

משוואות דיפרנציאליות רגילים

חורף - תשפ"ז

גלית לנץ

תוכן עניינים

5	1	הרצאה 1
5	1.1	הגדירות בסיסיות
5	1.1.1	מה זה מד"ר בכל???
5	1.1.2	מד"ר מסדר ח
5	1.1.3	מד"ר לינארית
5	1.1.4	משוואת אוטונומית מסדר ראשון
6	1.2	מערכת משוואות דיפרנציאליות
6	1.2.1	הגדירה כללית
6	1.2.2	הצורה הנפוצה יותר
6	1.2.3	פתרון מד"ר
7	1.2.4	הערות על מד"ר אוטונומיות
8	2	הרצאה 2
8	2.1	דוגמאות למד"רים
8	2.1.1	גידול אוכלוסייה
8	2.1.2	התפרקות רדיואקטיבית
8	2.1.3	המשוואת הלוגיסטית
9	2.2	דוגמאות למערכות של משוואות
9	2.2.1	מודל SIR
9	2.2.2	מודל טורף-נטרף (Lotka-Volterra)
10	2.2.3	דוגמה מפיזיקה : ()
11	3	הרצאה 3
11	3.1	פתרון משוואת לינארית מסדר ראשון
11	3.1.1	הומוגנית
12	3.1.2	לא הומוגנית
14	3.2	דוגמאות לשימוש בפתרון הכללי
14	3.2.1	דוגמה 1 - הומוגנית
14	3.2.2	דוגמה 2 - לא הומוגנית
15	4	הרצאה 4
15	4.1	משוואות ניתנות להפרדה
15	4.1.1	מקרה פרטי $g = 1$
16	4.1.2	מקרה כללי

16	בUPIת תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה	4.1.3
18		5 הרצאה 5
18	דוגמא למד"ר ניתנת להפרדה - פתרון המשוואה הלוגיסטיבית	5.1
19	הערה כללית	5.1.1
20	שיטה לפתרת מד"ר מסדר ראשון - החלפת משתנים	5.2
21		6 הרצאה 6
21	משפט הקיום והיחידות - פיקרד לנDELוף	6.1
21	הוכחה	6.1.1
22	הлемה של גראנוול	6.1.2
26		7 הרצאה 7
26	דוגמא לשימוש במשפט	7.1
27		8 הרצאה 8
27	עקרון היחידות	8.1
27	דוגמא - משואה לוגיסטיבית	8.1.1
28	עקרון המשכה	8.2
29	פתרון גלובלי	8.3
29	דוגמאות מתי משפט הקיום והיחידות לא עובד	8.4
30	עקרון ההדבקה	8.4.1
31		9 הרצאה 9
31	המשך דוגמאות	9.1
31	אין לפישיות, אין יחידות בסביבה	9.1.1
31	או לפישיות, כן יש יחידות בסביבה	9.1.2
32	דוגמא לשימוש במשפט הפתרון הגלובי	9.1.3
33		10 הרצאה 10
33	חקירה אICONית של מד"ר	10.1
33	משפט	10.1.1
34	משפט משלים	10.2
36	גררות	10.3
36	משפט הגדר	10.3.1
37	מסקנה - משפט המשפט	10.3.2
37	דוגמאות	10.4
38		11 הרצאה 11
38	כמה השלמות על משוואות אוטונומיות	11.1
38	טענה	11.1.1
38	טענה	11.1.2

39	11.1.3	שכלול למשפט הגדר
39	11.2	איןטואיציה למשפט ומשפט הוף
40	11.3	משפט המשפט ההוף
42	12 הרצאה 12	
42	12.1	משווה לינארית מסדר n
42	12.1.1	משפט קיום ויחידות גלובלי למשווה לינארית מסדר n
43	12.1.2	מסקנה ממשפט קיום ויחידות
44	12.1.3	טענה - ורונסקיין מתאפס עבור פונקציות $T''L$
44	12.1.4	משפט - פתרונות בת"ל לא מאפסות ורונסקיין
45	13 הרצאה 13	
45	13.1	מסקנה - ורונסקיין מתאפס אז ורונסקיין שווה זהותית $L=0$
45	13.2	דוגמאות, תרגילים ומשפטים
45	13.2.1	מציאת פתרונות בת"ל $y'' + y = 0$
45	13.2.2	פתרונות מתאפסים בנקודה, תלויים לינארית $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$
46	13.2.3	אם פתרון מתאפס בשני נקודות, פתרון בת"ל אחר מתאפס בינהן
46	13.2.4	$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$
47	14 הרצאה 14 - 15/12	
47	14.1	משפט הפרדה של שטרום
48	14.2	נוסחת Abel
50	14.3	הורדת סדר
53	15.1 - הרצאה 15 - 16/12	
53	15.1	מד"ר לינארי הומוגני עם מקדמים קבועים
55	16 הרצאה 16 - 22/12	
55	16.1	משפט מסכם
57	16.1.1	תרגילים

1 הרצאה 1

1.1 הגדרות בסיסיות

1.1.1 מה זה מ"ר בכלל???

משוואה דיפרנציאלית רגילה

משוואה שמעורבת פונקציה ונגזרות שלה.

$$F((t, y(t), \dots, y^n(t)) = 0$$

1.1.2 מ"ר מסדר n

$$y^n = f(t, \dots, y^{n-1})$$

1.1.3 מ"ר לינארית

$$a_0 + a_1(t) \cdot y(t) + \dots + a_n(t) \cdot y^n(t) = b(t)$$

אם $b(t) = 0$ המשוואה נקראת **הומוגנית**.

1.1.4 משוואה אוטונומית מסדר ראשון

$$y'(t) = f(y(t))$$

1.2 מערכת משוואות דיפרנציאליות

1.2.1 הגדרה כללית

שתי משוואות בשתי פונקציות:

$$F_1(y_1^n, y_2^n, \dots, y_1, y_2) = 0$$

$$F_2(y_1^n, y_2^n, \dots, y_1, y_2) = 0$$

בדרך כלל נשמש בצורה הבאה:

1.2.2 הצורה הנפוצה יותר

$$F_1(t, y_1, y_2) = 0$$

$$F_2(t, y_1, y_2) = 0$$

הערה: לפעמים יהיו k משוואות בא פונקציות.

1.2.3 פתרון מד"ר

נפתרו את המשוואה $y'(t) = y(t)$. ראשית, נניח כי $y(t) \neq 0$.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$$

אם y תמיד חיובית: נשים לב שזו נגזרת מוכרת.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = (\log(y(t)))' = 1$$

נבצע אינטגרל לשני האגפים,

$$\log(y(t)) = t + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

עליה לחזקת e , ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = e^t \cdot e^c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

אם y תמיד שלילית: נעשה את אותו דבר אבל על $-\log(-y(t))$ ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = -e^t \cdot e^c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

לסיכום, אוסף הפתרונות הוא:

$$y(t) = e^t \cdot C \quad , \quad C := e^c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

נבדוק שזה פתרון:

$$y'(t) = e^t \cdot C = y(t)$$

נראה שאין עוד פתרונות: נשתמש בפונקציית עזר:

$$g(t) = \frac{y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = \frac{y'(t)e^t - y(t)e^t}{(e^t)^2} = \frac{y'(t) - y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = 0 \iff \text{קבועה } g \iff y(t) = c \cdot e^t$$

1.2.4 הערות על מ"ר אוטונומיות

.1. אם y_0 פתרון של $y_c(t) = y_0(t + c)$ או גם $y'(t) = f(y(t))$ לכל בחירה של c .

2 הרצאה 2

2.1 דוגמאות למד"רים

2.1.1 גידול אוכלוסייה

. $N(t)$ - גודל האוכלוסייה בזמן t , K - קבוע שנתי באוכלוסייה.

$$N'(t) = K \cdot N(t)$$

באופן דומה לפתרון המד"ר שראינו בהרצאה 1,

$$N(t) = e^{kt} \cdot C'$$

נסמן כתנאי התחלת את $N(0)$, כלומר - הגודל ההתחלתי של האוכלוסייה

$$N(0) = C$$

לכן ניתן לכתוב,

$$N(t) = e^{kt} \cdot N(0)$$

2.1.2 התפרקות רדיואקטיבית

נסמן ב- $N(t)$ את מספר החלקיקים באיזהו חומר רדיואקטיבי.
המד"ר שלנו יהיה

$$N'(t) = -K \cdot N(t)$$

ואז נקבל (שוב, באופן דומה להרצאה 1)

$$N(t) = e^{-kt} \cdot N(0)$$

2.1.3 המשוואה הלוגיסטיבית

מידול לגודל האוכלוסייה עם משאבים מוגבלים.
כלומר, אם האוכלוסייה לא יכולה לעبور סף C . (כלומר $N(0) < C$). המשוואה תהיה

$$N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{C}\right) = K \cdot N(t) - \frac{K}{C} \cdot N(t)^2$$

2.2 דוגמאות למערכות של משוואות

2.2.1 מודל SIR

נחלק את כלל האוכלוסייה ל-3 סוגים:

1. "רגישים" Susceptible - $S(t)$

2. "נדבק" Infected - $I(t)$

3. "מחלימים" Recovered - $R(t)$

עבור קבועים $\beta > 0$, $\gamma > 0$ קיבל:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\ I'(t) &= \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \\ R'(t) &= \gamma \cdot I(t) \end{aligned}$$

(*) - זו מערכת אוטונומית מסדר ראשון אך אינה לינארית.

בדיקת שפויות למערכת:

נשים לב שסכום האוכלוסייה =

אוכלוסייה בזמן 0 $= (S + I + R)(0) = 0$ ואז:

$$(S + I + R)'(t) = S' + I' + R' = 0$$

כלומר קבוע לאורך כל הזמן.

2.2.2 מודל טורף-נטרף (Lotka-Volterra)

נסמן:

$x(t)$: כמות הנטרפים (צמחוניים/ארנבות).

$y(t)$: כמות הטורפים (אריות).

המערכת:

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), & a > 0, b > 0 \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t), & c > 0, d > 0 \end{aligned}$$

דוגמא לפתורו:

$$\begin{cases} y \equiv 0 \\ x(t) = x(0)e^{at} \end{cases}$$

2.2.3 דוגמא מפיזיקה :

חוק שני של ניוטון - $F = m \cdot a$
 $x(t)$ - מיקום של חלקיק הגוף בזמן t .
 $x''(t)$ - תאוצה של חלקיק הגוף בזמן t .
 m - מסה של הגוף.

$$x''(t) \cdot m = f(x(t), x'(t), \dots)$$

3 הרצאה 3

3.1 פתרון משווה לינארי מסדר ראשון

3.1.1 הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = 0$$

תמיד קיים פתרון האפס - "פתרונות הטריוויאלי". נרצה למצוא את שאר הפתרונות.

$$\text{נניח ש-} y \neq 0, \frac{y'}{y} = -p$$

מההנחה שלנו, והנהה נוספת ש- y פונקציה רציפה: y תמיד חיובית או תמיד שלילית.
בהתאם, הפתרון יהיה:

$$(\ln(|y|))' = (\ln(\pm y))' = -p$$

נניח למשל ש- y חיובית ממש.

הfonקציות הקדומות של $p(x)$ הן מהצורה: $C - \int_a^x p(t)dt$. (המשפט היסודי).

לכן,

$$\ln |y| = C - \int_a^x p(t)dt$$

נפעיל אקספוננט,

$$|y(x)| = e^C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

שכל ל-

$$\forall x, \quad y(x) = D \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}, \quad D := e^C, \quad D > 0$$

מצאו פונקציות מועמדות לפתרון. נראה:

1. הן אכן פתרונות:

עבור קבועות הפתרונות שמצאנו,

$$y(x) = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

נגזרו: $y' = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x))$

ונקבל: $y' + p \cdot y = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x)) + (D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}) \cdot (p(x)) = 0$

כלומר - הקבועה מקיימת את המשוואה המקורית.

2. אלו כל הפתרונות: ניקח פתרון כלשהו, y .

נגדיר פונקציית עזר:

$$g(x) := \frac{y(x)}{e^{-\int_a^x p(t)dt}}$$

נגזרה:

$$g' = y' \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p$$

נציב y' ונקבל:

$$(-p \cdot y) \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p = 0$$

ולכן,

$$g = C, \quad C \in \mathbb{R} \iff g \text{ קבועה} \iff g' = 0$$

לסיכום,

$$y(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

מה אם נוסיף תנאי תחיליה?

$$y(x_0) = y_0$$

נציב $a = x_0$, $C = y_0$ ונקבל:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

זהו הפתרון היחידי לעניית הערך ההתחלתי הזו.

3.1.2 לא הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = q(x)$$

נניח שקיים פתרון ונכפול את 2 האגפים בפונקציה μ (גזרה ואף פעמיות לא מתאפסת).

$$\mu \cdot y' + \mu \cdot p \cdot y = \mu \cdot q \quad (1)$$

היה לנו שימושי אם "במקרה" אגף שמאל הוא בדיקת y' . נרצה לבחור μ שתקיים את זה.

ננסה להבין כיצד לבחור את μ הזו.

מכלול המכפלת:

$$(\mu \cdot y)' = \mu' \cdot y + \mu \cdot y'$$

לכן, בהתבסס על המשוואה המקורית (1) - נרצה $\mu' \cdot y + \mu \cdot y' = \mu \cdot p \cdot y$.

כלומר, באופן שקול, נרצה לדרוש: $\mu' = \mu \cdot p$.

ועדי העברת אגפים,

$$\mu' - \mu \cdot p = 0$$

רגע, זו משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון! לכן, ניקח:

$$\mu(x) = e^{-\int_a^x p(t)dt} = e^{\int_a^x p(t)dt}$$

אחרי שבחרנו את μ , נחזר לפתרון המד"ר שלנו:

כאמור, בחרנו את μ כך שמתקיים:

$$(\mu \cdot y)' = \mu \cdot q$$

נעשה אינטגרל על שני הצדדים,

$$\mu \cdot y = \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + C$$

נחלק ב- μ ,

$$y(x) = \frac{1}{\mu} \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + \frac{C}{\mu}$$

$$\text{כאשר } \mu(x) = e^{\int_a^x p(t) dt}$$

מצאנו פתרון כללי למשוואת לינארית לא-הומוגנית.

בדיקות שפויות

1. להציג את הפתרון הכללי ולודא שהוא פתרון.

2. מה אם $0 = q$? כל הפתרונות נתונים ע"י $y(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$. שזה אכן הפתרון שיצא לנו עבור מערכת הומוגנית.

3. נניח ש y_1, y_2 פותרים את המד"ר.

נסתכל על ההפרש: $\Delta = y_1 - y_2$

$$\Delta' + p\Delta = y'_1 + py_1 - y'_2 + py_2 = 0$$

כלומר, הפרש פתרונות של מד"ר לא הומוגני הוא פתרון של מד"ר הומוגני.

אפשר לנסות למצוא פתרונות ל- $y' + py = q$ ע"י הצבת $C(x)$. כלומר, לפתור משווה ב-($C(x)$). (נציב שירוטי, וזה נמצא אותו במדויק).

נציב $y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$ במשווה הלא הומוגני:

$$y' + py = C' \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} + C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} \cdot (-p) + p \cdot C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} = q$$

$$\Rightarrow C' \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} = q$$

נכפיל את שני האגפים ב- $e^{\int_a^x p(t) dt}$

$$C' = q \cdot e^{\int_a^x p(t) dt}$$

זו משווה שcola (במשתנה חדש $(C(x))$.

מהמשפט היסודי נקבל:

$$C(x) = \int_a^x q(t) e^{\int_a^t p(t) dt} dt + D \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$$

3.2 דוגמאות לשימוש בפתרון הכללי

3.2.1 דוגמא 1 - הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x$$

כלומר $p(x) = \sin(x)$ ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C \cdot e^{-\int_a^x \sin(t) dt} = C \cdot e^{-\cos x + \cos a} = D \cdot e^{-\cos x}$$

(C יכול לקבל כל ערך, וכן גם $D := C \cdot e^{\cos a}$ יכול לקבל כל ערך).

3.2.2 דוגמא 2 - לא הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x + \cos x$$

פתרון כללי יהיה:

$$y = D \cdot e^{-\cos x} + \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x e^{\cos t} \cos(t) dt}{e^{\cos x}}$$

4.1 משוואות ניתנות להפרדה

הגדירה

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

4.1.1 מקרה פרטי 1

מדד'ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = h(y(t))$$

נניח ש- y פתרון, כך ש- $0 \neq h(y)$ בתחום הפתרון.נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$

$$\frac{y'}{h(y)} = 1$$

נשים לב שאם $H(t)$ זו פונקציה קדומה של $\frac{1}{h(t)}$

$$(H(y))' = \frac{y'}{h(y)}$$

לכן המשוואה שකולה למשוואה

$$(H(y))' = 1 \Rightarrow H(y(t)) = C + t$$

איך נמצא את y ? קיימת ל- H הופכית בתחום שאנו עובדים בו בגלל שהיא מוגדרת כך

$$H(t) = \int_{x_0}^t \frac{1}{h(x)} dx + \text{קבוע}$$

נשים לב, שלפי ההנחה שלנו - h לא מתאפסת. בפרט $\frac{1}{h}$ בעלת סימן קבוע - חח"ע. לכן גם H חח"ע. לכן כדי למצוא את y , נרצה להפעיל את $H^{-1}(t)$ על שני האגפים.

נקבל את הפתרון:

$$\forall C, \quad y(t) = H^{-1}(C + t)$$

4.1.2 מקרה כללי

מד"ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

נמשיך עם ההנחה $h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

ניקח H קדומה של g , ונקבל,

$$\frac{y'}{h(y)} = (H(y))' = G' \Rightarrow H(y) = G$$

נפעיל H^{-1} על שני האגפים,

$$\forall C \in \mathbb{R}, \quad y(t) = H^{-1}(G(t)) + C$$

אלו כל הפתרונות כך ש- $0 \neq h(y)$ בתחום.

בדיקה שפיות אפשר להשלים (אין לי כוח), אין צורך בבדיקה שפיות אם כל הצעדים בהוכחה הם אמ"ם.

4.1.3 בעיית תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה

נוסיף תנאי התחליה לבעה,

$$\begin{cases} y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור את זה כאשר מניחים שוב ש- $0 \neq h(y)$ בתחום.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

نعsha אינטגרל בקטע $[x_0, x]$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'}{h(y)} dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

نعsha החלפת משתנים $y(t) = v$

$$\Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dv}{h(v)} = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

נוקח G קדומה של h , g קדומה של $\frac{1}{h}$, ונקבל:

$$G'(x) - G'(x_0) = H(y(x)) - H(y(x_0))$$

נוסיף $H(y(x_0))$ לשני האגפים,

$$H(y(x)) = G'(x) - G'(x_0) + H(y(x_0))$$

נרכיב את H^{-1} ,
 $y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y(x_0)$

נציב את תנאי ההתחלת ונקבל

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y_0$$

5 הרצאה 5

5.1 דוגמא למד"ר ניתנת להפרדה - פתרון המשוואה הלוגיסטיבית

תזכורת

$$\begin{cases} N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \\ N(t_0) = N_0 \in (0, L) \end{cases}$$

זו משוואת אוטונומית.

נשים לב,

$$g(t) = 1, \quad h(N(t)) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right)$$

כלומר, המשוואת ניתנת להפרדה:

$$N'(t) = g(t) \cdot h(N(t))$$

נרצה למצוא (חלק) מפתרונות המד"ר.

נניח: $0 \neq h(t)$ בתחום ההגדרה של $N(t)$.

נחלק ב(N, h), ו אז לכל t בתחום (קטע פתוח שמכיל את t_0)

$$\frac{N'}{h(N)} = 1$$

נעשה אינטגרציה לשני האגפים, ו אז לכל t בתחום:

$$\int_{t_0}^t \frac{N'}{h(N)} dx = \int_{t_0}^t 1 dx$$

נעשה החלפת משתנים, ו אז:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = t - t_0$$

בשביל לחשב את אגף שמאל - צריך למצוא פונקציה קדומה של $\frac{1}{h}$, נסמן ב- H . נשתמש בפירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{h(v)} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v(1 - \frac{v}{L})} \right) = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v} + \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{v}{L}} \right)$$

וסה"כ, ע"י שימוש בנגזרת של \ln נקבל:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = \frac{1}{K} \left(\log v - \log(1 - \frac{v}{L}) \right) \Big|_{N(t_0)}^{N(t)}$$

מסקנה:

$$\frac{1}{K} \left(\log N(t) - \log(1 - \frac{N(t)}{L}) \right) - \frac{1}{K} \left(\log N_0 - \log(1 - \frac{N_0}{L}) \right) = t - t_0$$

נכפול ב- K ,

$$\left(\log N(t) - \log\left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \right) - \left(\log N_0 - \log\left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \right) = K(t - t_0)$$

נעביר אגפים ונקט אקספוננט:

$$\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{L}} = \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \cdot e^{K(t-t_0)}$$

קיבלנו משווה לינארית ב- $N(t)$:

$$N(t) = \frac{N_0}{\frac{N_0}{L} + \left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \cdot e^{-K(t-t_0)}}$$

5.1.1 הערה כללית

אם נתונה משווה מהצורה $y(t) = y_0$ רציפה, y_0 נקודת ש-פתרון.

5.2 שיטה לפתרת מד"ר מסדר ראשון - החלפת משתנים

שינויי משתנים/ הצבה

נתונה מד"ר מסדר ראשון עם תנאי התחלה,

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתחו ע"י שינוי המשתנים $\frac{y(t)}{t} = z(t)$

קיבלו מד"ר שקולה:

$$z'(t) \cdot t + z(t) = f(z(t))$$

נעביר אגפים ו נחלק ב- t :

$$z'(t) = \frac{f(z(t)) - z(t)}{t} = \frac{1}{t} \cdot (f(z(t)) - z(t))$$

נשים לב, זו מד"ר ניתנת להפרדה. ($h(z) = f(z) - z$, $g = \frac{1}{t}$)

נסמן:

$$\frac{z'}{h(z)} = \frac{1}{t} \Leftrightarrow z' = \frac{1}{t} \cdot h(z)$$

ניקח קדומה של H , $\frac{1}{x}$ ונקבל:

$$H(z(t)) - H(z(t_0)) = G(t) - G(t_0)$$

: $G = \ln t$, G קדומה של $\frac{1}{x}$, כלומר

$$H(z(t)) = H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) + \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

$$z(t) = H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) - \ln(t_0) + \ln(t)\right)$$

סה"כ,

$$y(t) = t \cdot H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) + \ln t - \ln t_0\right)$$

זהו פתרון שמקיים את תנאי התחלה.

6 הרצאה 6

יהי מד"ר מסדר ראשון, כאשר f רציפה.
המשפט מבטיח קיום ויחידות של פתרון למד"ר שמקיים תנאי התחלת $y(x_0) = x_0$ בשביל לנשח את המשפט, נגידר פונקציית ליפשיץ.

פונקציית ליפשיץ

פונקציה $f(x)$ בקטע I היא ליפשיצית עם קבוע K אם מתקיים:

הערה 1: אם f גזירה, והגזרת חסומה ב- I , אז f ליפשיץ:
הערה 2: אם f ליפשיץ, אז f רציפה.

6.1 משפט הקיום והיחידות - פיקרד לנDELof

תהי $f(x, y)$ פונקציה בתחום D קשיר (לרוב מלבן $J \times I$).
אם f רציפה ב- x וליפשיץ ב- y , וקבוע הליפשיץ אינו תלוי ב- x :

אז, לכל (x_0, y_0) בפנים של D , קיים $0 < \varepsilon$ כך שיש פתרון y למשוואה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

והוא מוגדר עבור $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. יתר על כן - הפתרון יחיד.

6.1.1 הוכחה

יחידות נניח בשליליה שקיים 2 פתרונות שונים Y, y לביעית הערך ההתחלתי הנתונה.

אם $y(x_0) = y_0$ ו- $y' = f(x, y)$ בקטע $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ אז

$$\int_{x_0}^x y'(t)dt = \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt \Rightarrow y(x) - y_0 = \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$$

אם $y(x_0) = y_0 + 0$ ו- $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt$ בקטע.

נשים לב, שאם y, Y פותרים את בעיית הערך ההתחלתי בקטע, אז:

$$Y(x) - y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, Y(t))dt - y_0 - \int_{x_0}^x f(t, y(t))dt = \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) - f(t, y(t))dt$$

נפעיל ערך מוחלט על שני האגפים,

$$|Y(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^x f(t, Y(t)) - f(t, y(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, Y(t)) - f(t, y(t))|dt$$

לפי תנאי המשפט, f ליפשיץ לפי y ולכן,

$$\int_{x_0}^x |f(t, Y(t)) - f(t, y(t))| dt \leq \int_{x_0}^x K \cdot |Y(t) - y(t)| dt$$

$$\text{נגדיר } g(t) = |Y(t) - y(t)|$$

נשים לב שהפונקציה g רציפה, אי שלילית וקודם הראנו שמתקיים $.g(x) \leq K \cdot \int_{x_0}^x g(t) dt$, اي שילילת בקטע $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ וקיים $x \geq x_0$ כך $g(x) = 0$. לפי הлемה, $g(t) = |Y(t) - y(t)| = 0$ ולכן:

$$\forall x \geq x_0, Y(x) = y(x)$$

6.1.2 הлемה של גרונוול

תהי g רציפה, אי שלילית בקטע $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$
אם $x \geq x_0$ אז $g(x) = 0$ לכל $x \geq x_0$ כך $\int_{x_0}^x g(t) dt \leq K \cdot \int_{x_0}^x g(t) dt$

הוכחת הлемה:

$$\text{נגדיר } G'(x) = g(x) \geq 0. \text{ ככלומר - } G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

$$G'(x) \leq K \cdot G(x)$$

$$\text{נחלק את שני האגפים ב-} e^{Kx}, \text{ נקבל}$$

$$G'(x) \cdot e^{-Kx} \leq K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx}$$

נעביר אגפים,

$$(G(x) \cdot e^{-Kx})' = G'(x) \cdot e^{-Kx} - K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx} \leq 0$$

כלומר, $G(x) \cdot e^{-Kx}$ בעלת נזרת אי- חיובית ולכן יורדת.

$$\text{לכן, עבור } x \geq x_0 \text{ נקבל}$$

$$G(x) \cdot e^{-Kx} \leq G(x_0) \cdot e^{-Kx_0} \leq 0$$

נשים לב ש- $e^{-Kx} > 0$, לכן נוכל לכפול את האי- שיוויון ולקבל

$$G(x) \leq 0$$

סה"כ,

$$0 \leq g(x) \leq K \cdot G(x) \leq 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

קיום נגדיר סדרת פונקציות באופן הבא:

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \end{cases}$$

שלבי הוכחה:

1. נבנה מלבן $D \subseteq \mathbb{C}$ ש- (x_0, y_0) . נגדיר מלבן מצומצם ע"י a' .

2. נראה שסדרת הפונקציות y_n חסומות במלבן D .

3. נראה התכונות של הסדרה: $y_n \rightarrow y$.

4. נוכחות התכנסות במ"ש ע"י מבחן M של ויירשטראס.

5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי.

1. נגדיר מלבן סביב הנקודה (x_0, y_0) :

$$S = \{|x - x_0| \leq a\} \times \{|y - y_0| \leq b\} \subseteq D$$

f רציפה ב- S , לכן לפי ויירשטראס, f מקבלת בו מקסימום ונסמן:

מציב את המדר' $y' = f(x, y)$ ונקבל:

$$|y'| \leq M$$

נסתכל על $y_1 - y$:

$$|y_1(x) - y(x)| \leq M|x - x_0| \leq M \cdot a$$

על מנת לא לצאת מהמלבן, $|y_1 - y| \leq b$, נראה שיתקיים

נגדיר מלבן מצומצם ע"י

$$S' = \{|x - x_0| \leq a'\} \times \{|y - y_0| \leq b\} \subseteq D$$

$$a' = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

2. **סדרת הפונקציות y_n חסומות במלבן D**

נראה שאם $|y_{n+1} - y_0| \leq b$ או $|x_0 - x| \leq a'$ ו גם $|y_n - y_0| \leq b$ בנסיבות אינדוקציה.

עבור $y_0(x) = y_0$, $n = 0$

נניח ש- y_n ו y_{n+1} עבור $|y_n - y_0| \leq b$

$$|y_{n+1} - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t))| dt \leq M(x - x_0) \leq M \cdot a' \leq b$$

סה"כ, הראנו y_n נשארות בתחום המלבן, שכן $f(y_n, t)$ הוא ביטוי מוגדר בתחום הגדרתה של f ונוכל להמשיך בהוכחה.

3. נראה הטענות של הסדרה: $y_n \rightarrow y$

נמצא חסם על $|y_{n+1} - y_n|$

$$|y_{n+1} - y_n| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n) - f(t, y_{n-1}) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})| dt$$

נשתמש בלייפשיציות של f ונקבל,

$$\int_{x_0}^x |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})| dt \leq K \cdot \int_{x_0}^x |y_n - y_{n-1}| dt$$

באיינדוקציה, נראה $|y_{n+1} - y_n| \leq \frac{M \cdot K^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

$$|y_1 - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0(t))| dt \leq M(x - x_0)$$

נניח עבור n ונראה עבור $n + 1$.

הראנו קודם ש-

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| \leq K \cdot \int_{x_0}^x |y_{n+1} - y_n| dt$$

מהנחה האינדוקציה נקבל,

$$\leq K \cdot \frac{M \cdot K^n}{(n+1)!} \int_{x_0}^x (t - x_0)^{n+1} dt = \frac{MK^{n+1}(x - x_0)^{n+2}}{(n+2)!}$$

סימנו. כעת נראה הטענות של y_n עם הגדרת הגבול לפי קושי.

יהיו $m < n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} |y_n - y_m| &= |(y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + (y_{m+1} - y_m)| \\ &\leq |y_n - y_{n-1}| + \dots + |y_{m+1} - y_m| \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \frac{M \cdot K^i (x - x_0)^{i+1}}{(i+1)!} < \varepsilon \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שהאיבר האחרון הוא זנב של טור מתכנס - לכן, עבור m גדול מספיק, יהיה קטן מ- ε .

סה"כ - הראנו כי קיימים L -גבול סופי.

4. נראה התכונות במ"ש ע"י מבחן M של ויירשטראס

תזכורות - מבחן M

אם (f_n) סדרה של פונקציות בקטע I וקיימת M_n כך ש- $|f_n(x)| \leq M_n$ לכל n .
ובנוסף, אז: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ מתכנס במידה שווה.

נגידר סדרת פונקציות חדשה:

$$\begin{cases} h_0 = y_0 \\ h_i = y_i - y_{i-1} & i \geq 1 \end{cases}$$

נשים לב,

$$|h_i| = |y_i - y_{i-1}| \leq \frac{M \cdot K^{i-1} (x - x_0)^i}{(i)!} \leq \frac{M \cdot K^{i-1} (a')^i}{(i)!}$$

מתקיים תנאי מבחן M ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במידה שווה.

ניתן לרשום:

$$y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + \dots + (y_n - y_{n-1}) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n$$

ולכן: $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במ"ש $\iff y_n$ מתכנס במ"ש

5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לעיית התנאי ההתחלתי

y_n רציפות ו- $y \rightarrow y$ במ"ש, שכן - ממשפט מאינפי 2, פונקציית הגבול y רציפה.

בנוסף, מרציפות f , $f(t, y_n)$ רציפה ובנוסף מתקיים:

$$|f(t, y_n) - f(t, y)| \leq K \cdot |y_n - y| \leq \varepsilon$$

כלומר, $f(t, y_n)$ מתכנסת במ"ש ל- $f(t, y)$.

משפט מאינפי 2, הראנו ש- $y \rightarrow y$ במ"ש, ולכן:

$$\int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

סה"כ, פונקציית הגבול, y היא מהצורה:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

כלומר, y מקיימת את המשוואה האינטגרלית¹ ורציפה, שכן היא מקיימת את המדר: $y' = f(x, y)$ עם תנאי התחלתי $y(x_0) = y_0$.

¹משוואת אינטגרלית - משוואת מהצורה: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$

7 הרצאה 7

7.1 דוגמא לשימוש במשפט

עבור המד"ר:

$$y' = \frac{y}{y^2 - x}$$

עם תנאי התחלתי, נראה קיום ויחידות פתרון.

נדרוש $y_0^2 \neq x_0$

נניח מלבד D סביבה $f(x, y) = \frac{y}{y^2 - x}$ שלא "נווגע" ב- $x = y^2$. נרצה להפעיל את המשפט על (x_0, y_0) , תחום D , והנקודה (x_0, y_0) .

נבדוק **שמתקיים תנאי לפישיז** נשים לב ש f גזירה.

התנאי הדרושים מתקיים אם $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ חסומה בתחום. (משפט לגרנץ').

נגזר,

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{y^2 - x - y \cdot 2y}{(y^2 - x)^2} = -\frac{y^2 + x}{(y^2 - x)^2}$$

הנגזרת חסומה כי היא רציפה בתחום סגור (וירשטראס).

8 הרצאה 8

תחת התנאים של משפט הקיום והיחידות נקבל כמה מסקנות.

8.1 עקרון היחידות

תהי (x_0, y_0) נקודה בפנים של D . נניח ש- y_1, y_2 2 פתרונות למד"ר שנחטכים בתחום. נניח שנחטכים ב- (x_0, y_0) .

אז, הפתרונות חייבים להסכימים בכל D . כלומר - לכל x בתחום -

$$L = \{t < x_0 \mid \forall x \in (t, x_0] : y_1(x) = y_2(x)\}$$

נשים לב ש- L הוא קטע וממשפט קיום ויחידות, L אינו ריק.

ל- L יש 2 אפשרויות:

$$L = (\ell, x_0) \quad .1$$

$$L = [\ell, x_0) \quad .2$$

אבל נשים לב ש- L תמיד אפשרות 2. אם L קטע פתוח אז, y_1 ו- y_2 מסכימים על $\ell > t$, ומרציפות - הן מסכימים גם ב- ℓ , כלומר - בהכרח $L = [\ell, x_0]$.

אם L בשפה של D , סימנו. אחרת, L בפנים של D . בפרט - ℓ נקודה פנימית ב- D .

ממשפט הקיום והיחידות, קיימת סביבה של ℓ כך ש- y_1, y_2 מסכימים בסביבה של ℓ - בסתירה להגדרה של L . לכן, בהכרח ℓ בקצת של D (קיים ויחידות ניתנו להפעיל רק בפנים של D).

8.1.1 דוגמא - משואה לוגיסטית

מצאנו את כל הפתרונות ל- $y' = K \cdot y(1 - \frac{y}{2})$

מצאנו פתרונות סינגולריים:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = L \end{cases}$$

טענה: אם פתרון y חותך את 0 $y \equiv 0$ אז $y \equiv 0$.

הסביר: יהי $T \geq 1$. נראה ש- $0 \leq y \leq T$.

נגדיר

$$D = \{[-2T, 2T] \times [-M, M]\}$$

נבחר M מספר כך ש- $(x, y(x))$ נמצא בפנים של D .

$$M = \max_{|t| \leq 2T} |y(t)| + 1$$

y ופתרון האפס נחתכים ב- D . בנוסף, תנאי הליפשיציות של f מתקיימים:

$$\frac{\partial(K \cdot y(1 - \frac{y}{2}))}{\partial y} = y$$

פונקציה לינארית ב- y

y חסום \Leftrightarrow נזרת חסומה \Leftrightarrow ליפשיציות

לכן, לפי עיקרונו היחידות: $0 = y(x)$ לכל x בתחום.

8.2 עקרון המשכה

תחת אוטם תנאים של משפט הקיום והיחידות. אם מצאנו פתרון y לבעיית תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אז, ניתן להמשיך אותו עד שנטקע בשפה.

הוכחה נגדיר

$L = \{t < x_0 \mid (t, x_0) \text{ יש פתרון לבעיית תנאי התחלתי ומוגדר ב-}\}$

נשים לב, L הוא קטע לא ריק.

אם $y(\ell) = (\ell, x_0)$, אז נוכל להגיד: $L = (\ell, x_0)$

נראה שהגבול זה קיים, ע"י קритריון קושי. לכל $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$|y(\ell + \varepsilon_1) - y(\ell + \varepsilon_2)| = \left| \int_{\ell + \varepsilon_1}^{\ell + \varepsilon_2} f(t, y(t)) dt \right| \leq M |\ell + \varepsilon_2 - \ell - \varepsilon_1| = M |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|$$

y רציפה, לכן $y(t) = y_0 + \int_{x_0}^t f(t, y(t)) dt$. כמובן - ניתן להמשיך את y לקטע הסגור $[\ell, x_0]$. אם L קטע סגור, נוכל להשתמש שוב בקיום ויחידות בקטע של L עד שנגיע לשפת D .

8.3 פתרון גלובלי

יהי $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ מלבן סגור אינסופי. תהא בעית תנאי התחלתי:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

f ליפשיצית ב- D לפי y . אז, קיימם פתרון ייחיד ($y(x)$ למד"ר שמודדר לכל b $a - b \leq x \leq a + b$)

הוכחה נגידיר
 $\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \end{cases}$
 הראננו בהוכחה של קיום ויחידות.

8.4 דוגמאות מתי משפט הקיום והיחidot לא עובד

דוגמה 1: אינסוף פתרונות או העדר פתרון בנקודת סינגולריות

$$y' - \frac{y}{x} = x$$

הפתרון למשוואת ההומוגנית הוא: $y(x) = e^{-\int -\frac{1}{t} dt} = e^{ln(x)+c} = x \cdot c$

לכן הפתרון למשוואת הלא הומוגנית הוא: $y(x) = x \cdot (\int x \cdot \frac{1}{x} dx) = x^2 + C$. הפתרון מוגדר ב- \mathbb{R} ופותר את המד"ר בתחום הגדרתו.

נשים לב שעבור $C \in \mathbb{R}$ - הפתרון $y_C = x^2 + C$ פותר את בעית תנאי התחלתי:

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

כלומר, קיימים אינסוף פתרונות בעית תנאי התחלתי.

דוגמה 2: עקרון הדבקה ואי-יחידות

$y' = -2\sqrt{y}$, $y \geq 0$ משווה ניתנת להפרדה ואוטונומית.

פתרון אחד הוא $y(x) = (c - x)^2$. גם $y(x) = 0$ הוא פתרון. נשים לב שהתנאי למשפט ליפשיץ לא מתקיים ב- $y = 0$ (הנגזרת של \sqrt{y} שואפת לאינסוף), ולכן אין יחידות.

ניתן להגדיר פתרון חדש על ידי הדבקה של שני הפתרונות. נגידיר:

$$y_c(x) = \begin{cases} (c - x)^2 & x \leq c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

פונקציה זו גירה ומקיימת את המד"ר. מכאן שדרך הנקודה $(0, 0)$ עוברים אינסוף פתרונות (עבור כל $c \geq 0$).

מסקנה מדוגמה זו היא:

8.4.1 עקרון הבדיקה

נניח שקיים פתרון סינגולרי: $y_0 = y(x)$ בתחום אחד, ופתרון אחד y_2 בתחום השני, ונניח שהתחומים נחכמים בנקודת אחת.
אם הם מסכימים בנקודת החיתוך, ניתן להגדיר פתרון חדש ע"י הדבקת הפתרונות.

דוגמה 3: תחום הגדרה חסום
נתונה המשוואה $y' = -\frac{x}{y}$. זוהי משווה ניתנת להפרדה:

$$yy' = -x \implies \frac{(y^2)'}{2} = -x \implies \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

לאחר סידור קיבל משווה מעגל:

$$x^2 + y^2 = 2C$$

לכל $C \geq 0$ קיבל זוג פתרונות $y(x) = \pm\sqrt{2C - x^2}$. הנזרת מתפוצצת כאשר $x \rightarrow \pm\sqrt{2C}$, ולכן לא ניתן להמשיך את הפתרון מעבר לנקודות אלו.

דוגמה 4: התפוצצות בזמן סופי
נתונה המשוואה $y' = y^2$. פתרונה הוא:

$$y(x) = \frac{1}{C-x}$$

(בנוסך קיים פתרון סינגולרי $0 = y$). הפתרון מוגדר עבור $x < C$ או $x > C$.

דוגמה מספרית: נניח $2 = y(1)$. אז $2 = \frac{1}{C-1} \implies C = 1.5$. הפתרון הוא:

$$y(x) = \frac{1}{1.5-x}$$

התחום המksamלי המכיל את $x = 1$ הוא $x < 1.5$. הפתרון שואף לאינסוף ככל שמתקרבים ל-1.5 ("התפוצצות"). זה מראה שמשפט הקיום והיחידות מבטיח קיום **مכוומי** בלבד, ולא גלובלי.

9 הרצאה 9

9.1 המשך דוגמאות

9.1.1 אין לפישיות, אין יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נשים לב, כי למורoutes ש- $y^{\frac{1}{3}}$ מוגדרת ב- $x=0$, היא אינה לפישית שם. (אפשר להראות ע"י נגזרת לא רציפה ב- $x=0$ או בעזרת כפל בcmathod).

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} &= 1 \\ \int_0^{y(x)} \frac{dv}{v^{\frac{1}{3}}} &\stackrel{y(t):=v}{=} \int_0^x \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} dt = \int_0^x dt \\ \frac{3}{2}(y(x))^{\frac{2}{3}} &= x \end{aligned}$$

כלומר, יש 2 פתרונות לביעית התנאי ההתחלתי: $y(x) = \pm \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$

נשים לב שקיים גם הפתרון הטריוויאלי: $y=0$.

מצד שני, מצאנו 2 פתרונות נחטכים בתחום שלא מכיל את $x=0$, אז הם יהיו שווים, מעיקרונו היחידות.

9.1.2 או לפישיות, כן יש יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} = 1$$

זו משווהה ניתנת להפרדה, כאשר $.h = x^{\frac{1}{3}} + 1$. נסמן H פונקציה קדומה של $\frac{1}{h}$.

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} &= 1 \\ H(y(x)) &= \int_0^x \frac{1}{h(y(t))} dt = \int_0^x 1 dt = x + c \end{aligned}$$

ע"י הפעלת הופכית של H , נקבל: $.y(x) = H^{-1}(x + c)$

מתקיים $0 = y(0) = H^{-1}(c) \Rightarrow c = H(0)$ ולכן:

נשים לב: $y(x) = H^{-1}(x + H(0))$ פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי בסביבת $x = 0$.

9.1.3 דוגמא לשימוש במשפט הפתרון הгалובלי

$$\begin{cases} y' = \tan x \cdot \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נראה שיש פתרון יחיד שמוגדר ב- $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

נרצה להפעיל את משפט הפתרון הгалובלי ב"פס": $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times K$ - אבל אסור.

ניקח פס סגור בתחום הפס הפתוח:

$$D = \{x_0 + a \leq x \leq x_0 + b\} \times R$$

כאשר a, b נבחרו כך ש- $0 < b < \frac{\pi}{2} - x_0$, $-a < \frac{\pi}{2} - x_0$

לכן, שימוש משפט הפתרון הгалובלי - יש פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי.

נוודא לפישיות:

$$\frac{\partial(\tan x \cdot \sin y)}{\partial y} = \tan x \cdot \cos y$$

נשים לב, ש- $\tan x$ ו- $\cos y$ חסום גם הוא ולכן - הנדרת לפי y חסומה ולכן, הפונקציה לפישית.

בננה פתרון כללי בפס עצמו, ע"י הדבקה. לכל $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ נרchieב את הפס עד שייכיל את x , ואז נגדיר את $y(x)$ לפי המשפט הקיום הгалובלי.

ו מוגדרת היטב שכן אם יש 2 פתרונות שנחטכים בנקודה, אז נפעיל את המשפט על פס סגור שמכיל את נקודת החיתוך.

תזכורת באמצעות משפט פיקרד לינדרוף, הוכחנו שמתקיימים עיקרונות היחידות ועיקרונות המשכה, בתחום בו: f רציפה וליפשיצית מקומית ב- y .

תזכורת

עיקרונות המשכה: בהינתן $D \subseteq K$, $y' = f(x, y)$ כמו בקיום ויחידות. בנוסף, תהא קבוצה קומפקטיבית $K \subseteq D$, כך ש- $x_0, y_0 \in K$. אז, יש פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי הנתונה שיצא מ- K (יצא גם משמאלי x_0 וגם מימני x_0).

10.1 חקירה אינטואיטיבית של מד"ר

היום, נדבר על $y' = f(y)$ במקרה בו f ליפשיצית מקומית.

תזכורת אם α מספר כך ש- $y = f(\alpha) = 0$ או $y = f(\alpha) = 0$ פתרון ל- $y' = f(y)$. נקרא לו סינגולרי.

10.1.1 משפט

יהיו $\beta < \alpha$ שני פתרונות סינגולריים עוקבים, המקיימים:

$$\forall \gamma \in (\alpha, \beta) : f(\gamma) \neq 0 \quad \text{וכו} \quad f(\alpha) = f(\beta) = 0$$

יהי $y(x)$ הפתרון לבעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר $y_0 \in (\alpha, \beta)$. אז מתקיימים:

1. הפתרון $y(x)$ מוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$.

2. הfonקציה $y(x)$ מונוטונית ממש (עולה או יורדת בהתאם לסימן של f בתחום).

3. y מקבל כל ערך בין α ל- β .

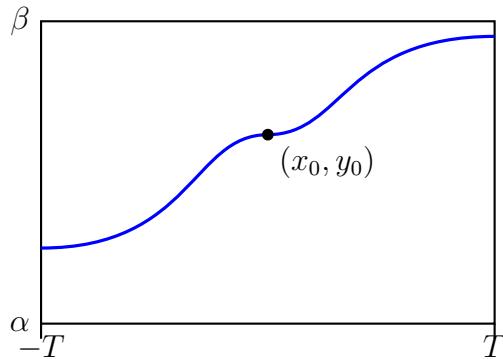
□ אם y עולה (כאשר $f(y) > 0$ בתחום):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \beta, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \alpha$$

□ אם y יורדת (כאשר $f(y) < 0$ בתחום):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \alpha, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \beta$$

הוכחה נבחן שקיימים y פתרון לבעיית תנאי ההתחלה. הפתרון לא חותך את $y = \beta$ או $y < \beta$ עבור x בתחום ההגדרה. למה מוגדר ב- \mathbb{R} ? כדי להראות שמדובר עבור $T \leq |x|$ לכל T , השתמש בעיקרו המשכה:



נקח מלבן $K = [-T, T] \times [\alpha, \beta]$. הפתרון יוצא מהמלבן הקומפקטי - אבל לא מהצלע העליונה או מהצלע התחתונה - לכן יוצאה מהצדדים ומוגדר בפרט ל- $|x| \leq T$.

למה y מונוטונית? כי $y' = f(y)$ בין α ל- β , f מקבלת סימן קבוע בקטע, לכן אם f מקבלת סימן חיובי אז y עולה ממש. בהתאם גם עבור סימן שלילי.

נותר חלק 3:

לשם הפשטות, נניח y עולה ממש. לכן הגבול $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ קיים וסופי. נסמן אותו ב- L .

נניח בשליליה: $\beta < L$. בפרא - $y' = f(y) \rightarrow f(L) > 0$. זה גורר y לא חסומה ולכן סטירה. לכן $\beta = L$. למה y לא חסומה?

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_1) &= \int_{x_1}^x y'(t) dt \\ &\geq \int_{x_1}^x \frac{f(L)}{2} dt \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שאם $0 < x \leq x_1$ יש $y'(x) = f(L) > 0$ לכל x .

בדומה, $\alpha < L_2$ למה? אחרת נקרה גבול $L_2 < \alpha$ ממשיך כמו קודם ונסיים.

10.2 משפט משלים

שוב, f ליפשיצית מקומית. נניח $\alpha = y$ פתרון סינגולרי מקסימלי. בעיית תנאי ההתחלה יש פתרון עם התכונות הבאות:

1. מונוטוני ממש

2. מקבל את כל הערכים (α, ∞)

3. אם y עולה אז תחום ההגדרה הוא $(-\infty, x_+)$ עבור $x_+ = x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{f(t)} dt$ או ∞ ואם האינטגרל מתבדר.

הוכחה קיימים 2 מקרים:

$$x > \alpha \text{ ו } f(x) > 0 .1$$

$$x > \alpha \text{ ו } f(x) < 0 .2$$

nocich תחת מקרה 1.

למה מונוטוני ממש? כי $y' = f'(y)$ (לפי עיקרונו היחידות, y לא חותך את $\alpha = y$), לכן y נשאר מעל α לאורך תחום ההגדרה.

למה y מקבל את כל הערכים - (α, ∞) ? נסתכל על הגבול $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = L$. אם $L = \alpha$ סיימנו. אחרת, נניח בsvilleה כי $\alpha > L$ אז y מתנהגת כמו פונקציה לינארית ב- $-\infty$.

$$f(y(x)) \rightarrow f(L) > 0$$

מכאן:

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_1) &= \int_{x_1}^x f(t) dt \\ &\geq \int_{x_1}^x \frac{f(L)}{2} dt \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שקיים $x_1 < x$ כך ש- $f(x) \geq \frac{f(L)}{2}$.

תחום הגדרה: ומה הפתרון ניתן להמשך עד ∞ ? כי נוכל להפעיל עיקרון המשכה על $K = [-T, x_0]$ לכל $T > \alpha, y_T$.

nocich את 3: בשביל x_+ נפריד משתנים:

$$\begin{aligned} y' &= f(y) \\ \frac{y'}{f(y)} &= 1 \\ \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} &\stackrel{V=y(t)}{=} \int_{x_0}^x \frac{y'}{f(y)} dt = \int_{x_0}^x dt = x - x_0 \end{aligned}$$

כasher $x \rightarrow x_+$ משמאלי, אז $y(x)$ שואף לאינסוף. נשייף את x ל- x_+ משמאלי במשוואה שקיבliśmy:

$$x_0 + \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} = x$$

$$x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{dV}{f(V)} = x_+$$

10.3 גדרות

נסתכל על $y' = f(x, y)$ כאשר f רציפה בתחום D וליפשיצית מקומית.

גדר תחתית

פונקציה $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה נראית **גדר תחתית** של המד"ר אם:

$$\forall x \in I - \text{כל } x \in I \text{ קטע פתוח. } \alpha'(x) < f(x, \alpha(x))$$

גדר עילית

פונקציה $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$ גזירה נראית **גדר עילית** של המד"ר אם:

$$\forall x \in I - \text{כל } x \in I \text{ קטע פתוח. } \alpha'(x) > f(x, \alpha(x))$$

10.3.1 משפט הגדר

נסתכל על פתרון y לבעיית התנאי התחלתי.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y(x) > \alpha(x) \text{ רציפה וליפשיצית מקומית ב-} \} \\ \text{או } (x, y) \in D \text{ אם } x \in I \cap [x_0, \infty) \text{ ו } y(x) > \alpha(x)$$

הוכחה נסתכל על $g(x) = y(x) - \alpha(x)$. נניח בשלילה שהמשפט לא נכון.

$g(x_0) > 0$ אבל יש $x < x_0$ כך ש- $0 < g(x) \leq 0$. ניקח x מינימלי שקיימים $0 < h < x - x_0$.

נסתכל על שיפוע g בנקודת x .

$$g'(x) = y'(x) - \alpha'(x) > f(x, y(x)) - f(x, \alpha(x)) = 0$$

כאשר $y(x) = \alpha(x)$ בנקודת x כי היא מינימלית.

$$\text{מצד שני, } g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \text{ מכיוון ש-} 0 < h < x - x_0 \leq 0$$

סה"כ הגיענו ל- $0 < g'(x) \leq 0$ - סתירה! לכן המשפט נכון.

עיקרונו כלל: אפשר למצוא גדרות ע"י איזוקלינות.

איזוקלינות

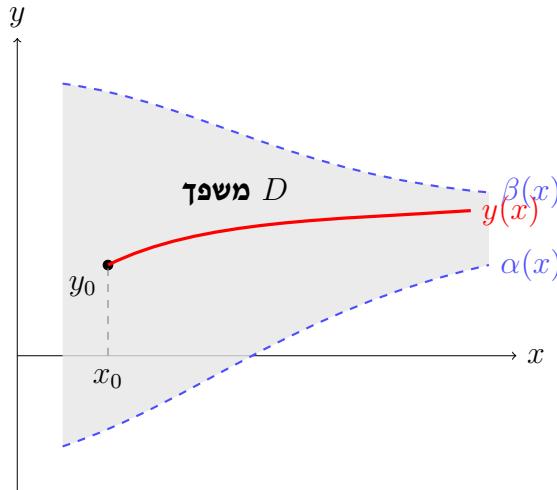
$$f(x, y) = k, \text{ זה אומר הנקודות המקיימים}$$

10.3.2 מסקנה - משפט המשפט

נניח $y' = f(x, y)$ מד"ר עם α גדר תחתית ו- β גדר עילית.
אם f ליפשיצית מקומיות ב- y בתחום

$$D = \{(x, y) \mid x \in I, \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אז, הפתרו y לביעית התנאי ההתחלתי מקיים: $\alpha(x) < y(x) < \beta(x)$ בתחום ההגדרה.



10.4 דוגמאות

דוגמה 1

$$y' = x^4 - y^4 = f(x, y)$$

נשים לב ש- f רציפה וליפשיצית.

דוגמא לגדר עילית: $\beta(x) = x$. נראה שזו אכן גדר עילית:

$$x^4 - (\beta(x))^4 = x^4 - x^4 = 0 < 1 = \beta'(x)$$

דוגמא לגדר תחתית: $\alpha(x) = 0$. נראה שזו גדר תחתית:

$$x^4 - (\alpha(x))^4 = x^4 > 0 = \alpha'(x)$$

דוגמה 2

$$y' = y^2 - x = f(x, y)$$

דוגמא לגדר עילית: $\beta(x) = -\sqrt{x-1}$

דוגמא לגדר תחתית: $\alpha(x) = -\sqrt{x+1}$

11 הרצאה 11

11.1 כמה השלכות על משוואות אוטונומיות

11.1.1 טענה

יהא y פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי:

$$\begin{cases} f' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ועבור α, β פתרונות סינגולריים עוקבים המקיימים: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ מתקיים:

$$y_0 \in (\alpha, \beta)$$

אז, קיימת נקודה x_1 כך ש-

הערה: לפחות x_1 תהיה נקודת פיתול.

הוכחה y מקיים $y' = f(y)$. נגזר את 2 האגפים:

$$y'' = y' \cdot f'(y)$$

נרצה להראות שקיים x_1 כך ש- $y''(x_1) = 0$. אכן, לפי משפט רול - $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ ולכן קיימים γ ו- x_1 כך ש- $\alpha < \gamma < x_1 < \beta$.

נרצה: $y(x_1) = y$. נשים לב שהוכחנו ש- y מקבל את כל הערכים בין α ל- β שכן בהכרח קיים x_1 כזה. \square

ראינו בתחילת הסמסטר: אם y פתרון למשואה אוטונומית $y' = f(y)$, אז גם $y(x+c)$ פתרון לכל \mathbb{R} .

11.1.2 טענה

תהי $y' = f(y)$ משואה אוטונומית, f ליפשיצית מקומית ב- \mathbb{R} .
נניח שקיים 2 פתרונות: x_1, x_2 ו- y_1, y_2 כך ש- $y_1(x_1) = y_2(x_2)$. אז:

$$x \text{ לכל } , y_1(x + x_1 - x_2) = y_2(x)$$

הוכחה נסמן $(c := x_1 - x_2)$. (c מושפט שראינו: $\tilde{y} = y_1(x + x_1 - x_2)$ פתרון למד"ר).
נשים לב ש- \tilde{y}_2 ונחתכים ב- x_2 :

$$\tilde{y}(x_2) = y_1(x_2 + x_1 - x_2) = y_1(x_1) \underset{\text{הגדלה}}{=} y_2(x_2)$$

לכן, מעירקון היחידות - $\tilde{y} = y_2$ לכל x . \square

יהא y פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי :

$$\begin{cases} f' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

תהי α כמו במשפט הגדר. נניח שמתקיים:

$$\alpha(x_0) \geq y(x_0)$$

אם מתקיימים תנאי משפטי הקיום והיחידות ב - אזי, לכל $x \in I$ עבורו הפתרונות מוגדרים:

$$\forall x > x_0, \quad y(x) < \alpha(x)$$

הוכחה אם $\alpha(x_0) = y(x_0)$ סימנו (משפט הגדר). אחרת, נניח $\alpha(x_0) > y(x_0)$. נסמן $g(x) = \alpha(x) - y(x)$ מקיימת:

$$g'(x_0) = \alpha'(x_0) - y'(x_0) >_{\text{גדע עילית}} f(x_0, \alpha(x_0)) - f(x_0, y(x_0)) \underset{y(x_0)=\alpha(x_0)}{=} 0$$

$$g(x_0) = \alpha(x_0) - y(x_0) = 0$$

מסקנה: יש סביבה $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ בה g חיובית, כלומר $y(x) < \alpha(x)$ לכל $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ נפעיל את משפטי הגדר על הסדרה:

$$x_n = x_0 + \frac{\varepsilon}{n}$$

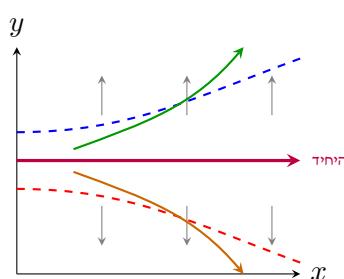
מתקיים $y(x_n) < \alpha(x_n)$ וכן $x_n \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$

נובע: $y(x_n) < \alpha(x_n)$ עבור $x_n \geq x_0$. אם נשאיף את $n \rightarrow \infty$ נקבל: $y(x) < \alpha(x)$ לכל $x > x_0$.

11.2 אינטואיציה למשפט ומשפט הפוך

משפט הפוך (Anti-Funnel)

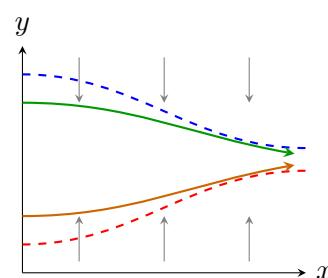
מפזר החוצה - אי יציבות



פתרונות "borchim" מהתחום הכל- x גדול. רק פתרון אחד ייחודי נשאר כלוא בין הגדרות לאורץ זמן.

משפט (Funnel)

מנקז פנימה - יציבות



כל הפתרונות שמתחלים בתחום (או נכנסים אליו) נכלדים בו, והמרקח בהםים מצטמצם לאפס.

11.3 משפט המשפט ההפוך

(הגדר התחתית מעל הגדר העילית)

אם $y' = f(x, y)$ מד"ר, β גדר תחתית, α גדר עילית. מתקיים: $\alpha > \beta$
נגיד משפט ההפוך:

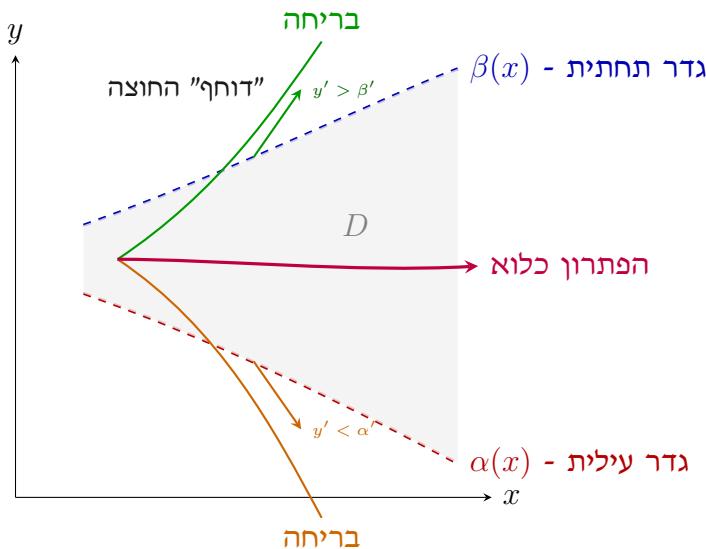
$$D := \{(x, y) \mid x \in I, \quad \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אם מתקיים קיום ויחידות ב- D , אז:

1. יש פתרון למד"ר שנמצא בתחום $D - D$ לכל $x \in I$ ($x, y(x)) \in D - D$

2. נניח $I = [a, \infty)$. אז $\frac{\partial f}{\partial y} \geq 0$, $\beta - \alpha \rightarrow 0$ ו- D או הפתרון בסעיף 1 הוא יחיד.

מסקנה: רוב הפתרונות מטאזרים, אך קיים פתרון יחיד שנשאר בתחום התוחם.



דוגמה: $\alpha(x) = \sqrt{x-1}$, $\beta(x) = \sqrt{x+1}$. ניקח $y' = y^2 - x = f(x, y)$

$$\begin{cases} f(x, \alpha(x)) = -1 \\ f(x, \beta(x)) = 1 \end{cases}$$

נבדוק מתי α גדר עילית:

$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\alpha' > f(x, \alpha) = 1 \iff x > 1$$

נבדוק מתי β גדר תחתית:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\beta' < f(x, \beta) = -1 \iff x > -\frac{3}{4}$$

לפי המשפט, עבור $x > 1 + \varepsilon$, יש פתרון יחיד בתחום המשפט ההפוך. נסמן את הפתרון הזה בתחום y_ε . מיחסות, אם $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, מוצאים $y_{\varepsilon_2}, y_{\varepsilon_1} \geq x$ נוטן עוד פתרון שכליואו במשפט ההפוך. $y_{\varepsilon_2}, y_{\varepsilon_1}$ שונים בתחום $x > 1$. הגדרה המשותף. באופן זה, ניתן לבנות את $y(x)$ בתחום המשפט ההפוך שמודדר לכל $x > 1$.

הוכחה נתחיל בסעיף 2:

נניח בשלילה שיש זוג פתרונות y_1, y_2 שモוגדרות לכל $x \geq a$, פותרים את המד"ר ונשארים בתוך D - המשפט ההפוך.

נגידר את פונקציית ההפרש: $g = y_1 - y_2$. נשים לב שמתקיים:

$$0 \xleftarrow{x \rightarrow \infty} \alpha - \beta < y_1 - y_2 < \beta - \alpha \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

לכן לפי סנדוויץ', $0 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} g$. נגזר את g :

$$g' = f(x, y_1) - f(x, y_2)$$

מעקרון היחידות: y_1, y_2 לא נחכמים, לכן g בעל סימן קבוע. בה"כ: $g' > 0$ לכל $a \geq x$. קלומר-

$$g' = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial}{\partial y} f(x, t) dt \geq 0$$

משמעותה: g עולה ממש ויש לה גבול, לכן מתכנסת לסופרים שלה - $\sup y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$ בסתירה להנחה שלנו.

□

כעת נוכיח את סעיף 1, עבור שתי נקודות $s_2 < s_1$:

נגידר פתרון $y_{s,\beta}$ המקיים: $y_{s,\beta}(s) = \beta(s)$. פתרון זה נמצא בתוך המשפט כאשר $x \in [a, s]$. למה? כי β גדר תחתית ו- α -עלית.

נגידר פתרון $y_{s,\alpha} = \alpha(s)$. פתרון זה נמצא ב- D עבור $x \in [a, s]$.

שני הפתרונות אף פעם לא נחכמים עבור $x \geq s$. אם הם נחכמים - אז מעקרון היחידות, הם שווים. בסתירה לכך שלכל פתרון יש נקודת חיתוך שונה עם הגדרות.

מעקרון אי החיתוך, אם $s < s_2$ אז $[y_{s_2,\alpha}(a), y_{s_2,\beta}(a)] \subseteq [y_{s,\alpha}(a), y_{s,\beta}(a)]$

לפי משפט קנטור על חיתוך קטעים סגורים המוכלים אחד בשני, יש לפחות נקודה אחת בחיתוך:

$$A \in \bigcap_{s \geq a} [y_{s,\alpha}(a), y_{s,\beta}(a)]$$

נסתכל על פתרון למד"ר $y(a) = A$. פתרון זה נשאר בתוך D . מה? מעקרון אי-המיתוק:

$$y_{s,\alpha}(x) < y(x) < y_{s,\beta}(a) \quad x \geq a$$

בפרט, מה לא נחכמים עם השפה של D ? כי אם s נקודה בה y נחתך עם $y = \alpha(x)$ או $y = \beta(x)$ פעמי ראשונה, אז נחתך עם $y_{s,\alpha}$ בסתירה ליחידות.

הערה: הוא הולה קבועים למודל, הם חלק מהחומר. (דוגמה לשימוש בעקרון ההמשכחה)

12.1 משווה לינארית מסדר n

הגדרה

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y(x) = b(x)$$

נניח: כל a_i -ים וכל b -ים רציפים בקטע I .

12.1.1 משפט קיום ויחidot גולבי למשווה לינארית מסדר n

נניח: כל a_i -ים וכל b -ים רציפים בקטע I .

$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \\ \dots \end{cases}$$

אז: יש פתרון אחד ויחיד למ"ר המקיים את תנאי ההתחלה:

למה צריך n תנאים? נסתכל על המקרה הכל פשוט, בו כל a_i -ים וכל b הם אפס:

$$x \in I \quad \text{עבור } y^{(n)} = 0$$

ע"י המשפט היסודי של החדו"א: זה שקול לכך ש- y פולינום ממעלה $1 - n$ לכל היותר. נשים לב, שמרחב הפתרונות הוא מרחב וקטורי מעל \mathbb{R} ממימד n . ($\{1, x^2, \dots, x^n\}$)
לפי משפט טילור: אם y פולינום ממעלה $1 - n \geq$

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^{(i)}}{i!} (x - x_0)^i + R_n(x)$$

בעצם, זהותית אפס: $R_n(x) = \frac{y^{(n)}(c)}{n!} (x - x_0)^n$. קיבלנו שיוויון:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^{(i)}}{i!} (x - x_0)^i$$

(המקדמים $y^i(x_0)$ קובעים את y).

נדיר קבועה:

$$V = \{y : I \rightarrow \mathbb{R} \mid y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y(x) = 0\}$$

זה אוסף הפתרונות למד"ר לינארי הומוגני.

1. V מרחב וקטורי מעל \mathbb{R}

2. V ממימד n מעל \mathbb{R}

3. בסיס ל- V נתון ע"י n הפתרונות עם תנאי התחלת הבאים:

$$y_i^j(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

הוכחה

1. V מ"ו:

$y \in V$ כי 0 הוא הפתרון הטריוויאלי.

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in V$ אז $c_1 y_1 + c_2 y_2 \in V$ אלגברה א....

2. בניית איזומורפיזם בין V ל- \mathbb{R}^n :

$$\phi(y) = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}$$

ϕ לינארית כי נוצרת לינארית. למה היא חח"ע? נראה שהגרעין טריויויאלי:

$$\phi(y) = \vec{0} \iff y = \begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \vdots \\ y^{(n)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

לפי ממשפט הקיום ויחידות (12.1.1), יש לבדוק y אחת כזו - נסמנה y_1 . מצד שני, $y = 0$ בודאי מקיימת

את המד"ר עם תנאי ההתחלת. לכן $y_1 = 0$.

בנוסף, ϕ על: לפי ממשפט הקיום והיחידות מהוים, בהינתן $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ יש פתרון $y \in V$ המקיים $\phi(y) = \vec{v}$. לכן $\vec{v} = \phi(y)$.

3. בכלל ש- ϕ איזומורפיזם, אם $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$, אז y_1, \dots, y_n המקיימים $\vec{v}_i = \phi(y_i)$ הם בסיס ל- V . בפרט, ניתן לחת $\vec{v}_i = e_i$.

השבוע ושבוע הבא: רק הומוגניות. נחקרו את השאלה הבאה: בהינתן פתרונות y_1, \dots, y_n למד"ר $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y(x) = 0$ האם הם בלתי תלויים לינארית?

נحدد: פונקציות y_1, \dots, y_n נקראות בלתי תלויות לינארית אם לכל $(c_1, \dots, c_n) \neq 0$ מתקיים $\sum c_i y_i \neq 0$ (הערה: אם y פתר את המד"ר, אז הוא גזיר ברציפות n פעמים. הסבר: אם y מקיימת מד"ר אז $y^{(n)} = -\sum_{i \neq n} y^{(i)} a_{n-i}$ להיות מוגדר).

Wronskian

בהנחת n פונקציות גזירות $1 - n$ פעמים, נסמן y_1, \dots, y_n המוגדרות על I .
וורונסקייאן זו פונקציה שמוגדרת גם היא על I :

$$W(y_1, \dots, y_n)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

12.1.3 טענה - וורונסקייאן מתאפס עבור פונקציות ת"ל

אם y_1, \dots, y_n פונקציות תלויות ליניארית, אז $W(y_1, \dots, y_n) \equiv 0$

הוכחה אם y_1, \dots, y_n ת"ל אז נבע את אחת מהם ע"י צ"ל של הנוסתרים:
נגזר:

$$(y_j)^{(k)} = \sum_{i \neq j} (y_i)^{(k)} c_i$$

נקבל:

$$\begin{pmatrix} (y_j)^{(k)} \\ (y_j)^{(k)} \\ \dots \\ (y_j)^{(k)} \end{pmatrix} = \sum_{i \neq j} \begin{pmatrix} (y_i)^{(k)} \\ (y_i)^{(k)} \\ \dots \\ (y_i)^{(k)} \end{pmatrix} c_i$$

כלומר - יש צ"ל לא טריואלי של העמודות \leftarrow דטרמיננטה מתאפסת. כלומר - הוורונסקייאן מתאפס.

12.1.4 משפט - פתרונות בת"ל לא מאפסות ווורונסקייאן

יהיו $x \in I, y_1, \dots, y_n$ פתרונות למד"ר הלינארי הומוגני: $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ עבור
נניח, ש- y_1, \dots, y_n בת"ל.
אז, $W(y_1, \dots, y_n) \neq 0$ לכל $x \in I$.

הוכחה נניח שהוורונסקייאן מתאפס ונראה ש- y_i ת"ל.
אם $W(y_1, \dots, y_n) = 0$, אז יש תלות ליניארית בין העמודות כ- $x = x_0$: יש קבועים c_1, \dots, c_n לא כולם אפס,
כך שאם נגיד $\tilde{y} = \sum_{i=1}^n (y_i)^{(k)} c_i$ אז $\tilde{y}'(x_0) = 0$. מצד שני, יודעים שפתרון האפס מקיימת את השיוויונות
האלו. מקיים ויחידות בנקודת $x = x_0$, \tilde{y} חייב להיות פתרון האפס.
מסקנה: $\sum_{i=1}^n (y_i)^{(k)} c_i = 0$ כלומר - \square ת"ל.

13.1 מסקנה - ורוננסקייאן מתאפס אז ורוננסקייאן שווה זהותית ל-0

אם y_1, \dots, y_n פתרונות למ"ר לינארי הומוגני מסדר n ,
 אם $.W(y_1, \dots, y_n) \equiv 0$ מטאפס עבור x_0 כלשהו, אז 0

שימוש בمسקנה המקרה הכ"י "משעמים":

$$n = 1, \quad y' + py = 0$$

נזכיר, כל פתרון נראה כך: $y_C(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$.
 המסקנה אומרת: אם y_C מטאפס בנקודת, אז $0 \equiv 0$, מכיוון ש-

13.2 דוגמאות, תרגילים ומשפטים

13.2.1 מציאת פתרונות בת"ל - $y'' + y = 0$

כלומר - $n = 2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad b = 0$. נראה שאלה בת"ל - נחשב את הורוננסקייאן:

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

כלומר, שונה מאפס בכל נקודה. (מספיק לבדוק עבור נקודה ספציפית). לכן, \cos בת"ל ולכ"ן מהווים בסיס למרחב הפתרונות (שמיידו 2). כלומר, כל פתרון הוא מהצורה: $a \cos x + b \sin x$.
 העיה: אם f פתרון ל- $y'' + y = 0$, אז גם $f(x + c)$ לכל בחירה של c .

13.2.2 פתרונות מטאפסים בנקודת, תלויים לינארית - $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

הראו שם y_1, y_2 זוג פתרונות שמתאפסים ב- x_0 , אז הם תלויים לינארית.

הוכחה:

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y'_1(x_0) & y'_2(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

לכן, הפתרונות תלויים לינארית.

□

13.2.3 אם פתרון מתאפס בשני נקודות, פתרון בת"ל אחר מתאפס בינהן -

נתונים 2 פתרונות בת"ל: y_1, y_2 . הוכיחו: אם $y_1(a) = y_1(b) = 0$, אז קיים $c \in [a, b]$ כך ש- $y_2(c) = 0$.

הוכחה: נניח בsvilleה שלא קיים c כזה. בפרט, y_2 לא מתאפס ב- $[a, b]$ לבנה בנית עזר:

$$h(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

משפט רול, קיימת $c \in [a, b]$ כך ש- $h'(c) = 0$. כלומר:

$$\frac{y'_1 y_2 - y_1 y'_2}{y_2^2} = \frac{W(y_2, y_1)}{y_2^2} = \frac{-W(y_1, y_2)}{y_2^2}$$

מכיוון ש- $W(y_1, y_2) = 0$ נקבל y_1, y_2 תלויים לינארית. סתירה! לכן קיים $c \in [a, b]$ כנדרש. \square

13.2.4 פתרון למד"ר לינארי הומוגני מסדר n מתאפס אינסוף פעמים, שווה זהותית ל-0

אם y פתרון למד"ר לינארי הומוגני מסדר n בקטע סגור I . אז אם $L-y$ יש אינסוף אפסים בקטע I , אז $y=0$.

פתרון: נבנה סדרת אפסים של y - x_1, x_2, x_3, \dots . נבנה אותה בצורה מונוטונית (ניקח אפס בקטע I , יש ∞ אפסים או מימינו או משמאלו).

לסדרה x_i יש גבול L . הגבול L סופי כי (x_i) חסומה בקטע I . בנוסף, L שייך לקטע I כי הקטע סגור. מרציפות נקבל:

$$y(L) = y(\lim x_n) = \lim y(x_n) = \lim 0 = 0$$

כלומר - L הוא בעצםו אפס של y .

משפט רול, בין כל זוג x_i -ים יש אפס של y' . נסתכל על הסדרה $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots$ נשים לב, $x_i^{(1)}$ גם מונוטונית. מסנדוויץ': $x_i^{(1)} \rightarrow L$ ורציפות y' :

$$y'(L) = \lim y'(x_i^{(1)}) = 0$$

نبנה באותו אופן $x_i^{(2)}$ בין כל $x_i^{(1)}, x_{i+1}^{(1)}$ כך ש- $y''(x_i^{(2)}) = 0$.

ניתן להמשיך n פעמים (כל עוד $y^{(i)}$ גזירה ברציפות). מצד שני, פתרון האפס גם מקיים זאת. מיחידות: $y=0$.

\square

הערה השתמשנו בטענה "סדרה X_n חסומה יש תת סדרה מתכנסת".

תזכורת ראיינו את הטענות: 13.2.2 ו-13.2.3. משתי טענות אלו ניתן להסיק את המשפט:

14.1 משפט ההפרדה של שטרום

יהיו y_1, y_2 פתרונות בת"ל למדר: $y'' + py' + qy = 0$.
יהיו a, b זוג אפסים עוקבים של y_1 .

$$y_1(a) = y_1(b) = 0, \quad \forall c \in (a, b) \rightarrow y_1(c) \neq 0$$

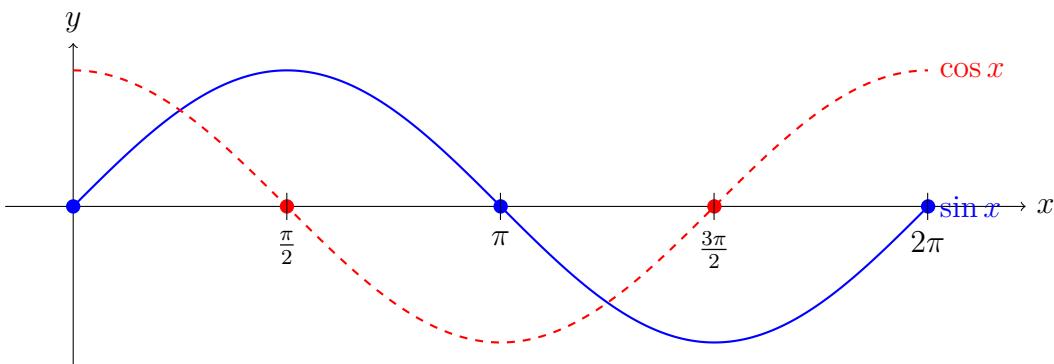
אז, ל- y_2 יש אפס ייחיד בין a ל- b ו- 0 , $y_2(a) \neq 0, y_2(b) \neq 0$.

הוכחה נשים לב ש- y_1, y_2 לא חולקים אפסים (לפי 13.2.2 - אם הם חולקים אפס הם תלויים לינארית).
טענה 13.2.3 - קיים אפס של y_2 בקטע הסגור, ומההבחנה הקודמת - קיים אפס של y_2 בקטע הפתוח (a, b) .
נראה שהה אפס היחיד בקטע:

נניח בsvilleה (c, d) קיים אפס של y_2 בקטע הפתוח (c, d) . אז $c < d < a$. אז באותו אופן, קיים אפס של y_1 בקטע הפתוח (d, b) .
סתירה להנחה ש- a, b זוג אפסים עוקבים של y_1 .

□

דוגמה נסתכל על הפתרונות $\{\cos x, \sin x\}$. בין כל זוג אפסים של $\sin x$ יש אפס של $\cos x$.



נתונות y, y_1, \dots, y_n פונקציות בת"ל, גזירות ברכיפות n פעמיים.
מצאו מ"ר לינארי הומוגני מסדר n , כך ש- y, y_1, \dots, y_n פתרונות שלו.

פתרון:

$$\text{נסתכל על } W(y, y_1, \dots, y_n)$$

$$W(y, y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

נשים לב, $W(y, y_1, \dots, y_n)$ מתאפס אם y שווה לאחת הפונקציות הנתונות (יהיו 2 עמודות שוות).
הבדיקה: $W(y, y_1, \dots, y_n) = 0$.
הסביר:

$$W(y, y_1, \dots, y_n) = y^{(n)} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} y(x) & y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'(x) & y'_1(x) & \cdots & y'_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n-1)}(x) & y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + y^{(n-1)} \cdot (\text{מקדים} \dots + \dots)$$

הערה: המקדם של $y^{(n)}$ אינו 1. המשפטים שהוכחנו על וורונסקיין נכונים כשמקדם 1 - משווה מנורמלת.

14.2 נוסחת Abel

תהי מ"ר ליניארית הומוגנית מנורמלת:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y = 0$$

כאשר המקדמים p_i רציפים בקטע I . יהיו y, y_1, \dots, y_n פתרונות של המשוואה.
אזי, הורונסקיין $W_1(x) = W(y_1, \dots, y_n)$ מקיים:

$$W'(x) + p_1(x)W(x) = 0$$

ולכן:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^x p_1(t) dt}$$

הוכחה נתחיל ב- 2

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = y_1 y'_2 - y_2 y'_1$$

נגזור:

$$y'_1 y'_2 + y_1 y''_2 - y'_2 y'_1 - y_2 y''_1 = y_1 y''_2 - y_2 y''_1 = y_1 \underbrace{(-p_1 y'_2 - p_2 y_2)}_{y''_2} - y_2 \underbrace{(-p_1 y'_1 - p_2 y_1)}_{y''_1} = p_1 (y'_1 y_2 - y_1 y'_2)$$

כעת, המקרה הכללי: ננסח את הטענה הבאה:

תהי $(A_{ij}(x))$ מטריצה $n \times n$ של פונקציות נזירות.
נסמן A_k - המטריצה המתקבלת מLAGOR את השורה ה- k של A .
אזי:

$$|A'| = |A_1| + \dots + |A_n|$$

נשתמש בטענה ונקבל:

$$W'_1 = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

בSIMONI הטענה: $|A_1| = \dots = |A_{n-1}| = 0$. (אחרת נקבל 2 שורות זהות והורונסקיאן יתאפס).
כדי לפשט את הדטרמיננטה הנותרת, נשתמש בכך ש- $y^{(n)} = -p_1 y^{(n-1)} - \dots - p_n y$ ונקבל:

$$W'_1 = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1 y_1^{(n-1)} - \dots - p_n y_n^{(n-1)} & \cdots & -p_1 y_n^{(n-1)} - \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1 y_1^{(n-1)} & \cdots & -p_1 y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

כאשר פישטנו את השורה האחורונה ע"י הוספה כפולות של שורות קודומות. (פעולות שורה לא משנהות דטרמיננטה). נוציא $(-p_1)$ מהשורה האחורונה ונקבל:

$$W'_1(x) = -p_1 \begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \Rightarrow W'_1(x) = -p_1 W(x)$$

הוכחת טענת העזר קיימות 3 דרכים:

1. נוסחה: דטרמיננטה היא סכום של $n!$ תמורות. (אליאש מוכיח ככה)
2. אינדוקציה ופיתוח לפי שורות/עמודות.
3. מולטי-لينאריות: פונקציה ב- n משתנים נקראת מולטי-لينארית אם היא LINEARITY בכל משתנה בנפרד.

טענת העזר היא שיוויון בין 2 פונקציות של $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

הבחנה: אגף שמאל ואגף ימין של טענת העזר הם פונקציות מולטי-لينאריות בשורות והעמודות של A .
הבחנה: כדי להוכיח שיוויון בין שתי פונקציות מולטי-لينאריות, מספיק לבדוק שיוויון במקרה הפשט שבסכל שורה של A יש בדיק איבר אחד שונה מ-0 ובכל עמודה של A יש בדיק איבר אחד שונה מ-0.

כלומר, מספיק לנקח: $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. עבור A אלכסונית הטענה קללה:

$$|A| = a_{11} \cdot \dots \cdot a_{nn} \Rightarrow |A'| = a'_{11}(a_{22} \dots a_{nn}) + \dots$$

הקדמה ומטרה תהי $y = 0$. נניח ש**ידיועים** m פתרונות בת"ל ($n < m$). נראה שאפשר לבנות מד"ר חדש מסדר $m - n$ שמקבילו למציאו $m - n$ פתרונות נוספים בת"ל למד"ר המקורי. יהיו y_1, \dots, y_m פתרונות בת"ל למד"ר. נבחר את הפתרון y_1 (נעבוד בקטע בו y_1 לא מתאפס).

ביצוע החלפת משתנים נציב $v = y_1$: נכתוב את המד"ר כמד"ר במשתנה v :

$$(y_1 v)^{(n)} + p_1(y_1 v)^{(n-1)} + \dots + p_n(y_1 v) = 0$$

$$\downarrow$$

$$y_1 v^{(n)} + (q_1 v^{(n-1)} + \dots + q_n v)$$

(כאשר q_i היא פונקציה של p_i ו- v)

הסקת מסקנה על המקבץ q_n נבחן את המקרה הפרטני: $v = 1$ מצד אחד, הצבה זו שköלה להצבת $y_1 = u$ במד"ר המקורי. מכיוון ש- y_1 הוא פתרון ידוע, אגף שמאל חייב להתאפס.

מצד שני, עבור $v = u$ קבוע, כל הנזרות שלו מתאפסות, ולכן רק האיבר החופשי q_n נותר במשווהה. מכאן נובע בהכרח כי $q_n = 0$. לעומת זאת, המד"ר החדש תלוי רק בנזרות של u , ונראה כך:

$$y_1 v^{(n)} + q_1 v^{(n-1)} + \dots + q_{n-1} v' = 0 \quad (**)$$

הורדת הסדר נגדיר $v' = u$: נשים לב, אם v פתרון של $(**)$, אז u פתרון של מד"ר מסדר $1 - n$:

$$y_1 u^{(n-1)} + q_1 u^{(n-2)} + \dots + q_{n-1} u = 0 \quad (***)$$

בנייה מערכת הפתרונות אם נמצא $1 - n$ פתרונות בת"ל ל- $(***)$, אז מבצע על כל אחד **אינטגרל** נכפול ב- y_1 , ונקבל n פתרונות בת"ל למד"ר המקורי:

$$\underbrace{y_1, \quad y_1 \cdot \int_{x_0}^x \tilde{y}_2, \quad \dots, \quad y_1 \cdot \int_{x_0}^x \tilde{y}_n}_{n \text{ פתרונות בת"ל}}$$

הוכחת אי-תלות ליניארית (בת"ל) נראה שהפתרונות בת"ל: ניקח צ"ל, נשווה לאפס ונראה שהוא טריוייאלי:

$$c_1 y_1 + c_2 \cdot y_1 \int_{x_0}^x \tilde{y}_2 + \dots + c_n \cdot y_1 \int_{x_0}^x \tilde{y}_n = 0$$

נחלק ב- y_1 :

$$c_1 + c_2 \cdot y_1 \int_{x_0}^x \tilde{y}_2 + \dots + c_n \cdot y_1 \int_{x_0}^x \tilde{y}_n = 0$$

נזכיר:

$$c_1 + c_2 \cdot y_1 \tilde{y}_2 + \dots + c_n \cdot y_1 \tilde{y}_n = 0$$

הנחנו כי $\tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n$ בת"ל ולכן $c_i = 0$.

הכללה: שימוש ב- m פתרונות והוכחת אי-תלות

אם ידועים לנו m פתרונות בת"ל $\{y_1, \dots, y_m\}$, נוכל להוריד את סדר המשווהה ב- m דרגות באמצעות **רקורסיבי**. המפתח לכך הוא היכולת "להעביר" פתרונות מהמ"ר המקורי למ"ר המוצומצמת.

1. המרת פתרונות למ"ר המוצומצמת אם y_i הוא פתרון למ"ר המקורי, אז הפונקציה $u_i = \left(\frac{y_i}{y_1}\right)'$ היא פתרון למ"ר המוצומצמת מסדר $1 - n$.

2. הוכחת שימור בת"ל-יות כדי לוודא שניתנו המשיך בתהlik, נראה כי אם הקבוצה $\{y_1, \dots, y_m\}$ בת"ל, אז גם קבוצת הנגזרות $\{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \dots, \left(\frac{y_m}{y_1}\right)'\}$ היא בת"ל. נניח צ"ל שמתאפשר:

$$\sum_{i=2}^m c_i \left(\frac{y_i}{y_1}\right)' = 0$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים (נקבל קבוע אינטגרציה (c_1)):

$$\sum_{i=2}^m c_i \left(\frac{y_i}{y_1}\right) = c_1$$

נכפיל ב- y_1 וنعביראגף:

$$\sum_{i=2}^m c_i y_i - c_1 y_1 = 0$$

מכיוון ש- $\{y_1, \dots, y_m\}$ הם פתרונות בת"ל למ"ר המקורי, כל המקדמים c_i יהיו אפס. לכן, הפתרונות החדשניים בת"ל.

3. תהליך רקורסיבי ניתן לחזור על התהlik: משתמש במ"ר המוצומצמת (***) וنعוזר בפתרון u_2 כדי להוריד את הסדר פעמיינוספה ע"י הצבה מהצורה $w = u_2 \cdot w = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)'$.

סיכום (לעצמם):

1. **הנחה הפתרון:** נגיד $v = y_1 \cdot u$.

2. **הצבה:** האיברים של v (ללא נגזרת) מותבטלים תמיד.

3. **הורדת סדר:** נגיד $v' = u$ לקבלת סדר $1 - n$.

4. **פתרון:** מציאת u וביצוע אינטגרציה.

5. **חזרה:** הרכבת הפתרון הכללי $y = y_1 \cdot \int u dx$.

תהי המ"ר $0 = p_2y + p_1y' + y''$. נניח כי y_1 הוא פתרון ידוע. נמצא עוד פתרון.

נבע את הצבה $v = y_1 \cdot u$:

$$(y_1v)'' + p_1(y_1v)' + p_2(y_1v) = 0$$

משימוש בכלל המכפלה וסידור איברים, המ"ר עבור v היא:

$$y_1v'' + v'(2y_1' + p_1y_1) + v(y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1) = 0$$

נשים לב כי $v = y_1$ הוא פתרון של המ"ר החדש. (אפשר להציב $y_1 = y$). לאחר מכן y_1 פתרון, הביטוי בסוגרים של v מתAES, וקיבלנו:

$$y_1v'' + v'(2y_1' + p_1y_1) = 0$$

הורדת הסדר נגדיר $u = v'$.

$$y_1u' + (2y_1' + p_1y_1)u = 0$$

נחלק ב- y_1 ונקבל את הצורה הסטנדרטיבית:

$$u' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p_1 \right) u = 0$$

נעביר אגפים, נעשה אינטגרל על שני האגפים, ונקבל את u_0 :

$$u_0 = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x) dx}$$

נבע אינטגרציה כדי למצוא את v_0 :

$$v_0 = \int_{x_0}^x u_0(x) dx$$

מסקנה הפתרון הנוסף למ"ר המקורי, הבלתי תלוי ב- y_1 , הוא:

$$y_2 = y_1 \cdot v_0 = y_1 \int_{x_0}^x \frac{e^{-\int p_1(t) dt}}{y_1^2(t)} dt$$

15.1 מ"ד"ר לינארי הומוגני עם מקדמים קבועים

$$a_0y^{(n)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

דוגמאות

$$y = C \cdot e^x, \text{ הפתרון הוא } y' = y .1$$

$$y = C, \text{ הפתרון הוא } y' = 0 .2$$

$$y = C \cdot e^{\pm x}, \text{ הפתרון הוא } y'' = y .3$$

$$y = ax + b, \text{ הפתרון הוא } y'' = 0 .4$$

$$y = \sin x, \cos x \text{ הפתרון הוא } y'' + y = 0 .5$$

מה התורה הכללית?

נראה מה קורה אם מציבים במד"ר $e^{\lambda x}$ כאשר λ סקלר?

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \dots, y^{(i)} = \lambda^i e^{\lambda x}$$

כלומר, המ"ד נראה כך:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_n e^{\lambda x} = 0$$

נמצאים ב- $e^{\lambda x}$:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

נגידיר את המושג הבא:

הפולינום האופייני של המ"ד

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

הראנו: אם λ שורש ממשי של הפולינום האופייני, אז $e^{\lambda x}$ פתרון למ"ד.

לכן, אם ל- P יש n שורשים ממשיים שונים, נוכל למצוא n פתרונות למ"ד.

נותרו 3 שאלות:

1. מה אם יש שורש ממשוי פעמיים?

2. מה אם יש שורש מרוכב?

3. האם הפתרונות הם בת"ל?

נענה על השאלות.

שאלה 1 - מה אם יש שורש ממשי?

נניח ש- λ שורש ממשי את P פעמיים. נוכל לפרק את הפולינום:

$$P(x) = (x - \lambda)^k Q(x)$$

נראה שמתקדים: $\forall i \in [0, k-1], P^{(i)}(\lambda) = 0$. נגזר את P ונקבל:

$$\begin{aligned} P'(x) &= K(x - \lambda)^{k-1}Q(x) + (x - \lambda)^k Q'(x) \\ &= (x - \lambda)^{K-1}(KQ + (x - \lambda)Q') \end{aligned}$$

כלומר, P' מתאפס $k-1$ פעמים בנקודה λ . ניתן להמשיך באינדוקציה עד לנגזרת ה- $k-1$.

נראה ש- $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{K-1}e^{\lambda x}$ הם פתרונות למד"ר

נדיר אופרטור לינארי:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y$$

ציב $y = x^i e^{\lambda x}$ ונשתמש בתכונת הנגזרת לפי הפרמטר λ :

$$L[x^i e^{\lambda x}] = L\left[\frac{\partial^i}{\partial \lambda^i}(e^{\lambda x})\right] = \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} L[e^{\lambda x}] = \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i}(P(\lambda) e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} P^{(j)}(\lambda) (e^{\lambda x})^{(i-j)}$$

אם ניקח את λ להיות מריבוי K של P , וניקח אינדקס i הקטן מ- K ($i < K$), בהכרח קיבל 0. $j \leq i < K$ מתקיים $P^{(j)}(\lambda) = 0$ מכיון שהגזרה הבודקת, כל הגזרות $P^{(j)}(\lambda)$ מתאפסות לכל j .

דוגמא עבור המד"ר $x^2 = 0$, הפולינום האופייני הוא $x^2 - K = 0$. לכן $K = 2$ מריבוי 2. נובע ש- e^{0x}, xe^{0x} (כלומר $\{1, x\}$) הם זוג פתרונות בת"ל.

מסקנה סה"כ, הראנו שאם יש שורש מריבוי K אז קיימים K פתרונות שונים למד"ר.

שאלה 2 - מה אם יש שורש מרוכב?

נראה: אם λ שורש של P , אז $\bar{\lambda}$ שורש של P , מרוכב ו שונה מ- λ .

נכתוב את הפולינום כמכפלת השורשים שלו: $P(x) = \prod(x - \lambda_i)$. מתקיים ש- λ שורש:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = \prod(\lambda - \lambda_i) = 0$$

נפעיל צמוד מרוכב על השיוויון:

$$\bar{\lambda}^n + a_1 \bar{\lambda}^{n-1} + \dots + a_n = \prod(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_i) = 0$$

מסקנה: אם λ שורש מרוכב, אז $e^{\lambda x} x^i, e^{\bar{\lambda} x} x^i$ פתרונות מרוכבים. ככלומר - אם קיים שורש מרוכב, נוכל ליצור ממנו ומהצמוד שלו פתרונות ממשיים:

$$\Re(e^{\lambda x} x^i) = \underbrace{\frac{e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda} x}}{2} \cdot x^i}_{e^{\Re(\lambda) \cdot x} \cdot \cos(\Im(\lambda) \cdot x)}, \quad \Im(e^{\lambda x} x^i) = \underbrace{\frac{e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda} x}}{2i} \cdot x^i}_{e^{\Re(\lambda) \cdot x} \cdot \sin(\Im(\lambda) \cdot x)}$$

הערה הוא הוכיח דברים על מרכיבים. חזרה על אקפוננט מרוכב. לא כתבתי.

שאלה 3 - האם כל הפתרונות בת"ל?

16.1 משפט מסכם

יהי P פולינום אופייני של מד"ר הומוגני, לינארי מסדר n , בעל מקדמים קבועים.
נכתב את השורשים שלו כך:

1. שורשים ממשיים שונים, כאשר לכל i , λ_i מריבוי $m_i \geq 1$.
2. עבור שורשים מרוכבים נסמן $\bar{\mu}_j, \mu_j'$, מריבוי m'_j , זוגות שורשים מרוכבים צמודים.
או, n הפתרונות הבאים הם בת"ל:
◻ עבור שורשים ממשיים:

$$e^{\lambda_i x} x_j, \quad i = 1, \dots, k, \quad 0 \leq j < m_i$$

◻ עבור שורשים מרוכבים:

$$\begin{aligned} e^{\Re(\mu_j) \cdot x} \cdot \cos(\Im(\mu_j) \cdot x), \quad j = 1, \dots, k' \\ e^{\Re(\mu_j) \cdot x} \cdot \sin(\Im(\mu_j) \cdot x), \quad 0 \leq \ell < m'_j \end{aligned}$$

הוכחה הראננו בהרצאה קודמת שאלו פתרונות למד"ר. בעת נוספת להוכיח רק אי-תלות לינארית.
נניח שיש צ"ל של הפתרונות שונים 0. זה גורר שיש צ"ל של הפתרונות הבאים שונים 0:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ e^{\lambda_i x} x^j \right\}, \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq k \\ 0 \leq j < m_i \end{array} \\ \left\{ e^{\mu_i x} x^j, e^{\bar{\mu}_i x} x^j \right\} \quad \begin{array}{l} 1 \leq i \leq k' \\ 0 \leq j < m'_i \end{array} \end{array} \right.$$

אנחנו רוצים להראות לכל I :

$$\sum_{i=1}^{k''=k+2k'} c_i e^{\lambda_i x} x^j = \sum_{i=1}^{k''} P_i(x) e^{\lambda_i x} = 0 \Rightarrow P_i(x) = 0 \quad \forall i \quad (*)$$

נחלק את אנף שמאל ב- $e^{\lambda_1 x}$:

$$\sum_{i=1}^{k''} P_i(x) e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = P_1(x) + P_2(x) e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \dots = 0$$

נניח P_1 פולינום ממעלה $d > 0$. נגזר את השוויון $d+1$ פעמים כך ש- P_1 יעלם.

אם P פולינום ממעלה r ו- $0 \neq \lambda$, אז לכל $d \geq 0$

$$(P(x)e^{\lambda x})^{(d)} = Q_d(x)e^{\lambda x} \quad \text{(עבור } Q_d \text{ פולינום ממULAה } r)$$

הוכחה:

$$(P(x)e^{\lambda x})^{(d+1)} = ((P(x)e^{\lambda x})^{(d)})' = (Q_d(x)e^{\lambda x})' = Q'_d(x)e^{\lambda x} + \lambda Q_d(x)e^{\lambda x}$$

קיבלנו ע"י הנחת איינדוקציה: $(P(x)e^{\lambda x})^{(d+1)} = e^{\lambda x}(Q_d(x) + Q'_d(x))$ ממעלה d . \square

נשתמש בטענה בשביל לגוזר $1 + \deg(P_1(x))$ ונקבל:

$$\sum_{i=2}^{k''} Q_i(x)e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = 0 \quad (**)$$

עבור פולינום Q_i עם אותה מULAה כמו P_i .

איןטואיציה: קיבלנו שיוויון דומה למה שהתחלנו עם פחות פונקציות. לכן כדאי להפעיל הוכחה באינדוקציה על k'' - מספר השורשים השונים של הפ"א.

$$\text{כלומר נניח ש-} 0 = \sum_{i=2}^{k''} \tilde{Q}_i(x)e^{(\tilde{\lambda}_i - \lambda_1)x} \text{ גורר Ci לכל } i.$$

מהצדדים שעשינו והנחה האינדוקציה נובע ש- $0 = \sum_{i=2}^{k''} Q_i(x)e^{\lambda_1 x}$ לכל i . אבל $e^{\lambda_1 x} \neq 0$ מעתה P_i היא מULAה $Q_i = 0$ לכן $P_i = 0$ לכל i . כלומר, $P_1(x) = 0$ מתאפס באף נקודה ולכן $P_1(x) = 0$ לכל x בקטוע P_1 פולינום האפס. זה מסיים את צעד האינדוקציה ($0 = P_i$ לכל i). מקרה הבסיס דומה.

\square

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5y^{(2)} - 4y' + 4y = 0 \quad \text{דוגמא}$$

הfp"א נראה כך:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2(x+1)^2$$

השורשים הממשיים: e^{2x}, xe^{2x} . לכן פתרונות הם $\lambda_1 = 2, m_1 = 2$.
 השורשים מרוכבים: $\sin x, \cos x$. לכן פתרונות הם $\mu_1 = i, \mu_2 = -i, m'_1 = 1$.
 סה"כ מצאנו 4 פתרונות בת"ל:
 $\{e^{2x}, xe^{2x}, \sin x, \cos x\}$

הראו שאם יש מ"ר הומוגני, סדר n , מקדמים קבועים שכל פתרונותיו חסומים ב- $(0, \infty)$ אז $\Re[\lambda_i] \leq 0$ לכל i (ולכן $\Im[\lambda_i] = 0$). בנוסף, אם $\Re[\lambda_i] < 0$ אז הריבוי של λ_i הוא 1. (גם הכוון השני נכון).

נתחיל בכיוון השני: כל פתרון הוא מהצורה $e^{\Re(\lambda_j) \cdot x} \cdot \sin(\Im(\lambda_j) \cdot x)$ או $e^{\Re(\lambda_j) \cdot x} \cdot \cos(\Im(\lambda_j) \cdot x)$ או $e^{\Re(\lambda_j) \cdot x} \cdot \cos(\Im(\lambda_j) \cdot x) + e^{\Re(\lambda_j) \cdot x} \cdot \sin(\Im(\lambda_j) \cdot x)$. וכאן $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\Re(\lambda_i) \cdot x} = 0$ ולכן דבר עבור $e^{\Re(\lambda_i) \cdot x} \cdot \cos(\Im(\lambda_i) \cdot x) + e^{\Re(\lambda_i) \cdot x} \cdot \sin(\Im(\lambda_i) \cdot x)$ אבל הריבוי הוא 1: אז $j = 0$ והפתרונות כולם חסומים: $\Re(\lambda_i) = 0$.

$$1, \sin(\Im[\lambda_i] \cdot x), \cos(\Im[\lambda_i] \cdot x)$$

הכוון השני: נניח בשלילה שקיים שורש λ_i כך ש- $\Re(\lambda_i) < 0$, ונבנה פתרון לא חסום ונקבל סתירה: אם λ_i ממשי, אז $e^{\lambda_i x}$ דוגמא לפתרון לא חסום. אם λ_i מודומה, אז $e^{\Re(\lambda) \cdot x} \cdot \sin(\Im(\lambda) \cdot x)$ דוגמא לפתרון לא חסום. נותר לדבר על המקרה ש- $\Re(\lambda_i) = 0$. נניח בשלילה שקיים λ_i כזה עם ריבוי גדול מ-1. נבנה פתרון לא חסום: $e^{\lambda_1 x} x^j$. אם λ_i ממשי: אז $\lambda_i = 0$ ואז x פתרון לא חסום, סתירה. אם λ_i מודומה, אז $x \cdot \cos(\Im[\lambda_i] x)$ פתרון לא חסום, סתירה.

□

הוכיחו כי הקבוצה $\{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx\}$ בת"ל בקטע I .

نبנה מ"ר לינארי הומוגני מסדר $2n+1$ עם מקדמים קבועים, שהקבוצה הנ"ל היא בסיס למורחב הפתרונות שלה. נשים לב ש-

$$\begin{aligned}\sin(nx) &= e^{0x} \sin(nx) \cdot x^0 \\ \cos(nx) &= e^{0x} \cos(nx) \cdot x^0\end{aligned}$$

نبנה פולינום:

$$P(t) = \prod_{k=1}^n (t - ik)(t + ik)t = \prod_{k=1}^n (t^2 + k^2)t$$

نبנה מ"ר שזיה הפ"א שלו. מהמשפט המסתכם, $\{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \dots, \sin nt, \cos nt\}$ בסיס למרחב הפתרונות, בפרט בת"ל.

□