משוואות דיפרנציאליות רגילות - 1040285

גלית לבדב

12 בנובמבר 2025

תוכן עניינים

1 הרצאה 1

1.1 הגדרות בסיסיות

1.1.1 מה זה מד"ר בכלל???

משוואה דיפרנציאלית רגילה

משוואה שמערבת פונקציה ונגזרות שלה.

$$F((t, y(t), ..., y^n(t)) = 0$$

1.1.2 מד"ר מסדר n

$$y^n = f(t, ..., y^{n-1})$$

1.1.3 מד"ר לינארית

$$a_0 + a_1(t) \cdot y(t) + ... + a_n(t) \cdot y^n(t) = b(t)$$

אם $b(t) = 0$ המשוואה נקראת **הומוגנית**.

1.1.4 משוואה אוטונומית מסדר ראשון

$$y'(t) = f\left(y(t)\right)$$

1.2 מערכת משוואות דיפרנציאליות

1.2.1 הגדרה כללית

שתי משוואות בשתי פונקציות:

$$F_1(y_1^n, y_2^n, ..., y_1, y_2) = 0$$
$$F_2(y_1^n, y_2^n, ..., y_1, y_2) = 0$$

בדרך כלל נשתמש בצורה הבאה:

1.2.2 הצורה הנפוצה יותר

$$F_1(t, y_1, y_2) = 0$$
$$F_2(t, y_1, y_2) = 0$$

לפעמים יהיו k משוואות בk פונקציות.

1.2.3 פתרון מד"ר

נפתור את המשוואה $y'(t) = y(t)$. ראשית, נניח כי $y(t) = 0$. כעת ניתן לחלק ב$y(t)$.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$$

אם y תמיד חיובית: נשים לב שזו נגזרת מוכרת.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = (\log(y(t)))' = 1$$

נבצע אינטגרל לשני האגפים,

$$\log(y(t)) = t + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

נעלה לחזקת e, ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = e^t \cdot e^c \quad , c \in \mathbb{R}$$

אם y תמיד שלילית: נעשה את אותו דבר אבל על $\log(-y(t))$ ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = -e^t \cdot e^c \quad , c \in \mathbb{R}$$

לסיכום, אוסף הפתרונות הוא:

$$y(t) = e^t \cdot C \quad , C := e^c \quad , c \in \mathbb{R}$$

נבדוק שזה פתרון:

$$y'(t) = e^t \cdot C = y(t)$$

נראה שאין עוד פתרונות: נשתמש בפונקציית עזר:

$$g(t) = \frac{y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = \frac{y'(t)e^t - y(t)e^t}{(e^t)^2} = \frac{y'(t) - y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = 0 \iff g\ \text{קבועה} \iff y(t) = c \cdot e^t$$

1.2.4 הערות על מד"ר אוטונומיות

1. אם y_0 פתרון של $y'(t) = f(y(t))$ אז גם $y_c(t) = y_0(t+c)$ פתרון לכל בחירה של c

2 הרצאה 2

2.1 דוגמאות למד"רים

2.1.1 גידול אוכלוסיה

$N(t)$ - גודל האוכלוסייה בזמן t, K - קבוע שתלוי באוכלוסייה.

$$N'(t) = K \cdot N(t)$$

באופן דומה לפתרון המד"ר שראינו בהרצאה 1,

$$N(t) = e^{kt} \cdot C'$$

נסמן כתנאי התחלה את $N(0)$, כלומר - הגודל ההתחלתי של האוכלוסיה

$$N(0) = C$$

לכן ניתן לכתוב,

$$N(t) = e^{k \cdot t} \cdot N(0)$$

2.1.2 התפרקות רדיואקטיבית

נסמן ב-$N(t)$ את מספר החלקיקים באיזשהו חומר רדיואקטיבי.

המד"ר שלנו יהיה

$$N'(t) = -K \cdot N(t)$$

ואז נקבל (שוב, באופן דומה להרצאה 1)

$$N(t) = e^{-k \cdot t} \cdot N(0)$$

2.1.3 המשוואה הלוגיסטית

מידול לגודל האוכלוסיה עם משאבים מוגבלים.

כלומר, אם האוכלוסיה לא יכולה לעבור סף C. (כלומר - $N(0) < C$).

המשוואה תהיה

$$N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{C}\right) = K \cdot N(t) - \frac{K}{C} \cdot N(t)^2$$

2.2 דוגמאות למערכות של משוואות

2.2.1 מודל טורף-נטרף (Lotka-Voltera)

נסמן:

- $x(t)$: כמות הנטרפים (צמחוניים/ארנבות).
- $y(t)$: כמות הטורפים (אריות).

המערכת:

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), \qquad a>0,\ b>0 \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t), \qquad c>0,\ d>0 \end{aligned}$$

2 דוגמאות לפתרון:

1.
$$\begin{aligned} y &\equiv 0 \\ x(t) &= x(0)e^{at} \end{aligned}$$

2.
$$x \equiv 0$$
$$x(t) = y(0)e^{-ct}$$

2.2.2 מודל SIR

נחלק את כלל האוכלוסיה ל-3 סוגים:

1. $S(t)$Susceptible- "רגישים"
2. $I(t)$Infected- "נדבק - כרגע חולה"
3. $R(t)$Recovered- "מחלימים"

עבור קבועים $\beta > 0, \quad \gamma > 0$ נקבל:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\ I'(t) &= \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \\ R'(t) &= \gamma \cdot I(t) \end{aligned}$$

(*) - זו מערכת אוטונומית מסדר ראשון אך אינה לינארית.

בדיקת שפיות למערכת:

נשים לב שסך האוכלוסיה = $S + I + R$

אוכלוסייה בזמן 0 = $(S+I+R)(0)$ ואז:

$$(S+I+R)'(t) = S' + I' + R' = 0$$

כלומר קבוע לאורך כל הזמן.

2.2.3 דוגמא מפיזיקה :(

חוק שני של ניוטון - $F = m \cdot a$

$x(t)$ - מיקום של חלקיק גוף בזמן t.

$x''(t)$ - תאוצה של חלקיק גוף בזמן t.

m - מסה של הגוף.

$$x''(t) \cdot m = f(x(t), x'(t), ...)$$

3 הרצאה 3

3.1 פתרון משוואה לינארית מסדר ראשון

3.1.1 הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = 0$$

תמיד קיים פתרון האפס - "הפתרון הטריוויאלי". נרצה למצוא את שאר הפתרונות.

נניח ש-$y \neq 0$,

$$\frac{y'}{y} = -p$$

מההנחה שלנו, והנחה נוספת ש-y פונקציה רציפה: y תמיד חיובית או תמיד שלילית.

בהתאם, הפתרון יהיה:

$$(\ln(|y|))' = (\ln(\pm y))' = -p$$

נניח למשל ש-y חיובית ממש.

הפונקציות הקדומות של $p(x)$ הן מהצורה: $C - \int_a^x p(t)dt$. (המשפט היסודי).

לכן,

$$\ln|y| = C - \int_a^x p(t)dt, \quad C \text{ שרירותי}, \ a \text{ קבוע}$$

נפעיל אקספוננט,

$$|y(x)| = e^C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

שקול ל-

$$\forall x, \quad y(x) = D \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}, \ D := e^C, \quad D > 0$$

מצאנו פונקציות מועמדות לפתרון. נראה:

1. הן אכן פתרונות:

   עבור קבוצת הפתרונות שמצאנו,

   $$y(x) = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

   נגזור: $y' = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x))$

   ונקבל: $y' + p \cdot y = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x)) + (D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}) \cdot (p(x)) = 0$.

   כלומר - הקבוצה מקיימת את המשוואה המקורית.

2. אלו כל הפתרונות: ניקח פתרון כלשהו, y.

   נגדיר פונקציית עזר:

   $$g(x) := \frac{y(x)}{e^{-\int_a^x p(t)dt}}$$

נגזור:

$$g' = y' \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p$$

נציב $y' = -p \cdot y$ ונקבל:

$$(-p \cdot y) \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p = 0$$

ולכן,

$$g' = 0 \iff g \text{ קבועה} \iff g = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

לסיכום,

$$y(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

מה אם נוסיף תנאי התחלה?

$$y(x_0) = y_0$$

נציב $a = x_0,\ C = y_0$ ונקבל:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

זהו **הפתרון היחיד לבעיית הערך ההתחלתי** הזו.

3.1.2 לא הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = q(x)$$

נניח שקיים פתרון ונכפול את 2 האגפים בפונקציה μ (**גזירה** ואף פעם **לא מתאפסת**).

$$\mu \cdot y' + \mu \cdot p \cdot y = \mu \cdot q \tag{1}$$

היה לנו שימושי אם "במקרה" אגף שמאל הוא בדיוק $(\mu \cdot y)'$. נרצה לבחור μ שתקיים את זה.

ננסה להבין כיצד לבחור את μ הזו.

מכלל המכפלה:

$$(\mu \cdot y)' = \mu' \cdot y + \mu \cdot y'$$

לכן, בהתבסס על המשוואה המקורית (1) - נרצה: $\mu' \cdot y = \mu \cdot p \cdot y$.

כלומר, באופן שקול, נרצה לדרוש: $\mu' = \mu \cdot p$.

וע"י העברת אגפים,

$$\mu' - \mu \cdot p = 0$$

רגע, זו משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון! לכן, ניקח:

$$\mu(x) = e^{-\int_a^x -p(t)dt} = e^{\int_a^x p(t)dt}$$

אחרי שבחרנו את μ, נחזור לפתרון המד"ר שלנו:

כאמור, בחרנו את μ כך שמתקיים:

$$(\mu \cdot y)' = \mu \cdot q$$

נעשה אינטגרל על שני הצדדים,

$$\mu \cdot y = \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + C$$

נחלק ב-μ,

$$y(x) = \frac{1}{\mu} \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + \frac{C}{\mu}$$

כאשר $\mu(x) = e^{\int_a^x p(t)dt}$.

מצאנו פתרון **כללי** למשוואה לינארית לא-הומוגנית.

בדיקת שפיות

1. להציג את הפתרון הכללי ולוודא שהוא פתרון.
2. מה אם $q = 0$? כל הפתרונות נתונים ע"י $\frac{C}{\mu} = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$. שזה אכן הפתרון שיצא לנו עבור מערכת הומוגנית.
3. נניח שy_1, y_2 פותרים את המד"ר.
נסתכל על ההפרש: $\Delta = y_1 - y_2$.

$$\Delta' + p\Delta = y_1' + py_1 - y_2' + py_2 = 0$$

כלומר, הפרש פתרונות של מד"ר לא הומוגני הוא פתרון של מד"ר הומוגני.

אפשר לנסות למצוא פתרונות ל-$y' + py = q$ ע"י הצבת $C(x)$. כלומר, לפתור משוואה ב-$C(x)$. (נציב C שרירותי, ואז נמצא אותו במדויק).

נציב $y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$ במשוואה הלא הומוגנית:

$$y' + py = C' \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} + C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p) + p \cdot C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} = q$$

$$\Rightarrow C' \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} = q$$

נכפיל את שני האגפים ב-$e^{\int_a^x p(t)dt}$:

$$C' = q \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}$$

זו משוואה שקולה (במשתנה חדש $C(x)$).

מהמשפט היסודי נקבל:

$$C(x) = \int_a^x q(t) e^{\int_a^x p(t)dt} dt + D \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

3.1.3 דוגמא 1 - הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x$$

כלומר $p(x) = \sin(x)$ ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C \cdot e^{-\int_a^x -\sin(t)dt} = C \cdot e^{-\cos x + \cos a} = D \cdot e^{-\cos x}$$

(C יכול לקבל כל ערך, לכן גם $D := C \cdot e^{\cos a}$ יכול לקבל כל ערך).

3.1.4 דוגמא 2 - לא הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x + \cos x$$

פתרון כללי יהיה:

$$y = D \cdot e^{-\cos x} + \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} e^{\cos t} \cos(t)dt}{e^{\cos x}}$$

4 הרצאה 4

4.1 משוואות ניתנות להפרדה

הגדרה

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

4.1.1 מקרה פרטי $g = 1$

נניח ש-y פתרון, כך ש-$h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב$h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = 1$$

נשים לב שאם $H(t)$ זו פונקציה קדומה של $\frac{1}{h(t)}$,

$$(H(y))' = \frac{y'}{h(y)}$$

לכן המשוואה שקולה למשוואה

$$(H(y))' = 1 \Rightarrow H(y(t)) = C + t$$

איך נמצא את y? קיימת ל-H הופכית בתחום שאנו עובדים בו בגלל שהיא מוגדרת כך

$$H(t) = \int_{x_0}^{t} \frac{1}{h(x)} dx + \text{קבוע}$$

נשים לב, שלפי ההנחה שלנו - h לא מתאפסת. בפרט $\frac{1}{h}$ בעלת סימן קבוע - חח"ע. לכן גם H חח"ע.

לכן, כדי למצוא את y, נרצה להפעיל את $H^{-1}(t)$ על שני האגפים.

$$\forall C, \quad y(t) = H^{-1}(C + t)$$

4.1.2 מקרה כללי

נמשיך עם ההנחה $h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב-$h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

ניקח

H קדומה של $\dfrac{1}{h}$

G קדומה של g

ונקבל,

$$(H(y))' = G' \Rightarrow H(y) = G$$

נפעיל H^{-1} על שני האגפים,

$$\forall C \in \mathbb{R}, \quad y(t) = H^{-1}(G(t)) + C$$

אלו כל הפתרונות כך ש-$h(y) \neq 0$ בתחום.

בדיקת שפיות אפשר להשלים (אין לי כוח), אין צורך בבדיקת שפיות אם כל הצעדים בהוכחה הם אמ"מ.

4.1.3 בעיית תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה

נוסיף תנאי התחלה לבעיה,

$$\begin{cases} y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור את זה כאשר מניחים שוב ש-$h(y) \neq 0$ בתחום.

נחלק את שני האגפים ב-$h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

נעשה אינטגרל בקטע $[x_0, x]$,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'}{h(y)} dt = \int_{x_0}^{x} g(t) dt$$

נעשה החלפת משתנים $y(t) = v$

$$\Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dv}{h(v)} = \int_{x_0}^{x} g(t) dt$$

ניקח G קדומה של $g \quad ,H$ קדומה של $\frac{1}{h}$, ונקבל:

$$G'(x) - G'(x_0) = H(y(x)) - H(y(x_0))$$

נחסר $H(y(x_0))$ משני האגפים,

$$H(y(x)) = G'(x) - G'(x_0) + H(y(x_0))$$

נרכיב את H^{-1},

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y(x_0)$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל,

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y_0$$