

משוואות דיפרנציאליות רגילות - 1040285

גלאי לבדב

12 בנובמבר 2025

תוכן עניינים

4	1	הרצאה 1
4	1.1	הגדירות בסיסיות
4	1.1.1	מה זה מד"ר בכלל????
4	1.1.2	מד"ר מסדר α
4	1.1.3	מד"ר לינארית
4	1.1.4	משוואת אוטונומית מסדר ראשון
5	1.2	מערכת משוואות דיפרנציאליות
5	1.2.1	הגדירה כללית
5	1.2.2	הצורה הנפוצה יותר
5	1.2.3	פתרון מד"ר
6	1.2.4	הערות על מד"ר אוטונומיות
7	2	הרצאה 2
7	2.1	דוגמאות למד"רים
7	2.1.1	גידול אוכלוסייה
7	2.1.2	התפרקות רדיואקטיבית
7	2.1.3	המשוואת הלוגיסטית
8	2.2	דוגמאות למערכות של משוואות
8	2.2.1	מודל טורף-נטרף (Lotka-Volterra)
8	2.2.2	מודל SIR
9	2.2.3	דוגמא מפיזיקה (:)
10	3	הרצאה 3
10	3.1	פתרון משוואת לינארית מסדר ראשון
10	3.1.1	הומווגנית
11	3.1.2	לא הומווגנית
13	3.1.3	דוגמא 1 - הומווגנית
13	3.1.4	דוגמא 2 - לא הומווגנית
14	4	הרצאה 4
14	4.1	משוואות ניתנות להפרדה
14	4.1.1	מקרה פרטי $g = 1$
14	4.1.2	מקרה כללי
15	4.1.3	בעיהת תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה

16	5	הרצאה 5
16	5.1	דוגמה - פתרון המשוואת הלוגיסטית
17	5.1.1	הערה כללית
17	5.2	שיטת כללית לפתרות מד"ר מסדר ראשון

1 הרצאה 1

1.1 הגדרות בסיסיות

1.1.1 מה זה מ"ר בכלל???

משוואה דיפרנציאלית רגילה

משוואה שמעורבת פונקציה ונגזרות שלה.

$$F((t, y(t), \dots, y^n(t)) = 0$$

1.1.2 מ"ר מסדר n

$$y^n = f(t, \dots, y^{n-1})$$

1.1.3 מ"ר לינארית

$$a_0 + a_1(t) \cdot y(t) + \dots + a_n(t) \cdot y^n(t) = b(t)$$

אם $b(t) = 0$ המשוואה נקראת **הומוגנית**.

1.1.4 משוואה אוטונומית מסדר ראשון

$$y'(t) = f(y(t))$$

1.2 מערכת משוואות דיפרנציאליות

1.2.1 הגדרה כללית

שתי משוואות בשתי פונקציות:

$$F_1(y_1^n, y_2^n, \dots, y_1, y_2) = 0$$

$$F_2(y_1^n, y_2^n, \dots, y_1, y_2) = 0$$

בדרך כלל נשמש בצורה הבאה:

1.2.2 הזרה הנפוצה יותר

$$F_1(t, y_1, y_2) = 0$$

$$F_2(t, y_1, y_2) = 0$$

לפעמים יהיו k משוואות בא פונקציות.

1.2.3 פתרון מד"ר

נפתח את המשוואה $y'(t) = y(t)$. ראשית, נניח כי $y'(t) = 0$. במקרה יתאפשר חילוק ב($y(t)$).

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$$

אם y תמיד חיובית: נשים לב שזו נגזרת מוכרת.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = (\log(y(t)))' = 1$$

נבצע אינטגרל לשני האגפים,

$$\log(y(t)) = t + c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

עליה לחזקת e , ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = e^t \cdot e^c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

אם y תמיד שלילית: נעשה את אותו דבר אבל על $-\log(-y(t))$ ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = -e^t \cdot e^c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

לסיכום, אוסף הפתרונות הוא:

$$y(t) = e^t \cdot C \quad , \quad C := e^c \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

נבדוק שזה פתרון:

$$y'(t) = e^t \cdot C = y(t)$$

נראה שאין עוד פתרונות: נשתמש בפונקציית עזר:

$$g(t) = \frac{y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = \frac{y'(t)e^t - y(t)e^t}{(e^t)^2} = \frac{y'(t) - y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = 0 \iff \text{קבועה } g \iff y(t) = c \cdot e^t$$

1.2.4 הערות על מ"ר אוטונומיות

1. אם y_0 פתרון של $y_c(t) = y_0(t + c)$ או גם $y'(t) = f(y(t))$ לכל בחירה של c

2 הרצאה 2

2.1 דוגמאות למד"רים

2.1.1 גידול אוכלוסייה

. $N(t)$ - גודל האוכלוסייה בזמן t , K - קבוע שנתי באוכלוסייה.

$$N'(t) = K \cdot N(t)$$

באופן דומה לפתרון המד"ר שראינו בהרצאה 1

$$N(t) = e^{kt} \cdot C'$$

נסמן כתנאי התחלת את $N(0)$, כלומר - הגודל ההתחלתי של האוכלוסייה

$$N(0) = C$$

לכן ניתן לכתוב,

$$N(t) = e^{kt} \cdot N(0)$$

2.1.2 התפרקות רדיואקטיבית

נסמן ב- $N(t)$ את מספר החלקיקים באיזהו חומר רדיואקטיבי.

המד"ר שלנו יהיה

$$N'(t) = -K \cdot N(t)$$

ואז נקבל (שוב, באופן דומה להרצאה 1)

$$N(t) = e^{-kt} \cdot N(0)$$

2.1.3 המשוואה הלוגיסטיבית

מידול לגודל האוכלוסייה עם משאבים מוגבלים.

כלומר, אם האוכלוסייה לא יכולה לעبور סף C . (כלומר $N(0) < C$).

המשוואה תהיה

$$N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{C}\right) = K \cdot N(t) - \frac{K}{C} \cdot N(t)^2$$

2.2 דוגמאות למערכות של משוואות

2.2.1 מודל טורף-נטרף (Lotka-Volterra)

נסמן:

$x(t)$ □ כמות הנטרפים (צמחוניים/ארנבות).

$y(t)$ □ כמות הטורפים (אריות).

המערכת:

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), & a > 0, b > 0 \\ y'(t) &= -cy(t) + dx(t)y(t), & c > 0, d > 0 \end{aligned}$$

2 דוגמאות לפתרון:

.1

$$\begin{aligned} y &\equiv 0 \\ x(t) &= x(0)e^{at} \end{aligned}$$

.2

$$\begin{aligned} x &\equiv 0 \\ x(t) &= y(0)e^{-ct} \end{aligned}$$

2.2.2 מודל SIR

נחלק את כלל האוכלוסייה ל-3 סוגים:

.1 "רגשיים" - Susceptible $S(t)$

.2 "נדבק" - Infected $I(t)$

.3 "מחלימים" - Recovered $R(t)$

עבור קבועים $\beta > 0$, $\gamma > 0$ נקבל:

$$\begin{aligned} S'(t) &= -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\ I'(t) &= \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \\ R'(t) &= \gamma \cdot I(t) \end{aligned}$$

(*) - זו מערכת אוטונומית מסדר ראשון אך אינה לינארית.

בדיקת שפיות למערכת:

נשים לב שסך האוכלוסייה = $S + I + R$

אוכלוסייה בזמן 0 $(S + I + R)(0) = 0$ ואז:

$$(S + I + R)'(t) = S' + I' + R' = 0$$

כלומר קבוע לאורך כל הזמן.

2.2.3 דוגמא מפיזיקה :

חוק שני של ניוטון - $F = m \cdot a$

$x(t)$ - מיקום של חלקיק הגוף בזמן t .

$x''(t)$ - תאוצה של חלקיק הגוף בזמן t .

m - מסה של הגוף.

$$x''(t) \cdot m = f(x(t), x'(t), \dots)$$

3 הרצאה 3

3.1 פתרון משווה לינארי מסדר ראשון

3.1.1 הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = 0$$

תמיד קיים פתרון האפס - "פתרונות הטריוויאלי". נרצה למצוא את שאר הפתרונות.

$$\text{נניח } y \neq 0, \frac{y'}{y} = -p$$

מההנחה שלנו, והנחה נוספת ש- y פונקציה רציפה: y תמיד חיובית או תמיד שלילית.
בהתאם, הפתרון יהיה:

$$(\ln(|y|))' = (\ln(\pm y))' = -p$$

נניח למשל ש- y חיובית ממש.

הfonקציות הקדומות של $p(x)$ הם מהצורה: $C - \int_a^x p(t)dt$. (המשפט היסודי).
לכן,

$$\ln |y| = C - \int_a^x p(t)dt$$

נפעיל אקספוננט,

$$|y(x)| = e^C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

שכל-

$$\forall x, \quad y(x) = D \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}, \quad D := e^C, \quad D > 0$$

מצאו פונקציות מועמדות לפתרון. נראה:

1. הוא אכן פתרונות:

עבור קבועות הפתרונות שמצאנו,

$$y(x) = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

נגזרו: $y' = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x))$

ונקבל: $y' + p \cdot y = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x)) + (D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}) \cdot (p(x)) = 0$

כלומר - הקבועה מקיימת את המשוואה המקורית.

2. אלו כל הפתרונות: ניקח פתרון כלשהו, y .

נגדיר פונקציית עזר:

$$g(x) := \frac{y(x)}{e^{-\int_a^x p(t)dt}}$$

נגזרה:

$$g' = y' \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p$$

נציב $y' = -p \cdot y$ ונקבל:

$$(-p \cdot y) \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p = 0$$

ולכן,

$$g = C, \quad C \in \mathbb{R} \iff g \text{ קבועה} \iff g' = 0$$

לסיכום,

$$y(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

מה אם נוסיף תנאי תחילת?

$$y(x_0) = y_0$$

נציב $a = x_0, C = y_0$ ונקבל:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

זהו הפתרון היחיד לעניין הערך ההתחלתי הוז.

3.1.2 לא הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = q(x)$$

נניח שקיים פתרון ונכפול את 2 האגפים בפונקציה μ (גזירה ואך פעם **לא מתאפסת**).

$$\mu \cdot y' + \mu \cdot p \cdot y = \mu \cdot q \quad (1)$$

היה לנו שימושי אם "במקרה" **אגף שמאל הוא בדיק'** ($y' \cdot \mu$). נרצה לבחור μ שתקיים את זה.

נססה להבין כיצד לבחור את μ הוז.

מכלול המכפלת:

$$(\mu \cdot y)' = \mu' \cdot y + \mu \cdot y'$$

לכן, בהתבסס על המשוואה המקורי (1) - נרצה:

כלומר, באופן שקול, נרצה לדרכו: $p \cdot \mu' = \mu \cdot p$.

וע"י העברת אגפים,

$$\mu' - \mu \cdot p = 0$$

רגע, זו משווהה לינארית הומוגנית מסדר ראשון! לכן, ניקח:

$$\mu(x) = e^{-\int_a^x p(t)dt} = e^{\int_a^x p(t)dt}$$

אחרי שבחרנו את μ , נחזור לפתרון המד"ר שלנו:

כאמור, בחרנו את μ כך שמתקיים:

$$(\mu \cdot y)' = \mu \cdot q$$

נעsha אינטגרל על שני הצדדים,

$$\mu \cdot y = \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + C$$

נחקק ב- μ ,

$$y(x) = \frac{1}{\mu} \int_a^x q(t) \cdot \mu(t) dt + \frac{C}{\mu}$$

כאשר $\mu(x) = e^{\int_a^x p(t) dt}$

מצאנו פתרון כללי למשוואת לינארית לא-הומוגנית.

בדיקות שפיות

1. להציג את הפתרון הכללי ולודא שהוא פתרון.

2. מה אם $0 = q$? כל הפתרונות נתונים ע"י $y = C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$. שזה אכן הפתרון שיצא לנו עבור מערכת הומוגנית.

3. נניח ש y_1, y_2 פותרים את המד"ר.

נסתכל על הפרש: $\Delta = y_1 - y_2$

$$\Delta' + p\Delta = y'_1 + py_1 - y'_2 + py_2 = 0$$

כלומר, הפרש פתרונות של מד"ר לא הומוגני הוא פתרון של מד"ר הומוגני.

אפשר לנסות למצוא פתרונות ל- $y' + py = q$ ע"י הצבת $(x, C(x))$. כלומר, לפטור משווהה ב- $C(x)$. (נכיב שרירותי, וזה נמצא אותו במדוק).

נכיב $y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$ במשווהה הלא הומוגנית:

$$y' + py = C' \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} + C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} \cdot (-p) + p \cdot C \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} = q$$

$$\Rightarrow C' \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt} = q$$

נכפיל את שני האגפים ב- $e^{\int_a^x p(t) dt}$:

$$C' = q \cdot e^{\int_a^x p(t) dt}$$

זו משווהה שcola (במשתנה חדש $C(x)$)

מהמשפט היסודי נקבל:

$$C(x) = \int_a^x q(t) e^{\int_a^x p(t) dt} dt + D \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t) dt}$$

3.1.3 דוגמא 1 - הומוגניות

$$y' = y \cdot \sin x$$

כלומר $p(x) = \sin(x)$ ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C \cdot e^{-\int_a^x \sin(t) dt} = C \cdot e^{-\cos x + \cos a} = D \cdot e^{-\cos x}$$

(C יכול לקבל כל ערך, שכן גם $D := C \cdot e^{\cos a}$ יכול לקבל כל ערך).

3.1.4 דוגמא 2 - לא הומוגניות

$$y' = y \cdot \sin x + \cos x$$

פתרון כללי יהיה:

$$y = D \cdot e^{-\cos x} + \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x e^{\cos t} \cos(t) dt}{e^{\cos x}}$$

4 הרצאה 4

4.1 משוואות ניתנות להפרדה

הגדירה

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

4.1.1 מקרה פרטי 1

נניח ש- y פתרון, כך ש- $0 \neq h(y)$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = 1$$

נשים לב שגם $H(t)$ זו פונקציה קדומה של $\frac{1}{h(t)}$

$$(H(y))' = \frac{y'}{h(y)}$$

לכן המשוואה שcolaה למשוואה

$$(H(y))' = 1 \Rightarrow H(y(t)) = C + t$$

איך נמצא את y ? קיימת ל- H הופכית בתחום שאנו עובדים בו בכלל שהיא מוגדרת כך

$$H(t) = \int_{x_0}^t \frac{1}{h(x)} dx + \text{קבוע}$$

נשים לב, שלפי ההנחה שלנו - h לא מתאפסת. בפרט $\frac{1}{h}$ בעלת סימן קבוע - חח"ע. לכן גם H חח"ע. לכן, כדי למצוא את y , נרצה להפעיל את $H^{-1}(t)$ על שני האגפים.

$$\forall C, \quad y(t) = H^{-1}(C + t)$$

4.1.2 מקרה כללי

נמשיך עם ההנחה $0 \neq h(y)$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

ניקח

$$\frac{1}{h} \text{ קדומה של } H$$

$$g \text{ קדומה של } G$$

ונקבל,

$$(H(y))' = G' \Rightarrow H(y) = G$$

נפעיל H^{-1} על שני האגפים,

$$\forall C \in \mathbb{R}, \quad y(t) = H^{-1}(G(t)) + C$$

אלו כל הפתרונות כך ש-0 $\neq h(y)$ בתחום.

בדיקה שפיות אפשר להשלים (אין לי כוח), אין צורך בבדיקה שפיות אם כל הצעדים בהוכחה הם אמ"ם.

4.1.3 בעית תנאי התחלתי למשוואות נייניות להפרדה

נוסיף תנאי התחליה לבעה,

$$\begin{cases} y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתרו את זה כאשר מניחים ש-0 $\neq h(y)$ בתחום.

נחלק את שני האגפים ב- $h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

נעשה אינטגרל בקטע $[x_0, x]$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'}{h(y)} dt = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

נעשה החלפת משתנים $y(t) = v$

$$\Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dv}{h(v)} = \int_{x_0}^x g(t) dt$$

ניקח G קדומה של H , g קדומה של $\frac{1}{h}$, ונקבל:

$$G'(x) - G'(x_0) = H(y(x)) - H(y(x_0))$$

נחסר ($H(y(x_0))$ משני האגפים,

$$H(y(x)) = G'(x) - G'(x_0) + H(y(x_0))$$

ורכיב את H^{-1}

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y(x_0)$$

נציב את תנאי התחליה ונקבל,

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y_0$$

5.1 דוגמא - פתרון המשוואה הלוגיסטיבית

תזכורת

$$\begin{cases} N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \\ N(t_0) = N_0 \in (0, L) \end{cases}$$

זו משוואה אוטונומית, ובפרט - ניתנת להפרדה. **נרצה למצוא (חלק) מפתרונותות המד"ר.**

נניח: $0 \neq h(t)$ בתחום ההגדרה של $N(t)$.

נחלק ב($N, h(N)$, ואז לכל t בתחום (קטע פתוח שמכיל את t_0):

$$\frac{N'}{h(N)} = 1$$

נעשה אינטגרציה לשני האגפים, ואז לכל t בתחום:

$$\int_{t_0}^t \frac{N'}{h(N)} dx = \int_{t_0}^t 1 dx$$

נעשה החלפת משתנים, ואז:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = t - t_0$$

צרייך לחשב את אגף שמאל - צרייך למצוא פונקציה קדומה של $\frac{1}{h(v)}$, נסמן ב- H . נשתמש בפירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{h(v)} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v(1 - \frac{v}{L})} \right) = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v} + \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{v}{L}} \right)$$

וסה"כ, ע"י שימוש בנגזרת של \ln קיבל:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = \frac{1}{K} \left(\log v - \log \left(1 - \frac{v}{L}\right) \right)$$

מסקנה:

$$\frac{1}{K} \left(\log N(t) - \log \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \right) - \frac{1}{K} \left(\log N_0 - \log \left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \right) = t - t_0$$

נכפול ב- K ,

$$\left(\log N(t) - \log \left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \right) - \left(\log N_0 - \log \left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \right) = K(t - t_0)$$

נעביר אגפים ונפעיל אקספוננט:

$$\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{L}} = \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \cdot e^{K(t-t_0)}$$

קיבלנו משוואה לינארית ב($N(t)$

$$N(t) = \frac{N_0}{\frac{N_0}{L} + \left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \cdot e^{-K(t-t_0)}}$$

5.1.1 הערה כללית

אם נתונה משווה מהצורה $y(t) = y_0$ (רציפה), $y'(t) = h(y)$ נקודה כך ש- $y'(t_0) = h(y_0)$ היא פתרון.

5.2 שיטה כללית לפתרת מ"ר מסדר ראשון

שינוי משתנים/ הצבה

נתונה מ"ר מסדר ראשון עם תנאי התחלתי,

$$y(t_0) = y_0 \quad y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right)$$

נפתחו ע"י שינוי משתנים $\frac{y(t)}{t} = z(t)$

קיבלונו מ"ר שקולה:

$$f(z(t)) = z'(t) \cdot t + z(t)$$

נעביר אנפים ונחלק ב- t :

$$z'(t) = \frac{f(z(t)) - z(t)}{t} = \frac{1}{t} \cdot (f(z(t)) - z(t))$$

נשים לב, זו מ"ר ניתנת להפרדה.

נניח G קדומה של H , $\frac{1}{f(x)-x}$, ונקבל:

$$H(z(t)) - H(z(t_0)) = G(t) - G(t_0)$$

$G = \ln t$, כלומר G קדומה של $\frac{1}{x}$

$$H(z(t)) = H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) + \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

$$z(t) = H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) - \ln(t_0) + \ln(t)\right)$$

סה"כ,

$$y(t) = t \cdot H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) - \ln(t_0) + \ln(t)\right)$$

זהו פתרון שמקיים את תנאי ההתחלה.