משוואות דיפרנציאליות רגילות

חורף - תשפ"ו

גלית לבדב

תוכן עניינים

1 הרצאה 1

1.1 הגדרות בסיסיות

1.1.1 מה זה מד"ר בכלל???

משוואה דיפרנציאלית רגילה

משוואה שמערבת פונקציה ונגזרות שלה.

$$F((t, y(t), ..., y^n(t)) = 0$$

1.1.2 מד"ר מסדר n

$$y^n = f(t, ..., y^{n-1})$$

1.1.3 מד"ר לינארית

$$a_0 + a_1(t) \cdot y(t) + ... + a_n(t) \cdot y^n(t) = b(t)$$

אם $b(t) = 0$ המשוואה נקראת **הומוגנית**.

1.1.4 משוואה אוטונומית מסדר ראשון

$$y'(t) = f\left(y(t)\right)$$

1.2 מערכת משוואות דיפרנציאליות

1.2.1 הגדרה כללית

שתי משוואות בשתי פונקציות:

$$F_1(y_1^n, y_2^n, ..., y_1, y_2) = 0$$
$$F_2(y_1^n, y_2^n, ..., y_1, y_2) = 0$$

בדרך כלל נשתמש בצורה הבאה:

1.2.2 הצורה הנפוצה יותר

$$F_1(t, y_1, y_2) = 0$$
$$F_2(t, y_1, y_2) = 0$$

הערה: לפעמים יהיו k משוואות בk פונקציות.

1.2.3 פתרון מד"ר

נפתור את המשוואה $y'(t) = y(t)$. ראשית, נניח כי $y(t) = 0$. כעת ניתן לחלק ב$y(t)$.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$$

אם y תמיד חיובית: נשים לב שזו נגזרת מוכרת.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = (\log(y(t)))' = 1$$

נבצע אינטגרל לשני האגפים,

$$\log(y(t)) = t + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

נעלה לחזקת e, ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = e^t \cdot e^c \quad , c \in \mathbb{R}$$

אם y תמיד שלילית: נעשה את אותו דבר אבל על $\log(-y(t))$ ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = -e^t \cdot e^c \quad , c \in \mathbb{R}$$

לסיכום, אוסף הפתרונות הוא:

$$y(t) = e^t \cdot C \quad , C := e^c \quad , c \in \mathbb{R}$$

נבדוק שזה פתרון:

$$y'(t) = e^t \cdot C = y(t)$$

נראה שאין עוד פתרונות: נשתמש בפונקציית עזר:

$$g(t) = \frac{y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = \frac{y'(t)e^t - y(t)e^t}{\left(e^t\right)^2} = \frac{y'(t) - y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = 0 \iff g \text{ קבועה} \iff y(t) = c \cdot e^t$$

1.2.4 הערות על מד"ר אוטונומיות

1. אם y_0 פתרון של $y'(t) = f(y(t))$ אז גם $y_c(t) = y_0(t+c)$ פתרון לכל בחירה של c.

2 הרצאה 2

2.1 דוגמאות למד"רים

2.1.1 גידול אוכלוסיה

$N(t)$ - גודל האוכלוסייה בזמן t, K - קבוע שתלוי באוכלוסייה.

$$N'(t) = K \cdot N(t)$$

באופן דומה לפתרון המד"ר שראינו בהרצאה 1,

$$N(t) = e^{kt} \cdot C'$$

נסמן כתנאי התחלה את $N(0)$, כלומר - הגודל ההתחלתי של האוכלוסיה

$$N(0) = C$$

לכן ניתן לכתוב,

$$N(t) = e^{k \cdot t} \cdot N(0)$$

2.1.2 התפרקות רדיואקטיבית

נסמן ב-$N(t)$ את מספר החלקיקים באיזשהו חומר רדיואקטיבי.

המד"ר שלנו יהיה

$$N'(t) = -K \cdot N(t)$$

ואז נקבל (שוב, באופן דומה להרצאה 1)

$$N(t) = e^{-k \cdot t} \cdot N(0)$$

2.1.3 המשוואה הלוגיסטית

מידול לגודל האוכלוסיה עם משאבים מוגבלים.

כלומר, אם האוכלוסיה לא יכולה לעבור סף C. (כלומר - $N(0) < C$).

המשוואה תהיה

$$N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{C}\right) = K \cdot N(t) - \frac{K}{C} \cdot N(t)^2$$

2.2 דוגמאות למערכות של משוואות

2.2.1 מודל SIR

נחלק את כלל האוכלוסיה ל-3 סוגים:

1. $S(t)$ - Susceptible "רגישים"
2. $I(t)$ - Infected "נדבק - כרגע חולה"
3. $R(t)$ - Recovered "מחלימים"

עבור קבועים $\beta > 0, \quad \gamma > 0$ נקבל:

$$\begin{aligned} &S'(t) = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\ &I'(t) = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \\ &R'(t) = \gamma \cdot I(t) \end{aligned}$$

(*) - זו מערכת אוטונומית מסדר ראשון אך אינה לינארית.

בדיקת שפיות למערכת:

נשים לב שסך האוכלוסיה = $S + I + R$

אוכלוסייה בזמן 0 = $(S + I + R)(0)$ ואז:

$$(S + I + R)'(t) = S' + I' + R' = 0$$

כלומר קבוע לאורך כל הזמן.

2.2.2 מודל טורף-נטרף (Lotka-Voltera)

נסמן:

- $x(t)$: כמות הנטרפים (צמחוניים/ארנבות).
- $y(t)$: כמות הטורפים (אריות).

המערכת:

$$\begin{aligned} &x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \qquad a > 0,\, b > 0 \\ &y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t), \qquad c > 0,\, d > 0 \end{aligned}$$

דוגמא לפתרון:

$$\begin{cases} y \equiv 0 \\ x(t) = x(0)e^{at} \end{cases}$$

2.2.3 דוגמא מפיזיקה :(

חוק שני של ניוטון - $F = m \cdot a$

$x(t)$ - מיקום של חלקיק גוף בזמן t.

$x''(t)$ - תאוצה של חלקיק גוף בזמן t.

m - מסה של הגוף.

$$x''(t) \cdot m = f(x(t), x'(t), ...)$$

3 הרצאה 3

3.1 פתרון משוואה לינארית מסדר ראשון

3.1.1 הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = 0$$

תמיד קיים פתרון האפס - "הפתרון הטריוויאלי". נרצה למצוא את שאר הפתרונות.

נניח ש-$y \neq 0$,

$$\frac{y'}{y} = -p$$

מההנחה שלנו, והנחה נוספת ש-y פונקציה רציפה: y תמיד חיובית או תמיד שלילית.

בהתאם, הפתרון יהיה:

$$(\ln(|y|))' = (\ln(\pm y))' = -p$$

נניח למשל ש-y חיובית ממש.

הפונקציות הקדומות של $p(x)$ הן מהצורה: $C - \int_a^x p(t)dt$. (המשפט היסודי).

לכן,

$$\ln|y| = C - \int_a^x p(t)dt, \quad C \text{ שרירותי}, \ a \text{ קבוע}$$

נפעיל אקספוננט,

$$|y(x)| = e^C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

שקול ל-

$$\forall x, \quad y(x) = D \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}, \ D := e^C, \quad D > 0$$

מצאנו **פונקציות מועמדות לפתרון**. נראה:

1. הן אכן פתרונות:

   עבור קבוצת הפתרונות שמצאנו,

   $$y(x) = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

   נגזור: $y' = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x))$

   ונקבל: $y' + p \cdot y = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x)) + (D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}) \cdot (p(x)) = 0$.

   כלומר - הקבוצה מקיימת את המשוואה המקורית.

2. אלו כל הפתרונות: ניקח פתרון כלשהו, y.

   נגדיר פונקציית עזר:

   $$g(x) := \frac{y(x)}{e^{-\int_a^x p(t)dt}}$$

נגזור:

$$g' = y' \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p$$

נציב $y' = -p \cdot y$ ונקבל:

$$(-p \cdot y) \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p = 0$$

ולכן,

$$g' = 0 \iff g \text{ קבועה} \iff g = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

לסיכום,

$$y(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

מה אם נוסיף תנאי התחלה?

$$y(x_0) = y_0$$

נציב $a = x_0,\ C = y_0$ ונקבל:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

זהו **הפתרון היחיד לבעיית הערך ההתחלתי** הזו.

3.1.2 לא הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = q(x)$$

נניח שקיים פתרון ונכפול את 2 האגפים בפונקציה μ (**גזירה** ואף פעם **לא מתאפסת**).

$$\mu \cdot y' + \mu \cdot p \cdot y = \mu \cdot q \tag{1}$$

היה לנו שימושי אם "במקרה" אגף שמאל הוא בדיוק $(\mu \cdot y)'$. נרצה לבחור μ שתקיים את זה.

ננסה להבין כיצד לבחור את μ הזו.

מכלל המכפלה:

$$(\mu \cdot y)' = \mu' \cdot y + \mu \cdot y'$$

לכן, בהתבסס על המשוואה המקורית (1) - נרצה: $\mu' \cdot y = \mu \cdot p \cdot y$.

כלומר, באופן שקול, נרצה לדרוש: $\mu' = \mu \cdot p$.

וע"י העברת אגפים,

$$\mu' - \mu \cdot p = 0$$

רגע, זו משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון! לכן, ניקח:

$$\mu(x) = e^{-\int_a^x -p(t)dt} = e^{\int_a^x p(t)dt}$$

אחרי שבחרנו את μ, נחזור לפתרון המד"ר שלנו:

כאמור, בחרנו את μ כך שמתקיים:

$$(\mu\cdot y)'=\mu\cdot q$$

נעשה אינטגרל על שני הצדדים,

$$\mu\cdot y=\int_a^x q(t)\cdot\mu(t)dt+C$$

נחלק ב-μ,

$$y(x)=\frac{1}{\mu}\int_a^x q(t)\cdot\mu(t)dt+\frac{C}{\mu}$$

כאשר $\mu(x)=e^{\int_a^x p(t)dt}$

מצאנו פתרון **כללי** למשוואה לינארית לא-הומוגנית.

בדיקת שפיות

1. להציג את הפתרון הכללי ולוודא שהוא פתרון.
2. מה אם $q=0$? כל הפתרונות נתונים ע"י $\frac{C}{\mu}=C\cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$. שזה אכן הפתרון שיצא לנו עבור מערכת הומוגנית.
3. נניח שy_1,y_2 פותרים את המד"ר.

   נסתכל על ההפרש: $\Delta=y_1-y_2$.

$$\Delta'+p\Delta=y_1'+py_1-y_2'+py_2=0$$

   כלומר, הפרש פתרונות של מד"ר לא הומוגני הוא פתרון של מד"ר הומוגני.

אפשר לנסות למצוא פתרונות ל-$y'+py=q$ ע"י הצבת $C(x)$. כלומר, לפתור משוואה ב-$C(x)$. (נציב C שרירותי, ואז נמצא אותו במדויק).

נציב $y(x)=C(x)\cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$ במשוואה הלא הומוגנית:

$$y'+py=C'\cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}+C\cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}\cdot(-p)+p\cdot C\cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}=q$$

$$\Rightarrow C'\cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}=q$$

נכפיל את שני האגפים ב-$e^{\int_a^x p(t)dt}$:

$$C'=q\cdot e^{\int_a^x p(t)dt}$$

זו משוואה שקולה (במשתנה חדש $C(x)$).

מהמשפט היסודי נקבל:

$$C(x)=\int_a^x q(t)e^{\int_a^x p(t)dt}dt+D\Rightarrow y(x)=C(x)\cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

3.2 דוגמאות לשימוש בפתרון הכללי

3.2.1 דוגמא 1 - הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x$$

כלומר $p(x) = \sin(x)$ ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C \cdot e^{-\int_a^x -\sin(t)dt} = C \cdot e^{-\cos x + \cos a} = D \cdot e^{-\cos x}$$

(C יכול לקבל כל ערך, לכן גם $D := C \cdot e^{\cos a}$ יכול לקבל כל ערך).

3.2.2 דוגמא 2 - לא הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x + \cos x$$

פתרון כללי יהיה:

$$y = D \cdot e^{-\cos x} + \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x e^{\cos t} \cos(t) dt}{e^{\cos x}}$$

4 הרצאה 4

4.1 משוואות ניתנות להפרדה

הגדרה

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

4.1.1 מקרה פרטי $g = 1$

מד"ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = h(y(t))$$

נניח ש-y פתרון, כך ש-$h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב$h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = 1$$

נשים לב שאם $H(t)$ זו פונקציה קדומה של $\frac{1}{h(t)}$,

$$(H(y))' = \frac{y'}{h(y)}$$

לכן המשוואה שקולה למשוואה

$$(H(y))' = 1 \Rightarrow H(y(t)) = C + t$$

איך נמצא את y? קיימת ל-H הופכית בתחום שאנו עובדים בו בגלל שהיא מוגדרת כך

$$H(t) = \int_{x_0}^{t} \frac{1}{h(x)} dx + \text{קבוע}$$

נשים לב, שלפי ההנחה שלנו - h לא מתאפסת. בפרט $\frac{1}{h}$ בעלת סימן קבוע - חח"ע. לכן גם H חח"ע. לכן, כדי למצוא את y, נרצה להפעיל את $H^{-1}(t)$ על שני האגפים.

נקבל את הפתרון:

$$\forall C, \quad y(t) = H^{-1}(C + t)$$

4.1.2 מקרה כללי

מד"ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

נמשיך עם ההנחה $h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב-$h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

ניקח H קדומה של $\frac{1}{h}$, G קדומה של g ונקבל,

$$\frac{y'}{h(y)} = (H(y))' = G' \Rightarrow H(y) = G$$

נפעיל H^{-1} על שני האגפים,

$$\forall C \in \mathbb{R}, \quad y(t) = H^{-1}(G(t)) + C$$

אלו כל הפתרונות כך ש-$h(y) \neq 0$ בתחום.

בדיקת שפיות אפשר להשלים (אין לי כוח), אין צורך בבדיקת שפיות אם כל הצעדים בהוכחה הם אמ"מ.

4.1.3 בעיית תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה

נוסיף תנאי התחלה לבעיה,

$$\begin{cases} y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור את זה כאשר מניחים שוב ש-$h(y) \neq 0$ בתחום.

נחלק את שני האגפים ב-$h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

נעשה אינטגרל בקטע $[x_0, x]$,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'}{h(y)} dt = \int_{x_0}^{x} g(t) dt$$

נעשה החלפת משתנים $y(t) = v$

$$\Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dv}{h(v)} = \int_{x_0}^{x} g(t) dt$$

ניקח G קדומה של g, H קדומה של $\frac{1}{h}$, ונקבל:

$$G'(x) - G'(x_0) = H(y(x)) - H(y(x_0))$$

נוסיף $H(y(x_0))$ לשני האגפים,

$$H(y(x)) = G'(x) - G'(x_0) + H(y(x_0))$$

נרכיב את H^{-1},

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y(x_0)$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל,

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y_0$$

5 הרצאה 5

5.1 דוגמא למד"ר ניתנת להפרדה - פתרון המשוואה הלוגיסטית

תזכורת

$$\begin{cases} N'(t) = K \cdot N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \\ N(t_0) = N_0 \in (0, L) \end{cases}$$

זו משוואה אוטונומית.

נשים לב,

$$g(t) = 1, \quad h(N(t)) = K \cdot N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{L}\right)$$

כלומר, המשוואה ניתנת להפרדה:

$$N'(t) = g(t) \cdot h(N(t))$$

נרצה למצוא (חלק) מפתרונות המד"ר.

נניח: $h(t) \neq 0$ בתחום ההגדרה של $N(t)$.

נחלק ב$h(N)$, ואז לכל t בתחום (קטע פתוח שמכיל את t_0):

$$\frac{N'}{h(N)} = 1$$

נעשה אינטגרציה לשני האגפים, ואז לכל t בתחום:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{N'}{h(N)} dx = \int_{t_0}^{t} 1 dx$$

נעשה החלפת משתנים, $N = v, \quad N' \cdot dx = dv$ ואז:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = t - t_0$$

בשביל לחשב את אגף שמאל - צריך למצוא פונקציה קדומה של $\frac{1}{h}$, נסמן ב-H. נשתמש בפירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{h(v)} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v(1 - \frac{v}{L})}\right) = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v} + \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{v}{L}}\right)$$

וסה"כ, ע"י שימוש בנגזרת של $\ln$ נקבל:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = \frac{1}{K}\left(\log v - \log(1 - \frac{v}{L})\right)\Big|_{N(t_0)}^{N(t)}$$

מסקנה:

$$\frac{1}{K}\left(\log N(t) - \log(1 - \frac{N(t)}{L})\right) - \frac{1}{K}\left(\log N_0 - \log(1 - \frac{N_0}{L})\right) = t - t_0$$

נכפול בK,

$$\left(\log N(t) - \log(1 - \frac{N(t)}{L})\right) - \left(\log N_0 - \log(1 - \frac{N_0}{L})\right) = K(t - t_0)$$

נעביר אגפים ונפעיל אקספוננט:

$$\frac{N(t)}{1 - \frac{N(t)}{L}} = \frac{N_0}{1 - \frac{N_0}{L}} \cdot e^{K(t-t_0)}$$

קיבלנו משוואה לינארית ב$N(t)$:

$$N(t) = \frac{N_0}{\frac{N_0}{L} + \left(1 - \frac{N_0}{L}\right) \cdot e^{-K(t-t_0)}}$$

5.1.1 הערה כללית

אם נתונה משוואה מהצורה $y' = h(y)$ (h רציפה), y_0 נקודה כך ש-$h(y_0) = 0$, **אז** $y(t) = y_0$ היא פתרון.

5.2 שיטה לפתירת מד"ר מסדר ראשון - החלפת משתנים

שינוי משתנים/ הצבה

נתונה מד"ר מסדר ראשון עם תנאי התחלה,

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור ע"י שינוי משתנים $\frac{y(t)}{t} = z(t)$:

קיבלנו מד"ר שקולה:

$$z'(t) \cdot t + z(t) = f(z(t))$$

נעביר אגפים ונחלק ב-t:

$$z'(t) = \frac{f(z(t)) - z(t)}{t} = \frac{1}{t} \cdot (f(z(t)) - z(t))$$

נשים לב, זו **מד"ר ניתנת להפרדה**. ($h(z) = f(z) - z, \quad g = \frac{1}{t}$)

נסמן:

$$\frac{z'}{h(z)} = \frac{1}{t} \Leftarrow z' = \frac{1}{t} \cdot h(z)$$

ניקח G קדומה של $\frac{1}{x}$, H קדומה של $\frac{1}{f(x)-x}$, ונקבל:

$$H(z(t)) - H(z(t_0)) = G(t) - G(t_0)$$

G קדומה של $\frac{1}{x}$, כלומר $G = \ln t$:

$$H(z(t)) = H(\frac{y_0}{t_0}) + \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

נרכיב את H^{-1},

$$z(t) = H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) - \ln(t_0) + \ln(t)\right)$$

סה"כ,

$$\boxed{y(t) = t \cdot H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) + \ln t - \ln t_0\right)}$$

זהו פתרון שמקיים את תנאי ההתחלה.

6 הרצאה 6

יהי מד"ר מסדר ראשון, כאשר f רציפה.

המשפט מבטיח קיום ויחידות של פתרון למד"ר שמקיים תנאי התחלה $y(x_0)=x_0$.

בשביל לנסח את המשפט, נגדיר פונקציית ליפשיץ.

פונקציית ליפשיץ

פונקצייה $f(x)$ בקטע I היא ליפשיצית עם קבוע K אם מתקיים: $|f(x_1)-f(x_2)|\leq K|x_1-x_2|$

הערה 1: אם f גזירה, והנגזרת חסומה ב-I, אז f ליפשיץ: $\exists c\in(x_1,x_2),\ \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f(c)$

הערה 2: אם f ליפשיץ, אז היא רציפה.

6.1 משפט הקיום והיחידות - פיקרד לינדלוף

תהי $f(x,y)$ פונקצייה בתחום D קשיר (לרוב מלבן $I\times J$).
אם f רציפה ב-x וליפשיץ ב-y, וקבוע הליפשיץ אינו תלוי ב-x: $\forall x,\ |f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq K|y_1-y_2|$

אזי, לכל (x_0,y_0) בפנים של D, קיים $\varepsilon>0$ כך שיש פתרון y למשוואה

$$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$$

והוא מוגדר עבור $x\in[x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon]$. יתר על כן - הפתרון יחיד.

6.1.1 הוכחה

יחידות נניח בשלילה שקיימים 2 פתרונות שונים y,Y לבעיית הערך ההתחלתי הנתונה.
אם $y'=f(x,y)$ בקטע $[x-\varepsilon,x+\varepsilon]$ ו-$y(x_0)=y_0$, אז,

$$\int_{x_0}^{x}y'(t)dt=\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt\Rightarrow y(x)-y_0=\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt$$

אם $y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt$, אז $y(x_0)=y_0+0$. כלומר, y פותרת את בעיית הערך ההתחלתי בקטע.
נשים לב, שאם y,Y פותרים את $y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt$ והן רציפות, אז:

$$Y(x)-y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,Y(t))dt-y_0-\int_{x_0}^{x}f(t,y(t))dt=\int_{x_0}^{x}f(t,Y(t))-f(t,y(t))dt$$

נפעיל ערך מוחלט על שני האגפים,

$$|Y(x)-y(x)|=|\int_{x_0}^{x}f(t,Y(t))-f(t,y(t))dt|\leq\int_{x_0}^{x}|f(t,Y(t))-f(t,y(t))|dt$$

לפי תנאי המשפט, f ליפשיץ לפי y ולכן,

$$\int_{x_0}^{x} |f(t,Y(t)) - f(t,y(t))|\, dt \leq \int_{x_0}^{x} K \cdot |Y(t) - y(t)| dt$$

נגדיר $g(t) = |Y(t) - y(t)|$.

נשים לב שהפונקציה g רציפה, אי שלילית וקודם הראנו שמתקיים $g(x) \leq K \cdot \int_{x_0}^{x} g(t)dt$.

לכן נוכל להשתמש **בלמה של גרונוול**. לפי הלמה, $g(t) = |Y(t) - y(t)| = 0$ ולכן:

$$\forall x \geq x_0,\, Y(x) = y(x)$$

6.1.2 הלמה של גרונוול

> תהי g רציפה, אי שלילית בקטע $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.
> אם $g(x) \leq K \cdot \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ לכל $x \geq x_0$, אז $g(x) = 0$ לכל $x \geq x_0$.

הוכחת הלמה:

נגדיר $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$. כלומר - $G'(x) = g(x) \geq 0$.

$$G'(x) \leq K \cdot G(x)$$

נחלק את שני האגפים בe^{Kx},

$$G'(x) \cdot e^{-Kx} \leq K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx}$$

נעביר אגפים,

$$(G(x) \cdot e^{-Kx})' = G'(x) \cdot e^{-Kx} - K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx} \leq 0$$

כלומר, ל-$G(x) \cdot e^{-Kx}$ בעלת נגזרת אי-חיובית ולכן $(G(x) \cdot e^{-Kx}$ יורדת.

לכן, עבור $x \geq x_0$:

$$G(x) \cdot e^{-Kx} \leq G(x_0) \cdot e^{-Kx_0} \leq 0$$

נשים לב ש-$e^{-Kx} > 0$, לכן נוכל לכפול את האי-שיוויון ולקבל

$$G(x) \leq 0$$

סה"כ,

$$0 \leq g(x) \leq K \cdot G(x) \leq 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

קיום נגדיר סדרת פונקציות באופן הבא:

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \end{cases}$$

שלבי ההוכחה:

1. נבנה מלבן $S \subseteq D$ כך ש-(x_0, y_0). נגדיר מלבן מצומצם ע"י a'.
2. נראה שסדרת הפונקציות y_n חסומות במלבן D.
3. נראה התכנסות של הסדרה: $y_n \to y$.
4. נוכיח התכנסות במ"ש ע"י מבחן M של ויירשטראס.
5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי.

1. נגדיר מלבן סביב הנקודה (x_0, y_0):

$$S = \{|x - x_0| \leq a\} \times \{|y - y_0| \leq b\} \subseteq D$$

f רציפה ב-S, לכן לפי ויירשטראס, f מקבלת בו מקסימום ונסמן: $M := \max\{|f(t, y)|\}$
נציב את המד"ר ($y' = f(x, y)$) ונקבל:

$$|y'| \leq M$$

נסתכל על $y_1 - y$:

$$|y_1(x) - y(x)| \leq M|x - x_0| \leq M \cdot a$$

על מנת לא לצאת מהמלבן, ($|y_1 - y| \leq b$), נרצה שיתקיים $a \leq \frac{b}{M}$.
נגדיר מלבן מצומצם ע"י

$$S' = \{|x - x_0| \leq a'\} \times \{|y - y_0| \leq b\} \subseteq D$$
$$a' = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

2. סדרת הפונקציות y_n חסומות במלבן D

נראה שאם $|y_n - y_0| \leq b$ וגם $|x_0 - x| \leq a'$ אז $|y_{n+1} - y_0| \leq b$, באמצעות **אינדוקציה.**
עבור $n = 0$, $y_0(x) = y_0$.
נניח ש-$|y_n - y_0| \leq b$ ונראה עבור $n + 1$.

$$|y_{n+1} - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt \leq M(x - x_0) \leq M \cdot a' \leq b$$

סה"כ, הראנו שy_n נשארות בתוך המלבן, לכן - $f(y_n, t)$ הוא ביטוי מוגדר בתחום הגדרתה של f ונוכל להמשיך בהוכחה.

3. נראה התכנסות של הסדרה: $y_n \to y$

נמצא חסם על $|y_{n+1} - y_n|$

$$|y_{n+1} - y_n| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y_n) - f(t, y_{n-1}) dt| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})| dt$$

נשתמש בליפשיציות של f ונקבל,

$$\int_{x_0}^{x} |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})| dt \leq K \cdot \int_{x_0}^{x} |y_n - y_{n-1}| dt$$

באינדוקציה, נראה $|y_{n+1} - y_n| \leq \frac{M \cdot K^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

$n = 0$:

$$|y_1 - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t)) dt| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0(t))| dt \leq M(x - x_0)$$

נניח עבור n ונראה עבור $n + 1$.

הראנו קודם ש-

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| \leq K \cdot \int_{x_0}^{x} |y_{n+1} - y_n| dt$$

מהנחת האינדוקציה נקבל,

$$\leq K \cdot \frac{M \cdot K^n}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n+1} dt = \frac{M K^{n+1} (x - x_0)^{n+2}}{(n+2)!}$$

סיימנו. כעת נראה התכנסות של y_n עם הגדרת הגבול לפי קושי.

יהיו $m, n \in \mathbb{N}$ כך ש-$m < n$:

$$\begin{aligned} |y_n - y_m| &= |(y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + ... + (y_{m+1} - y_m)| \\ &\leq |y_n - y_{n-1}| + ... + |y_{m+1} - y_m| \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \frac{M \cdot K^i (x - x_0)^{i+1}}{(i+1)!} < \varepsilon \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שהאיבר האחרון הוא זנב של טור מתכנס - לכן, עבור m גדול מספיק, יהיה קטן מ-ε.

סה"כ - הראנו כי קיים ל-y_n גבול סופי.

4. נראה התכנסות במ"ש ע"י מבחן M של ויירשטראס

תזכורת - מבחן M

אם $f_n(x)$ סדרה של פונקציות בקטע I וקיימת M_n כך ש-$|f_n(x)| \leq M_n$ לכל n.
ובנוסף $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ מתכנס, אזי: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ מתכנס במידה שווה.

נגדיר סדרת פונקציות חדשה:

$$\begin{cases} h_0 = y_0 \\ h_i = y_i - y_{i-1} \quad i \geq 1 \end{cases}$$

נשים לב,

$$|h_i| = |y_i - y_{i-1}| \leq \frac{M \cdot K^{i-1}(x-x_0)^i}{(i)!} \leq \frac{M \cdot K^{i-1}(a')^i}{(i)!}$$

מתקיימים תנאי מבחן M ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במידה שווה.

ניתן לרשום:

$$y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + ... + (y_n - y_{n-1}) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n$$

ולכן: $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במ"ש $\iff$ y_n מתכנס במ"ש

5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי

y_n רציפות ו-$y_n \to y$ במ"ש, לכן - ממשפט מאינפי 2, פונקציית הגבול y רציפה.

בנוסף, מרציפות f, $f(t, y_n)$ רציפה ובנוסף מתקיים:

$$|f(t, y_n) - f(t, y)| \leq K \cdot |y_n - y| \leq \varepsilon$$

כלומר, $f(t, y_n)$ מתכנסת במ"ש ל-$f(t, y)$.

ממשפט מאינפי 2, הראנו ש-$y_n \to y$ במ"ש, ולכן:

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

סה"כ, פונקציית הגבול, y היא מהצורה:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

כלומר, y מקיימת את המשוואה האינטרלית[1] ורציפה, לכן היא מקיימת את המדר: $y' = f(x, y)$ עם תנאי התחלה $y(x_0) = y_0$.

[1]משוואה אינטגרלית - משוואה מהצורה: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$

7 הרצאה 7

7.1 דוגמא לשימוש במשפט

עבור המד"ר:

$$y' = \frac{y}{y^2 - x}$$

עם תנאי התחלתי, נראה קיום ויחידות פתרון.

נדרוש $y_0^2 \neq x_0$

ניקח מלבן D סביב (x_0, y_0) שלא "נוגע" ב-$y^2 = x$. נרצה להפעיל את המשפט על $f(x,y) = \frac{y}{y^2-x}$, תחום D, והנקודה (x_0, y_0).

נבדוק שמתקיים תנאי ליפשיץ נשים לב שf גזירה.

התנאי הדרוש מתקיים אם $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ חסומה בתחום. (משפט לגרנז').

נגזור,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2 - x - y \cdot 2y}{(y^2 - x)^2} = -\frac{y^2 + x}{(y^2 - x)^2}$$

הנגזרת חסומה כי היא רציפה בתחום סגור (ויירשטראס).

8 הרצאה 8

תחת התנאים של משפט הקיום והיחידות נקבל כמה מסקנות.

8.1 עקרון היחידות

תהי (x_0, y_0) נקודה בפנים של D. נניח ש-y_1, y_2 2 פתרונות למד"ר שנחתכים בתחום. נניח שנחתכים ב(x_0, y_0).

אזי, הפתרונות חייבים להסכים בכל D. כלומר - לכל x בתחום - $y_1(x) = y_2(x)$

הוכחה נסמן $L = \{t < x_0 \mid \forall x \in (t, x_0] : y_1(x) = y_2(x)\}$

נשים לב ש-L הוא קטע וממשפט קיום ויחידות, L אינו ריק.

לL יש 2 אפשרויות:

1. $L = (\ell, x_0)$
2. $L = [\ell, x_0)$

אבל נשים לב ש-L תמיד באפשרות 2. אם L קטע פתוח אז, y_1 ו-y_2 מסכימים על $t > \ell$, ומרציפות - הן מסכימות גם ב -ℓ, כלומר - בהכרח $L = [\ell, x_0)$.

אם L בשפה של D, סיימנו. אחרת, L בפנים של D. בפרט - ℓ נקודה פנימית ב-D.

ממשפט הקיום והיחידות, קיימת סביבה כלשהי של ℓ כך ש-y_1, y_2 מסכימים בסביבה כלשהי של ℓ - בסתירה להגדרה של L. לכן, בהכרח ℓ בקצה של D (קיום ויחידות ניתן להפעיל רק בפנים של D).

8.1.1 דוגמא - משוואה לוגיסטית

מצאנו את כל הפתרונות ל-$y' = K \cdot y(1 - \frac{y}{2})$ שמקיימים $0 < y < L$.

מצאנו פתרונות סינגולריים:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = L \end{cases}$$

טענה: אם פתרון y חותך את $y = 0$ אז $y \equiv 0$.

הסבר: יהי $T \geq 1$. נראה ש-$y \equiv 0$ עבור $-T \leq t \leq T$.

נגדיר

$$D = \{[-2T, 2T] \times [-M, M]\}$$

נבחר M מספר כך ש-$(x, y(x))$ נמצא בפנים של D.

$$M = \max_{|t| \leq 2T} |y(t)| + 1$$

$y(t)$ ופתרון האפס נחתכים ב-D. בנוסף, תנאי הליפשיציות של f מתקיים:

$$\frac{\partial(K \cdot y(1-\frac{y}{2})}{\partial y} = y\text{-פונקציה לינארית ב}$$

y חסום $\Leftarrow$ נגזרת חסומה $\Leftarrow$ ליפשיציות

לכן, לפי עיקרון היחידות: $y(x) = 0$ לכל x בתחום.

8.2 עקרון ההמשכה

תחת אותם תנאים של משפט הקיום והיחידות. אם מצאנו פתרון y לבעיית תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אז, ניתן להמשיך אותו עד שנתקע בשפה.

הוכחה נגדיר

$$L = \{t < x_0 \mid (t, x_0) \text{ -יש פתרון } y_t \text{ פתרון לבעיית תנאי התחלתי ומוגדר ב}\}$$

נשים לב, L הוא קטע לא ריק.

אם $L = (\ell, x_0)$, אז נוכל להגדיר: $y(\ell) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} y(\ell + \varepsilon)$.

נראה שגבול זה קיים, ע"י קריטריון קושי. לכל $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$:

$$|y(\ell+\varepsilon_1) - y(\ell+\varepsilon_2)| = \left| \int_{\ell+\varepsilon_1}^{\ell+\varepsilon_2} f(t, y(t)) dt \right| \le M|\ell+\varepsilon_2 - \ell - \varepsilon_1| = M|\varepsilon_2 - \varepsilon_1|$$

y רציפה, לכן $y(t) = y_0 + \int_{x_0}^{\ell} f(t,y(t))dt$. כלומר - ניתן להמשיך את y לקטע הסגור $[\ell, x_0)$. אם L קטע סגור, נוכל להשתמש שוב בקיום ויחידות בקצה של L עד שנגיע לשפת D.

8.3 פתרון גלובלי

יהי $D=\{|x-a|\leq b\}\times\mathbb{R}$ מלבן סגור אינסופי. תהא בעיית תנאי התחלתי:

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

f ליפשיצית ב-D לפי y. אזי, קיים פתרון יחיד $y(x)$ למד"ר שמוגדר לכל $a-b\leq x\leq a+b$

הוכחה נגדיר

$$\begin{cases} y_0(x)=y_0 \\ y_{n+1}(x)=\int_{x_0}^{x} f(t,y_n(t))dt \end{cases}$$

הראנו בהוכחה של קיום ויחידות.

8.4 דוגמאות מתי משפט הקיום והיחידות לא עובד

דוגמה 1: אינסוף פתרונות או העדר פתרון בנקודה סינגולרית

$$y'-\frac{y}{x}=x$$

הפתרון למשוואה ההומוגנית הוא: $y(x)=e^{-\int-\frac{1}{t}dt}=e^{ln(x)+c}=x\cdot c$

לכן הפתרון למשוואה הלא הומוגנית הוא: $y(x)=x\cdot(\int x\cdot\frac{1}{x}dx)=x^2+C$. הפתרון מוגדר ב-$\mathbb{R}$ ופותר את המד"ר בתחום הגדרתו.

נשים לב שעבור $C\in\mathbb{R}$ - הפתרון $y_C=x^2+C$ פותר את בעיית התנאי ההתחלתי:

$$\begin{cases} y'-\frac{y}{x}=x \\ y(0)=0 \end{cases}$$

כלומר, קיימים אינסוף פתרונות לבעיית התנאי ההתחלתי.

דוגמה 2: עקרון ההדבקה ואי-יחידות

$y'=-2\sqrt{y},\quad y\geq 0$ - זו משוואה ניתנת להפרדה ואוטונומית.

פתרון אחד הוא $y(x)=(c-x)^2$. גם $y=0$ הוא פתרון. נשים לב שהתנאי למשפט ליפשיץ לא מתקיים ב-$y=0$ (הנגזרת של $\sqrt{y}$ שואפת לאינסוף), ולכן אין יחידות.

ניתן להגדיר פתרון חדש על ידי הדבקה של שני הפתרונות. נגדיר:

$$y_c(x)=\begin{cases} (c-x)^2 & x\leq c \\ 0 & x\geq c \end{cases}$$

פונקציה זו גזירה ומקיימת את המד"ר. מכאן שדרך הנקודה $(0,0)$ עוברים אינסוף פתרונות (עבור כל $c\geq 0$).

מסקנה מדוגמא זו היא:

8.4.1 עקרון ההדבקה

נניח שקיים פתרון סינגולרי: $y(x) = y_0$ בתחום אחד, ופתרון אחד y_2 בתחום השני, ונניח שהתחומים נחתכים בנקודה אחת.
אם הם מסכימים בנקודת החיתוך, ניתן להגדיר פתרון חדש ע"י הדבקת הפתרונות.

דוגמה 3: תחום הגדרה חסום
נתונה המשוואה $y' = -\frac{x}{y}$. זוהי משוואה ניתנת להפרדה:

$$yy' = -x \implies \frac{(y^2)'}{2} = -x \implies \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

לאחר סידור נקבל משוואת מעגל:

$$x^2 + y^2 = 2C$$

לכל $C \geq 0$ נקבל זוג פתרונות $y(x) = \pm\sqrt{2C - x^2}$.

תחום ההגדרה הוא $|x| \leq \sqrt{2C}$. הנגזרת מתפוצצת כאשר $x \to \pm\sqrt{2C}$, ולכן לא ניתן להמשיך את הפתרון מעבר לנקודות אלו.

דוגמה 4: התפוצצות בזמן סופי
נתונה המשוואה $y' = y^2$. פתרונה הוא:

$$y(x) = \frac{1}{C - x}$$

(בנוסף קיים פתרון סינגולרי $y = 0$). הפתרון מוגדר עבור $x < C$ או $x > C$.

דוגמה מספרית: נניח $y(1) = 2$. אז $2 = \frac{1}{C-1} \implies C = 1.5$. הפתרון הוא:

$$y(x) = \frac{1}{1.5 - x}$$

התחום המקסימלי המכיל את $x = 1$ הוא $x < 1.5$. הפתרון שואף לאינסוף ככל שמתקרבים ל-1.5 ("התפוצצות"). זה מראה שמשפט הקיום והיחידות מבטיח קיום **מקומי** בלבד, ולא גלובלי.

9 הרצאה 9

9.1 המשך דוגמאות

9.1.1 אין ליפשיציות, אין יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נשים לב, כי למרות ש-$y^{\frac{1}{3}}$ מוגדרת ב-$x = 0$, היא אינה ליפשיצית שם. (נוכל להראות ע"י נגזרת לא רציפה ב-0 או בעזרת כפל בצמוד).

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} = 1$$
$$\int_0^{y(x)} \frac{dv}{v^{\frac{1}{3}}} \underset{y(t):=v}{=} \int_0^x \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} dt = \int_0^x dt$$
$$\frac{3}{2}(y(x))^{\frac{2}{3}} = x$$

כלומר, יש 2 פתרונות לבעיית התנאי ההתחלתי: $y(x) = \pm\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$

נשים לב שקיים גם הפתרון הטריוויאלי: $y = 0$.

מצד שני, מצאנו 2 פתרונות נחתכים בתוך התחום שלא מכיל את $y = 0$, אז הם יהיו שווים, מעיקרון היחידות.

9.1.2 אין ליפשיציות, כן יש יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} = 1$$

זו משוואה ניתנת להפרדה, כאשר $h = x^{\frac{1}{3}} + 1$. נסמן H פונקציה קדומה של $\frac{1}{h}$.

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} = 1$$
$$H(y(x)) = \int_0^x \frac{1}{h(y(t))} dt = \int_0^x 1 dt = x + c$$

ע"י הפעלת הופכית של H, נקבל: $y(x) = H^{-1}(x + c)$.

מתקיים $y(0)=0$ ולכן:
$$0=y(0)=H^{-1}(c)\Rightarrow c=H(0)$$

נשים לב: $y(x)=H^{-1}(x+H(0))$ פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי בסביבת $x=0$.

9.1.3 דוגמא לשימוש במשפט הפתרון הגלובלי

$$\begin{cases} y'=\tan x\cdot\sin y \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

נראה שיש פתרון יחיד שמוגדר ב-$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

נרצה להפעיל את משפט הפתרון הגלובלי ב"פס": $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times K$ - אבל אסור. :(

ניקח פס סגור בתוך הפס הפתוח:

$$D=\{x_0+a\leq x\leq x_0+b\}\times R$$

כאשר a,b נבחרו כך ש-$-\frac{\pi}{2}-x_0<a<0, \quad 0<b<\frac{\pi}{2}-x_0$

לכן, ממשפט הפתרון הגלובלי - יש פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי.

נוודא ליפשיציות:
$$\frac{\partial(\tan x\cdot\sin y)}{\partial y}=\tan x\cdot\cos y$$

נשים לב, ש-$x=\pm\frac{\pi}{2}$ ולכן $\tan x$ חסום, $\cos y$ חסום גם הוא ולכן - הנגדרת לפי y חסומה ולכן, הפונקצייה ליפשיצית.

נבנה פתרון כללי בפס עצמו, ע"י הדבקה. לכל $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ נרחיב את הפס עד שיכיל את x, ואז נגדיר את $y(x)$ לפי המשפט הקיום הגלובלי.

y מוגדרת היטב שכן אם יש 2 פתרונות שנחתכים בנקודה, אז נפעיל את המשפט על פס סגור שמכיל את נקודת החיתוך.

10 הרצאה 10

תזכורת באמצעות משפט פיקרד לינדלוף, הוכחנו שמתקיימים עיקרון היחידות ועיקרון ההמשכה, בתחום בו: f רציפה וליפשיצית מקומית ב-y.

תזכורת

עקרון ההמשכה: בהינתן $y' = f(x,y)$ ו-D כמו בקיום ויחידות.
בנוסף, תהא קבוצה קומפקטית $K \subseteq D$, כך ש-$(x_0, y_0) \in K$.
אזי, יש פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי הנתונה שיוצא מ-K (יוצא גם משמאל ל-x_0 וגם ומימן ל-x_0).

10.1 חקירה איכותית של מד"ר

היום, נדבר על $y' = f(y)$ במקרה בו f ליפשיצית מקומית.

תזכורת אם α מספר כך ש-$f(\alpha) = 0$ אז $y = \alpha$ פתרון ל-$y' = f(y)$. נקרא לו סינגולרי.

10.1.1 משפט

יהיו $\alpha < \beta$ שני פתרונות סינגולריים עוקבים, המקיימים:

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0 \quad \text{וכן} \quad \forall \gamma \in (\alpha, \beta) : f(\gamma) \neq 0$$

יהי $y(x)$ הפתרון לבעיית ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר $y_0 \in (\alpha, \beta)$. אזי מתקיים:

1. הפתרון $y(x)$ **מוגדר** לכל $x \in \mathbb{R}$.
2. הפונקציה $y(x)$ **מונוטונית ממש** (עולה או יורדת בהתאם לסימן של f בתחום).
3. y **מקבל כל ערך** בין α ל-β.
   - אם y עולה (כאשר $f(y) > 0$ בתחום):

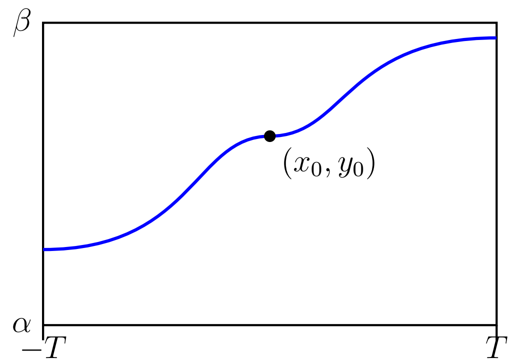
$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \beta, \quad \lim_{x \to -\infty} y(x) = \alpha$$

   - אם y יורדת (כאשר $f(y) < 0$ בתחום):

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = \alpha, \quad \lim_{x \to -\infty} y(x) = \beta$$

הוכחה נבחין שקיים y פתרון לבעיית תנאי ההתחלתי. הפתרון לא חותך את $y=\alpha, y=\beta$ לכן $\alpha<y(x)<\beta$ עבור x בתחום ההגדרה.

למה מוגדר ב-$\mathbb{R}$? כדי להראות שמוגדר עבור $|x|\le T$ לכל T, נשתמש בעיקרון ההמשכה:



נקח מלבן $K=[-T,T]\times[\alpha,\beta]$. הפיתרון יוצא מהמלבן הקומפקטי - אבל לא מהצלע העליונה או מהצלע התחתונה - לכן יוצא מהצדדים ומוגדר בפרט ל-$|x|\le T$.

למה y מונוטונית? כי $y'=f(y)$, y בין α ל-β, f מקבלת סימן קבוע בקטע, לכן אם f מקבלת סימן חיובי אז y עולה ממש. בהתאם גם עבור סימן שלילי.

נותר חלק 3:

לשם הפשטות, נניח y עולה ממש. לכן הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$ קיים וסופי. נסמן אותו ב-L.

נניח בשלילה: $L<\beta$. בפרא - $y'=f(y)\to f(L)>0$. זה גורר y לא חסומה ולכן סתירה. לכן $L=\beta$.

למה y לא חסומה?

$$\begin{aligned} y(x)-y(x_1) &= \int_{x_1}^{x} y'(t)dt \\ &\ge \int_{x_1}^{x} \frac{f(L)}{2}dt \underset{x\to\infty}{\to} \infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שאם $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=f(L)>0$ אז יש x_1 כך ש-$y'(x)=\frac{f(L)}{2}$ לכל $x\ge x_1$.

בדומה, $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=\alpha$ למה? אחרת נקרא לגבול L_2. $\alpha<L_2$ נמשיך כמו קודם ונסיים.

10.2 משפט משלים

שוב, f ליפשיצית מקומית. נניח $y=\alpha$ פיתרון סינגולרי מקסימלי.
לבעיית התנאי ההתחלתי יש פתרון עם התכונות הבאות:

1. מונוטוני ממש
2. מקבל את כל הערכים -(α,∞)
3. אם y עולה אז תחום ההגדרה הוא $(-\infty,x_+)$ עבור $x_+=x_0+\int_{y_0}^{\infty}\frac{1}{f(t)}dt$ או $x_+=\infty$ אם האינטגרל מתבדר.

הוכחה קיימים 2 מקרים:

1. $f(x)>0$ ולכן $x>\alpha$
2. $f(x)<0$ ולכן $x>\alpha$

נוכיח תחת מקרה 1.

למה מונוטוני ממש? כי $y'=f(y)$ (לפי עיקרון היחידות, y לא חותך את $y=\alpha$), לכן y נשאר מעל α לאורך תחום ההגדרה.

למה y מקבל את כל הערכים - (α,∞)? נסתכל על הגבול $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=L$. אם $L=\alpha$ סיימנו. אחרת, נניח בשלילה כי $L>\alpha$ אז y מתנהגת כמו פונקציה לינארית ב-$-\infty$.

$$f(y(x))\to f(L)>0$$

מכאן:

$$\begin{aligned} y(x)-y(x_1) &= \int_{x_1}^{x} f(t)dt \\ &\geq \int_{x_1}^{x} \frac{f(L)}{2}dt \underset{x\to-\infty}{\to} -\infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שקיים x_1 כך ש-$f(x)\geq\frac{f(L)}{2}$ לכל $x\leq x_1$.

תחום הגדרה: למה הפתרון ניתן להמשכה עד $-\infty$? כי נוכל להפעיל עיקרון ההמשכה על $K=[-T,x_0]\times[\alpha,y_y]$ לכל $T>\infty$.

נוכיח את 3: בשביל x_+ נפריד משתנים:

$$\begin{gathered} y'=f(y) \\ \frac{y'}{f(y)}=1 \\ \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} \underset{V=y(t)}{=} \int_{x_0}^{x} \frac{y'}{f(y)}dt = \int_{x_0}^{x} dt = x-x_0 \end{gathered}$$

כאשר $x\to x_+$ משמאל, אז $y(x)$ שואף לאינסוף. נשאיף את x ל-x_+ משמאל במשוואה שקיבלנו:

$$x_0+\int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)}=x$$

$$x_0+\int_{y_0}^{\infty} \frac{dV}{f(V)}=x_+$$

10.3 גדרות

נסתכל על $y' = f(x,y)$ כאשר f רציפה בתחום D וליפשיצית מקומית.

גדר תחתית

פונקציה $\alpha : I \to \mathbb{R}$ גזירה נראית **גדר תחתית** של המד"ר אם:

$\alpha'(x) < f(x, \alpha(x))$ לכל $x \in I-$ קטע פתוח.

גדר עילית

פונקציה $\alpha : I \to \mathbb{R}$ גזירה נראית **גדר עילית** של המד"ר אם:

$\alpha'(x) > f(x, \alpha(x))$ לכל $x \in I-$ קטע פתוח.

10.3.1 משפט הגדר

נסתכל על פתרון y לבעיית התנאי ההתחלתי.
f רציפה וליפשיצית מקומית ב-$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y(x) > \alpha(x)\}$.
אם $(x,y) \in D$ אז $y(x) > \alpha(x)$, לכל $x \in I \cap [x_0, \infty)$

הוכחה נסתכל על $g(x) = y(x) - \alpha(x)$. נניח בשלילה שהמשפט לא נכון.

$g(x_0) > 0$ אבל יש $x_0 < x$ כך ש-$g(x) \leq 0$. ניקח x מינימלי שמקיים $g(x) \leq 0$.

נסתכל על שיפוע g בנקודה x.

$$g'(x) = y'(x) - \alpha'(x) > f(x, y(x)) - f(x, \alpha(x)) = 0$$

כאשר $y(x) = \alpha(x)$ בנקודה x כי היא מינימלית.

מצד שני, $g'(x) = \lim\limits_{h \to 0^-} = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leq 0$ מכיוון ש-$h < 0$.

סה"כ הגענו ל-$0 < g(x) \leq 0$ - סתירה! לכן המשפט נכון.

עיקרון כללי: אפשר למצוא גדרות ע"י איזוקלינות.

איזוקלינות

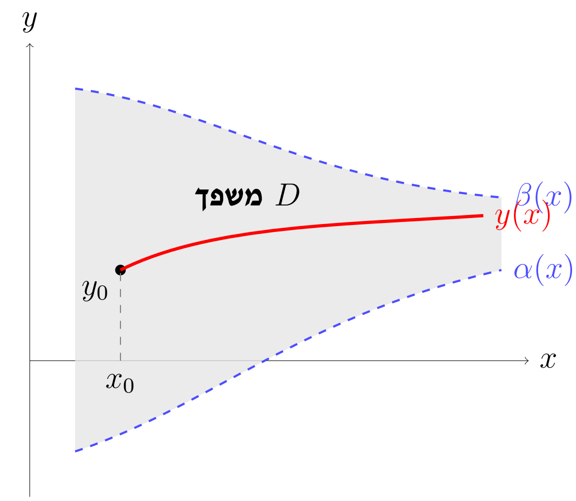
בהנתן מד"ר $y' = f(x,y)$, זה אוסף הנקודות המקיים $f(x,y) = k$

10.3.2 מסקנה - משפט המשפך

נניח $y' = f(x,y)$ מד"ר עם α גדר תחתית ו-β גדר עילית.
אם f ליפשיצית מקומית ב-y בתחום

$$D = \{(x,y) \mid x \in I,\, \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אז, הפתרון y לבעיית התנאי ההתחלתי מקיים: $\alpha(x) < y(x) < \beta(x)$ עבור $x \geq x_0$ בתחום ההגדרה.



10.4 דוגמאות

דוגמא 1

$$y' = x^4 - y^4 = f(x,y)$$

נשים לב ש-f רציפה וליפשיצית.

דוגמא לגדר עילית: $\beta(x) = x$. נראה שזו אכן גדר עילית:

$$x^4 - (\beta(x))^4 = x^4 - x^4 = 0 < 1 = \beta'(x)$$

דוגמא לגדר תחתית: $\alpha(x) = 0$. נראה שזו גדר תחתית:

$$x^4 - (\alpha(x))^4 = x^4 > 0 = \alpha'(x)$$

דוגמא 2

$$y' = y^2 - x = f(x,y)$$

דוגמא לגדר עילית: $\beta(x) = -\sqrt{x-1}$.

דוגמא לגדר תחתית: $\alpha(x) = -\sqrt{x+1}$.

11 הרצאה 11

11.1 כמה השלמות על משוואות אוטונומיות

11.1.1 טענה

יהא y פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי :

$$\begin{cases} f' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ועבור α, β פתרונות סינגולריים עוקבים המקיימים: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ מתקיים:

$$y_0 \in (\alpha, \beta)$$

אזי, קיימת נקודה x_1 כך ש-$y''(x_1) = 0$

הערה: לפעמים x_1 תהיה נקודת פיתול.

הוכחה y מקיים $y' = f(y)$. נגזור את 2 האגפים:

$$y'' = y' \cdot f'(y)$$

נרצה להראות שקיים x_1 כך ש-$f''(x_1) = 0$. אכן, לפי משפט רול - $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ ולכן קיים $\gamma \in (\alpha, \beta)$ כך ש- $f'(\gamma) = 0$.

נרצה: $y(x_1) = \gamma$. נשים לב שהוכחנו ש-y מקבל את כל הערכים בין α ל-β לכן בהכרח קיים x_1 כזה. $\square$

ראינו בתחילת הסמסטר: אם y פתרון למשוואה אוטונומית $y' = f(y)$, אז גם $y(x + c)$ פתרון לכל $c \in \mathbb{R}$.

11.1.2 טענה

תהי $y' = f(y)$ משוואה אוטונומית, f ליפשיצית מקומית ב-$\mathbb{R}$.
נניח שקיימים 2 פתרונות: y_1, y_2 ו-x_1, x_2 כך ש-$y_1(x_1) = y_2(x_2)$. אזי:

$$y_1(x + x_1 - x_2) = y_2(x), \quad \text{לכל } x$$

הוכחה נסמן $\tilde{y} = y_1(x + x_1 - x_2)$. $\tilde{y}$ פתרון למד"ר. (משפט שראינו: $c := x_1 - x_2$).

נשים לב ש-$\tilde{y}$ ו-y_2 נחתכים ב-x_2:

$$\tilde{y}(x_2) = y_1(x_2 + x_1 - x_2) = y_1(x_1) \underset{\text{הגדרה}}{=} y_2(x_2)$$

לכן, מעיקרון היחידות - $\tilde{y} = y_2$ לכל x. $\square$

נוסיף שכלול למשפט הגדר:

11.1.3 שכלול למשפט הגדר

יהא y פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי :

$$\begin{cases} f' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

תהא α כמו במשפט הגדר. נניח שמתקיים:

$$\alpha(x_0) \geq y(x_0)$$

אם מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות ב - $D = \{(x,y) \mid x \in I, y(x) \leq \alpha(x)\}$
אזי, לכל $x \in I$ עבורו הפתרונות מוגדרים:

$$\forall x > x_0, \quad y(x) < \alpha(x)$$

הוכחה אם $\alpha(x_0) > y(x_0)$ - סיימנו (משפט הגדר). אחרת, נניח $\alpha(x_0) = y(x_0)$.
נגדיר: $g(x) = \alpha(x) - y(x)$. g מקיימת:

$$g'(x_0) = \alpha'(x_0) - y'(x_0) \underset{\text{גדר עילית}}{>} f(x_0, \alpha(x_0)) - f(x_0, y(x_0)) \underset{y(x_0)=\alpha(x_0)}{=} 0$$
$$g(x_0) = \alpha(x_0) - y(x_0) = 0$$

מסקנה: יש סביבה $(x_0, x_0+\varepsilon)$ בה g חיובית, כלומר $y(x) < \alpha(x)$ לכל $x \in (x_0, x_0+\varepsilon)$

נפעיל את משפט הגדר על הסדרה:

$$\boxed{x_n = x_0 + \frac{\varepsilon}{n}}$$

מתקיים $x_n \in (x_0, x_0+\varepsilon)$ ולכן $y(x_n) < \alpha(x_n)$.

נובע: $y(x) < \alpha(x)$ עבור $x \geq x_n$. אם נשאיף את n ל-∞ נקבל: $y(x) < \alpha(x)$, לכל $x > x_0$.

□

נרחיב על משפט הפוך למשפט המשפך.

11.1.4 משפט המשפך ההפוך - "קולן"

קולן - Diffuser.

(הגדר התחתית מעל הגדר העילית)

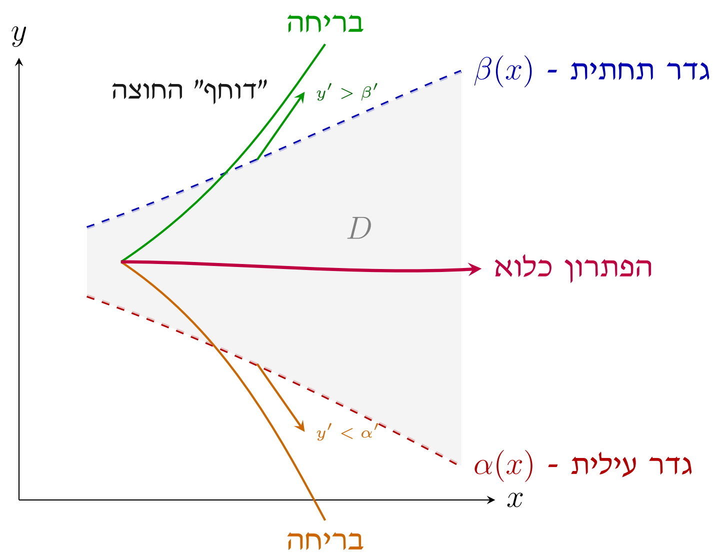
אם $y' = f(x,y)$ מד"ר, β גדר תחתית, α גדר עילית. מתקיים: $\beta > \alpha$.
נגדיר משפך הפוך:

$$D := \{(x,y) \mid x \in I, \quad \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אם מתקיים קיום ויחידות ב-D, אז:

1. יש פתרון למד"ר שנמצא בתוך D - $(x,y(x)) \in D$ לכל $x \in I$.
2. נניח $I = [a,\infty)$. אז $\beta - \alpha \underset{x\to\infty}{\to} 0$, ואם $\frac{\partial f}{\partial y} \geq 0$ ב-D אז הפתרון בסעיף 1 הוא יחיד.

מסקנה: רוב הפתרונות מתפזרים, אך קיים פתרון יחיד שנשאר בתוך התחום.



דוגמא $y' = y^2 - x = f(x,y)$. ניקח $\alpha(x) = \sqrt{x-1},\ \beta(x) = \sqrt{x+1}$.

$$\begin{cases} f(x,\alpha(x)) = -1 \\ f(x,\beta(x)) = 1 \end{cases}$$

נבדוק מתי α גדר עילית:

$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\alpha' > f(x,\alpha) = 1 \iff x > 1$$

נבדוק מתי β גדר תחתית:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\alpha' < f(x,\alpha) = -1 \iff x > -\frac{3}{4}$$

לפי המשפט, עבור $x > 1+\varepsilon$, יש פתרון יחיד בתוך המשפך ההפוך. נסמן את הפתרון הזה בתור y_ε. מיחידות, אם $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, y_{ε_2} מצומצם ל-$x \geq \varepsilon_1$ נותן עוד פתרון שכלוא במשפך ההפוך. y_{ε_1},y_{ε_2} שונים בתחום ההגדרה המשותף. באופן זה, ניתן לבנות את $y(x)$ בתוך המשפך ההפוך שמוגדר לכל $x > 1$.

הוכחה נתחיל בסעיף 2:

נניח בשלילה שיש זוג פתרונות y_1, y_2 שמוגדרת לכל $x \geq a$, פותרים את המד"ר ונשארים בתוך D - המשפך ההפוך.

נגדיר את פונקציית ההפרש: $g = y_1 - y_2$. נשים לב שמתקיים:

$$0 \underset{x\to\infty}{\leftarrow} \alpha - \beta < y_1 - y_2 < \beta - \alpha \underset{x\to\infty}{\rightarrow} 0$$

לכן לפי סנדוויץ', $g \underset{x\to\infty}{\rightarrow} 0$. נגזור את g:

$$g' = f(x, y_1) - f(x, y_2)$$

מעקרון היחידות: y_1, y_2 לא נחתכים, לכן g בעלת סימן קבוע. בה"כ: $g > 0$ לכל $x \geq a$. כלומר-

$$g' = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,t)dt \geq 0$$

מסקנה: g עולה ממש ויש לה גבול, לכן מתכנסת לסופרימום שלה - $\sup y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$ בסתירה להנחה שלנו.

$\square$

כעת נוכיח את סעיף 1, עבור שתי נקודות $s_2 < s$:

נגדיר פתרון $y_{s,\beta}$ המקיים: $y_{s,\beta}(s) = \beta(s)$. פתרון זה נמצא בתוך המשפך כאשר $x \in [a, s]$. למה? כי β גדר תחתית ו-α עילית.

נגדיר פתרון $y_{s,\alpha} = \alpha(s)$. פתרון זה נמצא ב-D עבור $x \in [a, s]$.

שני הפתרונות אף פעם לא נחתכים עבור $s \geq \alpha$. אם הם נחתכים - אז מעקרון היחידות, הם שווים. בסתירה לכך שלכל פתרון יש נקודת חיתדו שונה עם הגדרות.

מעקרון אי החיתוך, אם $s_2 < s$ אז $[y_{s,\alpha}(a), y_{s,\beta}(a)] \subseteq [y_{s_2,\alpha}(a), y_{s_2,\beta}(a)]$.

לפי משפט קנטור על חיתוך קטעים סגורים המוכלים אחד בשני, יש לפחות נקודה אחת בחיתוך:

$$A \in \bigcap_{s \geq a} [y_{s,\alpha}(a), y_{s,\beta}(a)]$$

נסתכל על פתרון למד"ר $y' = f(x,y)$ המקיים $y(a) = A$. פתרון זה נשאר בתוך D. למה? מעקרון אי-החיתוך:

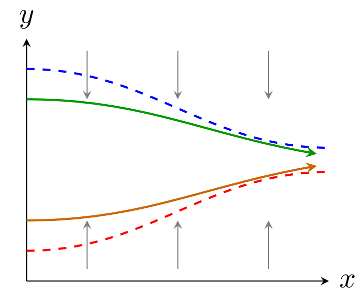
$$y_{s,\alpha}(x) < y(x) < y_{s,\beta}(a) \quad x \geq a$$

בפרט, למה לא נחתכים עם השפה של D? כי אם s נקודה בה y נחתך עם $y = \alpha(x)$ פעם ראשונה, אז y נחתך עם $y_{s,\alpha}$ בסתירה ליחידות.

11.2 אינטואיציה למשפך ומשפך הפוך:

משפך (Funnel)

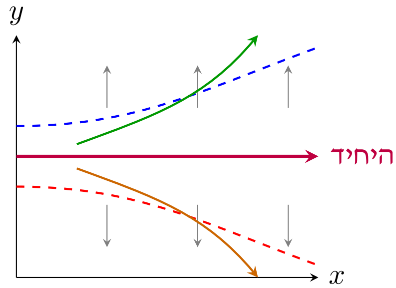
מנקז פנימה - יציבות



כל הפתרונות שמתחילים בתחום (או נכנסים אליו) נלכדים בו, והמרחק ביניהם מצטמצם לאפס.

משפך הפוך (Anti-Funnel)

מפזר החוצה - אי יציבות



12 הרצאה 12

הערה: הוא העלה קבצים למודל, הם חלק מהחומר. (דוגמא לשימוש בעקרון ההמשכה)

12.1 משוואה ליניארית מסדר n

הגדרה

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y(x) = b(x)$$

נניח: כל ה-a_i-ים וכל ה-b-ים רציפים בקטע I.

12.1.1 משפט קיום ויחידות גלובלי למשוואה ליניארית מסדר n

נניח: כל ה-a_i-ים וכל ה-b-ים רציפים בקטע I.

אזי: יש פיתרון אחד ויחיד למד"ר המקיים את תנאי ההתחלה:
$$\begin{cases} y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \\ \dots \end{cases}$$

למה צריך n תנאים? נסתכל על המקרה הכי פשוט, בו כל ה-a_i-ים וכל ה-b הם אפס:

$y^{(n)} = 0$, עבור $x \in I$

ע"י המשפט היסודי של החדווו"א: זה שקול לכך ש-y פולינום ממעלה $n-1$ לכל היותר. נשים לב, שמרחב הפתרונות הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ממימד n. ($\{1, x^2, ..., x^n\}$)

לפי משפט טיילור: אם y פולינום ממעלה $n-1 \geq$,

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^{(i)}}{i!}(x - x_0)^i + R_n(x)$$

בעצם, $R_n(x)$ זהותית אפס: $R_n(x)=\frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$, $c\in(x_0,x)$ כי $y\equiv 0$. קיבלנו שיוויון:

$$\boxed{y(x)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i}$$

(המקדמים $y^i(x_0)$ קובעים את y).

12.1.2 מסקנה ממשפט קיום ויחידות

נגדיר קבוצה:

$$V=\{y:I\to\mathbb{R}\mid y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny(x)=0\}$$

זה אוסף הפתרונות למד"ר לינארי הומוגני.

1. V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$
2. V ממימד n מעל $\mathbb{R}$
3. בסיס ל-V נתון ע"י n הפתרונות עם תנאי התחלה הבאים: $y_i^j(x_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

הוכחה

1. V מ"ו:
$0\in v$ כי 0 הוא הפתרון הטריוויאלי.
$y_1,y_2\in V$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ אז $c_1y_1+c_2y_2\in V$ אלגברה א....
2. נבנה איזומורפיזם בין V ל-$\mathbb{R}^n$:
$$\phi(y)=\begin{pmatrix}y(x_0)\\ y'(x_0)\\ \cdots\\ y^{(n)}(x_0)\end{pmatrix}$$
ϕ לינארית כי נגזרת לינארית. למה היא חח"ע? נראה שהגרעין טריוויאלי:
$$\phi(y)=\vec{0}\iff y=\begin{cases}y(x_0)=0\\ y'(x_0)=0\\ \cdots\\ y^{(n)}(x_0)=0\end{cases}$$
לפי משפט הקיום ויחידות (12.1.1), יש בדיוק y אחת כזו - נסמנה y_1. מצד שני, $y=0$ בוודאי מקיימת את המד"ר עם תנאי ההתחלה. לכן $y_1=0$. כלומר קיים בגרעין רק פתרון טריוויאלי.
בנוסף, ϕ על: לפי משפט הקיום והיחידות מהיום, בהינתן $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ יש פתרון $y\in V$ המקיים $y^{(i)}(x_0)=\alpha_i$. לכן $\phi(y)=\vec{v}$.
3. בגלל ש-ϕ איזומורפיזם, אם $\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\in\mathbb{R}^n$ בסיס ל-$\mathbb{R}^n$, אז $y_1,...,y_n$ המקיימים $\phi(y_i)=\vec{v}_i$ הם בסיס ל-V. בפרט, ניתן לקחת $\vec{v}_i=e_i$.

השבוע ושבוע הבא: רק הומוגניות. נחקור את השאלה הבאה: בהינתן פתרונות $y_1,...,y_n$ למד"ר $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny(x)=0$, האם הם בלתי תלויים ליניארית?

נחדד: פונקציות $y_1,...,y_n$ נקראות בלתי תלויות לינארית אם לכל $(c_1,...,c_n)\neq 0$ מתקיים $\sum c_iy_i\neq 0$

הערה: אם y פתר את המד"ר, אז הוא גזיר ברציפות n פעמים. הסבר: אם y מקיימת מד"ר אז $y^{(n)}$ חייב להיות מוגדר. $y^{(n)}=-\sum\limits_{i\neq n}y^{(i)}a_{n-i}$.

נציג את מושג ה-wronskian.

Wronskian

בהינתן n פונקציות גזירות $n-1$ פעמים, נסמן $y_1,...,y_n$ המוגדרות על I.
ורונסקיאן זו פונקציה שמוגדרת גם היא על I:

$$W(y_1,\ldots,y_n)(x)=\left|\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x)\end{pmatrix}\right|$$

12.1.3 טענה

אם $y_1,\cdots,y_n$ פונקציות תלויות לינארית, אז $W(y_1,...,y_n)\equiv 0$

הוכחה אם $y_1,\cdots,y_n$ ת"ל אז נביע את אחת מהם ע"י צ"ל של הנותרים: $y_j=\sum\limits_{i\neq j}y_ic_i$

נגזור:

$$(y_j)^{(k)}=\sum_{i\neq j}(y_i)^{(k)}c_i$$

נקבל:

$$\begin{pmatrix}(y_j)^{(k)}\\(y_j)^{(k)}\\ \ldots\\(y_j)^{(k)}\end{pmatrix}=\sum_{i\neq j}\begin{pmatrix}(y_i)^{(k)}\\(y_i)^{(k)}\\ \ldots\\(y_i)^{(k)}\end{pmatrix}c_i$$

כלומר - יש צ"ל לא טריוויאלי של העמודות $\Leftarrow$ דטרמיננטה מתאפסת. כלומר - הורונסקיאן מתאפס.

12.1.4 משפט

יהיו $y_1,...,y_n$ פתרונות למד"ר הלינארי הומוגני: $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny(x)=0$, עבור $x\in I$.
נניח, ש-$y_1,...,y_n$ בת"ל.
אזי, $W(y_1,...,y_n)\neq 0$ לכל $x\in I$.

הוכחה נניח שהורונסקיאן מתאפס ונראה ש-y_i ת"ל.

אם $W(y_1,...,y_n)=0$, אז יש תלות לינארית בין העמודות כש-$x=x_0$: יש קבועים $c_1,...,c_n$ לא כולם אפס, כך שאם נגדיר $\tilde{y}=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i)^{(k)}c_i$. אז, $\tilde{y}^{(i)}(x_0)=0$. מצד שני, יודעים שפתרון האפס מקיימת את השיוויונות האלו. מקיום ויחידות בנקודה $x=x_0$, $\tilde{y}$ חייב להיות פתרון האפס.

מסקנה: $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i)^{(k)}c_i=0$, כלומר - $(y_i)_{i=1}^{n}$ ת"ל. $\square$

13 הרצאה 13

13.1 מסקנה

אם $y_1, ..., y_n$ פתרונות למד"ר לינארי הומוגני מסדר n,
אם $W(y_1, ..., y_n)$ מתאפס עבור x_0 כלשהו, אז $W(y_1, ..., y_n) \equiv 0$.

13.1.1 שימוש במסקנה

המקרה הכי "משעמם":

$$n = 1, \quad y' + py = 0$$

נזכיר, כל פתרון נראה כך: $y_C(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$.
המסקנה אומרת: אם y_C מתאפס בנקודה, אז $y_C \equiv 0$, מכיוון ש- $W(y_C) = y_C$.

13.2 דוגמאות, תרגילים ומשפטים

13.2.1 $y'' + y = 0$

כלומר - $n = 2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad b = 0$.
דוגמאות לפתרונות: $\sin(x), \cos(x)$. נראה שאלו בת"ל - נחשב את הורונסקיאן:

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

כלומר, שונה מאפס בכל נקודה. (מספיק לבדוק עבור נקודה ספציפית). לכן, $\cos x, \sin x$ בת"ל ולכן מהווים בסיס למרחב הפתרונות (שמימדו 2). כלומר, כל פתרון הוא מהצורה: $a\cos x + b\sin x$.

הערה: אם f פתרון ל-$y'' + y = 0$, אז גם $f(x+c)$ לכל בחירה של c.

13.2.2 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

הראו שאם y_1, y_2 זוג פתרונות שמתאפסים ב-x_0, אז הם תלויים לינארית.

הוכחה:

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

לכן, הפתרונות תלויים לינארית.

$\square$

13.2.3 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

נתונים 2 פתרונות בת"ל: y_1, y_2. הוכיחו: אם $y_1(a) = y_1(b) = 0$, אז קיים $c \in [a,b]$ כך ש-$y_2(c) = 0$.

הוכחה: נניח בשלילה שלא קיים c כזה. בפרט, y_2 לא מתאפס ב-$[a,b]$.
נבנה בניית עזר:

$$h(x) = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

ממשפט רול, קיימת $c \in [a,b]$ כך ש-$h'(c) = 0$. כלומר:

$$\frac{y_1'y_2 - y_1y_2'}{y_2^2} = \frac{W(y_2,y_1)}{y_2^2} = \frac{-W(y_1,y_2)}{y_2^2}$$

מכיוון ש-$W(y_1,y_2) = 0$ נקבל y_1, y_2 תלויים לינארית. סתירה! לכן קיים $c \in [a,b]$ כנדרש. $\square$

13.2.4

אם y פיתרון למד"ר לינארי הומוגני מסדר n בקטע סגור I. אז אם ל-y יש אינסוף אפסים בקטע I, אז $y = 0$.

פתרון: נבנה סדרת אפסים של y - $x_1, x_2, x_3 \ldots,$. נבנה אותה בצורה מונוטונית (ניקח אפס בקטע I, יש ∞ אפסים או מימינו או משמאלו).

לסדרה x_i יש גבול L. הגבול L סופי כי (x_i) חסומה בקטע I. בנוסף, L שייך לקטע I כי הקטע סגור.

מרציפות נקבל:

$$y(L) = y(\lim x_n) = \lim y(x_n) = \lim 0 = 0$$

כלומר - L הוא בעצמו אפס של y.

ממשפט רול, בין כל זוג x_i-ים יש אפס של y'. כלומר $y'\left(x_i^{(1)}\right) = 0$. נסתכל על הסדרה $x_i^{(1)}$.
נשים לב, $x_i^{(1)}$ גם מונוטונית. מסנדוויץ': $x_i^{(1)} \to L$, ומרציפות y':

$$y'(L) = \lim y'(x_i^{(1)}) = 0$$

נבנה באותו אופן $x_i^{(2)}$ בין כל $x_i^{(1)}, x_{i+1}^{(1)}$ כך ש-$y''(x_i^{(2)} = 0$.

ניתן להמשיך n פעמים (כל עוד $y^{(i)}$ גזירה ברציפות). מצד שני, פתרון האפס גם מקיים זאת. מיחידות: $y = 0$.

$\square$

הערה השתמשנו בטענה "לסדרה X_n חסומה יש תת סדרה מתכנסת".

14 הרצאה 14

תזכורת ראינו את הטענות: 13.2.2 ואת 13.2.3. משתי טענות אלו ניתן להסיק את המשפט:

14.1 משפט ההפרדה של שטרום

יהיו y_1, y_2 פתרונות בת"ל למדר: $y'' + py' + qy = 0$.
יהיו a, b זוג אפסים עוקבים של y_1.

$$y_1(a) = y_1(b) = 0, \quad \forall c \in (a,b) \to y_1(c) \neq 0$$

אזי, ל-y_2 יש אפס **יחיד** בין a ל-b ו-$y_2(a) \neq 0$, $y_2(b) \neq 0$.

הוכחה נשים לב ש-y_1, y_2 לא חולקים אפסים (לפי 13.2.2 - אם הם חולקים אפס הם תלויים לינארית).

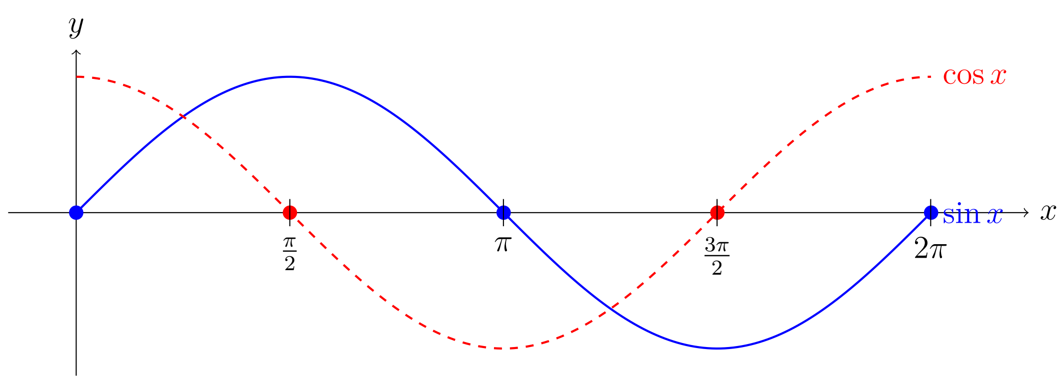
מטענה 13.2.3 - קיים אפס של y_2 בקטע <u>הסגור</u>, ומההבחנה הקודמת - קיים אפס של y_2 בקטע <u>הפתוח</u> (a, b).

נראה שזה האפס היחיד בקטע:

נניח בשלילה $y_2(c) = y_2(d) = 0 \quad a < c < d < b,$. אז באותו אופן, קיים אפס ל-y_1 בקטע הפתוח (c, d).
סתירה להנחה ש-a, b זוג אפסים עוקבים של y_1.

$\square$

דוגמא $y'' + y = 0$. נסתכל על הפתרונות $\{\cos x, \sin x\}$. בין כל זוג אפסים של $\sin$ יש אפס של $\cos$.



תרגיל

נתונות $y_1, ..., y_n$ פונקציות בת"ל, גזירות ברציפות n פעמים.
מצאו מד"ר לינארי הומוגני מסדר n, כך ש-$y_1, ..., y_n$ פתרונות שלו.

פתרון:

נסתכל על $W(y, y_1, ..., y_n)$:

$$W(y, y_1, ..., y_n) = \left| \begin{pmatrix} y(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \right|$$

נשים לב, $W(y, y_1, ..., y_n)$ מתאפס אם y שווה לאחת הפונקציות הנתונות (יהיו 2 עמודות שוות).
הבחנה: $W(y, y_1, ..., y_n) = 0$ הוא מד"ר לינארי הומוגני מסדר n.
הסבר:

$$W(y, y_1, ..., y_n) = y^{(n)} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \left| \begin{pmatrix} y(x) & y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'(x) & y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n-1)}(x) & y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \right| + y^{(n-1)} \cdot (\text{מקדם}) + ...$$

הערה: המקדם של $y^{(n)}$ אינו 1. המשפטים שהוכחנו על ורונסקיאן נכונים כשמקדם 1 - משוואה מנורמלת.

14.2 נוסחת אבל

תהי מד"ר ליניארית הומוגנית מנורמלת:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0$$

כאשר המקדמים p_i רציפים בקטע I. יהיו $y_1, \ldots, y_n$ פתרונות של המשוואה.
אזי, הוורונסקיאן $W_1(x) = W(y_1, ..., y_n)$ מקיים:

$$W'(x) + p_1(x)W(x) = 0$$

ולכן:

$$W(x) = W(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\, dt}$$

הוכחה נתחיל ב-$n = 2$:

$$W(x) = \left| \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \right| = y_1y_2' - y_2y_1'$$

נגזור:

$$\cancel{y_1'y_2'} + y_1y_2'' - \cancel{y_2'y_1'} - y_2y_1'' = y_1y_2'' - y_2y_1'' = y_1\underbrace{(-p_1y_2' - p_2y_2)}_{y_2''} - y_2\underbrace{(-p_1y_1' - p_2y_1)}_{y_1''} = p_1(y_1'y_2 - y_1y_2')$$

כעת, המקרה הכללי: ננסח את הטענה הבאה:

> תהי $A=(a_{ij}(x))$ מטריצה $n\times n$ של פונקציות גזירות.
> נסמן A_k - המטריצה המתקבלת מלגזור את השורה ה-k של A.
> אזי:
> $$|A|'=|A_1|+...+|A_n|$$

נשתמש בטענה ונקבל:

$$W_1'=\left|\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}\right|$$

בסימוני הטענה: $|A_1|=...=|A_{n-1}|=0$. (אחרת נקבל 2 שורות זהות והורונסקיאן יתאפס).

כדי לפשט את הדטרמיננטה הנותרת, נשתמש בכך ש-$y^{(n)}=-p_1y^{(n-1)}-...-p_ny$ ונקבל:

$$W_1'=\left|\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1y_1^{(n-1)}-... & \cdots & -p_1y_n^{(n-1)}-... \end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -p_1y_1^{(n-1)} & \cdots & -p_1y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}\right|$$

כאשר פישטנו את השורה האחרונה ע"י הוספת כפולות של שורות קודמות. (פעולות שורה לא משנות דטרמיננטה). נוציא $(-p_1)$ מהשורה האחרונה ונקבל:

$$W_1'(x)=-p_1\left|\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}\right|\Rightarrow W_1'(x)=-p_1W(x)$$

הוכחת טענת העזר קיימות 3 דרכים:

1. נוסחא: דטרמיננטה היא סכום של $n!$ תמורות. (אליאש מוכיח ככה)
2. אינדוקציה ופיתוח לפי שורות/ עמודות.
3. מולטי-לינאריות: פונקציה ב-n משתנים נקראית מולטי-לינארית אם היא לינארית בכל משתנה בנפרד.

טענת העזר היא שיוויון בין 2 פונקציות של $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

<u>הבחנה</u>: אגף שמאל ואגף ימין של טענת העזר הם פונקציות מולטי-לינאריות בשורות והעמודות של A.
<u>הבחנה</u>: כדי להוכיח שיוויון בין שתי פונקציות מולטי-לינאריות, מספיק לבדוק שיוויון במקרה הפשוט שבכל שורה של A יש בדיוק איבר אחד שונה מ-אפס ובכל עמודה של A יש בדיוק איבר אחד שונה מ-אפס.

כלומר, מספיק לקחת: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1n} \\ & \iddots & \\ a_{n1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. עבור A אלכסונית הטענה קלה:

$$|A|=a_{11}\cdot...\cdot a_{nn}\Rightarrow |A|'=a_{11}'(a_{22}...a_{nn})+...$$

14.3 הורדת סדר

הקדמה ומטרה תהי $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny(x)=0$. נניח שידועים m פתרונות בת"ל ($m<n$). נראה שאפשר לבנות מד"ר חדש מסדר $n-m$ שמפתרונותיו ניתן למצוא $n-m$ פתרונות נוספים בת"ל למד"ר המקורי. יהיו $y_1,\dots,y_m$ פתרונות בת"ל למד"ר. נבחר את הפתרון y_1 (נעבוד בקטע בו y_1 לא מתאפס).

ביצוע החלפת משתנים נציב $y=y_1\cdot v$: נכתוב את המד"ר כמד"ר במשתנה v:

$$(y_1v)^{(n)}+p_1(y_1v)^{(n-1)}+...+p_n(y_1v)=0$$
$$\downarrow$$
$$y_1v^{(n)}+(q_1v^{(n-1)}+...+q_nv)$$

(כאשר q_i היא פונקציה של p_i ו-y_1)

הסקת מסקנה על המקדם q_n נבחן את המקרה הפרטי $v=1$:
מצד אחד, הצבה זו שקולה להצבת $y=y_1$ במד"ר המקורית. מכיוון ש-y_1 הוא פתרון ידוע, אגף שמאל חייב להתאפס.
מצד שני, עבור $v=1$ קבוע, כל הנגזרות שלו מתאפסות, ולכן רק האיבר החופשי $q_n\cdot v$ נותר במשוואה.
מכאן נובע בהכרח כי $q_n=0$. כלומר, המד"ר החדשה תלויה רק בנגזרות של v, ונראית כך:

$$y_1v^{(n)}+q_1v^{(n-1)}+\cdots+q_{n-1}v'=0 \qquad (**)$$

הורדת הסדר נגדיר $u=v'$: נשים לב, אם v פתרון של (**), אז u פתרון של מד"ר מסדר $n-1$:

$$\boxed{y_1u^{(n-1)}+q_1u^{(n-2)}+...+q_{n-1}u=0} \qquad (***)$$

בניית מערכת הפתרונות אם נמצא $n-1$ פתרונות בת"ל ל-(***), $(\tilde{y_2},...,\tilde{y_n})$, אז נבצע על כל אחד אינטגרל, נכפול ב-y_1, ונקבל n פתרונות בת"ל למד"ר המקורי:

$$\underbrace{y_1,\quad y_1\cdot\int_{x_0}^{x}\tilde{y_2}\quad,\dots,\quad y_1\cdot\int_{x_0}^{x}\tilde{y_n}}_{\text{פתרונות בת"ל } n}$$

הוכחת אי-תלות ליניארית (בת"ל) נראה שהפתרונות בת"ל: ניקח צ"ל, נשווה לאפס ונראה שהוא טריוויאלי:

$$c_1y_1+c_2\cdot y_1\int_{x_0}^{x}\tilde{y_2}+...+c_n\cdot y_1\int_{x_0}^{x}\tilde{y_n}=0$$

נחלק ב-y_1:

$$c_1+c_2\cdot y_1\int_{x_0}^{x}\tilde{y_2}+...+c_n\cdot y_1\int_{x_0}^{x}\tilde{y_n}=0$$

נגזור:

$$c_1+c_2\cdot y_1\tilde{y_2}+...+c_n\cdot y_1\tilde{y_n}=0$$

הנחנו כי $\tilde{y_2},...,\tilde{y_n}$ בת"ל ולכן $c_i=0$.

הכללה: שימוש ב-m פתרונות והוכחת אי-תלות

אם ידועים לנו m פתרונות בת"ל $\{y_1, \dots, y_m\}$, נוכל להוריד את סדר המשוואה ב-m דרגות באופן רקורסיבי. המפתח לכך הוא היכולת "להעביר" פתרונות מהמד"ר המקורית למד"ר המצומצמת.

1. המרת פתרונות למד"ר המצומצמת אם y_i הוא פתרון למד"ר המקורית, אזי הפונקציה $u_i = \left(\frac{y_i}{y_1}\right)'$ היא פתרון למד"ר המצומצמת מסדר $n-1$.

2. הוכחת שימור בת"ל-יות כדי לוודא שניתן להמשיך בתהליך, נראה כי אם הקבוצה $\{y_1, \dots, y_m\}$ בת"ל, אז גם קבוצת הנגזרות $\left\{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \dots, \left(\frac{y_m}{y_1}\right)'\right\}$ היא בת"ל.

נניח צ"ל שמתאפס:

$$\sum_{i=2}^{m} c_i \left(\frac{y_i}{y_1}\right)' = 0$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים (נקבל קבוע אינטגרציה c_1):

$$\sum_{i=2}^{m} c_i \left(\frac{y_i}{y_1}\right) = c_1$$

נכפיל ב-y_1 ונעביר אגף:

$$\sum_{i=2}^{m} c_i y_i - c_1 y_1 = 0$$

מכיוון ש-$\{y_1, \dots, y_m\}$ הם פתרונות בת"ל למד"ר המקורית, כל המקדמים c_i יהיו אפס. לכן, הפתרונות החדשים בת"ל.

3. תהליך רקורסיבי ניתן לחזור על התהליך: נשתמש במד"ר המצומצמת (***) ונעזר בפתרון u_2 כדי להוריד את הסדר פעם נוספת ע"י הצבה מהצורה $u = u_2 \cdot w = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \cdot w$.

סיכום (לעצמי):

1. **הנחת הפתרון:** נגדיר $y = y_1 \cdot v$.
2. **הצבה:** האיברים של v (ללא נגזרת) מתבטלים תמיד.
3. **הורדת סדר:** נגדיר $u = v'$ לקבלת סדר $n-1$.
4. **פתרון:** מציאת u וביצוע אינטגרציה.
5. **חזרה:** הרכבת הפתרון הכללי $y = y_1 \cdot \int u \, dx$.

דוגמא: מד"ר ליניארית מסדר שני

תהי המד"ר $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$. נניח כי y_1 הוא פתרון ידוע. נמצא עוד פתרון.

נבצע את ההצבה $y = y_1 \cdot v$:

$$(y_1 v)'' + p_1 (y_1 v)' + p_2 (y_1 v) = 0$$

משימוש בכלל המכפלה וסידור איברים, המד"ר עבור v היא:

$$y_1 v'' + v'(2y_1' + p_1 y_1) + v(y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1) = 0$$

נשים לב כי $v = 1$ הוא פתרון של המד"ר החדשה. (שקול להציב $y = y_1$). מאחר ו-y_1 פתרון, הביטוי בסוגריים של v מתאפס, וקיבלנו:

$$y_1 v'' + v'(2y_1' + p_1 y_1) = 0$$

<u>הורדת הסדר</u> נגדיר $u = v'$. המשתנה u מקיים מד"ר מסדר ראשון:

$$y_1 u' + (2y_1' + p_1 y_1) u = 0$$

נחלק ב-y_1 ונקבל את הצורה הסטנדרטית:

$$u' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p_1 \right) u = 0$$

נעביר אגפים, נעשה אינטגרל על שני האגפים, ונקבל את u_0:

$$u_0 = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx}$$

נבצע אינטגרציה כדי למצוא את v_0:

$$v_0 = \int_{x_0}^{x} u_0(x)\, dx$$

מסקנה הפתרון הנוסף למד"ר המקורית, הבלתי תלוי ב-y_1, הוא:

$$y_2 = y_1 \cdot v_0 = y_1 \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int p_1(t)dt}}{y_1^2(t)}\, dt$$

15 הרצאה 15 - 16/12

15.1 מד"ר לינארי הומוגני עם מקדמים קבועים

$$a_0y^{(n)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

דוגמאות

1. $y' = y$, הפתרון הוא $y = C \cdot e^x$
2. $y' = 0$, הפתרון הוא $y = C$
3. $y'' = y$, הפתרון הוא $y = C \cdot e^{\pm x}$
4. $y'' = 0$, הפתרון הוא $y = ax + b$
5. $y'' + y = 0$, הפתרון הוא $y = \sin x, \cos x$

מה התורה הכללית?
נראה מה קורה אם מציבים במד"ר $y = e^{\lambda x}$ כאשר λ סקלר?

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, ..., y^{(i)} = \lambda^i e^{\lambda x}$$

כלומר, המד"ר נראה כך:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + ... + a_n e^{\lambda x} = 0$$

נצמצם ב-$e^{\lambda x}$:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_n = 0$$

נגדיר את המושג הבא:

הפולינום האופייני של המד"ר

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

הראנו: אם λ שורש ממשי של הפולינום האופייני, אז $e^{\lambda x}$ פתרון למד"ר.

לכן, אם ל-P יש n שורשים ממשיים שונים, נוכל למצוא n פתרונות למד"ר.

נותרו 3 שאלות:

1. מה אם יש שורש שמופיע פעמיים?
2. מה אם יש שורש מרוכב?
3. האם הפתרונות הם בת"ל?

נענה על השאלות.

שאלה 1 - מה אם יש שורש שמופיע פעמיים?

נניח ש-λ שורש שמאפס את P K פעמים. נוכל לפרק את הפולינום:

$$P(x) = (x-\lambda)^k Q(x)$$

נראה שמתקיים: $P^{(i)}(\lambda) = 0 \quad \forall i \in [0, k-1]$.

נגזור את P ונקבל:

$$\begin{aligned} P'(x) &= K(x-\lambda)^{k-1}Q(x) + (x-\lambda)^k Q'(x) \\ &= (x-\lambda)^{K-1}(KQ + (x-\lambda)Q') \end{aligned}$$

כלומר, P' מתאפס $k-1$ פעמים בנקודה λ. ניתן להמשיך באינדוקציה עד לנגזרת ה-$k-1$.

נראה ש-$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, ..., x^{K-1}e^{\lambda x}$ הם K פתרונות למד"ר

נגדיר אופרטור לינארי:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y$$

נציב $y = x^i e^{\lambda x}$ ונשתמש בתכונת הנגזרת לפי הפרמטר λ:

$$L[x^i e^{\lambda x}] = L\left[\frac{\partial^i}{\partial \lambda^i}(e^{\lambda x})\right] = \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} L[e^{\lambda x}] \underset{\text{לפי זה}}{=} \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i}(P(\lambda)e^{\lambda x}) \underset{\text{כלל לייבניץ}}{=} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} P^{(j)}(\lambda)(e^{\lambda x})^{(i-j)}$$

אם ניקח את λ להיות שורש מריבוי K של P, וניקח אינדקס i הקטן מ-K ($i < K$), בהכרח נקבל $L[y] = 0$. זאת מכיוון שלפי ההבחנה הקודמת, כל הנגזרות $P^{(j)}(\lambda)$ מתאפסות לכל $j \le i < K$.

דוגמא עבור המד"ר $y'' = 0$, הפולינום האופייני הוא $x^2 = 0$ עם שורש יחיד $x = 0$ מריבוי $K = 2$. לכן נובע ש-e^{0x}, xe^{0x} (כלומר $\{1, x\}$) הם זוג פתרונות בת"ל.

מסקנה סה"כ, הראנו שאם יש שורש מריבוי K אז קיימים K פתרונות שונים למד"ר.

שאלה 2 - מה אם יש שורש מרוכב? אם λ מרוכב, אז $e^{\lambda x}$ פתרון מרוכב למד"ר.

נראה: אם λ שורש של P, אז $\bar{\lambda}$ שורש של P, מרוכב ושונה מ-λ.

נכתוב את הפולינום כמכפלת השורשים שלו: $P(x) = \prod(x-\lambda_i)$.

מתקיים ש-λ שורש:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = \prod(\lambda - \lambda_i) = 0$$

נפעיל צמוד מרוכב על השיוויון:

$$\bar{\lambda}^n + a_1\bar{\lambda}^{n-1} + ... + a_n = \prod(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_i) = 0$$

מסקנה: אם λ שורש מרוכב, אז $e^{\lambda x}x^i, e^{\bar{\lambda}x}x^i$ פתרונות מרוכבים. כלומר - אם קיים שורש מרוכב, נוכל ליצור ממנו ומהצמוד שלו פתרונות ממשיים:

$$\underbrace{\frac{e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda}x}}{2} \cdot x^i}_{e^{\Re(\lambda)\cdot x}\cdot\cos(\Im(\lambda)\cdot x)}, \quad \underbrace{\frac{e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda}x}}{2i} \cdot x^i}_{e^{\Re(\lambda)\cdot x}\cdot\sin(\Im(\lambda)\cdot x)}$$