

משוואות דיפרנציאליות רגילות

חורף - תשפ"ו

גלית לבדב

תוכן עניינים

5	1 הרצאה 1
5	1.1 הגדרות בסיסיות
5	1.1.1 מה זה מד"ר בכלל???
5	1.1.2 מד"ר מסדר n
5	1.1.3 מד"ר לינארית
5	1.1.4 משוואה אוטונומית מסדר ראשון
6	1.2 מערכת משוואות דיפרנציאליות
6	1.2.1 הגדרה כללית
6	1.2.2 הצורה הנפוצה יותר
6	1.2.3 פתרון מד"ר
7	1.2.4 הערות על מד"ר אוטונומיות
8	2 הרצאה 2
8	2.1 דוגמאות למד"רים
8	2.1.1 גידול אוכלוסיה
8	2.1.2 התפרקות רדיואקטיבית
8	2.1.3 המשוואה הלוגיסטית
9	2.2 דוגמאות למערכות של משוואות
9	2.2.1 מודל SIR
9	2.2.2 מודל טורף-נטרף (Lotka-Volterra)
10	2.2.3 דוגמא מפיזיקה:)
11	3 הרצאה 3
11	3.1 פתרון משוואה לינארית מסדר ראשון
11	3.1.1 הומוגנית
12	3.1.2 לא הומוגנית
14	3.2 דוגמאות לשימוש בפתרון הכללי
14	3.2.1 דוגמא 1 - הומוגנית
14	3.2.2 דוגמא 2 - לא הומוגנית
15	4 הרצאה 4
15	4.1 משוואות ניתנות להפרדה
15	4.1.1 מקרה פרטי $g = 1$
16	4.1.2 מקרה כללי

16	4.1.3	בעיית תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה
18	5	הרצאה 5
18	5.1	דוגמא למד"ר ניתנת להפרדה - פתרון המשוואה הלוגיסטית
19	5.1.1	הערה כללית
20	5.2	שיטה לפתירת מד"ר מסדר ראשון - החלפת משתנים
21	6	הרצאה 6
21	6.1	משפט הקיום והיחידות - פיקרד לינדלוף
21	6.1.1	הוכחה
22	6.1.2	הלמה של גרנוול
26	7	הרצאה 7
26	7.1	דוגמא לשימוש במשפט
27	8	הרצאה 8
27	8.1	עקרון היחידות
27	8.1.1	דוגמא - משוואה לוגיסטית
28	8.2	עקרון ההמשכה
29	8.3	פתרון גלובלי
29	8.4	דוגמאות מתי משפט הקיום והיחידות לא עובד
30	8.4.1	עקרון ההדבקה
31	9	הרצאה 9
31	9.1	המשך דוגמאות
31	9.1.1	אין ליפשיציות, אין יחידות בסביבה
31	9.1.2	אין ליפשיציות, כן יש יחידות בסביבה
32	9.1.3	דוגמא לשימוש במשפט הפתרון הגלובלי
33	10	הרצאה 10
33	10.1	חקירה איכותית של מד"ר
33	10.1.1	משפט
34	10.2	משפט משלים
36	10.3	גדרות
36	10.3.1	משפט הגדר
37	10.3.2	מסקנה - משפט המשפך
37	10.4	דוגמאות
38	11	הרצאה 11
38	11.1	כמה השלמות על משוואות אוטונומיות
38	11.1.1	טענה
38	11.1.2	טענה

39	11.1.3	שכלול למשפט הגדר
39	11.2	אינטואיציה למשפט ומשפט הפוך
40	11.3	משפט המשפט ההפוך
42	12	הרצאה 12
42	12.1	משוואה לינארית מסדר n
42	12.1.1	משפט קיום ויחידות גלובלי למשוואה לינארית מסדר n
43	12.1.2	מסקנה ממשפט קיום ויחידות
44	12.1.3	טענה - ורונסקיאן מתאפס עבור פונקציות ת"ל
44	12.1.4	משפט - פתרונות בת"ל לא מאפסות ורונסקיאן
45	13	הרצאה 13
45	13.1	מסקנה - ורונסקיאן מתאפס אז ורונסקיאן שווה זהותית ל-0
45	13.2	דוגמאות, תרגילים ומשפטים
45	13.2.1	מציאת פתרונות בת"ל - $y'' + y = 0$
45	13.2.2	פתרונות מתאפסים בנקודה, תלויים לינארית - $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$
46	13.2.3	אם פתרון מתאפס בשני נקודות, פתרון בת"ל אחר מתאפס ביניהן - $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$
46	13.2.4	פתרון למד"ר לינארי הומוגני מסדר n מתאפס אינסוף פעמים, שווה זהותית ל-0
47	14	הרצאה 14 - 15/12
47	14.1	משפט ההפרדה של שטרום
48	14.2	נוסחת אבל
50	14.3	הורדת סדר
53	15	הרצאה 15 - 16/12
53	15.1	מד"ר לינארי הומוגני עם מקדמים קבועים
55	16	הרצאה 16 - 22/12
55	16.1	משפט מסכם
57	16.1.1	תרגילים

1 הרצאה 1

1.1 הגדרות בסיסיות

1.1.1 מה זה מד"ר בכלל???

משוואה דיפרנציאלית רגילה

משוואה שמערבת פונקציה ונגזרות שלה.

$$F(t, y(t), \dots, y^n(t)) = 0$$

1.1.2 מד"ר מסדר n

$$y^n = f(t, \dots, y^{n-1})$$

1.1.3 מד"ר לינארית

$$a_0 + a_1(t) \cdot y(t) + \dots + a_n(t) \cdot y^n(t) = b(t)$$

אם $b(t) = 0$ המשוואה נקראת הומוגנית.

1.1.4 משוואה אוטונומית מסדר ראשון

$$y'(t) = f(y(t))$$

1.2 מערכת משוואות דיפרנציאליות

1.2.1 הגדרה כללית

שתי משוואות בשתי פונקציות:

$$F_1(y_1^n, y_2^n, \dots, y_1, y_2) = 0$$

$$F_2(y_1^n, y_2^n, \dots, y_1, y_2) = 0$$

בדרך כלל נשתמש בצורה הבאה:

1.2.2 הצורה הנפוצה יותר

$$F_1(t, y_1, y_2) = 0$$

$$F_2(t, y_1, y_2) = 0$$

הערה: לפעמים יהיו k משוואות ב- k פונקציות.

1.2.3 פתרון מד"ר

נפתור את המשוואה $y'(t) = y(t)$. ראשית, נניח כי $y(t) = 0$. כעת ניתן לחלק ב- $y(t)$.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$$

אם y תמיד חיובית: נשים לב שזו נגזרת מוכרת.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = (\log(y(t)))' = 1$$

נבצע אינטגרל לשני האגפים,

$$\log(y(t)) = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

נעלה לחזקת e , ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = e^t \cdot e^c, \quad c \in \mathbb{R}$$

אם y תמיד שלילית: נעשה את אותו דבר אבל על $\log(-y(t))$ ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = -e^t \cdot e^c, \quad c \in \mathbb{R}$$

לסיכום, אוסף הפתרונות הוא:

$$y(t) = e^t \cdot C, \quad C := e^c, \quad c \in \mathbb{R}$$

נבדוק שזה פתרון:

$$y'(t) = e^t \cdot C = y(t)$$

נראה שאין עוד פתרונות: נשתמש בפונקציית עזר:

$$g(t) = \frac{y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = \frac{y'(t)e^t - y(t)e^t}{(e^t)^2} = \frac{y'(t) - y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = 0 \iff g \text{ קבועה} \iff y(t) = c \cdot e^t$$

1.2.4 הערות על מד"ר אוטונומיות

1. אם y_0 פתרון של $y'(t) = f(y(t))$ אז גם $y_c(t) = y_0(t + c)$ פתרון לכל בחירה של c .

2 הרצאה 2

2.1 דוגמאות למד"רים

2.1.1 גידול אוכלוסיה

$N(t)$ - גודל האוכלוסייה בזמן t , K - קבוע שתלוי באוכלוסייה.

$$N'(t) = K \cdot N(t)$$

באופן דומה לפתרון המד"ר שראינו בהרצאה 1,

$$N(t) = e^{kt} \cdot C'$$

נסמן כתנאי התחלה את $N(0)$, כלומר - הגודל ההתחלתי של האוכלוסיה

$$N(0) = C$$

לכן ניתן לכתוב,

$$N(t) = e^{k \cdot t} \cdot N(0)$$

2.1.2 התפרקות רדיואקטיבית

נסמן ב- $N(t)$ את מספר החלקיקים באיזושהו חומר רדיואקטיבי.

המד"ר שלנו יהיה

$$N'(t) = -K \cdot N(t)$$

ואז נקבל (שוב, באופן דומה להרצאה 1)

$$N(t) = e^{-k \cdot t} \cdot N(0)$$

2.1.3 המשוואה הלוגיסטית

מידול לגודל האוכלוסיה עם משאבים מוגבלים.

כלומר, אם האוכלוסיה לא יכולה לעבור סף C . (כלומר - $N(0) < C$).

המשוואה תהיה

$$N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{C}\right) = K \cdot N(t) - \frac{K}{C} \cdot N(t)^2$$

2.2 דוגמאות למערכות של משוואות

2.2.1 מודל SIR

נחלק את כלל האוכלוסיה ל-3 סוגים:

1. $S(t)$ - Susceptible "רגישים"

2. $I(t)$ - Infected "נדבק - כרגע חולה"

3. $R(t)$ - Recovered "מחלימים"

עבור קבועים $\beta > 0$, $\gamma > 0$ נקבל:

$$\begin{aligned}S'(t) &= -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\I'(t) &= \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \\R'(t) &= \gamma \cdot I(t)\end{aligned}$$

(*) - זו מערכת אוטונומית מסדר ראשון אך אינה לינארית.

בדיקת שפיות למערכת:

נשים לב שסך האוכלוסיה $S + I + R =$

אוכלוסייה בזמן $(S + I + R)(0) = 0$ ואז:

$$(S + I + R)'(t) = S' + I' + R' = 0$$

כלומר קבוע לאורך כל הזמן.

2.2.2 מודל טורף-נטרף (Lotka-Volterra)

נסמן:

$x(t)$: כמות הנטרפים (צמחוניים/ארנבות). □

$y(t)$: כמות הטורפים (אריות). □

המערכת:

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), & a > 0, b > 0 \\y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t), & c > 0, d > 0\end{aligned}$$

דוגמא לפתרון:

$$\begin{cases} y \equiv 0 \\ x(t) = x(0)e^{at} \end{cases}$$

2.2.3 דוגמא מפיזיקה :)

חוק שני של ניוטון - $F = m \cdot a$

$x(t)$ - מיקום של חלקיק גוף בזמן t .

$x''(t)$ - תאוצה של חלקיק גוף בזמן t .

m - מסה של הגוף.

$$x''(t) \cdot m = f(x(t), x'(t), \dots)$$

3 הרצאה 3

3.1 פתרון משוואה לינארית מסדר ראשון

3.1.1 הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = 0$$

תמיד קיים פתרון האפס - "הפתרון הטריטוריאלי". נרצה למצוא את שאר הפתרונות. נניח $y \neq 0$,

$$\frac{y'}{y} = -p$$

מההנחה שלנו, והנחה נוספת ש- y פונקציה רציפה: y תמיד חיובית או תמיד שלילית. בהתאם, הפתרון יהיה:

$$(\ln(|y|))' = (\ln(\pm y))' = -p$$

נניח למשל ש- y חיובית ממש.

הפונקציות הקדומות של $p(x)$ הן מהצורה: $C - \int_a^x p(t)dt$. (המשפט היסודי). לכן,

$$\ln |y| = C - \int_a^x p(t)dt$$

נפעיל אקספוננט,

$$|y(x)| = e^C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

שקול ל-

$$\forall x, \quad y(x) = D \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}, \quad D := e^C, \quad D > 0$$

מצאנו פונקציות מועמדות לפתרון. נראה:

1. הן אכן פתרונות:

עבור קבוצת הפתרונות שמצאנו,

$$y(x) = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

$$y' = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x))$$

$$\text{ונקבל: } y' + p \cdot y = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x)) + (D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}) \cdot (p(x)) = 0$$

כלומר - הקבוצה מקיימת את המשוואה המקורית.

2. אלו כל הפתרונות: ניקח פתרון כלשהו, y .

נגדיר פונקציית עזר:

$$g(x) := \frac{y(x)}{e^{-\int_a^x p(t)dt}}$$

נגזור:

$$g' = y' \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p$$

נציב $y' = -p \cdot y$ ונקבל:

$$(-p \cdot y) \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p = 0$$

ולכן,

$$g = C, \quad C \in \mathbb{R} \iff g \text{ קבועה} \iff g' = 0$$

לסיכום,

$$y(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

מה אם נוסיף תנאי התחלה?

$$y(x_0) = y_0$$

נציב $a = x_0, C = y_0$ ונקבל:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

זהו הפתרון היחיד לבעיית הערך ההתחלתי הזו.

3.1.2 לא הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = q(x)$$

נניח שקיים פתרון ונכפול את 2 האגפים בפונקציה μ (גזירה ואף פעם לא מתאפסת).

$$\mu \cdot y' + \mu \cdot p \cdot y = \mu \cdot q \quad (1)$$

היה לנו שימושי אם "במקרה" אגף שמאל הוא בדיוק $(\mu \cdot y)'$. נרצה לבחור μ שתקיים את זה.

ננסה להבין כיצד לבחור את μ הזו.

מכלל המכפלה:

$$(\mu \cdot y)' = \mu' \cdot y + \mu \cdot y'$$

לכן, בהתבסס על המשוואה המקורית (1) - נרצה: $\mu' \cdot y = \mu \cdot p \cdot y$.

כלומר, באופן שקול, נרצה לדרוש: $\mu' = \mu \cdot p$.

וע"י העברת אגפים,

$$\mu' - \mu \cdot p = 0$$

רגע, זו משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון! לכן, ניקח:

$$\mu(x) = e^{-\int_a^x -p(t)dt} = e^{\int_a^x p(t)dt}$$

אחרי שבחרנו את μ , נחזור לפתרון המד"ר שלנו:

כאמור, בחרנו את μ כך שמתקיים:

$$(\mu \cdot y)' = \mu \cdot q$$

נעשה אינטגרל על שני הצדדים,

$$\mu \cdot y = \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + C$$

נחלק ב- μ ,

$$y(x) = \frac{1}{\mu} \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + \frac{C}{\mu}$$

$$\text{כאשר } \mu(x) = e^{\int_a^x p(t) dt}$$

מצאנו פתרון כללי למשוואה לינארית לא-הומוגנית.

בדיקת שפיות

1. להציג את הפתרון הכללי ולוודא שהוא פתרון.

2. מה אם $q = 0$? כל הפתרונות נתונים ע"י $\frac{C}{\mu} = C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$. שזה אכן הפתרון שיצא לנו עבור מערכת הומוגנית.

3. נניח ש y_1, y_2 פותרים את המד"ר.

נסתכל על ההפרש: $\Delta = y_1 - y_2$.

$$\Delta' + p\Delta = y_1' + py_1 - y_2' + py_2 = 0$$

כלומר, הפרש פתרונות של מד"ר לא הומוגני הוא פתרון של מד"ר הומוגני.

אפשר לנסות למצוא פתרונות ל- $y' + py = q$ ע"י הצבת $C(x)$. כלומר, לפתור משוואה ב- $C(x)$. (נציב C שרירותי, ואז נמצא אותו במדויק).

נציב $y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$ במשוואה הלא הומוגנית:

$$y' + py = C' \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} + C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} \cdot (-p) + p \cdot C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} = q$$

$$\Rightarrow C' \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} = q$$

נכפיל את שני האגפים ב- $e^{\int_a^x p(t) dt}$:

$$C' = q \cdot e^{\int_a^x p(t) dt}$$

זו משוואה שקולה (במשתנה חדש $C(x)$).

מהמשפט היסודי נקבל:

$$C(x) = \int_a^x q(t) e^{\int_a^t p(t) dt} dt + D \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$$

3.2 דוגמאות לשימוש בפתרון הכללי

3.2.1 דוגמא 1 - הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x$$

כלומר $p(x) = \sin(x)$ ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C \cdot e^{-\int_a^x \sin(t) dt} = C \cdot e^{-\cos x + \cos a} = D \cdot e^{-\cos x}$$

(C יכול לקבל כל ערך, לכן גם $D := C \cdot e^{\cos a}$ יכול לקבל כל ערך).

3.2.2 דוגמא 2 - לא הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x + \cos x$$

פתרון כללי יהיה:

$$y = D \cdot e^{-\cos x} + \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x e^{\cos t} \cos(t) dt}{e^{\cos x}}$$

4 הרצאה 4

4.1 משוואות ניתנות להפרדה

הגדרה

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

4.1.1 מקרה פרטי $g = 1$

מד"ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = h(y(t))$$

נניח ש- y פתרון, כך ש- $h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = 1$$

נשים לב שאם $H(t)$ זו פונקציה קדומה של $\frac{1}{h(t)}$,

$$(H(y))' = \frac{y'}{h(y)}$$

לכן המשוואה שקולה למשוואה

$$(H(y))' = 1 \Rightarrow H(y(t)) = C + t$$

איך נמצא את y ? קיימת ל- H הופכית בתחום שאנו עובדים בו בגלל שהיא מוגדרת כך

$$H(t) = \int_{x_0}^t \frac{1}{h(x)} dx + \text{קבוע}$$

נשים לב, שלפי ההנחה שלנו - h לא מתאפסת. בפרט $\frac{1}{h}$ בעלת סימן קבוע - חח"ע. לכן גם H חח"ע. לכן, כדי למצוא את y , נרצה להפעיל את $H^{-1}(t)$ על שני האגפים.

נקבל את הפתרון:

$$\forall C, \quad y(t) = H^{-1}(C + t)$$

4.1.2 מקרה כללי

מד"ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

נמשיך עם ההנחה $h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

ניקח H קדומה של $\frac{1}{h}$, G קדומה של g ונקבל,

$$\frac{y'}{h(y)} = (H(y))' = G' \Rightarrow H(y) = G$$

נפעיל H^{-1} על שני האגפים,

$$\forall C \in \mathbb{R}, \quad y(t) = H^{-1}(G(t)) + C$$

אלו כל הפתרונות כך ש- $h(y) \neq 0$ בתחום.

בדיקת שפיות אפשר להשלים (אין לי כוח), אין צורך בבדיקת שפיות אם כל הצעדים בהוכחה הם אמ"מ.

4.1.3 בעיית תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה

נוסיף תנאי התחלה לבעיה,

$$\begin{cases} y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור את זה כאשר מניחים שוב ש- $h(y) \neq 0$ בתחום.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

נעשה אינטגרל בקטע $[x_0, x]$,

$$\int_{x_0}^x \frac{y'}{h(y)} dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

נעשה החלפת משתנים $y(t) = v$

$$\Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dv}{h(v)} = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

ניקח G קדומה של g , H קדומה של $\frac{1}{h}$, ונקבל:

$$G'(x) - G'(x_0) = H(y(x)) - H(y(x_0))$$

נוסיף $H(y(x_0))$ לשני האגפים,

$$H(y(x)) = G'(x) - G'(x_0) + H(y(x_0))$$

נרכיב את H^{-1} ,

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y(x_0)$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל,

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y_0$$

5.1 דוגמא למד"ר ניתנת להפרדה - פתרון המשוואה הלוגיסטית

תזכורת

$$\begin{cases} N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \\ N(t_0) = N_0 \in (0, L) \end{cases}$$

זו משוואה אוטונומית.

נשים לב,

$$g(t) = 1, \quad h(N(t)) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right)$$

כלומר, המשוואה ניתנת להפרדה:

$$N'(t) = g(t) \cdot h(N(t))$$

נרצה למצוא (חלק) מפתרונות המד"ר.

נניח: $h(t) \neq 0$ בתחום ההגדרה של $N(t)$.

נחלק ב $h(N)$, ואז לכל t בתחום (קטע פתוח שמכיל את t_0):

$$\frac{N'}{h(N)} = 1$$

נעשה אינטגרציה לשני האגפים, ואז לכל t בתחום:

$$\int_{t_0}^t \frac{N'}{h(N)} dx = \int_{t_0}^t 1 dx$$

נעשה החלפת משתנים, $N = v$, $N' \cdot dx = dv$, ואז:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = t - t_0$$

בשביל לחשב את אגף שמאל - צריך למצוא פונקציה קדומה של $\frac{1}{h}$, נסמן ב- H . נשתמש בפירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{h(v)} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v(1 - \frac{v}{L})} \right) = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v} + \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{v}{L}} \right)$$

וסה"כ, ע"י שימוש בנגזרת של \ln נקבל:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = \frac{1}{K} \left(\log v - \log \left(1 - \frac{v}{L}\right) \right) \Big|_{N(t_0)}^{N(t)}$$

מסקנה:

$$\frac{1}{K} \left(\log N(t) - \log \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \right) - \frac{1}{K} \left(\log N_0 - \log \left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \right) = t - t_0$$

נכפול ב K ,

$$\left(\log N(t) - \log\left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \right) - \left(\log N_0 - \log\left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \right) = K(t - t_0)$$

נעביר אגפים ונפעיל אקספוננט:

$$\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{L}} = \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \cdot e^{K(t-t_0)}$$

קיבלנו משוואה לינארית ב $N(t)$:

$$N(t) = \frac{N_0}{\frac{N_0}{L} + \left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \cdot e^{-K(t-t_0)}}$$

5.1.1 הערה כללית

אם נתונה משוואה מהצורה $y' = h(y)$ (h רציפה), y_0 נקודה כך ש- $h(y_0) = 0$, **אז** $y(t) = y_0$ היא פתרון.

5.2 שיטה לפתירת מד"ר מסדר ראשון - החלפת משתנים

שינוי משתנים / הצבה

נתונה מד"ר מסדר ראשון עם תנאי התחלה,

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור ע"י שינוי משתנים $z(t) = \frac{y(t)}{t}$:

קיבלנו מד"ר שקולה:

$$z'(t) \cdot t + z(t) = f(z(t))$$

נעביר אגפים ונחלק ב- t :

$$z'(t) = \frac{f(z(t)) - z(t)}{t} = \frac{1}{t} \cdot (f(z(t)) - z(t))$$

נשים לב, זו מד"ר ניתנת להפרדה. $(h(z) = f(z) - z, \quad g = \frac{1}{t})$

נסמן:

$$\frac{z'}{h(z)} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow z' = \frac{1}{t} \cdot h(z)$$

ניקח G קדומה של $\frac{1}{x}$, H קדומה של $\frac{1}{f(x)-x}$, ונקבל:

$$H(z(t)) - H(z(t_0)) = G(t) - G(t_0)$$

G קדומה של $\frac{1}{x}$, כלומר $G = \ln t$:

$$H(z(t)) = H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) + \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

נרכיב את H^{-1} ,

$$z(t) = H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) - \ln(t_0) + \ln(t)\right)$$

סה"כ,

$$y(t) = t \cdot H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) + \ln t - \ln t_0\right)$$

זהו פתרון שמקיים את תנאי ההתחלה.

6 הרצאה 6

יהי מד"ר מסדר ראשון, כאשר f רציפה.
המשפט מבטיח קיום ויחידות של פתרון למד"ר שמקיים תנאי התחלה $y(x_0) = x_0$.
בשביל לנסח את המשפט, נגדיר פונקציית ליפשיץ.

פונקציית ליפשיץ

פונקצייה $f(x)$ בקטע I היא ליפשיצית עם קבוע K אם מתקיים: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$

הערה 1: אם f גזירה, והנגזרת חסומה ב- I , אז f ליפשיץ: $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f(c)$ $\exists c \in (x_1, x_2)$
הערה 2: אם f ליפשיץ, אז היא רציפה.

6.1 משפט הקיום והיחידות - פיקרד לינדלוף

תהי $f(x, y)$ פונקצייה בתחום D קשיר (לרוב מלבן $I \times J$).
אם f רציפה ב- x וליפשיץ ב- y , וקבוע הליפשיץ אינו תלוי ב- x : $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$ $\forall x$,

אזי, לכל (x_0, y_0) בפנים של D , קיים $\varepsilon > 0$ כך שיש פתרון y למשוואה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

והוא מוגדר עבור $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. יתר על כן - הפתרון יחיד.

6.1.1 הוכחה

יחידות נניח בשלילה שקיימים 2 פתרונות שונים y, Y לבעיית הערך ההתחלתי הנתונה.

אם $y' = f(x, y)$ בקטע $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ ו- $y(x_0) = y_0$ אזי,

$$\int_{x_0}^x y'(t) dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \Rightarrow y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

אם $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$, אז $y(x_0) = y_0 + 0$. כלומר, y פותרת את בעיית הערך ההתחלתי בקטע.

נשים לב, שאם y, Y פותרים את $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$ והן רציפות, אז:

$$Y(x) - y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt = \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) - f(t, y(t)) dt$$

נפעיל ערך מוחלט על שני האגפים,

$$|Y(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) - f(t, y(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, Y(t)) - f(t, y(t))| dt$$

לפי תנאי המשפט, f ליפשיץ לפי y ולכן,

$$\int_{x_0}^x |f(t, Y(t)) - f(t, y(t))| dt \leq \int_{x_0}^x K \cdot |Y(t) - y(t)| dt$$

נגדיר $g(t) = |Y(t) - y(t)|$

נשים לב שהפונקציה g רציפה, אי שלילית וקודם הראנו שמתקיים $g(x) \leq K \cdot \int_{x_0}^x g(t) dt$.
לכן נוכל להשתמש בלמה של גרנוול. לפי הלמה, $g(t) = |Y(t) - y(t)| = 0$ ולכן:

$$\forall x \geq x_0, Y(x) = y(x)$$

6.1.2 הלמה של גרנוול

תהי g רציפה, אי שלילית בקטע $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.
אם $g(x) \leq K \cdot \int_{x_0}^x g(t) dt$ לכל $x \geq x_0$, אז $g(x) = 0$ לכל $x \geq x_0$.

הוכחת הלמה:

נגדיר $G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$. כלומר - $G'(x) = g(x) \geq 0$

$$G'(x) \leq K \cdot G(x)$$

נחלק את שני האגפים ב e^{Kx} ,

$$G'(x) \cdot e^{-Kx} \leq K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx}$$

נעביר אגפים,

$$(G(x) \cdot e^{-Kx})' = G'(x) \cdot e^{-Kx} - K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx} \leq 0$$

כלומר, ל- $G(x) \cdot e^{-Kx}$ בעלת נגזרת אי-חיובית ולכן $(G(x) \cdot e^{-Kx})$ יורדת.

לכן, עבור $x \geq x_0$:

$$G(x) \cdot e^{-Kx} \leq G(x_0) \cdot e^{-Kx_0} \leq 0$$

נשים לב ש- $e^{-Kx} > 0$, לכן נוכל לכפול את האי-שוויון ולקבל

$$G(x) \leq 0$$

סה"כ,

$$0 \leq g(x) \leq K \cdot G(x) \leq 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

קיום נגדיר סדרת פונקציות באופן הבא:

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \end{cases}$$

שלבי ההוכחה:

1. נבנה מלבן $S \subseteq D$ כך ש- (x_0, y_0) . נגדיר מלבן מצומצם ע"י a' .

2. נראה שסדרת הפונקציות y_n חסומות במלבן D .

3. נראה התכנסות של הסדרה: $y_n \rightarrow y$.

4. נוכיח התכנסות במ"ש ע"י מבחן M של וירשטראס.

5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי.

1. נגדיר מלבן סביב הנקודה (x_0, y_0) :

$$S = \{|x - x_0| \leq a\} \times \{|y - y_0| \leq b\} \subseteq D$$

f רציפה ב- S , לכן לפי וירשטראס, f מקבלת בו מקסימום ונסימין: $M := \max\{|f(t, y)|\}$

נציב את המד"ר ($y' = f(x, y)$) ונקבל:

$$|y'| \leq M$$

נסתכל על $y_1 - y$:

$$|y_1(x) - y(x)| \leq M|x - x_0| \leq M \cdot a$$

על מנת לא לצאת מהמלבן, ($|y_1 - y| \leq b$), נרצה שיתקיים $a \leq \frac{b}{M}$.

נגדיר מלבן מצומצם ע"י

$$S' = \{|x - x_0| \leq a'\} \times \{|y - y_0| \leq b\} \subseteq D$$

$$a' = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

2. סדרת הפונקציות y_n חסומות במלבן D

נראה שאם $|y_n - y_0| \leq b$ וגם $|x_0 - x| \leq a'$ אז $|y_{n+1} - y_0| \leq b$, באמצעות אינדוקציה.

עבור $n = 0$, $y_0(x) = y_0$.

נניח ש- $|y_n - y_0| \leq b$ ונראה עבור $n + 1$.

$$|y_{n+1} - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_n(t))| dt \leq M(x - x_0) \leq M \cdot a' \leq b$$

סה"כ, הראנו ש- y_n נשארות בתוך המלבן, לכן - $f(y_n, t)$ הוא ביטוי מוגדר בתחום הגדרתה של f ונוכל להמשיך בהוכחה.

3. נראה התכנסות של הסדרה: $y_n \rightarrow y$

נמצא חסם על $|y_{n+1} - y_n|$

$$|y_{n+1} - y_n| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n) - f(t, y_{n-1}) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})| dt$$

נשתמש בליפשיציות של f ונקבל,

$$\int_{x_0}^x |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})| dt \leq K \cdot \int_{x_0}^x |y_n - y_{n-1}| dt$$

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \frac{M \cdot K^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \text{באינדוקציה, נראה}$$

$n = 0$

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0(t))| dt \leq M(x - x_0)$$

נניח עבור n ונראה עבור $n + 1$.

הראנו קודם ש-

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| \leq K \cdot \int_{x_0}^x |y_{n+1} - y_n| dt$$

מהנחת האינדוקציה נקבל,

$$\leq K \cdot \frac{M \cdot K^n}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (t - x_0)^{n+1} dt = \frac{MK^{n+1}(x - x_0)^{n+2}}{(n+2)!}$$

סיימנו. כעת נראה התכנסות של y_n עם הגדרת הגבול לפי קושי.

יהיו $m, n \in \mathbb{N}$ כך ש- $m < n$:

$$\begin{aligned} |y_n - y_m| &= |(y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + (y_{m+1} - y_m)| \\ &\leq |y_n - y_{n-1}| + \dots + |y_{m+1} - y_m| \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \frac{M \cdot K^i (x - x_0)^{i+1}}{(i+1)!} < \varepsilon \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שהאיבר האחרון הוא זנב של טור מתכנס - לכן, עבור m גדול מספיק, יהיה קטן מ- ε .

סה"כ - הראנו כי קיים ל- y_n גבול סופי.

4. נראה התכנסות במ"ש ע"י מבחן M של וירשטראס

תזכורת - מבחן M

אם $f_n(x)$ סדרה של פונקציות בקטע I וקיימת M_n כך ש- $|f_n(x)| \leq M_n$ לכל n . ובנוסף $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ מתכנס, אזי: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ מתכנס במידה שווה.

נגדיר סדרת פונקציות חדשה:

$$\begin{cases} h_0 = y_0 \\ h_i = y_i - y_{i-1} \quad i \geq 1 \end{cases}$$

נשים לב,

$$|h_i| = |y_i - y_{i-1}| \leq \frac{M \cdot K^{i-1}(x - x_0)^i}{(i)!} \leq \frac{M \cdot K^{i-1}(a')^i}{(i)!}$$

מתקיימים תנאי מבחן M ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במידה שווה.

ניתן לרשום:

$$y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n$$

ולכן: $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במ"ש $\iff y_n$ מתכנס במ"ש

5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי

y_n רציפות ו- $y \rightarrow y_n$ במ"ש, לכן - ממשפט מאינפי 2, פונקציית הגבול y רציפה.

בנוסף, מרציפות f , $f(t, y_n)$ רציפה ובנוסף מתקיים:

$$|f(t, y_n) - f(t, y)| \leq K \cdot |y_n - y| \leq \varepsilon$$

כלומר, $f(t, y_n)$ מתכנסת במ"ש ל- $f(t, y)$.

ממשפט מאינפי 2, הראנו ש- $y \rightarrow y_n$ במ"ש, ולכן:

$$\int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

סה"כ, פונקציית הגבול, y היא מהצורה:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

כלומר, y מקיימת את המשוואה האינטרלית¹ ורציפה, לכן היא מקיימת את המדר: $y' = f(x, y)$ עם תנאי התחלה $y(x_0) = y_0$.

¹משוואה אינטגרלית - משוואה מהצורה: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$

7 הרצאה 7

7.1 דוגמא לשימוש במשפט

עבור המד"ר:

$$y' = \frac{y}{y^2 - x}$$

עם תנאי התחלתי, נראה קיום ויחידות פתרון.

נדרוש $y_0^2 \neq x_0$

ניקח מלבן D סביב (x_0, y_0) שלא "נוגע" ב- $y^2 = x$. נרצה להפעיל את המשפט על $f(x, y) = \frac{y}{y^2 - x}$, תחום D , והנקודה (x_0, y_0) .

נבדוק שמתקיים תנאי ליפשיץ נשים לב ש f גזירה.

התנאי הדרוש מתקיים אם $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ חסומה בתחום. (משפט לגרנז').

נגזור,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{y^2 - x - y \cdot 2y}{(y^2 - x)^2} = -\frac{y^2 + x}{(y^2 - x)^2}$$

הנגזרת חסומה כי היא רציפה בתחום סגור (ויירשטראס).

8 הרצאה 8

תחת התנאים של משפט הקיום והיחידות נקבל כמה מסקנות.

8.1 עקרון היחידות

תהי (x_0, y_0) נקודה בפנים של D . נניח ש- y_1, y_2 2 פתרונות למד"ר שנחתכים בתחום. נניח שנחתכים ב- (x_0, y_0) .

אזי, הפתרונות חייבים להסכים בכל D . כלומר - לכל x בתחום - $y_1(x) = y_2(x)$

הוכחה נסמן $L = \{t < x_0 \mid \forall x \in (t, x_0] : y_1(x) = y_2(x)\}$

נשים לב ש- L הוא קטע וממשפט קיום ויחידות, L אינו ריק.

ל- L יש 2 אפשרויות:

$$1. L = (\ell, x_0)$$

$$2. L = [\ell, x_0)$$

אבל נשים לב ש- L תמיד באפשרות 2. אם L קטע פתוח אזי, y_1 ו- y_2 מסכימים על $t > \ell$, ומרציפות - הן מסכימות גם ב- ℓ , כלומר - בהכרח $L = [\ell, x_0)$.

אם L בשפה של D , סיימנו. אחרת, L בפנים של D . בפרט - ℓ נקודה פנימית ב- D .

ממשפט הקיום והיחידות, קיימת סביבה כלשהי של ℓ כך ש- y_1, y_2 מסכימים בסביבה כלשהי של ℓ - בסתירה להגדרה של L . לכן, בהכרח ℓ בקצה של D (קיום ויחידות ניתן להפעיל רק בפנים של D).

8.1.1 דוגמא - משוואה לוגיסטית

מצאנו את כל הפתרונות ל- $y' = K \cdot y(1 - \frac{y}{2})$ שמקיימים $0 < y < L$.

מצאנו פתרונות סינגולריים:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = L \end{cases}$$

טענה: אם פתרון y חותך את $y = 0$ אז $y \equiv 0$.

הסבר: יהי $T \geq 1$. נראה ש- $y \equiv 0$ עבור $-T \leq t \leq T$.

נגדיר

$$D = \{[-2T, 2T] \times [-M, M]\}$$

נבחר M מספר כך ש- $(x, y(x))$ נמצא בפנים של D .

$$M = \max_{|t| \leq 2T} |y(t)| + 1$$

$y(t)$ ופתרון האפס נחתכים ב- D . בנוסף, תנאי הליפשיציות של f מתקיים:

$$\frac{\partial(K \cdot y(1 - \frac{y}{2}))}{\partial y} = y \text{ ב-} y \text{ פונקציה לינארית}$$

y חסום \Leftarrow נגזרת חסומה \Leftarrow ליפשיציות

לכן, לפי עיקרון היחידות: $y(x) = 0$ לכל x בתחום.

8.2 עקרון ההמשכה

תחת אותם תנאים של משפט הקיום והיחידות. אם מצאנו פתרון y לבעיית תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אז, ניתן להמשיך אותו עד שנתקע בשפה.

הוכחה נגדיר

$$L = \{t < x_0 \mid (t, x_0) \text{ ב-} y_t \text{ פתרון לבעיית תנאי התחלתי ומוגדר ב-}\}$$

נשים לב, L הוא קטע לא ריק.

$$\text{אם } L = (\ell, x_0), \text{ אז נוכל להגדיר: } y(\ell) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} y(\ell + \varepsilon)$$

נראה שגבול זה קיים, ע"י קריטריון קושי. לכל $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$:

$$|y(\ell + \varepsilon_1) - y(\ell + \varepsilon_2)| = \left| \int_{\ell + \varepsilon_1}^{\ell + \varepsilon_2} f(t, y(t)) dt \right| \leq M |\ell + \varepsilon_2 - \ell - \varepsilon_1| = M |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|$$

y רציפה, לכן $y(t) = y_0 + \int_{x_0}^t f(t, y(t)) dt$. כלומר - ניתן להמשיך את y לקטע הסגור $[\ell, x_0]$. אם L קטע סגור, נוכל להשתמש שוב בקיום ויחידות בקצה של L עד שנגיע לשפת D .

8.3 פתרון גלובלי

יהי $D = \{|x - a| \leq b\} \times \mathbb{R}$ מלבן סגור אינסופי. תהא בעיית התחלתית:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

f ליפשיצית ב- D לפי y . אזי, קיים פתרון יחיד $y(x)$ למד"ר שמוגדר לכל $a - b \leq x \leq a + b$

הוכחה נגדיר

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \end{cases}$$

הראנו בהוכחה של קיום ויחידות.

8.4 דוגמאות מתי משפט הקיום והיחידות לא עובד

דוגמה 1: אינסוף פתרונות או העדר פתרון בנקודה סינגולרית

$$y' - \frac{y}{x} = x$$

הפתרון למשוואה ההומוגנית הוא: $y(x) = e^{-\int \frac{1}{t} dt} = e^{\ln(x)+c} = x \cdot c$

לכן הפתרון למשוואה הלא הומוגנית הוא: $y(x) = x \cdot (\int x \cdot \frac{1}{x} dx) = x^2 + C$ את המד"ר בתחום הגדרתו.

נשים לב שעבור $C \in \mathbb{R}$ - הפתרון $y_C = x^2 + C$ פותר את בעיית התנאי ההתחלתית:

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

כלומר, קיימים אינסוף פתרונות לבעיית התנאי ההתחלתית.

דוגמה 2: עקרון ההדבקה ואי-יחידות

$y' = -2\sqrt{y}$, $y \geq 0$ - זו משוואה ניתנת להפרדה ואוטונומית.

פתרון אחד הוא $y(x) = (c - x)^2$. גם $y = 0$ הוא פתרון. נשים לב שהתנאי למשפט ליפשיץ לא מתקיים ב- $y = 0$ (הנגזרת של \sqrt{y} שואפת לאינסוף), ולכן אין יחידות.

ניתן להגדיר פתרון חדש על ידי הדבקה של שני הפתרונות. נגדיר:

$$y_c(x) = \begin{cases} (c - x)^2 & x \leq c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

פונקציה זו גזירה ומקיימת את המד"ר. מכאן שדרך הנקודה $(0, 0)$ עוברים אינסוף פתרונות (עבור כל $c \geq 0$).

מסקנה מדוגמא זו היא:

נניח שקיים פתרון סינגולרי: $y(x) = y_0$ בתחום אחד, ופתרון אחד y_2 בתחום השני, ונניח שהתחומים נחתכים בנקודה אחת. אם הם מסכימים בנקודת החיתוך, ניתן להגדיר פתרון חדש ע"י הדבקת הפתרונות.

דוגמה 3: תחום הגדרה חסום

נתונה המשוואה $y' = -\frac{x}{y}$. זוהי משוואה ניתנת להפרדה:

$$yy' = -x \implies \frac{(y^2)'}{2} = -x \implies \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

לאחר סידור נקבל משוואת מעגל:

$$x^2 + y^2 = 2C$$

לכל $C \geq 0$ נקבל זוג פתרונות $y(x) = \pm\sqrt{2C - x^2}$

תחום ההגדרה הוא $|x| \leq \sqrt{2C}$. הנגזרת מתפוצצת כאשר $x \rightarrow \pm\sqrt{2C}$, ולכן לא ניתן להמשיך את הפתרון מעבר לנקודות אלו.

דוגמה 4: התפוצצות בזמן סופי

נתונה המשוואה $y' = y^2$. פתרונה הוא:

$$y(x) = \frac{1}{C - x}$$

(בנוסף קיים פתרון סינגולרי $y = 0$). הפתרון מוגדר עבור $x < C$ או $x > C$.

דוגמה מספרית: נניח $y(1) = 2$ אז $C = 1.5$ $\implies \frac{1}{C-1} = 2$. הפתרון הוא:

$$y(x) = \frac{1}{1.5 - x}$$

התחום המקסימלי המכיל את $x = 1$ הוא $x < 1.5$. הפתרון שואף לאינסוף ככל שמתקרבים ל-1.5 ("התפוצצות"). זה מראה שמשפט הקיום והיחידות מבטיח קיום **מקומי** בלבד, ולא גלובלי.

9 הרצאה 9

9.1 המשך דוגמאות

9.1.1 אין ליפשיציות, אין יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נשים לב, כי למרות ש- $y^{\frac{1}{3}}$ מוגדרת ב- $x = 0$, היא אינה ליפשיצית שם. (נוכל להראות ע"י נגזרת לא רציפה ב-0 או בעזרת כפל בצמוד).

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} &= 1 \\ \int_0^{y(x)} \frac{dv}{v^{\frac{1}{3}}} &= \int_0^x \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} dt = \int_0^x dt \\ \frac{3}{2}(y(x))^{\frac{2}{3}} &= x \end{aligned}$$

כלומר, יש 2 פתרונות לבעיית התנאי ההתחלתי: $y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$

נשים לב שקיים גם הפתרון הטריטויאלי: $y = 0$.

מצד שני, מצאנו 2 פתרונות נחתכים בתוך התחום שלא מכיל את $y = 0$, אז הם יהיו שווים, מעיקרון היחידות.

9.1.2 אין ליפשיציות, כן יש יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} = 1$$

זו משוואה ניתנת להפרדה, כאשר $h = x^{\frac{1}{3}} + 1$. נסמן H פונקציה קדומה של $\frac{1}{h}$.

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} &= 1 \\ H(y(x)) &= \int_0^x \frac{1}{h(y(t))} dt = \int_0^x 1 dt = x + c \end{aligned}$$

ע"י הפעלת הופכית של H , נקבל: $y(x) = H^{-1}(x + c)$

מתקיים $y(0) = 0$ ולכן:

$$0 = y(0) = H^{-1}(c) \Rightarrow c = H(0)$$

נשים לב: $y(x) = H^{-1}(x + H(0))$ פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי בסביבת $x = 0$.

9.1.3 דוגמא לשימוש במשפט הפתרון הגלובלי

$$\begin{cases} y' = \tan x \cdot \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נראה שיש פתרון יחיד שמוגדר ב- $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

נרצה להפעיל את משפט הפתרון הגלובלי ב"פס": $K \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ - אבל אסור. (

ניקח פס סגור בתוך הפס הפתוח:

$$D = \{x_0 + a \leq x \leq x_0 + b\} \times R$$

כאשר a, b נבחרו כך ש- $-\frac{\pi}{2} - x_0 < a < 0 < b < \frac{\pi}{2} - x_0$,

לכן, ממשפט הפתרון הגלובלי - יש פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי.

נוודא ליפשיציות:

$$\frac{\partial(\tan x \cdot \sin y)}{\partial y} = \tan x \cdot \cos y$$

נשים לב, ש- $x = \pm \frac{\pi}{2}$ ולכן $\tan x$ חסום, $\cos y$ חסום גם הוא ולכן - הנגדרת לפי y חסומה ולכן, הפונקצייה ליפשיצית.

נבנה פתרון כללי בפס עצמו, ע"י הדבקה. לכל $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ נרחיב את הפס עד שיכיל את x , ואז נגדיר את $y(x)$ לפי המשפט הקיום הגלובלי.

y מוגדרת היטב שכן אם יש 2 פתרונות שנחתכים בנקודה, אז נפעיל את המשפט על פס סגור שמכיל את נקודת החיתוך.

10 הרצאה 10

תזכורת באמצעות משפט פיקרד לינדלוף, הוכחנו שמתקיימים עיקרון היחידות ועיקרון ההמשכה, בתחום בו: f רציפה וליפשיצית מקומית ב- y .

תזכורת

עקרון ההמשכה: בהינתן $y' = f(x, y)$ ו- D כמו בקיום יחידות. בנוסף, תהא קבוצה קומפקטית $K \subseteq D$, כך ש- $(x_0, y_0) \in K$. אזי, יש פתרון לבעיית ההתחלתי הנתונה שיוצא מ- K (יוצא גם משמאל ל- x_0 וגם ומימין ל- x_0).

10.1 חקירה איכותית של מד"ר

היום, נדבר על $y' = f(y)$ במקרה בו f ליפשיצית מקומית.

תזכורת אם α מספר כך ש- $f(\alpha) = 0$ אז $y = \alpha$ פתרון ל- $y' = f(y)$. נקרא לו סינגולרי.

10.1.1 משפט

יהיו $\alpha < \beta$ שני פתרונות סינגולריים עוקבים, המקיימים:

$$\forall \gamma \in (\alpha, \beta) : f(\gamma) \neq 0 \quad \text{וכן} \quad f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

יהי $y(x)$ הפתרון לבעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר $y_0 \in (\alpha, \beta)$. אזי מתקיים:

1. הפתרון $y(x)$ מוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$.
2. הפונקציה $y(x)$ מונוטונית ממש (עולה או יורדת בהתאם לסימן של f בתחום).
3. y מקבל כל ערך בין α ל- β .

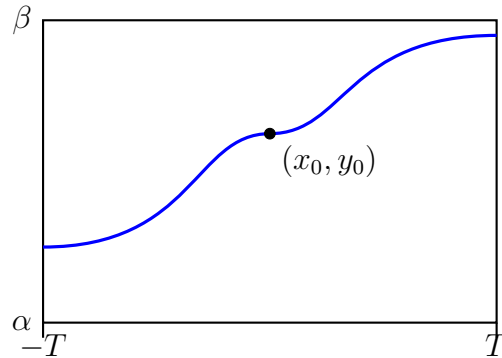
□ אם y עולה (כאשר $f(y) > 0$ בתחום):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \beta, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \alpha$$

□ אם y יורדת (כאשר $f(y) < 0$ בתחום):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \beta$$

הוכחה נבחין שקיים y פתרון לבעיית תנאי ההתחלתי. הפתרון לא חותך את $y = \alpha, y = \beta$ לכן $\alpha < y(x) < \beta$ עבור x בתחום ההגדרה.
 למה מוגדר ב- \mathbb{R} ? כדי להראות שמוגדר עבור $|x| \leq T$, נשתמש בעיקרון ההמשכה:



נקח מלבן $K = [-T, T] \times [\alpha, \beta]$. הפיתרון יוצא מהמלבן הקומפקטי - אבל לא מהצלע העליונה או מהצלע התחתונה - לכן יוצא מהצדדים ומוגדר בפרט ל- $|x| \leq T$.
 למה y מונוטונית? כי $y' = f(y)$, בין α ל- β , f מקבלת סימן קבוע בקטע, לכן אם f מקבלת סימן חיובי אז y עולה ממש. בהתאם גם עבור סימן שלילי.
 נותר חלק 3:

לשם הפשטות, נניח y עולה ממש. לכן הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ קיים וסופי. נסמן אותו ב- L .
 נניח בשלילה: $L < \beta$. בפרא - $y' = f(y) \rightarrow f(L) > 0$. זה גורר y לא חסומה ולכן סתירה. לכן $L = \beta$.
 למה y לא חסומה?

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_1) &= \int_{x_1}^x y'(t) dt \\ &\geq \int_{x_1}^x \frac{f(L)}{2} dt \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שאם $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = f(L) > 0$ אז יש x_1 כך ש- $y'(x) = \frac{f(L)}{2}$ לכל $x \geq x_1$.
 בדומה, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \alpha$, למה? אחרת נקרא לגבול L_2 . $\alpha < L_2$ נמשיך כמו קודם ונסיים.

10.2 משפט משלים

שוב, f ליפשיצית מקומית. נניח $y = \alpha$ פיתרון סינגולרי מקסימלי. לבעיית התנאי ההתחלתי יש פתרון עם התכונות הבאות:

1. מונוטוני ממש
2. מקבל את כל הערכים (α, ∞)
3. אם y עולה אז תחום ההגדרה הוא $(-\infty, x_+)$ עבור $x_+ = x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(t)} dt$ או $x_+ = \infty$ אם האינטגרל מתבדר.

הוכחה קיימים 2 מקרים:

$$1. \quad x > \alpha \text{ ולכן } f(x) > 0$$

$$2. \quad x > \alpha \text{ ולכן } f(x) < 0$$

נוכיח תחת מקרה 1.

למה מונוטוני ממש? כי $y' = f(y)$ (לפי עיקרון היחידות, y לא חותך את $y = \alpha$), לכן y נשאר מעל α לאורך תחום ההגדרה.

למה y מקבל את כל הערכים (α, ∞) ? נסתכל על הגבול $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = L$. אם $L = \alpha$ סיימנו. אחרת, נניח בשלילה כי $L > \alpha$ אז y מתנהגת כמו פונקציה לינארית ב- $-\infty$.

$$f(y(x)) \rightarrow f(L) > 0$$

מכאן:

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_1) &= \int_{x_1}^x f(t) dt \\ &\geq \int_{x_1}^x \frac{f(L)}{2} dt \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שקיים x_1 כך ש- $\frac{f(L)}{2} \leq f(x)$ לכל $x \leq x_1$.

תחום הגדרה: למה הפתרון ניתן להמשכה עד $-\infty$? כי נוכל להפעיל עיקרון ההמשכה על $K = [-T, x_0] \times [\alpha, y_y]$ לכל $T > \infty$.

נוכיח את 3: בשביל x_+ נפריד משתנים:

$$\begin{aligned} y' &= f(y) \\ \frac{y'}{f(y)} &= 1 \\ \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} &\stackrel{V=y(t)}{=} \int_{x_0}^x \frac{y'}{f(y)} dt = \int_{x_0}^x dt = x - x_0 \end{aligned}$$

כאשר $x \rightarrow x_+$ משמאל, אז $y(x)$ שואף לאינסוף. נשאיף את x ל- x_+ משמאל במשוואה שקיבלנו:

$$\begin{aligned} x_0 + \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} &= x \\ x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{dV}{f(V)} &= x_+ \end{aligned}$$

10.3 גדרות

נסתכל על $y' = f(x, y)$ כאשר f רציפה בתחום D וליפשיצית מקומית.

גדר תחתית

פונקציה $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה נראית **גדר תחתית** של המד"ר אם:
 $\alpha'(x) < f(x, \alpha(x))$ לכל $x \in I$ – קטע פתוח.

גדר עילית

פונקציה $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה נראית **גדר עילית** של המד"ר אם:
 $\alpha'(x) > f(x, \alpha(x))$ לכל $x \in I$ – קטע פתוח.

10.3.1 משפט הגדר

נסתכל על פתרון y לבעיית התנאי ההתחלתי.
 f רציפה וליפשיצית מקומית ב- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y(x) > \alpha(x)\}$.
 אם $(x, y) \in D$ אז $y(x) > \alpha(x)$ לכל $x \in I \cap [x_0, \infty)$

הוכחה נסתכל על $g(x) = y(x) - \alpha(x)$. נניח בשלילה שהמשפט לא נכון.
 $g(x_0) > 0$ אבל יש $x_0 < x$ כך ש- $g(x) \leq 0$. ניקח x מינימלי שמקיים $g(x) \leq 0$.
 נסתכל על שיפוע g בנקודה x .

$$g'(x) = y'(x) - \alpha'(x) > f(x, y(x)) - f(x, \alpha(x)) = 0$$

כאשר $y(x) = \alpha(x)$ בנקודה x כי היא מינימלית.

$$\text{מצד שני, } g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq 0 \text{ מכיוון ש-} h < 0.$$

סה"כ הגענו ל- $0 < g(x) \leq 0$ – סתירה! לכן המשפט נכון.

עיקרון כללי: אפשר למצוא גדרות ע"י איזוקלינות.

איזוקלינות

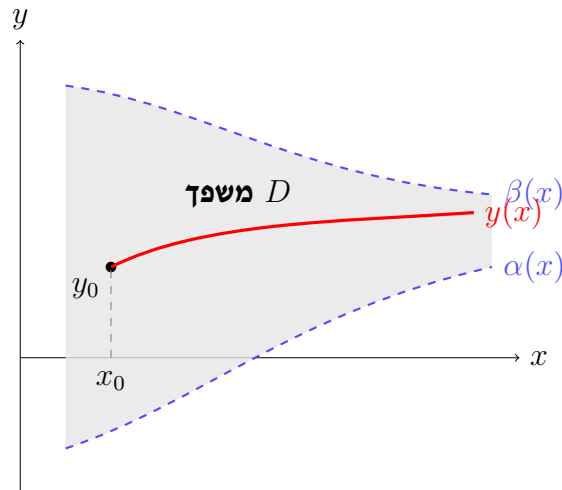
בהנתן מד"ר $y' = f(x, y)$, זה אוסף הנקודות המקיים $f(x, y) = k$

10.3.2 מסקנה - משפט המשפך

נניח $y' = f(x, y)$ מד"ר עם גדר תחתית α ו-גדר עלית β .
אם f ליפשיצית מקומית ב- y בתחום

$$D = \{(x, y) \mid x \in I, \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אז, הפתרון y לבעיית התנאי ההתחלתי מקיים: $\alpha(x) < y(x) < \beta(x)$ עבור $x \geq x_0$ בתחום ההגדרה.



10.4 דוגמאות

דוגמא 1

$$y' = x^4 - y^4 = f(x, y)$$

נשים לב ש- f רציפה וליפשיצית.

דוגמא לגדר עלית: $\beta(x) = x$. נראה שזו אכן גדר עלית:

$$x^4 - (\beta(x))^4 = x^4 - x^4 = 0 < 1 = \beta'(x)$$

דוגמא לגדר תחתית: $\alpha(x) = 0$. נראה שזו גדר תחתית:

$$x^4 - (\alpha(x))^4 = x^4 > 0 = \alpha'(x)$$

דוגמא 2

$$y' = y^2 - x = f(x, y)$$

דוגמא לגדר עלית: $\beta(x) = -\sqrt{x-1}$.

דוגמא לגדר תחתית: $\alpha(x) = -\sqrt{x+1}$.

11 הרצאה 11

11.1 כמה השלמות על משוואות אוטונומיות

11.1.1 טענה

יהא y פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי :

$$\begin{cases} f' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ועבור α, β פתרונות סינגולריים עוקבים המקיימים: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ מתקיים:

$$y_0 \in (\alpha, \beta)$$

אזי, קיימת נקודה x_1 כך ש- $y''(x_1) = 0$

הערה: לפעמים x_1 תהיה נקודת פיתול.

הוכחה y מקיים $y' = f(y)$. נגזור את 2 האגפים:

$$y'' = y' \cdot f'(y)$$

נרצה להראות שקיים x_1 כך ש- $f''(x_1) = 0$. אכן, לפי משפט רול - $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ ולכן קיים $\gamma \in (\alpha, \beta)$ כך ש- $f'(\gamma) = 0$.

נרצה: $y(x_1) = \gamma$. נשים לב שהוכחנו ש- y מקבל את כל הערכים בין α ל- β לכן בהכרח קיים x_1 כזה. \square

ראינו בתחילת הסמסטר: אם y פתרון למשוואה אוטונומית $y' = f(y)$, אז גם $y(x+c)$ פתרון לכל $c \in \mathbb{R}$.

11.1.2 טענה

תהי $y' = f(y)$ משוואה אוטונומית, f ליפשיצית מקומית ב- \mathbb{R} .
נניח שקיימים 2 פתרונות: y_1, y_2 ו- x_1, x_2 כך ש- $y_1(x_1) = y_2(x_2)$. אזי:

$$y_1(x + x_1 - x_2) = y_2(x) \quad \text{לכל } x$$

הוכחה נסמן $\tilde{y} = y_1(x + x_1 - x_2)$. פתרון למד"ר. (משפט שראינו: $c := x_1 - x_2$).

נשים לב ש- \tilde{y} ו- y_2 נחתכים ב- x_2 :

$$\tilde{y}(x_2) = y_1(x_2 + x_1 - x_2) = y_1(x_1) \underset{\text{הגדרה}}{=} y_2(x_2)$$

לכן, מעיקרון היחידות - $\tilde{y} = y_2$ לכל x . \square

יהא y פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי :

$$\begin{cases} f' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

תהא α כמו במשפט הגדר. נניח שמתקיים:

$$\alpha(x_0) \geq y(x_0)$$

אם מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות ב $D = \{(x, y) \mid x \in I, y(x) \leq \alpha(x)\}$ אז, לכל $x \in I$ עברו הפתרונות מוגדרים:

$$\forall x > x_0, \quad y(x) < \alpha(x)$$

הוכחה אם $\alpha(x_0) > y(x_0)$ - סיימנו (משפט הגדר). אחרת, נניח $\alpha(x_0) = y(x_0)$. נגדיר: $g(x) = \alpha(x) - y(x)$ מקיימת:

$$g'(x_0) = \alpha'(x_0) - y'(x_0) \underset{\text{גדר עילית}}{>} f(x_0, \alpha(x_0)) - f(x_0, y(x_0)) \underset{y(x_0)=\alpha(x_0)}{=} 0$$

$$g(x_0) = \alpha(x_0) - y(x_0) = 0$$

מסקנה: יש סביבה $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ בה g חיובית, כלומר $y(x) < \alpha(x)$ לכל $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ נפעיל את משפט הגדר על הסדרה:

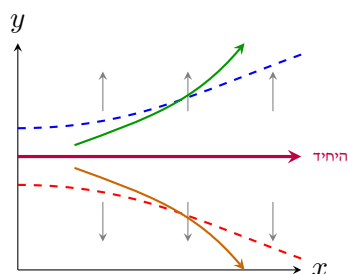
$$x_n = x_0 + \frac{\varepsilon}{n}$$

מתקיים $x_n \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ ולכן $y(x_n) < \alpha(x_n)$.

נובע: $y(x) < \alpha(x)$ עבור $x \geq x_n$. אם נשאף את n ל- ∞ נקבל: $y(x) < \alpha(x)$ לכל $x > x_0$ □

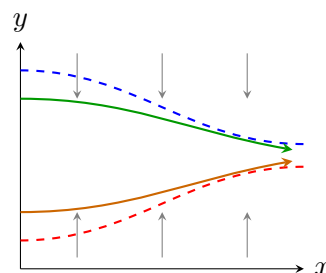
11.2 אינטואיציה למשפט ומשפט הפוך

משפט הפוך (Anti-Funnel)
מפזר החוצה - אי יציבות



הפתרונות "בורחים" מהתחום ככל ש- x גדל. רק פתרון אחד ייחודי נשאר כלוא בין הגדרות לאורך זמן.

משפט (Funnel)
מנקז פנימה - יציבות



כל הפתרונות שמתחילים בתחום (או נכנסים אליו) נלכדים בו, והמרחק ביניהם מצטמצם לאפס.

11.3 משפט המשפך ההפוך

(הגדר התחתית מעל הגדר העילית)

אם $y' = f(x, y)$ מד"ר, β גדר תחתית, α גדר עילית. מתקיים: $\beta > \alpha$.
נגדיר משפך הפוך:

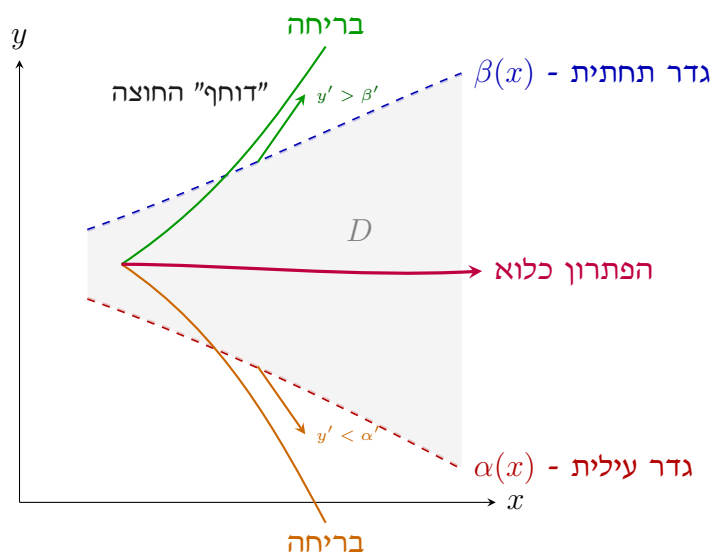
$$D := \{(x, y) \mid x \in I, \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אם מתקיים קיום ויחידות ב- D , אז:

1. יש פתרון למד"ר שנמצא בתוך D - $(x, y(x)) \in D$ לכל $x \in I$.

2. נניח $I = [a, \infty)$. אז $\beta - \alpha \rightarrow 0$ כ- $x \rightarrow \infty$, ואם $\frac{\partial f}{\partial y} \geq 0$ ב- D אז הפתרון בסעיף 1 הוא יחיד.

מסקנה: רוב הפתרונות מתפזרים, אך קיים פתרון יחיד שנשאר בתוך התחום.



דוגמא $y' = y^2 - x = f(x, y)$. ניקח $\alpha(x) = \sqrt{x-1}$, $\beta(x) = \sqrt{x+1}$.

$$\begin{cases} f(x, \alpha(x)) = -1 \\ f(x, \beta(x)) = 1 \end{cases}$$

נבדוק מתי α גדר עילית:

$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\alpha' > f(x, \alpha) = -1 \iff x > 1$$

נבדוק מתי β גדר תחתית:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\beta' < f(x, \beta) = 1 \iff x > -\frac{3}{4}$$

לפי המשפט, עבור $x > 1 + \varepsilon$, יש פתרון יחיד בתוך המשפך ההפוך. נסמן את הפתרון הזה בתור y_ε . מיחידות, אם $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, y_{ε_2} מצומצם ל- $x \geq \varepsilon_1$ נותן עוד פתרון שכלוא במשפך ההפוך. שונים בתחום ההגדרה המשותף. באופן זה, ניתן לבנות את $y(x)$ בתוך המשפך ההפוך שמוגדר לכל $x > 1$.

הוכחה נתחיל בסעיף 2:

נניח בשלילה שיש זוג פתרונות y_1, y_2 שמוגדרת לכל $x \geq a$, פותרים את המד"ר ונשארים בתוך D - המשפך ההפוך.

נגדיר את פונקציית ההפרש: $g = y_1 - y_2$. נשים לב שמתקיים:

$$0 \leftarrow_{x \rightarrow \infty} \alpha - \beta < y_1 - y_2 < \beta - \alpha \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$$

לכן לפי סנדוויץ', $g \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. נגזור את g :

$$g' = f(x, y_1) - f(x, y_2)$$

מעקרון היחידות: y_1, y_2 לא נחתכים, לכן g בעלת סימן קבוע. בה"כ: $g > 0$ לכל $x \geq a$. כלומר-

$$g' = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial}{\partial y} f(x, t) dt \geq 0$$

מסקנה: g עולה ממש ויש לה גבול, לכן מתכנסת לסופרימום שלה - $\sup y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$ בסתירה להנחה שלנו.

□

כעת נוכיח את סעיף 1, עבור שתי נקודות $s_2 < s$:

נגדיר פתרון $y_{s,\beta}$ המקיים: $y_{s,\beta}(s) = \beta(s)$. פתרון זה נמצא בתוך המשפך כאשר $x \in [a, s]$. למה? כי β גדר תחתית ו- α עילית.

נגדיר פתרון $y_{s,\alpha} = \alpha(s)$. פתרון זה נמצא ב- D עבור $x \in [a, s]$.

שני הפתרונות אף פעם לא נחתכים עבור $s \geq \alpha$. אם הם נחתכים - אז מעקרון היחידות, הם שווים. בסתירה לכך שלכל פתרון יש נקודת חיתוך שונה עם הגדרות.

מעקרון אי החיתוך, אם $s_2 < s$ אז $[y_{s_2,\alpha}(a), y_{s_2,\beta}(a)] \subseteq [y_{s,\alpha}(a), y_{s,\beta}(a)]$.

לפי משפט קנטור על חיתוך קטעים סגורים המוכללים אחד בשני, יש לפחות נקודה אחת בחיתוך:

$$A \in \bigcap_{s \geq a} [y_{s,\alpha}(a), y_{s,\beta}(a)]$$

נסתכל על פתרון למד"ר $y' = f(x, y)$ המקיים $y(a) = A$. פתרון זה נשאר בתוך D . למה? מעקרון אי-החיתוך:

$$y_{s,\alpha}(x) < y(x) < y_{s,\beta}(a) \quad x \geq a$$

בפרט, למה לא נחתכים עם השפה של D ? כי אם s נקודה בה y נחתך עם $y = \alpha(x)$ פעם ראשונה, אז y נחתך עם $y_{s,\alpha}$ בסתירה ליחידות.

12 הרצאה 12

הערה: הוא העלה קבצים למודל, הם חלק מהחומר. (דוגמא לשימוש בעקרון ההמשכה)

12.1 משוואה לינארית מסדר n

הגדרה

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y(x) = b(x)$$

נניח: כל ה- a_i -ים וכל ה- b -ים רציפים בקטע I .

12.1.1 משפט קיום ויחידות גלובלי למשוואה לינארית מסדר n

נניח: כל ה- a_i -ים וכל ה- b -ים רציפים בקטע I .

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \\ \dots \end{cases} \quad \text{אזי: יש פיתרון אחד ויחיד למד"ר המקיים את תנאי ההתחלה:}$$

למה צריך n תנאים? נסתכל על המקרה הכי פשוט, בו כל ה- a_i -ים וכל ה- b הם אפס:

$$x \in I \quad \text{עבור} \quad y^{(n)} = 0$$

ע"י המשפט היסודי של החדו"א: זה שקול לכך ש- y פולינום ממעלה $n-1$ לכל היותר. נשיב לב, שמרחב הפתרונות הוא מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} ממימד n . $\{1, x^2, \dots, x^n\}$

לפי משפט טיילור: אם y פולינום ממעלה $n-1 \geq$,

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^{(i)}}{i!} (x - x_0)^i + R_n(x)$$

בעצם, $R_n(x)$ זהותית אפס: $R_n(x) = \frac{y^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$, $c \in (x_0, x)$ כי $y \equiv 0$. קיבלנו שיוויון:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^{(i)}}{i!} (x - x_0)^i$$

(המקדמים $y^{(i)}(x_0)$ קובעים את y).

נגדיר קבוצה:

$$V = \{y : I \rightarrow \mathbb{R} \mid y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y(x) = 0\}$$

זה אוסף הפתרונות למד"ר לינארי הומוגני.

1. V מרחב וקטורי מעל \mathbb{R}

2. V ממימד n מעל \mathbb{R}

3. בסיס ל- V נתון ע"י n הפתרונות עם תנאי התחלה הבאים:

$$y_i^j(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

הוכחה

1. V מ"ו:

$0 \in V$ כי 0 הוא הפתרון הטריוויאלי.

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in V$ אז $c_1 y_1 + c_2 y_2 \in V$ אלגברה

2. נבנה איזומורפיזם בין V ל- \mathbb{R}^n :

$$\phi(y) = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \dots \\ y^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}$$

ϕ לינארית כי נגזרת לינארית. למה היא חח"ע? נראה שהגרעין טריוויאלי:

$$\phi(y) = \vec{0} \iff y = \begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

לפי משפט הקיום ויחידות (12.1.1), יש בדיוק y אחת כזו - נסמנה y_1 . מצד שני, $y = 0$ בוודאי מקיימת את המד"ר עם תנאי ההתחלה. לכן $y_1 = 0$. כלומר קיים בגרעין רק פתרון טריוויאלי. בנוסף, ϕ על: לפי משפט הקיום והיחידות מהיום, בהינתן $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ יש פתרון $y \in V$ המקיים $\phi(y) = \vec{v}$. לכן $y^{(i)}(x_0) = \alpha_i$.

3. בגלל ש- ϕ איזומורפיזם, אם $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ בסיס ל- \mathbb{R}^n , אז y_1, \dots, y_n המקיימים $\phi(y_i) = \vec{v}_i$ הם בסיס ל- V . בפרט, ניתן לקחת $\vec{v}_i = e_i$.

השבוע ושבוע הבא: רק הומוגניות. נחקור את השאלה הבאה: בהינתן פתרונות y_1, \dots, y_n למד"ר $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y(x) = 0$ האם הם בלתי תלויים לינארית?

נחדד: פונקציות y_1, \dots, y_n נקראות בלתי תלויות לינארית אם לכל $(c_1, \dots, c_n) \neq 0$ מתקיים $\sum c_i y_i \neq 0$

הערה: אם y פתר את המד"ר, אז הוא גזיר ברציפות n פעמים. הסבר: אם y מקיימת מד"ר אז $y^{(n)}$ חייב להיות מוגדר. $y^{(n)} = -\sum_{i \neq n} y^{(i)} a_{n-i}$

Wronskian

בהניתן n פונקציות גזירות $n - 1$ פעמים, נסמן y_1, \dots, y_n המוגדרות על I .
ורונסקיאן זו פונקציה שמוגדרת גם היא על I :

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

12.1.3 טענה - ורונסקיאן מתאפס עבור פונקציות ת"ל

אם y_1, \dots, y_n פונקציות תלויות לינארית, אז $W(y_1, \dots, y_n) \equiv 0$

הוכחה אם y_1, \dots, y_n ת"ל אז נביע את אחת מהם ע"י צ"ל של הנותרים: $y_j = \sum_{i \neq j} y_i c_i$

נגזור:

$$(y_j)^{(k)} = \sum_{i \neq j} (y_i)^{(k)} c_i$$

נקבל:

$$\begin{pmatrix} (y_j)^{(k)} \\ (y_j)^{(k)} \\ \vdots \\ (y_j)^{(k)} \end{pmatrix} = \sum_{i \neq j} \begin{pmatrix} (y_i)^{(k)} \\ (y_i)^{(k)} \\ \vdots \\ (y_i)^{(k)} \end{pmatrix} c_i$$

כלומר - יש צ"ל לא טריוויאלי של העמודות \Leftarrow דטרמיננטה מתאפסת. כלומר - הורונסקיאן מתאפס.

12.1.4 משפט - פתרונות בת"ל לא מאפסות ורונסקיאן

יהיו y_1, \dots, y_n פתרונות למד"ר הלינארי הומוגני: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y(x) = 0$, עבור $x \in I$.
 נניח, ש- y_1, \dots, y_n בת"ל.
 אזי, $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ לכל $x \in I$.

הוכחה נניח שהורונסקיאן מתאפס ונראה ש- y_i ת"ל.

אם $W(y_1, \dots, y_n) = 0$, אז יש תלות לינארית בין העמודות כש- $x = x_0$: יש קבועים c_1, \dots, c_n לא כולם אפס, כך שאם נגדיר $\tilde{y} = \sum_{i=1}^n (y_i)^{(k)} c_i$, אז, $\tilde{y}^{(i)}(x_0) = 0$. מצד שני, יודעים שפתרון האפס מקיימת את השויונות האלו. מקיום ויחידות בנקודה $x = x_0$, \tilde{y} חייב להיות פתרון האפס.

מסקנה: $\sum_{i=1}^n (y_i)^{(k)} c_i = 0$, כלומר - $(y_i)_{i=1}^n$ ת"ל. \square

13 הרצאה 13

13.1 מסקנה - ורונסקיאן מתאפס אז ורונסקיאן שווה זהותית ל-0

אם y_1, \dots, y_n פתרונות למד"ר לינארי הומוגני מסדר n ,
אם $W(y_1, \dots, y_n)$ מתאפס עבור x_0 כלשהו, אז $W(y_1, \dots, y_n) \equiv 0$.

שימוש במסקנה המקרה הכי "משעמם":

$$n = 1, \quad y' + py = 0$$

נזכיר, כל פתרון נראה כך: $y_C(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$.
המסקנה אומרת: אם y_C מתאפס בנקודה, אז $y_C \equiv 0$, מכיוון ש- $W(y_C) = y_C$.

13.2 דוגמאות, תרגילים ומשפטים

13.2.1 מציאת פתרונות בת"ל - $y'' + y = 0$

כלומר - $n = 2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad b = 0$.
דוגמאות לפתרונות: $\sin(x), \cos(x)$. נראה שאלו בת"ל - נחשב את הורונסקיאן:

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

כלומר, שונה מאפס בכל נקודה. (מספיק לבדוק עבור נקודה ספציפית). לכן, $\cos x, \sin x$ בת"ל ולכן מהווים בסיס למרחב הפתרונות (שמימדו 2). כלומר, כל פתרון הוא מהצורה: $a \cos x + b \sin x$.
הערה: אם f פתרון ל- $y'' + y = 0$, אז גם $f(x+c)$ לכל בחירה של c .

13.2.2 פתרונות מתאפסים בנקודה, תלויים לינארית - $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

הראו שאם y_1, y_2 זוג פתרונות שמתאפסים ב- x_0 , אז הם תלויים לינארית.

הוכחה:

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

לכן, הפתרונות תלויים לינארית.

□

13.2.3 אם פתרון מתאפס בשני נקודות, פתרון בת"ל אחר מתאפס ביניהן - $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

נתונים 2 פתרונות בת"ל: y_1, y_2 . הוכיחו: אם $y_1(a) = y_1(b) = 0$, אז קיים $c \in [a, b]$ כך ש- $y_2(c) = 0$.

הוכחה: נניח בשלילה שלא קיים c כזה. בפרט, y_2 לא מתאפס ב- $[a, b]$. נבנה בניית עזר:

$$h(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

ממשפט רול, קיימת $c \in [a, b]$ כך ש- $h'(c) = 0$. כלומר:

$$\frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{y_2^2} = \frac{W(y_2, y_1)}{y_2^2} = \frac{-W(y_1, y_2)}{y_2^2}$$

מכיוון ש- $W(y_1, y_2) = 0$ נקבל y_1, y_2 תלויים לינארית. סתירה! לכן קיים $c \in [a, b]$ כנדרש. \square

13.2.4 פתרון למד"ר לינארי הומוגני מסדר n מתאפס אינסוף פעמים, שווה זהותית ל-0

אם y פיתרון למד"ר לינארי הומוגני מסדר n בקטע סגור I . אז אם ל- y יש אינסוף אפסים בקטע I , אז $y = 0$.

פתרון: נבנה סדרת אפסים של y - x_1, x_2, x_3, \dots . נבנה אותה בצורה מונוטונית (ניקח אפס בקטע I , יש ∞ אפסים או מימינו או משמאלו).

לסדרה x_i יש גבול L . הגבול L סופי כי (x_i) חסומה בקטע I . בנוסף, L שייך לקטע I כי הקטע סגור. מרציפות נקבל:

$$y(L) = y(\lim x_n) = \lim y(x_n) = \lim 0 = 0$$

כלומר - L הוא בעצמו אפס של y .

ממשפט רול, בין כל זוג x_i יש אפס של y' . כלומר $y'(x_i^{(1)}) = 0$. נסתכל על הסדרה $x_i^{(1)}$. נשים לב, $x_i^{(1)}$ גם מונוטונית. מסנדוויץ': $x_i^{(1)} \rightarrow L$, ומרציפות y' :

$$y'(L) = \lim y'(x_i^{(1)}) = 0$$

נבנה באותו אופן $x_i^{(2)}$ בין כל $x_i^{(1)}, x_{i+1}^{(1)}$ כך ש- $y''(x_i^{(2)}) = 0$.

ניתן להמשיך n פעמים (כל עוד $y^{(i)}$ גזירה ברציפות). מצד שני, פתרון האפס גם מקיים זאת. מיחידות: $y = 0$.

\square

הערה השתמשנו בטענה "לסדרה X_n חסומה יש תת סדרה מתכנסת".

תזכורת ראינו את הטענות: 13.2.2 ואת 13.2.3. משתי טענות אלו ניתן להסיק את המשפט:

14.1 משפט ההפרדה של שטרום

יהיו y_1, y_2 פתרונות בת"ל למדר: $y'' + py' + qy = 0$.
יהיו a, b זוג אפסים עוקבים של y_1 .

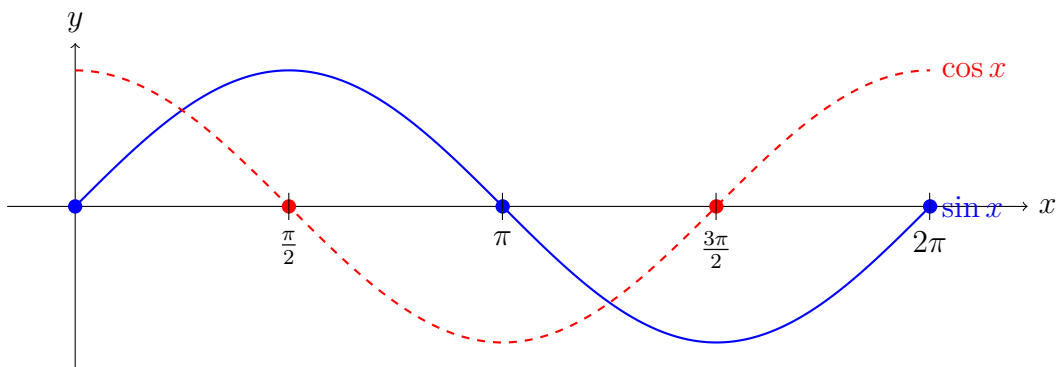
$$y_1(a) = y_1(b) = 0, \quad \forall c \in (a, b) \rightarrow y_1(c) \neq 0$$

אזי, ל- y_2 יש אפס יחיד בין a ל- b ו- $y_2(a) \neq 0, y_2(b) \neq 0$.

הוכחה נשים לב ש- y_1, y_2 לא חולקים אפסים (לפי 13.2.2 - אם הם חולקים אפס הם תלויים לינארית).
מטענה 13.2.3 - קיים אפס של y_2 בקטע הסגור, ומהבחנה הקודמת - קיים אפס של y_2 בקטע הפתוח (a, b) .
נראה שזה האפס היחיד בקטע:
נניח בשלילה $a < c < d < b, y_2(c) = y_2(d) = 0$. אז באותו אופן, קיים אפס ל- y_1 בקטע הפתוח (c, d) .
סתירה להנחה ש- a, b זוג אפסים עוקבים של y_1 .

□

דוגמא $y'' + y = 0$. נסתכל על הפתרונות $\{\cos x, \sin x\}$. בין כל זוג אפסים של \sin יש אפס של \cos .



נתונות y_1, \dots, y_n פונקציות בת"ל, גזירות ברציפות n פעמים. מצאו מד"ר לינארי הומוגני מסדר n , כך ש- y_1, \dots, y_n פתרונות שלו.

פתרון:

נסתכל על $W(y, y_1, \dots, y_n)$:

$$W(y, y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

נשים לב, $W(y, y_1, \dots, y_n)$ מתאפס אם y שווה לאחת הפונקציות הנתונות (יהיו 2 עמודות שוות).
הבחנה: $W(y, y_1, \dots, y_n) = 0$ הוא מד"ר לינארי הומוגני מסדר n .
 הסבר:

$$W(y, y_1, \dots, y_n) = y^{(n)} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + y^{(n-1)} \cdot (\text{מקדם}) + \dots$$

הערה: המקדם של $y^{(n)}$ אינו 1. המשפטים שהוכחנו על ורונסקיאן נכונים כשמקדם 1 - משוואה מנורמלת.

14.2 נוסחת אבל

תהי מד"ר לינארית הומוגנית מנורמלת:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

כאשר המקדמים p_i רציפים בקטע I . יהיו y_1, \dots, y_n פתרונות של המשוואה.
 אזי, הוורונסקיאן $W_1(x) = W(y_1, \dots, y_n)$ מקיים:

$$W'(x) + p_1(x)W(x) = 0$$

ולכן:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}$$

הוכחה נתחיל ב- $n=2$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

נגזור:

$$y'_1 y'_2 + y_1 y''_2 - y'_2 y'_1 - y_2 y''_1 = y_1 y''_2 - y_2 y''_1 = y_1 \underbrace{(-p_1 y'_2 - p_2 y_2)}_{y''_2} - y_2 \underbrace{(-p_1 y'_1 - p_2 y_1)}_{y''_1} = p_1 (y'_1 y_2 - y_1 y'_2)$$

כעת, המקרה הכללי: ננסח את הטענה הבאה:

תהי $A = (a_{ij}(x))$ מטריצה $n \times n$ של פונקציות גזירות.
נסמן A_k - המטריצה המתקבלת מלגזור את השורה ה- k של A .
אז:

$$|A|' = |A_1| + \dots + |A_n|$$

נשתמש בטענה ונקבל:

$$W_1' = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

בסימוני הטענה: $|A_1| = \dots = |A_{n-1}| = 0$. (אחרת נקבל 2 שורות זהות והורונסקיאן יתאפס).

כדי לפשט את הדטרמיננטה הנוותרת, נשתמש בכך ש- $y^{(n)} = -p_1 y^{(n-1)} - \dots - p_n y$ ונקבל:

$$W_1' = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1 y_1^{(n-1)} - \dots & \dots & -p_1 y_n^{(n-1)} - \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1 y_1^{(n-1)} & \dots & -p_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

כאשר פישטנו את השורה האחרונה ע"י הוספת כפולות של שורות קודמות. (פעולות שורה לא משנות דטרמיננטה). נוציא $(-p_1)$ מהשורה האחרונה ונקבל:

$$W_1'(x) = -p_1 \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \Rightarrow W_1'(x) = -p_1 W(x)$$

הוכחת טענת העזר קיימות 3 דרכים:

1. נוסחא: דטרמיננטה היא סכום של $n!$ תמורות. (אליאש מוכיח ככה)
2. אינדוקציה ופיתוח לפי שורות/ עמודות.
3. מולטי-לינאריות: פונקציה ב- n משתנים נקראית מולטי-לינארית אם היא לינארית בכל משתנה בנפרד.

טענת העזר היא שיוויון בין 2 פונקציות של $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

הבחנה: אגף שמאל ואגף ימין של טענת העזר הם פונקציות מולטי-לינאריות בשורות והעמודות של A .
הבחנה: כדי להוכיח שיוויון בין שתי פונקציות מולטי-לינאריות, מספיק לבדוק שיוויון במקרה הפשוט שבכל שורה של A יש בדיוק איבר אחד שונה מ-אפס ובכל עמודה של A יש בדיוק איבר אחד שונה מ-אפס.

כלומר, מספיק לקחת: $\begin{pmatrix} 0 & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ עבור A אלכסונית הטענה קלה:

$$|A| = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn} \Rightarrow |A|' = a_{11}'(a_{22} \dots a_{nn}) + \dots$$

14.3 הורדת סדר

הקדמה ומטרה תהי $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y(x) = 0$. נניח שידועים m פתרונות בת"ל ($m < n$). נראה שאפשר לבנות מד"ר חדש מסדר $n - m$ שמפתרונותיו ניתן למצוא $n - m$ פתרונות נוספים בת"ל למד"ר המקורי. יהיו y_1, \dots, y_m פתרונות בת"ל למד"ר. נבחר את הפתרון y_1 (נעבוד בקטע בו y_1 לא מתאפס).

ביצוע החלפת משתנים נציב $y = y_1 \cdot v$: נכתוב את המד"ר כמד"ר במשתנה v :

$$(y_1 v)^{(n)} + p_1 (y_1 v)^{(n-1)} + \dots + p_n (y_1 v) = 0$$

$$\downarrow$$

$$y_1 v^{(n)} + (q_1 v^{(n-1)} + \dots + q_n v) \quad (q_i \text{ היא פונקציה של } y_1 \text{ ו-} p_i)$$

הסקת מסקנה על המקדמים q_n נבחר את המקרה הפרטי $v = 1$: מצד אחד, הצבה זו שקולה להצבת $y = y_1$ במד"ר המקורית. מכיוון ש- y_1 הוא פתרון ידוע, אגף שמאל חייב להתאפס.

מצד שני, עבור $v = 1$ קבוע, כל הנגזרות שלו מתאפסות, ולכן רק האיבר החופשי $q_n \cdot v$ נותר במשוואה.

מכאן נובע בהכרח כי $q_n = 0$. כלומר, המד"ר החדשה תלויה רק בנגזרות של v , ונראית כך:

$$y_1 v^{(n)} + q_1 v^{(n-1)} + \dots + q_{n-1} v' = 0 \quad (**)$$

הורדת הסדר נגדיר $u = v'$: נשים לב, אם v פתרון של (**), אז u פתרון של מד"ר מסדר $n - 1$:

$$\boxed{y_1 u^{(n-1)} + q_1 u^{(n-2)} + \dots + q_{n-1} u = 0} \quad (***)$$

בניית מערכת הפתרונות אם נמצא $n - 1$ פתרונות בת"ל ל- (***) ($\tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n$), אז נבצע על כל אחד אינטגרל, נכפול ב- y_1 , ונקבל n פתרונות בת"ל למד"ר המקורי:

$$\underbrace{y_1, \quad y_1 \cdot \int_{x_0}^x \tilde{y}_2, \quad \dots, \quad y_1 \cdot \int_{x_0}^x \tilde{y}_n}_{n \text{ פתרונות בת"ל}}$$

הוכחת אי-תלות ליניארית (בת"ל) נראה שהפתרונות בת"ל: ניקח צ"ל, נשווה לאפס שהוא טריוויאלי:

$$c_1 y_1 + c_2 \cdot y_1 \int_{x_0}^x \tilde{y}_2 + \dots + c_n \cdot y_1 \int_{x_0}^x \tilde{y}_n = 0$$

נחלק ב- y_1 :

$$c_1 + c_2 \cdot y_1 \int_{x_0}^x \tilde{y}_2 + \dots + c_n \cdot y_1 \int_{x_0}^x \tilde{y}_n = 0$$

נגזור:

$$c_1 + c_2 \cdot y_1 \tilde{y}_2 + \dots + c_n \cdot y_1 \tilde{y}_n = 0$$

הנחנו כי $\tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n$ בת"ל ולכן $c_i = 0$.

הכללה: שימוש ב- m פתרונות והוכחת אי-תלות

אם ידועים לנו m פתרונות בת"ל $\{y_1, \dots, y_m\}$, נוכל להוריד את סדר המשוואה ב- m דרגות באופן **רקורסיבי**. המפתח לכך הוא היכולת "להעביר" פתרונות מהמד"ר המקורית למד"ר המצומצמת.

1. המרת פתרונות למד"ר המצומצמת אם y_i הוא פתרון למד"ר המקורית, אזי הפונקציה $u_i = \left(\frac{y_i}{y_1}\right)'$ היא פתרון למד"ר המצומצמת מסדר $n - 1$.

2. הוכחת שימור בת"ל-יות כדי לוודא שניתן להמשיך בתהליך, נראה כי אם הקבוצה $\{y_1, \dots, y_m\}$ בת"ל, אז גם קבוצת הנגזרות $\left\{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \dots, \left(\frac{y_m}{y_1}\right)'\right\}$ היא בת"ל. נניח צ"ל שמתאפס:

$$\sum_{i=2}^m c_i \left(\frac{y_i}{y_1}\right)' = 0$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים (נקבל קבוע אינטגרציה c_1):

$$\sum_{i=2}^m c_i \left(\frac{y_i}{y_1}\right) = c_1$$

נכפיל ב- y_1 ונעביר אגף:

$$\sum_{i=2}^m c_i y_i - c_1 y_1 = 0$$

מכיוון ש- $\{y_1, \dots, y_m\}$ הם פתרונות בת"ל למד"ר המקורית, כל המקדמים c_i יהיו אפס. לכן, הפתרונות החדשים בת"ל.

3. תהליך רקורסיבי ניתן לחזור על התהליך: נשתמש במד"ר המצומצמת (***) ונעזר בפתרון u_2 כדי להוריד את הסדר פעם נוספת ע"י הצבה מהצורה $u = u_2 \cdot w = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \cdot w$.

סיכום (לעצמי):

1. הנחת הפתרון: נגדיר $y = y_1 \cdot v$.

2. הצבה: האיברים של v (ללא נגזרת) **מתבטלים תמיד**.

3. הורדת סדר: נגדיר $u = v'$ לקבלת סדר $n - 1$.

4. פתרון: מציאת u וביצוע אינטגרציה.

5. חזרה: הרכבת הפתרון הכללי $y = y_1 \cdot \int u dx$.

דוגמא: מד"ר ליניארית מסדר שני

תהי המד"ר $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$. נניח כי y_1 הוא פתרון ידוע. נמצא עוד פתרון.

נבצע את ההצבה $y = y_1 \cdot v$:

$$(y_1 v)'' + p_1 (y_1 v)' + p_2 (y_1 v) = 0$$

משימוש בכלל המכפלה וסידור איברים, המד"ר עבור v היא:

$$y_1 v'' + v'(2y_1' + p_1 y_1) + v(y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1) = 0$$

נשים לב כי $v = 1$ הוא פתרון של המד"ר החדשה. (שקול ללהציב $y = y_1$). מאחר ו- y_1 פתרון, הביטוי בסוגריים של v מתאפס, וקיבלנו:

$$y_1 v'' + v'(2y_1' + p_1 y_1) = 0$$

הורדת הסדר נגדיר $u = v'$. המשתנה u מקיים מד"ר מסדר ראשון:

$$y_1 u' + (2y_1' + p_1 y_1)u = 0$$

נחלק ב- y_1 ונקבל את הצורה הסטנדרטית:

$$u' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p_1 \right) u = 0$$

נעביר אגפים, נעשה אינטגרל על שני האגפים, ונקבל את u_0 :

$$u_0 = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx}$$

נבצע אינטגרציה כדי למצוא את v_0 :

$$v_0 = \int_{x_0}^x u_0(x) dx$$

מסקנה הפתרון הנוסף למד"ר המקורית, הבלתי תלוי ב- y_1 , הוא:

$$y_2 = y_1 \cdot v_0 = y_1 \int_{x_0}^x \frac{e^{-\int p_1(t) dt}}{y_1^2(t)} dt$$

15.1 מד"ר לינארי הומוגני עם מקדמים קבועים

$$a_0 y^{(n)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

דוגמאות

1. $y' = y$, הפתרון הוא $y = C \cdot e^x$

2. $y' = 0$, הפתרון הוא $y = C$

3. $y'' = y$, הפתרון הוא $y = C \cdot e^{\pm x}$

4. $y'' = 0$, הפתרון הוא $y = ax + b$

5. $y'' + y = 0$, הפתרון הוא $y = \sin x, \cos x$

מה התורה הכללית?

נראה מה קורה אם מציבים במד"ר $y = e^{\lambda x}$ כאשר λ סקלר?

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots, y^{(i)} = \lambda^i e^{\lambda x}$$

כלומר, המד"ר נראה כך:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_n e^{\lambda x} = 0$$

נצמצם ב- $e^{\lambda x}$:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

נגדיר את המושג הבא:

הפולינום האופייני של המד"ר

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

הראנו: אם λ שורש ממשי של הפולינום האופייני, אז $e^{\lambda x}$ פתרון למד"ר. לכן, אם ל- P יש n שורשים ממשיים שונים, נוכל למצוא n פתרונות למד"ר. נותרו 3 שאלות:

1. מה אם יש שורש שמופיע פעמיים?

2. מה אם יש שורש מרוכב?

3. האם הפתרונות הם בת"ל?

נענה על השאלות.

שאלה 1 - מה אם יש שורש שמופיע פעמיים?

נניח ש- λ שורש שמאפס את P פעמים. נוכל לפרק את הפולינום:

$$P(x) = (x - \lambda)^k Q(x)$$

נראה שמתקיים: $\forall i \in [0, k-1], P^{(i)}(\lambda) = 0$

נגזור את P ונקבל:

$$\begin{aligned} P'(x) &= K(x - \lambda)^{k-1}Q(x) + (x - \lambda)^k Q'(x) \\ &= (x - \lambda)^{K-1} (KQ + (x - \lambda)Q') \end{aligned}$$

כלומר, P' מתאפס $k-1$ פעמים בנקודה λ . ניתן להמשיך באינדוקציה עד לנגזרת ה- $k-1$.

נראה ש- $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{K-1}e^{\lambda x}$ הם K פתרונות למד"ר

נגדיר אופרטור לינארי:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y$$

נציב $y = x^i e^{\lambda x}$ ונשתמש בתכונת הנגזרת לפי הפרמטר λ :

$$L[x^i e^{\lambda x}] = L\left[\frac{\partial^i}{\partial \lambda^i}(e^{\lambda x})\right] = \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} L[e^{\lambda x}] = \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} (P(\lambda) e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} P^{(j)}(\lambda) (e^{\lambda x})^{(i-j)}$$

אם ניקח את λ להיות שורש מריבוי K של P , וניקח אינדקס i הקטן מ- K ($i < K$), בהכרח נקבל $L[y] = 0$. זאת מכיוון שלפי ההבחנה הקודמת, כל הנגזרות $P^{(j)}(\lambda)$ מתאפסות לכל $j \leq i < K$.

דוגמא עבור המד"ר $y'' = 0$, הפולינום האופייני הוא $x^2 = 0$ עם שורש יחיד $x = 0$ מריבוי $K = 2$. לכן נובע ש- e^{0x}, xe^{0x} (כלומר $\{1, x\}$) הם זוג פתרונות בת"ל.

מסקנה סה"כ, הראנו שאם יש שורש מריבוי K אז קיימים K פתרונות שונים למד"ר.

שאלה 2 - מה אם יש שורש מרוכב?

אם λ מרוכב, אז $e^{\lambda x}$ פתרון מרוכב למד"ר.

נראה: אם λ שורש של P , אז $\bar{\lambda}$ שורש של P , מרוכב ושונה מ- λ .

נכתוב את הפולינום כמכפלת השורשים שלו: $P(x) = \prod (x - \lambda_i)$. מתקיים ש- λ שורש:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = \prod (\lambda - \lambda_i) = 0$$

נפעיל צמוד מרוכב על השויון:

$$\bar{\lambda}^n + a_1 \bar{\lambda}^{n-1} + \dots + a_n = \prod (\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_i) = 0$$

מסקנה: אם λ שורש מרוכב, אז $e^{\lambda x} x^i, e^{\bar{\lambda} x} x^i$ פתרונות מרוכבים. כלומר - אם קיים שורש מרוכב, נוכל ליצור ממנו ומהצמוד שלו פתרונות ממשיים:

$$\Re(e^{\lambda x} x^i) = \underbrace{\frac{e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda} x}}{2}}_{e^{\Re(\lambda) \cdot x} \cdot \cos(\Im(\lambda) \cdot x)} \cdot x^i, \quad \Im(e^{\lambda x} x^i) = \underbrace{\frac{e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda} x}}{2i}}_{e^{\Re(\lambda) \cdot x} \cdot \sin(\Im(\lambda) \cdot x)} \cdot x^i$$

הערה הוא הוכיח דברים על מרוכבים. חזרה על אקפוננט מרוכב. לא כתבתי.

שאלה 3 - האם כל הפתרונות בת"ל?

16.1 משפט מסכם

יהי P פולינום אופייני של מד"ר הומוגני, לינארי מסדר n , בעל מקדמים קבועים. נכתוב את השורשים שלו כך:

1. $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ שורשים ממשיים שונים, כאשר לכל i , λ_i מריבוי $m_i \geq 1$.

2. עבור שורשים מרוכבים נסמן $\mu_j, \bar{\mu}_j$ מריבוי m'_j , זוגות שורשים מרוכבים צמודים.

אז, n הפתרונות הבאים הם בת"ל:

□ עבור שורשים ממשיים:

$$e^{\lambda_i x} x_j, \quad i = 1, \dots, k, \quad 0 \leq j < m_i$$

□ עבור שורשים מרוכבים:

$$\begin{aligned} e^{\Re(\mu_j) \cdot x} \cdot \cos(\Im(\mu_j) \cdot x), \quad j = 1, \dots, k' \\ e^{\Re(\mu_j) \cdot x} \cdot \sin(\Im(\mu_j) \cdot x), \quad 0 \leq \ell < m'_j \end{aligned}$$

הוכחה הראנו בהרצאה קודמת שאלו פתרונות למד"ר. כעת נותר להוכיח רק אי-תלות לינארית. נניח שיש צ"ל של הפתרונות שנותן 0. זה גורר שיש צ"ל של הפתרונות הבאים שנותן 0:

$$\left\{ e^{\lambda_i x} x^j \right\}_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 0 \leq j < m_i}}, \left\{ e^{\mu_i x} x^j, e^{\bar{\mu}_i x} x^j \right\}_{\substack{1 \leq i \leq k' \\ 0 \leq j < m'_i}}$$

אנחנו רוצים להראות לכל $x \in I$:

$$\sum_{i=1}^{k''=k+2k'} c_i e^{\lambda_i x} x^j = \sum_{i=1}^{k''} P_i(x) e^{\lambda_i x} = 0 \Rightarrow P_i(x) = 0 \quad \forall i \quad (*)$$

נחלק את אגף שמאל ב $e^{\lambda_1 x}$:

$$\sum_{i=1}^{k''} P_i(x) e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = P_1(x) + P_2(x) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \dots = 0$$

נניח P_1 פולינום ממעלה $d > 0$. נגזור את השויון $d+1$ פעמים כך ש- P_1 יעלם.

אם P פולינום ממעלה r ו- $\lambda \neq 0$, אז לכל $d \geq 0$:

$$(P(x)e^{\lambda x})^{(d)} = Q_d(x)e^{\lambda x} \quad (\text{עבור } Q_d \text{ פולינום ממעלה } r)$$

הוכחה:

$$(P(x)e^{\lambda x})^{(d+1)} = ((P(x)e^{\lambda x})^{(d)})' \underset{\text{הנחת אינדוקציה}}{=} (Q_d(x)e^{\lambda x})' = Q_d'(x)e^{\lambda x} + \lambda Q_d(x)e^{\lambda x}$$

קיבלנו ע"י הנחת אינדוקציה: $(P(x)e^{\lambda x})^{(d+1)} = e^{\lambda x}(Q_d'(x) + \lambda Q_d(x))$. אז $Q_{d+1}(x) = Q_d'(x) + \lambda Q_d(x)$ ממעלה d . \square

נשתמש בטענה בשביל לגזור $1 + \deg(P_1(x))$ פעמים את $\sum_{i=1}^{k''} P_i(x)e^{(\lambda_i - \lambda_1)x}$ ונקבל:

$$\sum_{i=2}^{k''} Q_i(x)e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = 0 \quad (**)$$

עבור פולינום Q_i עם אותה מעלה כמו P_i .

אינטואיציה: קיבלנו שיוויון דומה למה שהתחלנו עם פחות פונקציות. לכן כדאי להפעיל הוכחה באינדוקציה על k'' - מספר השורשים השונים של הפ"א.

$$\text{כלומר נניח ש-} \sum_{i=2}^{k''} \tilde{Q}_i(x)e^{(\tilde{\lambda}_i - \lambda_1)x} = 0 \text{ גורר כי } \tilde{Q}_i(x)_i = 0 \text{ לכל } i.$$

מהצעדים שעשינו והנחת האינדוקציה נובע ש- $Q_i = 0$ ב- $(**)$ לכל $2 \leq i \leq k''$.

מעלת P_i היא מעלת Q_i לכן $P_i = 0$ ב- $(**)$ לכל $2 \leq i \leq k''$. כלומר, $P_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0$. אבל $e^{\lambda_1 x}$ לא מתאפס באף נקודה ולכן $P_1(x) = 0$ לכל x בקטע לכן P_1 פולינום האפס.

זה מסיים את צעד האינדוקציה ($P_i \equiv 0$ לכל i). מקרה הבסיס דומה.

\square

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5y^{(2)} - 4y' + 4y = 0 \quad \text{דוגמא}$$

הפ"א נראה כך:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2(x+1)^2$$

השורשים הממשיים: $\lambda_1 = 2, m_1 = 2$. לכן פתרונות הם e^{2x}, xe^{2x} .

השורשים מרוכבים: $\mu_1 = i, \mu_2 = -i, m'_1 = 1$. לכן פתרונות הם $\sin x, \cos x$.

סה"כ מצאנו 4 פתרונות בת"ל:

$$\{e^{2x}, xe^{2x}, \sin x, \cos x\}$$

הראו שאם יש מד"ר הומוגני, סדר n , מקדמים קבועים שכל פתרונותיו חסומים ב- $[0, \infty)$ אז $\Re[\lambda_i] \leq 0$ לכל i (שורשי הפ"א). בנוסף, אם $\Re[\lambda_i] = 0$, אז הריבוי של λ_i הוא 1. (גם הכיוון השני נכון).

נתחיל בכיוון השני: כל פתרון הוא מהצורה $e^{\lambda_i x_j} x^j$ או $e^{\Re(\lambda_j) \cdot x} \cdot \cos(\Im(\lambda_j) \cdot x)$, $e^{\Re(\lambda_j) \cdot x} \cdot \sin(\Im(\lambda_j) \cdot x)$. אם $\Re(\lambda_i) < 0$: $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda_i x_j} x^j = 0$ ולכן $e^{\lambda_i x_j} x^j$ חסומה. אותו דבר עבור $e^{\Re(\lambda_j) \cdot x} \cdot \cos(\Im(\lambda_j) \cdot x)$, $e^{\Re(\lambda_j) \cdot x} \cdot \sin(\Im(\lambda_j) \cdot x)$.

אם $\Re(\lambda_i) = 0$, אבל הריבוי הוא 1: אז $j = 0$ והפתרונות כולם חסומים:

$$1, \sin(\Im[\lambda_i] \cdot x), \cos(\Im[\lambda_i] \cdot x)$$

הכיוון השני: נניח בשלילה שקיים שורש λ_i כך ש- $\Re(\lambda_i) > 0$, ונבנה פתרון לא חסום ונקבל סתירה: אם λ_i ממשי, אז $e^{\lambda_i x}$ דוגמא לפתרון לא חסום. אם λ_i מדומה, אז $e^{\Re(\lambda) \cdot x} \cdot \sin(\Im(\lambda) \cdot x)$ דוגמא לפתרון לא חסום. נותר לדבר על המקרה ש- $\Re(\lambda_i) = 0$. נניח בשלילה שקיים λ_i כזה עם ריבוי גדול מ-1. נבנה פתרון לא חסום: $e^{\lambda_i x} x^j$.

אם λ_i ממשי: $\lambda_i = 0$ ואז x פתרון לא חסום, סתירה.

אם λ_i מדומה, אז $x \cdot \cos(\Im[\lambda_i]x)$ פתרון לא חסום, סתירה.

□

הוכיחו כי הקבוצה $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$ בת"ל בקטע I .

נבנה מד"ר לינארי הומוגני מסדר $2n + 1$ עם מקדמים קבועים, שהקבוצה הנ"ל היא בסיס למרחב הפתרונות שלה. נשים לב ש-

$$\begin{aligned}\sin(nx) &= e^{0x} \sin(nx) \cdot x^0 \\ \cos(nx) &= e^{0x} \cos(nx) \cdot x^0\end{aligned}$$

נבנה פולינום:

$$P(t) = \prod_{k=1}^n (t - ik)(t + ik)t = \prod_{k=1}^n (t^2 + k^2)t$$

נבנה מד"ר שזה הפ"א שלו. מהמשפט המסכם, $\{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots, \sin nt, \cos nt\}$ בסיס למרחב הפתרונות, בפרט בת"ל.

□