{T,F\}^{AP}$$

בהינתן $M \subseteq \{T,F\}^{AP}$, נאמר ש-**M גדירה** אם קיימת Σ כך ש-$M = M(\Sigma)$

אינטואיציה: M גדירה אם אפשר למצוא קבוצת פסוקים שתופסת בדיוק את כל ההשמות האלה — לא יותר ולא פחות.

5.0.1 דוגמאות

האם $M = \{v_t\}$ **גדירה?** כן! נסמן: $\Sigma = \{p \in AP\}$, כך ש-M-$M(\Sigma) =$

האם כל $M \subseteq \{T,F\}^{AP}$ **גדירה?** לא! נשים לב שמספר קבוצות ההשמות הוא $2^{\aleph} = 2^{2^{\aleph_0}}$, בעוד שמספר הקבוצות הגדירות הוא לכל היותר $\aleph = 2^{\aleph_0}$. כלומר, יש יותר קבוצות שמות מאשר קבוצות גדירות.

5.1 משפט

אם $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ קבוצות פסוקים אזי:

1. $M(\Sigma_2) \subseteq M(\Sigma_1)$
2. חיתוך של קבוצות גדירות הוא גדיר
3. איחוד סופי של קבוצות גדירות הוא גדיר

רעיונות הוכחה:

2. $M(\bigcup_{i\in I}\Sigma_i) = \cap_{i\in I} M_i$ כאשר Σ_i מגדירה את M_i
3. נראה עבור Σ_1 ו-Σ_2 ו"נגדיל" את הטיעון באינדוקציה.

5.2 סדרות של השמות

נתבונן במרחב ההשמות $\{F,T\}^{AP}$ כמרחב סדרות עם פונקציית המרחק הבאה:

$$d(v_1,v_2) = \begin{cases} 2^{-\min\{i\in\mathbb{N} \mid v_1(p_i)\neq v_2(p_i)\}} & v_1 \neq v_2 \\ 0 & v_1 = v_2 \end{cases}$$

5.2.1 התכנסות

תהא $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת השמות, ותהא v השמה.

הבחנה: $\lim_{n\to\infty} V_n = v \iff$ לכל p_i קיים N כך שלכל $n \geq N$, מתקיים $V_n(p_i) = v(p_i)$

תזכורת: קבוצת השמות נקראת **סגורה** אם היא מכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.

5.2.2 משפט

לכל $M \subseteq \{F,T\}^{AP}$:

M גדירה $\Leftrightarrow$ M סגורה

גדירה $\Leftarrow$ סגורה M גדירה $\Leftarrow$ קיימת Σ כך ש־ $M = M(\Sigma)$.

תהא $\{m_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ מתכנסת ל־$m \in M$. נראה ש־ $m \in M \iff m \models \Sigma$.

יהי $A \in \Sigma$.

נסמן k כאינדקס המינימלי של פסוק אטומי ב־A. קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים

$$m_n(p_i) = m(p_i) \quad \forall i \geq k.$$

לפי בחירת הסדרה, $m_n \in M$ ולכן $m_n \models A$. מכיוון ש־m_n ו־m **מסכימות על הפסוקים האטומיים ב־A**, בהכרח $m \models A$, כלומר $m \in M$.

סגורה $\Leftarrow$ גדירה תהי M סגורה. נמצא Σ כך ש־

$$M = M(\Sigma) = \bigcap_{A\in\Sigma} M(\{A\}).$$

זה שקול להראות ש־

$$\bar{M} = \bigcup_{A\in\Sigma} \bar{M}(\{A\}) = \bigcup_{A\in\Sigma} M(\{\neg A\}).$$

כלומר, מספיק להראות שכל קבוצה פתוחה $\bar{M}$ ניתנת להצגה כאיחוד של קבוצות גדירות סופיות.

(תרגיל: להראות שכדור גדיר סופית).

5.3 גדירות סופית

5.3.1 הגדרה

M תקרא גדירה סופית אם קיימת קבוצה **סופית** Σ כך ש-$M = M(\Sigma)$

5.3.2 משפט

תהא M קבוצת השמות:

$M, \bar{M}$ גדירות $\Leftrightarrow$ M גדירה סופית $\Leftrightarrow$ M גדירה ע"י פסוק יחיד

הוכחה:

3 ⇐ 2 תהי $\Sigma = \{A_1, \ldots, A_n\}$ כך ש־$M = M(\Sigma)$.

נגדיר $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ונוכיח ש־$M = M(A)$.

$$m \in M(A) \Leftrightarrow m \models A\big(= \bigcap_{i=1}^{n} A_i\big) \Leftrightarrow \forall i,\, m \models A_i \Leftrightarrow m \in M(\Sigma)$$

1 ⇐ 3 יהי A, ו־$M = M(A)$.

נתבונן ב־$B = \neg A$ ונוכיח ש־$\bar{M} = M(B)$.

$$m \in \bar{M} \Leftrightarrow m \notin M \Leftrightarrow m \not\models A \Leftrightarrow m \models B \Leftrightarrow m \in M(B)$$

2 ⇐ 1 יהיו Σ_1, Σ_2 כך ש־$M = M(\Sigma_1)$, ו־$\bar{M} = M(\Sigma_2)$. נסמן - $\Sigma = \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$.

נשים לב ש־

$$M(\Sigma_1 \bigcup \Sigma_2) = M \cap \bar{M} = \varnothing$$

כלומר, $\Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$ בעלת סתירה (חסרת מודלים).

מקומפקטיות, קיימת $\Sigma' = \Sigma_1' \bigcup \Sigma_2'$ סופית ובעלת סתירה.

נראה ש־$\mathbf{M}(\Sigma) = \mathbf{M}(\Sigma_1')$ על ידי הכלה דו־כיוונית:

1. $M(\Sigma) \subseteq M(\Sigma_1')$ — טענה מהרצאה 4.
2. $M(\Sigma) \supseteq M(\Sigma_1')$ — נניח בשלילה שקיים $m \in M(\Sigma_1')$ אך $m \notin M(\Sigma)$. לכן $m \in \bar{M} = M(\Sigma_2)$. מתקיים:

$$m \in M(\Sigma_1' \bigcup \Sigma_2') \Leftarrow m \in M(\Sigma_2') \Leftarrow \Sigma_2' \subseteq \Sigma_2.$$

אבל אמרנו ש־$\Sigma_1 \bigcup \Sigma_2$ חסרת מודלים — **סתירה!**

6 תחשיב יחסים

6.1 מבנים

מבנה M מורכב מהרכיבים:

- קבוצה W^M ("העולם שלנו")
- איברים מיוחדים כמו c^M, d^M
- פונקציות $f^M : (W^M)^n \to W^M$
- יחסים: תתי קבוצות של $(W^M)^n$ — כלומר, יחסים n-מקומיים

6.1.1 דוגמאות

1. **שלמים כחבורה חיבורית:**
   - $W^M = \mathbb{Z}$
   - קבוע: $0^M = 0$
   - פונקציות: $f^M(x) = -x$, $g^M(x,y) = x+y$
   - אין יחסים חוץ משוויון
2. **הממשיים עם סדר רגיל:**
   - $W^M = \mathbb{R}$
   - אין קבועים
   - אין פונקציות
   - יחס: $R^M = \{(x,y) \mid x \leq y\}$

6.2 שפה

שפה כוללת את הרכיבים הבאים:

- קבועים אישיים: מסומנים c, d.
- סימני פונקציות: f, g כאשר לכל סימן פונקציה מצוין גם המקומיות שלה.
- סימני יחס R, P, Q כאשר לכל סימן יחס מצויין מה המקומיות שלו.
- סימן יחס השיוויון- = (דו מקומי)
- קשרים: $\neg, \wedge, \vee, \equiv, \to$
- משתנים אישיים: x, y, z.
- כמתים: $\forall, \exists$.
- סוגריים (,)

6.3 הגדרה

נאמר ששפה L **היא שפה עבור מבנה** $\mathbf{M}$ אם:

- לכל קבוע אישי c בשפה קיים פרוש שהוא קבוע c^m.
- לכל סימן פונקציה n-מקומית f בשפה יש פירוש שהוא פונקציה n-מקומית f^m במבנה.
- לכל סימן יחס n-מקומי R^m בשפה יש פירוש שהוא יחס n-מקומי במבנה כאשר הפירוש של = הוא תמיד $=^m$

לכל קבוע, פונקציה, יחס יש משמעות במבנה.

6.4 קבוצת שמות העצם

בהינתן שפה L, נגדיר את קבוצת שמות העצם באינדוקציה באופן הבא:

- קבוצת שמות העצם מעומק 0 - T_0
- בהינתן שהגדרנו את T_n, קבוצת שמות העצם מעומק n, נגדיר את T_{n+1} באופן הבא: ביטוי מהצורה $f(t_1, ..., t_n)$ שייך לT_{n+1} אם:
  1. f סימן פונקציה k-מקומי
  2. $\forall i \leq k, t_i \in \bigcup_{j \leq n} T_n$
  3. קיים i כך ש$t_i \in T_n$.

קבוצת שמות העצם היא $T = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$.

6.5 קבוצת הנוסחאות

בהינתן שפה L, נגדיר את אוסף הנוסחאות ב-L באופן אינדוקטיבי:

- F_0 היא קבוצת הנוסחאות מעומק 0 :
  מכילה את כל הביטויים מהצורה $R(t_1, ..., t_n)$ כאשר R סימן יחס k-מקומי ו$t_1, ..., t_n \in T$.
- נניח שהגדרנו את F_n, קבוצת הנוסחאות מעומק n. אזי, F_{n+1} מכילה את הביטויים מהצורה:
  1. $\alpha \in F_n, \neg\alpha$
  2. $\alpha, \beta \in \bigcup_{j \leq n} F_j, * \in \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \equiv\}, \alpha * \beta$ ולפחות אחד מהם בF_n.
  3. $\forall x(\alpha)$, x משתנה אישי, $\alpha \in F_n$
  4. $\exists x(\alpha)$, x משתנה אישי, $\alpha \in F_n$

קבוצת הנוסחאות היא $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$.

דוגמא לנוסחאות בשפה עם קבוע 0 ופונקציה דו-מקומית $+$:

$$x = 0, \quad x = y + 0, \quad \forall x \exists y\,(x = y + 0), \quad \exists x\,(x + x = 0)$$

6.6 השמה

יהא M מבנה ותהא L שפה עבור M. נסמן בV את קבוצת המשתנים בL.

השמה היא פונקציה:

$$S : V \to W^M$$

נרחיב השמה נתונה S לקבוצת כל שמות העצם.

$$S^* : T \to W^M$$

ונגדיר את S^* באינדוקציה על עומק שם העצם t.

עומק = 0:

- אם $t = x$ הוא משתנה:

$$S^*(t) = S(x)$$

- אם $t = c$ הוא קבוע אישי:

$$S^*(t) = c^M$$

צעד:

נניח שהגדרנו את S^* לכל שם עצם מעומק $\leq d$ ויהא t מעומק $d+1$.

העומק של t גדול מ-0, אזי t מהצורה $t = f(t_1, ..., t_m)$ כאשר f סימון פונקציה m מקומית ו- $t_1, ..., t_m$ שמות עצם מעומק $\leq d$.

נגדיר :

$$S^*(t) = f^M(S^*(t_1), ..., S^*(t_m))$$

6.7 אמיתות

יהא M מבנה ותהא L שפה עבור M ותהא S השמה, α נוסחא בL.

נגדיר באינדוקציה על עומק α מתי α מסתפקת בM תחת ההשמה S:

$$M \models_S \alpha$$

בסיס: עומק הנוסחא α הוא 0. כלומר $\alpha = R(t_1, ..., t_m)$.
נסמן:

$$M \models_S \alpha \iff (S^*(t_1), ..., S^*(t_m)) \in R^M$$

צעד: עומק הנוסחא α הוא $d > 0$.

- מקרה א: α מתקבלת על ידי $\vee$ $(\alpha = \beta \vee \gamma)$

$$M \models_S \alpha \iff M \models_S \beta \iff M \models_S \gamma$$

*הגדרה דומה לשאר הקשרים.

- מקרה ב:

1. α מתקבלת על ידי כמת $\exists$ - $\alpha = \exists x(\beta)$
אם קיימת השמה S^{-1} כך שS, S^{-1} מסכימות על כך המשתנים פרט אולי לx ומתקיים $M \models_S \beta$, אז:
$$M \models_S \alpha$$

2. α מתקבלת על ידי כמת $\forall$ - $\alpha = \forall x(\beta)$
$$M \models_S \alpha$$
אם לכל השמה S^{-1} שמזדהה עם S, פרט אולי לx, מתקיים: $M \models_S \beta$ אז
$$M \models_S \alpha$$

.

דוגמה נתבונן במבנה עם עולם $W^M = \{0, 1\}$. אין פונקציות או יחסים – רק שוויון.

נכתוב את הנוסחאות: $\beta = x = y \quad \alpha = \forall x\,(x = y),$

נגדיר השמה:

$$S(v) = \begin{cases} 1 & v = x \\ 1 & v = y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. האם $M \models_S x = y$? כן.
זה שקול לכך ש-$S^*(x) = S^*(y)$.

2. האם $M \models_S \forall x\,(x=y)$? לא.

זה שקול לכך שלכל השמה S' ששונה מ-S רק אולי בערך של x, מתקיים ש-$S'^*(x)=S^*(y)$.

אבל אם ניקח $S'(x)=0$ ו-$S'(y)=1$, אז נקבל $1\neq 0$, ולכן הנוסחה לא מתקיימת בכל השמה כזו.

6.8 אמיתות לוגית

נאמר ש-α היא אמיתית לוגית אם $M \models \alpha$ לכל מבנה M עבור השפה L.

דוגמאות

1. $x=x\,,\ \forall x\ \exists y\ (\neg(x=y))$ אמיתית בכל המבנים בהם יש לפחות שני איברים. לכל x קיים איבר ששונה ממנו.

2. $\forall x\, \forall y (x\cdot y = y\cdot x)$

   טענה זו אינה אמיתית לוגית, כלומר לא מתקיימת בכל מבנה אפשרי.

   לדוגמה, נסתכל על מבנה שבו העולם הוא קבוצת המטריצות הריבועיות מסדר 2×2 מעל הממשיים, והפעולה $\cdot$ היא כפל מטריצות.

   במקרה הזה, לא תמיד מתקיים $A\cdot B = B\cdot A$. כפל מטריצות אינו חילופי באופן כללי.

   לכן הטענה אינה נכונה במבנה הזה, ולכן אינה תקפה לוגית (לא נכונה בכל מבנה אפשרי).

6.9 הגדרה

תהא α נוסחא.

מופע של משתנה אישי x בתוך α נקרא **קשור** אם הוא נמצא בטווח של כמת ($\exists\,,\,\forall$).
כל מופע אחר נקרא **מופע חופשי**.

משתנה אישי x נקרא **חופשי ב -**α אם יש לו לפחות מופע חופשי אחד.

$$F\vee(\alpha) = \{x : \text{חופשי ב-}\alpha\ x\}$$

נוסחא α המקיימת $F\vee(\alpha)=\varnothing$ נקראת **פסוק**.

6.10 משפט

תהא α נוסחא ויהיו S_1, S_2 השמות המזדהות על כל המשתנים ב$F \vee (\alpha)$. אזי:

$$M \models_{S_1} \alpha \iff M \models_{S_2} \alpha$$

הוכחה: נוכיח את המשפט בעזרת טענת עזר.

אם t שם עצם כך שS_1, S_2 מסכימות על המשתנים ב-t. אזי,

$$S_1^*(t) = S_2^*(t)$$

הוכחה: בסיס:

1. $t : x$ משתנה אישי:

$$S_1^*(t) = S_1(t) = S_2(t) = S_2^*(t)$$

2. $t : x$ קבוע:

$$S_1^*(t) = C^M = S_2^*(t)$$

מעבר: $t : f(t_1, ..., t_m)$

$$S_1^*(t) = f^M\left(S_1^*(t_1), ..., S_1^*(t_m)\right) = f^M\left(S_2^*(t_1), ..., S_2^*(t_m)\right) = S_2^*(t)$$

עכשיו כשהוכחנו את הטענה, **נוכיח את המשפט באינדוקציה על עומק α**.

בסיס: $\alpha : R(t_1, .., t_m)$

מהגדרת אמיתות, $M \models_{S_1} \alpha \iff (S_1^*(t_1), .., S_1^*(t_m)) \in R^M$

מטענת העזר, $(S_1^*(t_1), .., S_1^*(t_m)) \in R^M \iff (S_2^*(t_1), .., S_2^*(t_m)) \in R^M$

שוב, מהגדרת אמיתות $(S_2^*(t_1), .., S_2^*(t_m)) \in R^M \iff M \models_{S_2} \alpha$

צעד: תהא α נוסחא מעומק $n > 0$.

1. מקרה א: α התקבלה על ידי הפעלת קשר. למשל: $\alpha = \beta \wedge \gamma$

$$M \models_{S_1} \alpha \iff M \models_{S_1} \beta \text{ וגם } M \models_{S_1} \gamma$$

נשים לב שהמשתנים החופשיים של β, γ מוכל בקבוצת המשתנים החופשיים של α, לכן מהנחת האינדוקציה, מתקיים:

$$M \models_{S_1} \beta \text{ וגם } M \models_{S_1} \gamma \;=\; M \models_{S_2} \beta \text{ וגם } M \models_{S_2} \gamma$$

ושוב, מהגדרת אמיתות:

$$M \models_{S_2} \beta \text{ וגם } M \models_{S_2} \gamma \iff M \models_{S_2} \alpha$$

2. מקרה ב: α התקבלה על ידי הפעלת כמת. למשל: $\alpha = \forall x\,(\beta)$

$$M \models_{S_1} \alpha \iff M \models_{S_1[x\leftarrow w]} \beta$$

לכל $w \in W^M$. (כאשר $S_1[x \leftarrow w]$ סימון של השמה המתקבלת מS_1 על ידי שינוי פרושו של x לy).

נשים לב ש$S_1[x \leftarrow w]$, $S_2[x \leftarrow w]$ מסכימות על כל משתנה חופשי $x \neq$ אשר מופיע בβ, כיוון שמשתנה כזה הוא גם חופשי בα. בנוסף, הן גם מסכימות על x כיוון שתחת שתי ההשמות, פרושו של x הוא אותו w.

לכן, מהנחת האינדוקציה:

$$M \models_{S_1[x\leftarrow w]} \beta \iff M \models_{S_2[x\leftarrow w]} \beta$$

וסה"כ,

$$M \models_{S_2[x\leftarrow w]} \beta \iff M \models_{S_2} \alpha$$

6.10.1 מסקנה

אם α פסוק, אזי:

α או $\neg\alpha$ אמיתיות במבנה M

7 תורה מסדר ראשון

- **תורה מסדר ראשון** היא שפה L ואוסף נוסחאות Σ (בדרך כלל פסוקים) בשפה זו.
- **מודל של תורה** הוא מבנה עבור L כך שלכל $\alpha \in \Sigma$ מתקיים $M \models \alpha$.

עבור מבנה M, נסמן ב־$Theory(M)$ את הקבוצה $\{\alpha : M \models \alpha\}$.

- שני מבנים **שקולים אלמנטרית** אם מתקיים:

$$Theory(M_1) = Theory(M_2)$$

- שני מבנים **איזומורפיים** אם קיימת העתקה חח"ע ועל $\varphi : W^{M_1} \to W^{M_2}$ ששומרת על כל המבנה. כלומר, על הקבועים, הפונקציות והיחסים.

דוגמאות

תורת יחסי השקילות

בשפה יש רק יחס בינארי $\sim$. הפסוקים הם:

1. $\forall x \, (x \sim x)$ (רפלקסיביות)
2. $\forall x \, \forall y \, (x \sim y \to y \sim x)$ (סימטריות)
3. $\forall x \, \forall y \, \forall z \, ((x \sim y \land y \sim z) \to x \sim z)$ (טרנזיטיביות)

תורת הקבוצות

בתורה יש רק סימן יחס יחיד: "$\in$".

1. אקסיומת ההיקף - $\forall A \forall B \;\; ((x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B)$
2. אקסיומת הקבוצה הריקה - $\exists Y \, \forall x \; (\neg(x \in Y))$
3. אקסיומת ההפרדה - לכל נוסחא $\varphi(x)$ עם משתנה חופשי x: $\forall A \, \exists B \;\; (x \in B \leftrightarrow (x \in A \land \varphi(x)))$
4. $\forall x \forall y \, \exists A \, (x \in A \land y \in A)$
5. אקסיומת האיחוד - $\forall F \, \exists U \, \forall a \, (a \in U \leftrightarrow \exists A(A \in F \land a \in A))$
6. אקסיומת הזיווג - $\forall A \exists p \, (B \in p \leftrightarrow \forall b(b \in B \to b \in A))$
7. אקסיומת האינסוף - $\exists A(\varnothing \in A \land \forall x(x \in A \to (\mathbf{x} \cup \{\mathbf{x}\} \in A)))$ (מודגש - לא מדוייק ודורש הגדרה ע"י נוסחא).
8. אקסיומת הבחירה - $\forall A(A \neq \varnothing \to \exists x((x \in A) \land (x \cap A = \varnothing))$
9. לכל פונקציה f ולכל קבוצה A, $f(A)$ היא קבוצה.
10. $\forall F \exists f \forall A((A \in F \land A \neq \varnothing) \to f(A) \in A)$

תורת החבורות

השפה כוללת קבוע e ואופרטור בינארי $(\cdot)$. הפסוקים הם:

1. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$ (אסוציאטיביות)
2. $\forall x\, (e \cdot x = x \cdot e = x)$ (איבר יחידה)
3. $\forall x\, \exists y\, (x \cdot y = e = y \cdot x)$ (איבר הפכי)

7.1 הצבה לא כשרה

הצבה של שם עצם t במקום מופע חופשי של משתנה x בנוסחא α תקרא **לא כשרה** אם קיים משתנה y כך ש:

1. y מופיע בתוך t.
2. המופע המוצב נמצא בתוך הטווח של כמת $\forall y$ או $\exists y$.

אחרת, ההצבה נקראת כשרה.

תזכורת מופע חופשי של משתנה x הוא מופע של x שאינו בטווח של $\forall x$ או $\exists x$.

7.2 הצבה מלאה וחלקים

תהא $\alpha(x)$ נוסחא, $x \in Fv(\alpha)$ ו-t שם עצם.

- **הצבה מלאה וכשרה** $\alpha(t)$: הצבה כשרה של t בכל מופע חופשי של x ב-α.
- **הצבה חלקית כשרה** $\alpha\langle t\rangle$: הצבה כשרה של t בחלק מהמופעים החופשיים של x ב-α.

8 מערכת ההוכחה בתחשיב יחסים

כעת, נציג את מערכת ההוכחה עבור תחשיב היחסים אשר איתה נעבוד. כאשר נצמצם, בדומה לתחשיב הפסוקים, את מערכת הקשרים והכמתים שלנו להכיל את הקשרים $\rightarrow$,$\neg$ ואת הכמת $\forall$.

אקסיומות הקשרים

- **(A1)** $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
- **(A2)** $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
- **(A3)** $(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow ((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$

אקסיומות הכמת

- **(A4)** $\forall x(\alpha) \rightarrow \alpha(t)$ כאשר $\alpha(t)$ היא הצבה **מלאה וכשרה** של t במקום x.
- **(A5)** $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x(\beta))$ כאשר x **איננו** מופע חופשי ב־α.

אקסיומות השוויון

- **(A6)** $\forall x\,(x = x)$
- **(A7)** $x = y \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha\langle y\rangle)$ כאשר $\alpha\langle y\rangle$ היא הצבה **חלקית כשרה** של y במקום x.

כללי היסק

1. **MP** $\dfrac{\alpha \rightarrow \beta\,,\ \alpha}{\beta}$
2. **GEN** $\dfrac{\alpha}{\forall x(\alpha)}$

דוגמה נרצה להוכיח: $\{\forall x\forall y\ \ \alpha\} \vdash \forall y\forall x\ \ \alpha$

1. מההנחה: $\forall x\forall y\,\alpha$
2. מהאקסיומה A4 (הצבה מלאה של $t := y$): $\forall x\forall y\,\alpha \rightarrow \forall y\,\alpha$
3. ממודוס פוננס על שורות 1 ו-2: $\forall y\,\alpha$
4. מהאקסיומה A4 (הצבה מלאה של $t := x$): $\forall y\,\alpha \rightarrow \alpha$
5. ממודוס פוננס על שורות 3 ו-4: α
6. מהכלל GEN על שורה 5: $\forall x\,\alpha$
7. מהכלל GEN על שורה 6: $\forall y\forall x\,\alpha$

טענה האקסיומה (A4) היא נכונה לוגית.

הוכחה נניח בשלילה כי האקסיומה אינה נכונה, כלומר, קיים מבנה M והשמה s כך ש

$$M \models_s \forall x(\alpha), \quad \text{אבל} \quad M \not\models_s \alpha(t).$$

כיוון ש-$M \not\models_s \alpha(t)$, משמעות הדבר היא ש-$\alpha(t)$ אינה מתקיימת תחת ההשמה s.

אבל $\alpha(t)$ היא הצבה מלאה וכשרה של t במקום x ב-α, ולכן ניתן לבנות השמה s' ששונה מ-s רק בערך של x, כך ש

$$M \not\models_{s'} \alpha.$$

זאת סתירה להנחה ש-$M \models_s \forall x\alpha$, שכן לפי משמעות $\forall x\alpha$, עבור כל השמה s' המשתנה רק ב-x, חייב להתקיים

$$M \models_{s'} \alpha.$$

מכאן נובע שהאקסיומה (A4) נכונה לוגית.

9 משפטי השלמות והנאותות בתחשיב היחסים

9.1 נאותות

מערכת הוכחה תקרא **נאותה** אם לכל נוסחא α:

$$\vdash \alpha \Rightarrow \models \alpha$$

מערכת הוכחה תקרא **נאותה חזק** אם לכל קבוצת נוסחאות Σ ולכל נוסחא α:

$$\Sigma \vdash \alpha \Rightarrow \Sigma \models \alpha$$

9.1.1 משפט הנאותות

מערכת ההוכחה שלנו היא נאותה חזק

9.2 שלמות

מערכת הוכחה תקרא **שלמה**, אם לכל נוסחא α:

$$\models \alpha \Rightarrow \vdash \alpha$$

מערכת הוכחה תקרא **שלמה חזק** אם לכל Σ ו-α:

$$\Sigma \models \alpha \Rightarrow \Sigma \vdash \alpha$$

9.2.1 משפט השלמות

מערכת ההוכחה שלנו היא שלמה חזק

9.2.2 מערכת רקורסיבית

מערכת הוכחה נקראת כריעה/רקורסיבית, אם ניתן לוודא הוכחות באופן אוטומטי ע"י אלגוריתם

10 קומפקטיות

10.1 משפט הקומפקטיות

לכל קבוצת נוסחאות Σ:

קיים ל-Σ מודל M $\iff$ לכל $\Sigma' \subseteq \Sigma$ סופית יש מודל M'

10.2 שימושים של קומפקטיות

10.2.1 שימוש 1

דוגמה 1: נוכיח שקיימת הרחבה של הממשיים $\mathbb{R}$ שמכילה מספרים אינפיניטסימליים.

נגדיר את השפה L באופן הבא:

- לכל מספר ממשי $r \in \mathbb{R}$ יש קבוע c_r בשפה.
- לכל פונקציה ממשית $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ יש סימן פונקציה בשפה.
- לכל יחס $R \subseteq \mathbb{R}^m$ יש סימן יחס בשפה.

באופן זה, מתקיים שמבנה הממשיים עם כל הפונקציות הממשיות וכל היחסים הוא מבנה עבור L.

נסמן ב־T את קבוצת כל הנוסחאות שהן אמיתיות ב־$\mathbb{R}$ (כלומר, את התורה של הממשיים בשפה L).

כעת נוסיף לשפה קבוע חדש, c_∞, ונגדיר תורה חדשה:

$$T' = T \cup \{c_\infty \geq c_n \mid n \text{ טבעי, והקבוע } c_n \text{ מייצג את } n\}$$

נראה שלכל תת־קבוצה סופית $\Sigma \subseteq T'$ יש מודל.

תהא $\Sigma \subseteq T'$ סופית.

נשים לב כי Σ כוללת רק מספר סופי של אי־שוויונויות מהצורה $c_\infty \geq c_{n_1}, \ldots, c_\infty \geq c_{n_k}$ עבור מספרים טבעיים $n_1, \ldots, n_k$.

הממשיים $\mathbb{R}$ מהווים מודל של Σ אם נפרש את c_∞ כ־$r \in \mathbb{R}$ כך ש־$r > \max\{n_1, \ldots, n_k\}$.

לכן, לכל קבוצה סופית $\Sigma \subseteq T'$ יש מודל, ומקומפקטיות ($\Leftarrow$), נובע של-T' יש מודל.

10.2.2 שימוש 2

נוכיח את הטענה הבאה:

תהא Σ תורה, ונניח שלכל $m \in \mathbb{N}$ קיים מודל M עבור Σ שבו יש לפחות m איברים.
אזי,

קיימת ל־Σ מודל אינסופי.

הוכחה: נרצה להגדיר תורה T כך שיתקיימו התנאים הבאים:

1. $T \supseteq \Sigma$ — כלומר, כל מודל של T הוא מודל של Σ.
2. כל מודל של T הוא אינסופי.
3. קיימת מודל ל־T.

(תזכורת: תורה היא שפה L ואוסף נוסחאות Σ (בדרך כלל פסוקים) בשפה).

הגדרת T: נרחיב את שפת התורה L על ידי הוספת אינסוף קבועים חדשים: $c_1, c_2, \ldots$.

נגדיר את התורה:

$$T = \Sigma \cup \{c_i \neq c_j \mid i \neq j\}$$

נבדוק את התנאים:

1. תנאי (1) מתקיים מיידית, שכן T מכילה את כל נוסחאות Σ.
2. תנאי (2): בכל מודל של T פירושי הקבועים c_i מוכרחים להיות שונים, ולכן יש במודל לפחות אינסוף איברים — כלומר, כל מודל של T הוא אינסופי.
3. תנאי (3): נשתמש באקסיומת הקומפקטיות. מספיק להראות שלכל תת־קבוצה סופית $T' \subseteq T$ יש מודל.

   תהא $T' \subseteq T$ סופית.

   T' מכילה רק מספר סופי של קבועים מהצורה $c_1, \ldots, c_m$ ונוסחאות מהצורה $c_i \neq c_j$ עבור $i, j \leq m$.

   לפי ההנחה, קיים מודל M של Σ המכיל לפחות m איברים. נפרש את הקבועים $c_1, \ldots, c_m$ בתור m איברים שונים ב־M (אפשרי, כי M מספיק גדול).

   באופן זה, כל הנוסחאות $c_i \neq c_j$ מתקיימות במודל, וכמובן שגם נוסחאות Σ מתקיימות בו. לכן M הוא מודל של T'.

מכיוון שלכל קבוצה סופית $T' \subseteq T$ יש מודל, מקומפקטיות נובע של־T יש מודל. לפי תנאי (2), מודל זה אינסופי. לכן, גם ל־Σ יש מודל אינסופי.

11 משפט לֶוֶנְהַיְם־סקוֹלֶם

תהא Σ תורה מעל שפה L ונניח שיש ל-Σ מודל **אינסופי**.
אזי,

לכל עוצמה κ כך ש-$\kappa \geq |L|$, קיים ל-Σ מודל בעוצמה κ.

11.1 הוכחה

ההוכחה נובעת משתי הטענות הבאות:

11.1.1 טענה 1

תהא Σ תורה כך שקיים ל-Σ מודל אינסופי.
אזי לכל עוצמה κ קיים ל-Σ מודל שעוצמתו $\geq \kappa$.

הוכחת טענה 1: נרחיב את השפה L לשפה $L*$ ע"י שני השינויים הבאים:

- נוסיף קבוצה של קבועים אישיים חדשים $\{c_i\}_{i\in I}$ כאשר $|I| = \kappa$
- אם בשפה L אין סימן יחס = אז נוסיף אותו.

נרחיב את קבוצת הנוסחאות Σ ל-Σ^* ע"י הוספת כל הנוסחאות מהצורה $c_j = \neg c_i$ לכל $i, j \in I$ $i \neq j$.
(נכריח את הקבועים להיות שונים זה מזה).

נראה שלתת קבוצה סופית של Σ^* קיים מודל.

נקח את המודל שנתון לנו, ונוסיף פירושים לקבועים c_i המופיעים בנוסחאות בתת הקבוצה הסופית.

אז נקבל מודל לתת הקבוצה. ומקומפקטיות, קיים ל-Σ^* מודל.

יהא M^* מודל של Σ^*. נשים לב, שיש לפחות κ קבועים שונים ב-M^*. כלומר, $|M^*| \geq \kappa$.

11.1.2 טענה 2

תהא Σ תורה כך שקיים ל-Σ מודל אינסופי מעוצמה α.
אזי לכל עוצמה, $|L| \leq \kappa \leq \alpha$, קיים ל-$\Sigma$ מודל מעוצמה κ.

הוכחת טענה 2: הוכחה זו דורשת יותר עבודה. הרעיון פשוט: נמצא תת מודל מעוצמה κ בתוך המודל הגדול הנתון.

על מנת לעשות זאת באופן מסודר, עלינו תחילה להגדיר מושגים חיוניים.

תת מבנה

תהא שפה L ויהיו M, N שני מבנים עבור L. נאמר שN תת מבנה של M אם מתקיימים:

- $W^N \subset W^M$
- לכל קבוע אישי c, $c^N = c^M$
- לכל סימן פונקציה k-מקומית , ולכל $(a_1, ..., a_k) \in (W^N)^k$ מתקיים:

$$f^M(a_1, ..., a_k) = f^N(a_1, ..., a_k)$$

- לכל סימן יחס k-מקומי R, ולכל $(a_1, ..., a_k) \in (W^N)^k$ מתקיים:

$$(a_1, ..., a_k) \in R^N \iff (a_1, ..., a_k) \in R^M$$

נשים לב, שכל השמה S בN היא השמה בM.
עבור השמה S בN: כל הרחבה שלה S^* מקיימת $S^*_N = S^*_M$ (הוכחה באינדוקציה על עומק שם העצם).

תת מבנה = לקחת תת־קבוצה מהעולם של M, ולוודא שכל מה שצריך (פונקציות, יחסים) מתנהגים אותו הדבר.

תת מבנה אלמנטרי

תהא שפה L ויהיו M, N שני מבנים עבור L, כך שN תת מבנה של M.
נאמר כי N תת מבנה אלמנטרי אם לכל נוסחא α ב-L, ולכל השמה S ב-N, מתקיים:

$$M \models_S \alpha \iff N \models_S \alpha$$

תת־מבנה אלמנטרי = תת־מבנה שלא רק "נראה אותו דבר", אלא גם מאמין בדיוק באותן טענות כמו המבנה הגדול.

על מנת להוכיח את טענה 2, נרצה למצוא תת מבנה אלמנטרי של המבנה שנקבל מטענה 1 שעוצמתו κ.

נשתמש במשפט הבא:

> תהי L שפה, יהי M מבנה עבור L ויהי N תת מבנה של M.
> תנאי **הכרחי ומספיק** לכך שN יהיה תת מבנה **אלמנטרי** של M הוא:
>
> לכל נוסחא β בשפה L, לכל משתנה אישי x, ולכל השמה S עבור N:
>
> אם קיימת השמה S' עבור M המתלכדת עם S פרט אולי ל־x, כך ש־$M \models_{S'} \beta$,
>
> אז, קיימת השמה S'' עבור N המתלכדת עם S פרט אולי ל־x, כך ש־$M \models_{S''} \beta$.

הוכחה

הכרחיות

נניח שהתנאי אינו מתקיים: קיימת נוסחה β, משתנה אישי x, והשמה s עבור N, כך שמתקיים:

$$M \models_s (\exists x)\beta$$

אבל לא קיימת השמה s' עבור N המתלכדת עם s פרט אולי ל־x, שעבורה $M \models_{s'} \beta$.

לכן גם לא קיימת השמה כזו שעבורה:

$$N \models_{s'} \beta$$

ומכיוון שזה נכון לכל s' — נקבל:

$$N \not\models_s (\exists x)\beta$$

כלומר N לא מקיים את אותה נוסחה שקיים ב־M, ולכן N **אינו** תת־מבנה אלמנטרי של M. סתירה.

מספיקות

נרצה להראות שלכל נוסחה α ולכל השמה s, מתקיים:

$$M \models_s \alpha \quad \Leftrightarrow \quad N \models_s \alpha$$

ההוכחה באינדוקציה על עומק הנוסחא α: (נעבור על חלק מהקשרים)

- אם α היא נוסחה אטומית מהצורה $R(t_1, \dots, t_k)$:

$$M \models_s \alpha \Leftrightarrow (s^*(t_1), \dots, s^*(t_k)) \in R^M \Leftrightarrow (s^*(t_1), \dots, s^*(t_k)) \in R^N \Leftrightarrow N \models_s \alpha$$

- אם $\alpha = \neg\beta$ אז:

$$M \models_s \alpha \Leftrightarrow M \not\models_s \beta \Leftrightarrow N \not\models_s \beta \Leftrightarrow N \models_s \alpha$$

- אם $\alpha = (\forall x)\beta$ אז:

  לכל השמה s' עבור M המתלכדת עם s פרט אולי ל־x, מתקיים $M \models_{s'} \beta$.

  לפי ההנחה, קיימת השמה s'' עבור N המתלכדת עם s פרט אולי ל־x, כך ש: $N \models_{s''} \beta$

  ולכן: $N \models_s (\forall x)\beta = \alpha$

כעת, **נוכיח את טענה 2.**

מתחילים לבנות את התת־מודל שלנו בהדרגה — נתחיל מקבוצה קטנה ונרחיב אותה בזהירות.

הגדרת $\mathbf{W_i}$ נגדיר שרשרת איזוטונית של תת־קבוצות של W^M מהצורה:

$$W_0 \subseteq W_1 \subseteq \cdots \subseteq W_i \subseteq \cdots$$

ההגדרה של W_i תתבצע באינדוקציה על i.

ראשית, נגדיר את W_0 להיות תת־קבוצה כלשהי של W^M בגודל κ, המכילה את c^M לכל קבוע אישי c בשפה L. (זה אפשרי כיוון ש־$|L| \leq \kappa$, ולכן מספר הקבועים אינו עולה על κ, ומתקיים $|W^M| \leq \kappa$).

אם בחירת הקבועים אינה מספיקה למילוי עוצמה κ, נוכל להוסיף איברים מתוך W^M עד לעוצמה זו.

כעת, נניח ש־W_i כבר הוגדרה ונגדיר את W_{i+1}.

נתבונן בנוסחה β בשפה L, בעלת משתנים חופשיים $x, x_1, \ldots, x_k$.

אם קיימים $a_1, \ldots, a_k \in W_i$ ועבורם קיים $a \in W^M$ כך שעבור השמה s המקיימת:

$$s(x) = a, \quad s(x_j) = a_j \quad (1 \leq j \leq k)$$

מתקיים $M \models \beta$, אז נבחר את אותו a ונרשום:

$$h(\beta, x, a_1, \ldots, a_k)$$

נבצע זאת עבור כל $\beta, x, a_1, \ldots, a_k$ כך ש־$a_1, \ldots, a_k \in W_i$.

הרחבת $\mathbf{W_i}$

נגדיר:

$$W_{i+1} = W_i \cup \{f^M(a_1, \ldots, a_k)\} \cup \{h(\beta, x, a_1, \ldots, a_k)\}$$

החלק $\{f^M(a_1, \ldots, a_k)\}$ כולל ערכים של פונקציות k־מקומיות בשפה L עבור $a_1, \ldots, a_k \in W_i$.

החלק $\{h(\beta, x, a_1, \ldots, a_k)\}$ - β נוסחא עם משתנים חופשיים $x, x_1, \ldots, x_k$, ו- $a_1, \ldots, a_k \in W_i$ וקיים $a \in W^M$ כפי שתואר.

כעת נראה באינדוקציה על i כי $|W_i| = \kappa$ לכל i.

לפי הגדרת W_0 — מתקיים $|W_0| = \kappa$.

נניח שזה נכון עבור i ונראה שזה נכון עבור $i+1$.

מהנחת האינדוקציה, $|W_i| = \kappa$. לכן, מספר הסדרות הסופיות $a_1, \ldots, a_k$ מתוך W_i הוא לכל היותר κ (כי κ סדירה). מספר סימני הפונקציות והנוסחאות בשפה L הוא גם לכל היותר κ. ולכן מספר התוספות בשלב $i+1$ הוא κ לכל היותר, ולכן גם $|W_{i+1}| = \kappa$.

הגדרת המבנה N

נסמן:

$$W_\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} W_i$$

אזי $|W_\infty| = \kappa$, והוא סגור תחת כל הפונקציות של M, וגם כולל עדים מתאימים לכל נוסחה מהצורה "קיים x כך ש...". כלומר, הוא מקיים את התנאי שצריך בשביל שהתת־מבנה יהיה אלמנטרי.

נגדיר מבנה N כך שעולמו יהיה:

$$W^N = W_\infty$$

ולכל קבוע אישי c בשפה L:

$$c^N = c^M$$

פרשנות הפונקציות והיחסים של N תתקבל על ידי צמצום הפרשנות שלהם ב־M לתוך W^N.

לפי התנאי הכרחי ומספיק לאלמנטריות שהוכחנו, מתקיים ש־N **הוא תת־מבנה אלמנטרי של M בגודל** κ.

12 איזומורפיזם

12.1 הגדרה

יהיו N, M שני מבנים עבור שפה L. פונקציה $T : W^M \to W^N$ נקראת איזומורפיזם אם מתקיימים:

- T חח"ע ועל
- לכל קבוע אישי c בשפה L מתקיים: $T(c^M) = c^N$
- לכל סימן פונקציה k-מקומית f בשפה L, ולכל $a_1, ..., a_k \in W^M$,
$$T(f^M(a_1, ..., a_k)) = f^N(a_1, ..., a_k)$$
- לכל סימן יחס k-מקומי f בשפה L, ולכל $a_1, ..., a_k \in W^M$,
$$(a_1, ..., a_k) \in R^M \iff (T(a_1), ..., T(a_k)) \in R^N$$

13 תורה שלמה

תהי $\sum$ תורה בשפה L.

13.1 הגדרה

נאמר ש$\sum$ שלמה אם לכל פסוק α מתקיים $\sum \vdash \alpha$ או $\sum \vdash \neg\alpha$

13.2 טענה

$\sum$ שלמה $\iff$ לכל שני מודלים M_1, M_2 של $\sum$, ולכל פסוק α מתקיים: $M_2 \models \alpha \iff M_1 \models \alpha$

תזכורת מודל הוא מבנה עבור L כך שלכל $\alpha \in \Sigma$ מתקיים $M \models \alpha$.

13.3 משפט

תהי $\sum$ תורה בשפה L. נניח:

1. ל-$\sum$ אין מודלים עם עולם סופי.
2. קיימת עוצמה $\kappa \leq |L|$ כך ש$\sum$ היא κ-קטגורית. (קיים ל$\sum$ מודל עם κ $|W^M| = \kappa$).

אזי, $\sum$ שלמה.

הוכחה

נניח בשלילה ש$\sum$ אינה שלמה. יהא α פסוק ויהיו M_1, M_2 מודלים כך ש: $M_1 \models \alpha$ וגם $M_2 \not\models \alpha$.

ממסקנה בהרצאה, $M_2 \not\models \alpha \Rightarrow M_2 \models \neg\alpha$

נסמן:

$$\Sigma_1 = \Sigma \cup \{\alpha\}$$
$$\Sigma_2 = \Sigma \cup \{\neg\alpha\}$$

נשים לב, שΣ_i מהווה מודל לM_i.

מהנחה (1), לM_i יש עולם אינסופי. לכן κ מהנחה (2) חייבת להיות אינסופית ומתקיים $\kappa \leq |L|$.

ממשפט לונהיים סקולם, קיימים מודלים N_1, N_2 של Σ_1, Σ_2 מעוצמה κ.

נשים לב שN_1, N_2 הם מודלים של Σ. לכן מהיותה κ-קטגורית, העוצמה של העולם של N_1, N_2 שווה לκ.

כלומר, N_1, N_2 איזומורפיים - מספקים את אותם פסוקים. אך זו סתירה! ($N_1 \models \alpha, N_2 \not\models \alpha$).

14 גדירות

14.1 קבוצת מבנים גדירה

קבוצת מבנים M תקרא **גדירה**, אם קיימת תורה Σ כך ש:

$$M = mod(\Sigma)$$

כאשר $mod(\Sigma) = \{m \mid m \models \Sigma\} = \{\text{כל הנוסחאות ב}\Sigma\text{ אמיתיות לוגית ב-m}\}$

14.2 יחס גדיר

תהא L שפה ויהיה M מבנה עבור L.
נאמר שיחס n-מקומי $p \subseteq (W^M)^n$ הוא גדיר:
אם קיימת נוסחא $\alpha(x_1, ..., x_n)$ בעלת, n משתנים חופשיים $x_1, ..., x_n$ כך שלכל השמה S:

$$M \models_S \alpha \iff (S(x_1), ..., S(x_n)) \in p$$

דוגמא תהא L השפה של תורת השדות ונתבונן בM - השדה הממשי.
$p = \{\sqrt{2}\}$ גדיר. נגדיר אותו ע"י: $\alpha(x) : x \cdot x = 1 + 1 \ \wedge \ \exists y\,(y \cdot y = x)$

14.3 תרגיל

יהיו M_1 וM_2 קבוצות גדירות של מבנים מעל השפה L כך ש$M_1 \cap M_2 = \varnothing$.
הראו שקיים פסוק שאמיתי בM_1 ושקרי בM_2

פתרון נתון שM_1, M_2 גדירות. לכן נסמן:

$$M_1 = mod(\Sigma_1)$$

$$M_2 = mod(\Sigma_2)$$

נסתכל על $M_1 \cap M_2$:

$$\varnothing = M_1 \cap M_2 = mod(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$$

כלומר, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ בעלת סתירה.

יהא α כך ש$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \vdash \alpha, \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \vdash \neg\alpha$

15 משפט גדל

15.0.1 תורה רקורסיבית

תורה T תקרא **רקורסיבית** אם: יש אלגוריתם שיכול לקבוע לכל φ האם $\varphi \in T$.

15.0.2 תורת המספרים

שפת תורת המספרים:

$$L_{PA} = \{0, +, \cdot, <, =, S\}$$

[1]

המודל הסטנדרטי לשפה הוא $\mathbb{N}$. הכל מתפרש כרגיל ובנוסף, $S^{\mathbb{N}}(n) = n + 1$.

נסמן לכל $k \in \mathbb{N}$, $S^k(0) = [k]$

15.1 משפט אי השלמות של גדל

תהא T תורה רקורסיבית בL_{AP}, כך ש$\mathbb{N}$ הוא מודל עבורה. אזי, T לא שלמה.
כלומר, יש φ בשפה, כך ש-$\not\vdash \varphi$ וגם $\not\vdash \neg\varphi$

מסקנה לאור משפט השלמות: יש מודל אחר ל-T, נסמנו $\hat{\mathbb{N}}$, שבו φ לא נכון, ומודל $\hat{\hat{\mathbb{N}}}$ שבו φ כן נכון.

15.1.1 מסקנה

$\{\varphi \mid \mathbb{N} \models \varphi\}$ היא לא רקורסיבית

למה? אם הייתה דרך אלגוריתמית לדעת האם נוסחה כלשהי נכונה ב־$\mathbb{N}$, אז היינו יכולים לבנות תורה שכוללת רק את כל האמיתות — תורה כזו הייתה גם נכונה, גם שלמה וגם רקורסיבית.

אבל משפט גדל אומר שזה בלתי אפשרי: כל תורה רקורסיבית שנכונה לגבי $\mathbb{N}$ חייבת להיות לא שלמה.

לכן, בלתי אפשרי להכריע באלגוריתם אילו נוסחאות נכונות ב־$\mathbb{N}$. כלומר, הקבוצה הזו לא רקורסיבית.

[1] S היא פונקציה חד מקומית

15.1.2 הכנות להוכחה

1. **הקידוד של גדל:**

לכל סמל בשפה נתאים מספר טבעי (תחת ההנחה שיש מספר בן מנייה של סמלים) ונסמן את הקידוד ב-$|\sigma|$.

ואז לכל נוסחא, $\varphi = \sigma_1 ... \sigma_n$, נתאים את המספר $2^{|\sigma_1|} ... P_n^{|\sigma_n|}$ כך שP_n הוא הראשוני ה-n. נשים לב, הקידוד הוא חח"ע.

ולבסוף, לכל הוכחה, שהיא סדרת פסוקים $\varphi_1 ... \varphi_n$, נגדיר $|\psi| = 2^{|\varphi_1|} ... P_n^{|\varphi_n|}$.

2. **הלמה של גדל** (לא נוכיח)

תהא T תורה כמו במשפט. אזי, יש נוסחא $B = B(x,y,z)$ כך שx,y,z חופשיים, המקיימת:

לכל $k,l,m \in \mathbb{N}$ מתקיים $\mathbb{N} \models B([k],[l],[m]) \iff$

(א) k הוא הקידוד של נוסחא $f(y)$, כאשר y חופשי.

(ב) m הוא הקידוד של ההוכחה של הפסוק $f([l])$ מתוך T.

15.1.3 הוכחת משפט האי שלמות

שלב א: נמצא פסוק φ כך ש-

$$N \models \varphi \iff T \nvdash \varphi$$

בהנתן שמצאנו, סיימנו.

לא ייתכן $T \vdash \varphi$, כי אז מנאותות, $T \models \varphi$ ובפרט, $\mathbb{N} \models \varphi \Leftarrow T \nvdash \varphi$.

באותו אופן, לא ייתכן $T \vdash \neg\varphi$ כי אז $T \models \neg\varphi \Leftarrow \mathbb{N} \models \neg\varphi \Leftarrow \mathbb{N} \not\models \varphi \Leftarrow T \vdash \varphi \Leftarrow \mathbb{N}$.

שלב ב: נביט ב-

$$f(y) = \forall x \ \neg B(y,y,x)$$

זו נוסחה עם משתנה חופשי יחיד y, שמתארת: "אין x שהוא קידוד של הוכחה של y מתוך y".

יהא k הקידוד של $f(y)$. נגדיר

$$\varphi = f([k]) = \forall x \ \neg B([k],[k],x)$$

כלומר, φ אומר: "אין x שהוא קידוד של הוכחה של φ מתוך עצמה".

טענה: φ מקיים את תנאי (א) מהלמה של גדל.

הוכחה: $\mathbb{N} \models \varphi \iff$ לכל $m \in \mathbb{N}$, $\neg B([k],[k],[m])$

ולפי הגדרת B, מכיוון ש-k הוא הקידוד של $f(y)$ מתקיים:

$\neg B([k],[k],[m])$ לכל $m \iff m$ לא מקודד הוכחה ל$\varphi = f([k])$.

כלומר,

$$T \nvdash \varphi \iff \mathbb{N} \models \varphi$$

15.2 משפט פוסט על שלמות פונקציונלית

מערכת של פונקציות בוליאניות תיקרא **שלמה פונקציונלית** אם ניתן לבטא באמצעותה כל פונקציה בוליאנית אפשרית.

מערכת של פונקציות בוליאניות **אינה** שלמה פונקציונלית אם ורק אם היא סגורה תחת אחת או יותר מהמחלקות הבאות:

1. **שומרת על 0** — כל פונקציה f מקיימת: $f(0,0,\ldots,0)=0$
2. **שומרת על 1** — כל פונקציה f מקיימת: $f(1,1,\ldots,1)=1$
3. **מונוטונית** — אם $x_i \leq y_i$ לכל i, אז $f(x_1,\ldots,x_n) \leq f(y_1,\ldots,y_n)$
4. **ליניארית** — הפונקציה ניתנת לביטוי באמצעות XOR בלבד (ללא "וגם" "או"), כלומר:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \cdots \oplus a_nx_n \quad \text{עבור } a_i \in \{0,1\}$$

5. **שומרת נֶגֶד (Self-dual)** — מתקיים:

$$f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) = \overline{f(x_1,\ldots,x_n)}$$

מערכת פונקציות בוליאניות היא **שלמה פונקציונלית** אם ורק אם היא <u>אינה סגורה</u> תחת אף אחת מהתכונות שלעיל.

דוגמה

המערכת $\{\neg,\vee\}$ (שלילה ו־OR) היא שלמה:

- אינה שומרת על 0 — לדוגמה: $\neg 0 = 1$
- אינה מונוטונית — שלילה הופכת סדר
- אינה ליניארית — OR לא ניתן לבטא עם XOR בלבד

לעומת זאת, המערכת $\{\oplus\}$ (XOR בלבד) **אינה** שלמה — כי היא ליניארית.