משוואות דיפרנציאליות רגילות

חורף - תשפ"ו

גלית לבדב

תוכן עניינים

1 הרצאה 1 6
1.1 הגדרות בסיסיות 6
1.1.1 מה זה מד"ר בכלל??? 6
1.1.2 מד"ר מסדר n 6
1.1.3 מד"ר לינארית 6
1.1.4 משוואה אוטונומית מסדר ראשון 6
1.2 מערכת משוואות דיפרנציאליות 7
1.2.1 הגדרה כללית 7
1.2.2 הצורה הנפוצה יותר 7
1.2.3 פתרון מד"ר 7
1.2.4 הערות על מד"ר אוטונומיות 8

2 הרצאה 2 9
2.1 דוגמאות למד"רים 9
2.1.1 גידול אוכלוסיה 9
2.1.2 התפרקות רדיואקטיבית 9
2.1.3 המשוואה הלוגיסטית 9
2.2 דוגמאות למערכות של משוואות 10
2.2.1 מודל SIR 10
2.2.2 מודל טורף-נטרף (Lotka-Voltera) 10
2.2.3 דוגמא מפיזיקה :) 11

3 הרצאה 3 12
3.1 פתרון משוואה לינארית מסדר ראשון 12
3.1.1 הומוגנית 12
3.1.2 לא הומוגנית 13
3.2 דוגמאות לשימוש בפתרון הכללי 15
3.2.1 דוגמא 1 - הומוגנית 15
3.2.2 דוגמא 2 - לא הומוגנית 15

4 הרצאה 4 16
4.1 משוואות ניתנות להפרדה 16
4.1.1 מקרה פרטי $g = 1$ 16
4.1.2 מקרה כללי 17

4.1.3 בעיית תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה 17

5 הרצאה 5 19
5.1 דוגמא למד"ר ניתנת להפרדה - פתרון המשוואה הלוגיסטית 19
5.1.1 הערה כללית 20
5.2 שיטה לפתירת מד"ר מסדר ראשון - החלפת משתנים 21

6 הרצאה 6 22
6.1 משפט הקיום והיחידות - פיקרד לינדלוף 22
6.1.1 הוכחה 22
6.1.2 הלמה של גרונוול 23

7 הרצאה 7 27
7.1 דוגמא לשימוש במשפט 27

8 הרצאה 8 28
8.1 עקרון היחידות 28
8.1.1 דוגמא - משוואה לוגיסטית 28
8.2 עקרון ההמשכה 29
8.3 פתרון גלובלי 30
8.4 דוגמאות מתי משפט הקיום והיחידות לא עובד 30
8.4.1 עקרון ההדבקה 31

9 הרצאה 9 32
9.1 המשך דוגמאות 32
9.1.1 אין ליפשיציות, אין יחידות בסביבה 32
9.1.2 איו ליפשיציות, כן יש יחידות בסביבה 32
9.1.3 דוגמא לשימוש במשפט הפתרון הגלובלי 33

10 הרצאה 10 34
10.1 חקירה איכותית של מד"ר 34
10.1.1 משפט 34
10.2 משפט משלים 35
10.3 גדרות 37
10.3.1 משפט הגדר 37
10.3.2 מסקנה - משפט המשפך 38
10.4 דוגמאות 38

11 הרצאה 11 39
11.1 כמה השלמות על משוואות אוטונומיות 39
11.1.1 טענה 39
11.1.2 טענה 39

11.1.3 שכלול למשפט הגדר 40
11.2 אינטואיציה למשפך ומשפך הפוך 40
11.3 משפט המשפך ההפוך 41

12 הרצאה 12 43
12.1 משוואה לינארית מסדר n 43
12.1.1 משפט קיום ויחידות גלובלי למשוואה לינארית מסדר n 43
12.1.2 מסקנה ממשפט קיום ויחידות 44
12.1.3 טענה - ורונסקיאן מתאפס עבור פונקציות ת"ל 45
12.1.4 משפט - פתרונות בת"ל לא מאפסות ורונסקיאן 45

13 הרצאה 13 46
13.1 מסקנה - ורונסקיאן מתאפס אז ורונסקיאן שווה זהותית ל-0 46
13.2 דוגמאות, תרגילים ומשפטים 46
13.2.1 מציאת פתרונות בת"ל - $y''+y=0$ 46
13.2.2 פתרונות מתאפסים בנקודה, תלויים לינארית - $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 46
13.2.3 אם פתרון מתאפס בשני נקודות, פתרון בת"ל אחר מתאפס בינהן - $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 47
13.2.4 פתרון למד"ר לינארי הומוגני מסדר n מתאפס אינסוף פעמים, שווה זהותית ל-0 . 47

14 הרצאה 14 - 15/12 48
14.1 משפט ההפרדה של שטרום 48
14.2 נוסחת אבל 49
14.3 הורדת סדר 51

15 16/12 - הרצאה 15 54
15.1 מד"ר לינארי הומוגני עם מקדמים קבועים 54

16 הרצאה 16 - 22/12 56
16.1 משפט מסכם עבור מד"ר הומוגני, לינארי מסדר n, בעל מקדמים קבועים 56
16.1.1 תרגילים 58

17 הרצאה 17 - 23/12 59
17.1 משוואות אוילר 59
17.1.1 2 שיטות למציאת פתרון למשוואת אוילר 59
17.2 מד"ר לינארי לא הומוגני 60

18 הרצאה 18 - 29/12 61
18.1 שיטת וריאציית הפרמטרים 61
18.2 השוואת מקדמים 64
18.3 מערכות של n משוואות לינאריות 65
18.3.1 משפט קיום ויחידות למערכת 66

19 הרצאה 19 - 30/12 67
19.1 מערכת לינארית הומוגנית 68

20 הרצאה 20 - 5/1 69
20.0.1 נוסחאת אבל - ליוביל 70
20.1 מערכת מטריציונית 71
20.1.1 פתרון יסודי 71
20.2 מערכת הומוגנית עם מקדמים קבועים 72
20.2.1 משפט 73
20.2.2 דוגמאות 74

21 הרצאה 21 - 6/1 75
21.1 אקספוננט של מטריצה 75

22 הרצאה 22 - 12/01 77
22.1 דוגמאות לחישוב e^{xP} 77
22.2 שיטות לחישוב e^{Ax} עבור מטריצה A כללית 78

23 הרצאה 23 83
23.1 מערכת לא הומוגנית 86

24 הרצאה 24 - 19/1 87

25 הרצאה 25 - 20/1 91

26 הרצאה 26 - 26/01 93
26.1 בעיות שפה וערכים עצמיים 93
26.1.1 המשפט המרכזי של שטרום ליוביל 95

27 הרצאה 27 ואחרונה - 27/01 97
27.1 פתרון עם טורי חזקות 98

1 הרצאה 1

1.1 הגדרות בסיסיות

1.1.1 מה זה מד"ר בכלל???

משוואה דיפרנציאלית רגילה

משוואה שמערבת פונקציה ונגזרות שלה.

$$F((t, y(t), ..., y^n(t)) = 0$$

1.1.2 מד"ר מסדר n

$$y^n = f(t, ..., y^{n-1})$$

1.1.3 מד"ר לינארית

$$a_0 + a_1(t) \cdot y(t) + ... + a_n(t) \cdot y^n(t) = b(t)$$

אם $b(t) = 0$ המשוואה נקראת **הומוגנית**.

1.1.4 משוואה אוטונומית מסדר ראשון

$$y'(t) = f\left(y(t)\right)$$

1.2 מערכת משוואות דיפרנציאליות

1.2.1 הגדרה כללית

שתי משוואות בשתי פונקציות:

$$F_1(y_1^n, y_2^n, ..., y_1, y_2) = 0$$
$$F_2(y_1^n, y_2^n, ..., y_1, y_2) = 0$$

בדרך כלל נשתמש בצורה הבאה:

1.2.2 הצורה הנפוצה יותר

$$F_1(t, y_1, y_2) = 0$$
$$F_2(t, y_1, y_2) = 0$$

הערה: לפעמים יהיו k משוואות בk פונקציות.

1.2.3 פתרון מד"ר

נפתור את המשוואה $y'(t) = y(t)$. ראשית, נניח כי $y(t) = 0$. כעת ניתן לחלק ב$y(t)$.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$$

אם y תמיד חיובית: נשים לב שזו נגזרת מוכרת.

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = (\log(y(t)))' = 1$$

נבצע אינטגרל לשני האגפים,

$$\log(y(t)) = t + c \quad , c \in \mathbb{R}$$

נעלה לחזקת e, ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = e^t \cdot e^c \quad , c \in \mathbb{R}$$

אם y תמיד שלילית: נעשה את אותו דבר אבל על $\log(-y(t))$ ונקבל את הפתרון:

$$y(t) = -e^t \cdot e^c \quad , c \in \mathbb{R}$$

לסיכום, אוסף הפתרונות הוא:

$$y(t) = e^t \cdot C \quad , C := e^c \quad , c \in \mathbb{R}$$

נבדוק שזה פתרון:

$$y'(t) = e^t \cdot C = y(t)$$

נראה שאין עוד פתרונות: נשתמש בפונקציית עזר:

$$g(t) = \frac{y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = \frac{y'(t)e^t - y(t)e^t}{\left(e^t\right)^2} = \frac{y'(t) - y(t)}{e^t}$$

$$g'(t) = 0 \iff g \text{ קבועה} \iff y(t) = c \cdot e^t$$

1.2.4 הערות על מד"ר אוטונומיות

1. אם y_0 פתרון של $y'(t) = f(y(t))$ אז גם $y_c(t) = y_0(t+c)$ פתרון לכל בחירה של c.

2 הרצאה 2

2.1 דוגמאות למד"רים

2.1.1 גידול אוכלוסיה

$N(t)$ - גודל האוכלוסייה בזמן t, K - קבוע שתלוי באוכלוסייה.

$$N'(t) = K \cdot N(t)$$

באופן דומה לפתרון המד"ר שראינו בהרצאה 1,

$$N(t) = e^{kt} \cdot C'$$

נסמן כתנאי התחלה את $N(0)$, כלומר - הגודל ההתחלתי של האוכלוסיה

$$N(0) = C$$

לכן ניתן לכתוב,

$$N(t) = e^{k \cdot t} \cdot N(0)$$

2.1.2 התפרקות רדיואקטיבית

נסמן ב-$N(t)$ את מספר החלקיקים באיזשהו חומר רדיואקטיבי.

המד"ר שלנו יהיה

$$N'(t) = -K \cdot N(t)$$

ואז נקבל (שוב, באופן דומה להרצאה 1)

$$N(t) = e^{-k \cdot t} \cdot N(0)$$

2.1.3 המשוואה הלוגיסטית

מידול לגודל האוכלוסיה עם משאבים מוגבלים.

כלומר, אם האוכלוסיה לא יכולה לעבור ספ C. (כלומר - $N(0) < C$).

המשוואה תהיה

$$N'(t) = K \cdot N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{C}\right) = K \cdot N(t) - \frac{K}{C} \cdot N(t)^2$$

2.2 דוגמאות למערכות של משוואות

2.2.1 מודל SIR

נחלק את כלל האוכלוסיה ל-3 סוגים:

1. $S(t)$ - Susceptible "רגישים"
2. $I(t)$ - Infected "נדבק - כרגע חולה"
3. $R(t)$ - Recovered "מחלימים"

עבור קבועים $\beta > 0, \quad \gamma > 0$ נקבל:

$$\begin{aligned} &S'(t) = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t) \\ &I'(t) = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \gamma \cdot I(t) \\ &R'(t) = \gamma \cdot I(t) \end{aligned}$$

(*) - זו מערכת אוטונומית מסדר ראשון אך אינה לינארית.

בדיקת שפיות למערכת:

נשים לב שסך האוכלוסיה = $S + I + R$

אוכלוסייה בזמן 0 = $(S + I + R)(0)$ ואז:

$$(S + I + R)'(t) = S' + I' + R' = 0$$

כלומר קבוע לאורך כל הזמן.

2.2.2 מודל טורף-נטרף (Lotka-Voltera)

נסמן:

- $x(t)$: כמות הנטרפים (צמחוניים/ארנבות).
- $y(t)$: כמות הטורפים (אריות).

המערכת:

$$\begin{aligned} &x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \qquad && a > 0,\, b > 0 \\ &y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t), \qquad && c > 0,\, d > 0 \end{aligned}$$

דוגמא לפתרון:

$$\begin{cases} y \equiv 0 \\ x(t) = x(0)e^{at} \end{cases}$$

2.2.3 דוגמא מפיזיקה :(

חוק שני של ניוטון - $F = m \cdot a$

$x(t)$ - מיקום של חלקיק גוף בזמן t.

$x''(t)$ - תאוצה של חלקיק גוף בזמן t.

m - מסה של הגוף.

$$x''(t) \cdot m = f(x(t), x'(t), ...)$$

3 הרצאה 3

3.1 פתרון משוואה לינארית מסדר ראשון

3.1.1 הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = 0$$

תמיד קיים פתרון האפס - "הפתרון הטריוויאלי". נרצה למצוא את שאר הפתרונות.

נניח ש-$y \neq 0$,

$$\frac{y'}{y} = -p$$

מההנחה שלנו, והנחה נוספת ש-y פונקציה רציפה: y תמיד חיובית או תמיד שלילית.

בהתאם, הפתרון יהיה:

$$(\ln(|y|))' = (\ln(\pm y))' = -p$$

נניח למשל ש-y חיובית ממש.

הפונקציות הקדומות של $p(x)$ הן מהצורה: $C - \int_a^x p(t)dt$. (המשפט היסודי).

לכן,

$$\ln|y| = C - \int_a^x p(t)dt, \quad C \text{ שרירותי}, \ a \text{ קבוע}$$

נפעיל אקספוננט,

$$|y(x)| = e^C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

שקול ל-

$$\forall x, \quad y(x) = D \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}, \ D := e^C, \quad D > 0$$

מצאנו **פונקציות מועמדות לפתרון**. נראה:

1. הן אכן פתרונות:

   עבור קבוצת הפתרונות שמצאנו,

   $$y(x) = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

   נגזור: $y' = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x))$

   ונקבל: $y' + p \cdot y = D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p(x)) + (D \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}) \cdot (p(x)) = 0$.

   כלומר - הקבוצה מקיימת את המשוואה המקורית.

2. אלו כל הפתרונות: ניקח פתרון כלשהו, y.

   נגדיר פונקציית עזר:

   $$g(x) := \frac{y(x)}{e^{-\int_a^x p(t)dt}}$$

נגזור:

$$g' = y' \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p$$

נציב $y' = -p \cdot y$ ונקבל:

$$(-p \cdot y) \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} + y \cdot e^{\int_a^x p(t)dt} \cdot p = 0$$

ולכן,

$$g = C, \quad C \in \mathbb{R} \iff \text{קבועה } g \iff g' = 0$$

לסיכום,

$$y(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

מה אם נוסיף תנאי התחלה?

$$y(x_0) = y_0$$

נציב $a = x_0,\ C = y_0$ ונקבל:

$$y(x) = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^x p(t)dt}$$

זהו **הפתרון היחיד לבעיית הערך ההתחלתי** הזו.

3.1.2 לא הומוגנית

תזכורת

$$y' + p \cdot y = q(x)$$

נניח שקיים פתרון ונכפול את 2 האגפים בפונקציה μ (**גזירה** ואף פעם **לא מתאפסת**).

$$\mu \cdot y' + \mu \cdot p \cdot y = \mu \cdot q \tag{1}$$

היה לנו שימושי אם "במקרה" אגף שמאל הוא בדיוק $(\mu \cdot y)'$. נרצה לבחור μ שתקיים את זה.

ננסה להבין כיצד לבחור את μ הזו.

מכלל המכפלה:

$$(\mu \cdot y)' = \mu' \cdot y + \mu \cdot y'$$

לכן, בהתבסס על המשוואה המקורית (1) - נרצה: $\mu' \cdot y = \mu \cdot p \cdot y$.

כלומר, באופן שקול, נרצה לדרוש: $\mu' = \mu \cdot p$.

וע"י העברת אגפים,

$$\mu' - \mu \cdot p = 0$$

רגע, זו משוואה לינארית הומוגנית מסדר ראשון! לכן, ניקח:

$$\mu(x) = e^{-\int_a^x -p(t)dt} = e^{\int_a^x p(t)dt}$$

אחרי שבחרנו את μ, נחזור לפתרון המד"ר שלנו:

כאמור, בחרנו את μ כך שמתקיים:

$$(\mu \cdot y)' = \mu \cdot q$$

נעשה אינטגרל על שני הצדדים,

$$\mu \cdot y = \int_a^x q(t) \cdot \mu(t)dt + C$$

נחלק ב-μ,

$$y(x) = \frac{1}{\mu}\int_a^x q(t) \cdot \mu(t)dt + \frac{C}{\mu}$$

כאשר $\mu(x) = e^{\int_a^x p(t)dt}$

מצאנו פתרון **כללי** למשוואה לינארית לא-הומוגנית.

בדיקת שפיות

1. להציג את הפתרון הכללי ולוודא שהוא פתרון.
2. מה אם $q = 0$? כל הפתרונות נתונים ע"י $\frac{C}{\mu} = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$. שזה אכן הפתרון שיצא לנו עבור מערכת הומוגנית.
3. נניח שy_1, y_2 פותרים את המד"ר.

   נסתכל על ההפרש: $\Delta = y_1 - y_2$.

$$\Delta' + p\Delta = y_1' + py_1 - y_2' + py_2 = 0$$

כלומר, הפרש פתרונות של מד"ר לא הומוגני הוא פתרון של מד"ר הומוגני.

אפשר לנסות למצוא פתרונות ל-$y' + py = q$ ע"י הצבת $C(x)$. כלומר, לפתור משוואה ב-$C(x)$. (נציב C שרירותי, ואז נמצא אותו במדויק).

נציב $y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$ במשוואה הלא הומוגנית:

$$y' + py = C' \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} + C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} \cdot (-p) + p \cdot C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} = q$$

$$\Rightarrow C' \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt} = q$$

נכפיל את שני האגפים ב-$e^{\int_a^x p(t)dt}$:

$$C' = q \cdot e^{\int_a^x p(t)dt}$$

זו משוואה שקולה (במשתנה חדש $C(x)$).

מהמשפט היסודי נקבל:

$$C(x) = \int_a^x q(t)e^{\int_a^x p(t)dt}dt + D \Rightarrow y(x) = C(x) \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$$

3.2 דוגמאות לשימוש בפתרון הכללי

3.2.1 דוגמא 1 - הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x$$

כלומר $p(x) = \sin(x)$ ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C \cdot e^{-\int_a^x -\sin(t)dt} = C \cdot e^{-\cos x + \cos a} = D \cdot e^{-\cos x}$$

(C יכול לקבל כל ערך, לכן גם $D := C \cdot e^{\cos a}$ יכול לקבל כל ערך).

3.2.2 דוגמא 2 - לא הומוגנית

$$y' = y \cdot \sin x + \cos x$$

פתרון כללי יהיה:

$$y = D \cdot e^{-\cos x} + \frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^x e^{\cos t} \cos(t)dt}{e^{\cos x}}$$

4 הרצאה 4

4.1 משוואות ניתנות להפרדה

הגדרה

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

4.1.1 מקרה פרטי $g = 1$

מד"ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = h(y(t))$$

נניח ש-y פתרון, כך ש-$h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב$h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = 1$$

נשים לב שאם $H(t)$ זו פונקציה קדומה של $\frac{1}{h(t)}$,

$$(H(y))' = \frac{y'}{h(y)}$$

לכן המשוואה שקולה למשוואה

$$(H(y))' = 1 \Rightarrow H(y(t)) = C + t$$

איך נמצא את y? קיימת ל-H הופכית בתחום שאנו עובדים בו בגלל שהיא מוגדרת כך

$$H(t) = \int_{x_0}^{t} \frac{1}{h(x)} dx + \text{קבוע}$$

נשים לב, שלפי ההנחה שלנו - h לא מתאפסת. בפרט $\frac{1}{h}$ בעלת סימן קבוע - חח"ע. לכן גם H חח"ע. לכן, כדי למצוא את y, נרצה להפעיל את $H^{-1}(t)$ על שני האגפים.

נקבל את הפתרון:

$$\forall C, \quad y(t) = H^{-1}(C + t)$$

4.1.2 מקרה כללי

מד"ר מהצורה הבאה:

$$y'(t) = g(t) \cdot h(y(t))$$

נמשיך עם ההנחה $h(y) \neq 0$ בתחום הפתרון.

נחלק את שני האגפים ב-$h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

ניקח H קדומה של $\frac{1}{h}$, G קדומה של g ונקבל,

$$\frac{y'}{h(y)} = (H(y))' = G' \Rightarrow H(y) = G$$

נפעיל H^{-1} על שני האגפים,

$$\forall C \in \mathbb{R}, \quad y(t) = H^{-1}(G(t)) + C$$

אלו כל הפתרונות כך ש-$h(y) \neq 0$ בתחום.

בדיקת שפיות אפשר להשלים (אין לי כוח), אין צורך בבדיקת שפיות אם כל הצעדים בהוכחה הם אמ"מ.

4.1.3 בעיית תנאי התחלתי למשוואות ניתנות להפרדה

נוסיף תנאי התחלה לבעיה,

$$\begin{cases} y'(t) = g(t) \cdot h(y(t)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור את זה כאשר מניחים שוב ש-$h(y) \neq 0$ בתחום.

נחלק את שני האגפים ב-$h(y)$,

$$\frac{y'}{h(y)} = g$$

נעשה אינטגרל בקטע $[x_0, x]$,

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'}{h(y)} dt = \int_{x_0}^{x} g(t) dt$$

נעשה החלפת משתנים $y(t) = v$

$$\Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dv}{h(v)} = \int_{x_0}^{x} g(t) dt$$

ניקח G קדומה של g, H קדומה של $\frac{1}{h}$, ונקבל:

$$G'(x) - G'(x_0) = H(y(x)) - H(y(x_0))$$

נוסיף $H(y(x_0))$ לשני האגפים,

$$H(y(x)) = G'(x) - G'(x_0) + H(y(x_0))$$

נרכיב את H^{-1},

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y(x_0)$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל,

$$y(x) = H^{-1}(G'(x)) - H^{-1}(G'(x_0)) + y_0$$

5 הרצאה 5

5.1 דוגמא למד"ר ניתנת להפרדה - פתרון המשוואה הלוגיסטית

תזכורת

$$\begin{cases} N'(t) = K \cdot N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{L}\right) \\ N(t_0) = N_0 \in (0, L) \end{cases}$$

זו משוואה אוטונומית.

נשים לב,

$$g(t) = 1, \quad h(N(t)) = K \cdot N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{L}\right)$$

כלומר, המשוואה ניתנת להפרדה:

$$N'(t) = g(t) \cdot h(N(t))$$

נרצה למצוא (חלק) מפתרונות המד"ר.

נניח: $h(t) \neq 0$ בתחום ההגדרה של $N(t)$.

נחלק ב$h(N)$, ואז לכל t בתחום (קטע פתוח שמכיל את t_0):

$$\frac{N'}{h(N)} = 1$$

נעשה אינטגרציה לשני האגפים, ואז לכל t בתחום:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{N'}{h(N)} dx = \int_{t_0}^{t} 1 dx$$

נעשה החלפת משתנים, $N = v, \quad N' \cdot dx = dv$ ואז:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = t - t_0$$

בשביל לחשב את אגף שמאל - צריך למצוא פונקציה קדומה של $\frac{1}{h}$, נסמן ב-H. נשתמש בפירוק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{h(v)} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v(1 - \frac{v}{L})}\right) = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{1}{v} + \frac{\frac{1}{L}}{1 - \frac{v}{L}}\right)$$

וסה"כ, ע"י שימוש בנגזרת של $\ln$ נקבל:

$$\int_{N(t_0)}^{N(t)} \frac{dv}{h(v)} = \frac{1}{K}\left(\log v - \log(1 - \frac{v}{L})\right)\Big|_{N(t_0)}^{N(t)}$$

מסקנה:

$$\frac{1}{K}\left(\log N(t) - \log(1 - \frac{N(t)}{L})\right) - \frac{1}{K}\left(\log N_0 - \log(1 - \frac{N_0}{L})\right) = t - t_0$$

נכפול בK,

$$\left(\log N(t)-\log(1-\frac{N(t)}{L})\right)-\left(\log N_0-\log(1-\frac{N_0}{L})\right)=K(t-t_0)$$

נעביר אגפים ונפעיל אקספוננט:

$$\frac{N(t)}{1-\frac{N(t)}{L}}=\frac{N_0}{1-\frac{N_0}{L}}\cdot e^{K(t-t_0)}$$

קיבלנו משוואה לינארית ב$N(t)$:

$$\boxed{N(t)=\frac{N_0}{\frac{N_0}{L}+\left(1-\frac{N_0}{L}\right)\cdot e^{-K(t-t_0)}}}$$

5.1.1 הערה כללית

אם נתונה משוואה מהצורה $y'=h(y)$ (h רציפה), y_0 נקודה כך ש-$h(y_0)=0$, **אז** $y(t)=y_0$ היא פתרון.

5.2 שיטה לפתירת מד"ר מסדר ראשון - החלפת משתנים

שינוי משתנים/ הצבה

נתונה מד"ר מסדר ראשון עם תנאי התחלה,

$$\begin{cases} y'(t) = f\left(\frac{y(t)}{t}\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

נפתור ע"י שינוי משתנים $\frac{y(t)}{t} = z(t)$:

קיבלנו מד"ר שקולה:

$$z'(t) \cdot t + z(t) = f(z(t))$$

נעביר אגפים ונחלק ב-t:

$$z'(t) = \frac{f(z(t)) - z(t)}{t} = \frac{1}{t} \cdot (f(z(t)) - z(t))$$

נשים לב, זו **מד"ר ניתנת להפרדה**. ($h(z) = f(z) - z, \quad g = \frac{1}{t}$)

נסמן:

$$\frac{z'}{h(z)} = \frac{1}{t} \Leftarrow z' = \frac{1}{t} \cdot h(z)$$

ניקח G קדומה של $\frac{1}{x}$, H קדומה של $\frac{1}{f(x)-x}$, ונקבל:

$$H(z(t)) - H(z(t_0)) = G(t) - G(t_0)$$

G קדומה של $\frac{1}{x}$, כלומר $G = \ln t$:

$$H(z(t)) = H(\frac{y_0}{t_0}) + \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)$$

נרכיב את H^{-1},

$$z(t) = H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) - \ln(t_0) + \ln(t)\right)$$

סה"כ,

$$y(t) = t \cdot H^{-1}\left(H\left(\frac{y_0}{t_0}\right) + \ln t - \ln t_0\right)$$

זהו פתרון שמקיים את תנאי ההתחלה.

6 הרצאה 6

יהי מד"ר מסדר ראשון, כאשר f רציפה.

המשפט מבטיח קיום ויחידות של פתרון למד"ר שמקיים תנאי התחלה $y(x_0) = x_0$.

בשביל לנסח את המשפט, נגדיר פונקציית ליפשיץ.

פונקציית ליפשיץ

פונקצייה $f(x)$ בקטע I היא ליפשיצית עם קבוע K אם מתקיים: $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|$

הערה 1: אם f גזירה, והנגזרת חסומה ב-I, אז f ליפשיץ: $\exists c \in (x_1, x_2),\ \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f(c)$

הערה 2: אם f ליפשיץ, אז היא רציפה.

6.1 משפט הקיום והיחידות - פיקרד לינדלוף

תהי $f(x, y)$ פונקצייה בתחום D קשיר (לרוב מלבן $I \times J$).
אם f רציפה ב-x וליפשיץ ב-y, וקבוע הליפשיץ אינו תלוי ב-x: $\forall x,\ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$

אזי, לכל (x_0, y_0) בפנים של D, קיים $\varepsilon > 0$ כך שיש פתרון y למשוואה

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

והוא מוגדר עבור $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. יתר על כן - הפתרון יחיד.

6.1.1 הוכחה

יחידות נניח בשלילה שקיימים 2 פתרונות שונים y, Y לבעיית הערך ההתחלתי הנתונה.
אם $y' = f(x, y)$ בקטע $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ ו-$y(x_0) = y_0$, אז,

$$\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \Rightarrow y(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

אם $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$, אז $y(x_0) = y_0 + 0$. כלומר, y פותרת את בעיית הערך ההתחלתי בקטע.
נשים לב, שאם y, Y פותרים את $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$ והן רציפות, אז:

$$Y(x) - y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t))dt - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt = \int_{x_0}^{x} f(t, Y(t)) - f(t, y(t))dt$$

נפעיל ערך מוחלט על שני האגפים,

$$|Y(x) - y(x)| = |\int_{x_0}^{x} f(t, Y(t)) - f(t, y(t))dt| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, Y(t)) - f(t, y(t))|dt$$

לפי תנאי המשפט, f ליפשיץ לפי y ולכן,

$$\int_{x_0}^{x} |f(t,Y(t)) - f(t,y(t))|\, dt \leq \int_{x_0}^{x} K \cdot |Y(t) - y(t)| dt$$

נגדיר $g(t) = |Y(t) - y(t)|$.

נשים לב שהפונקציה g רציפה, אי שלילית וקודם הראנו שמתקיים $g(x) \leq K \cdot \int_{x_0}^{x} g(t)dt$.

לכן נוכל להשתמש ב**למה של גרונוול**. לפי הלמה, $g(t) = |Y(t) - y(t)| = 0$ ולכן:

$$\forall x \geq x_0,\, Y(x) = y(x)$$

6.1.2 הלמה של גרונוול

תהי g רציפה, אי שלילית בקטע $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$.
אם $g(x) \leq K \cdot \int_{x_0}^{x} g(t)dt$ לכל $x \geq x_0$, אז $g(x) = 0$ לכל $x \geq x_0$.

הוכחת הלמה:

נגדיר $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$. כלומר - $G'(x) = g(x) \geq 0$.

$$G'(x) \leq K \cdot G(x)$$

נחלק את שני האגפים בe^{Kx},

$$G'(x) \cdot e^{-Kx} \leq K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx}$$

נעביר אגפים,

$$(G(x) \cdot e^{-Kx})' = G'(x) \cdot e^{-Kx} - K \cdot G(x) \cdot e^{-Kx} \leq 0$$

כלומר, ל-$G(x) \cdot e^{-Kx}$ בעלת נגזרת אי-חיובית ולכן $(G(x) \cdot e^{-Kx}$ יורדת.

לכן, עבור $x \geq x_0$:

$$G(x) \cdot e^{-Kx} \leq G(x_0) \cdot e^{-Kx_0} = 0$$

נשים לב ש-$e^{-Kx} > 0$, לכן נוכל לכפול את האי-שיוויון ולקבל

$$G(x) \leq 0$$

סה"כ,

$$0 \leq g(x) \leq K \cdot G(x) \leq 0 \Rightarrow g(x) = 0$$

הוכחת קיום

נגדיר סדרת פונקציות באופן הבא:

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \end{cases}$$

שלבי ההוכחה:

1. נבנה מלבן D $S \subseteq D$ כך ש-(x_0, y_0). נגדיר מלבן מצומצם ע"י a'.
2. נראה שסדרת הפונקציות y_n חסומות במלבן D.
3. נראה התכנסות של הסדרה: $y_n \to y$.
4. נוכיח התכנסות במ"ש ע"י מבחן M של ויירשטראס.
5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי.

1. בניית המלבן נגדיר מלבן סביב הנקודה (x_0, y_0):

$$S = \{|x - x_0| \le a\} \times \{|y - y_0| \le b\} \subseteq D$$

f רציפה ב-S, לכן לפי ויירשטראס, f מקבלת בו מקסימום ונסמן: $M := \max\{|f(t, y)|\}$

נציב את המד"ר ($y' = f(x, y)$) ונקבל:

$$|y'| \le M$$

נסתכל על $y_1 - y_0$:

$$|y_1(x) - y_0(x)| \le M|x - x_0| \le M \cdot a$$

על מנת לא לצאת מהמלבן, ($|y_1 - y_0| \le b$), נרצה שיתקיים $a \le \frac{b}{M}$.

נגדיר מלבן מצומצם ע"י

$$S' = \{|x - x_0| \le a'\} \times \{|y - y_0| \le b\} \subseteq D$$
$$a' = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

2. סדרת הפונקציות y_n חסומות במלבן D

נראה שאם $|y_n - y_0| \le b$ וגם $|x_0 - x| \le a'$ אז $|y_{n+1} - y_0| \le b$, באמצעות **אינדוקציה**.

עבור $n = 0$, $y_0(x) = y_0$.

נניח ש-$|y_n - y_0| \le b$ ונראה עבור $n + 1$.

$$|y_{n+1} - y_0| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))|dt \le M(x - x_0) \le M \cdot a' \le b$$

סה"כ, הראנו שy_n נשארות בתוך המלבן, לכן - $f(y_n, t)$ הוא ביטוי מוגדר בתחום הגדרתה של f ונוכל להמשיך בהוכחה.

3. נראה התכנסות של הסדרה: $y_n \to y$

נמצא חסם על $|y_{n+1} - y_n|$

$$|y_{n+1} - y_n| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y_n) - f(t, y_{n-1}) dt| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})| dt$$

נשתמש בליפשיציות של f ונקבל,

$$\int_{x_0}^{x} |f(t, y_n) - f(t, y_{n-1})| dt \leq K \cdot \int_{x_0}^{x} |y_n - y_{n-1}| dt$$

באינדוקציה, נראה $|y_{n+1} - y_n| \leq \frac{M \cdot K^n (x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

$n = 0$:

$$|y_1 - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t)) dt| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0(t))| dt \leq M(x - x_0)$$

נניח עבור n ונראה עבור $n+1$.

הראנו קודם ש-

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| \leq K \cdot \int_{x_0}^{x} |y_{n+1} - y_n| dt$$

מהנחת האינדוקציה נקבל,

$$\leq K \cdot \frac{M \cdot K^n}{(n+1)!} \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n+1} dt = \frac{M K^{n+1} (x - x_0)^{n+2}}{(n+2)!}$$

סיימנו. כעת נראה התכנסות של y_n עם הגדרת הגבול לפי קושי.

יהיו $m, n \in \mathbb{N}$ כך ש-$m < n$:

$$\begin{aligned} |y_n - y_m| &= |(y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + ... + (y_{m+1} - y_m)| \\ &\leq |y_n - y_{n-1}| + ... + |y_{m+1} - y_m| \\ &\leq \sum_{i=m}^{n-1} \frac{M \cdot K^i (x - x_0)^{i+1}}{(i+1)!} < \varepsilon \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שהאיבר האחרון הוא זנב של טור מתכנס - לכן, עבור m גדול מספיק, יהיה קטן מ-ε.

סה"כ - הראנו כי קיים ל-y_n גבול סופי.

4. נראה התכנסות במ"ש ע"י מבחן M של ויירשטראס

תזכורת - מבחן M

אם $f_n(x)$ סדרה של פונקציות בקטע I וקיימת M_n כך ש-$|f_n(x)| \leq M_n$ לכל n.
ובנוסף $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ מתכנס, אזי: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ מתכנס במידה שווה.

נגדיר סדרת פונקציות חדשה:

$$\begin{cases} h_0 = y_0 \\ h_i = y_i - y_{i-1} \quad i \geq 1 \end{cases}$$

נשים לב,

$$|h_i| = |y_i - y_{i-1}| \leq \frac{M \cdot K^{i-1}(x-x_0)^i}{(i)!} \leq \frac{M \cdot K^{i-1}(a')^i}{(i)!}$$

מתקיימים תנאי מבחן M ולכן $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במידה שווה.

ניתן לרשום:

$$y_n = y_0 + (y_1 - y_0) + ... + (y_n - y_{n-1}) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n$$

ולכן: $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ מתכנס במ"ש $\iff$ y_n מתכנס במ"ש

5. נראה שפונקציית הגבול היא פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי

y_n רציפות ו-$y_n \to y$ במ"ש, לכן - ממשפט מאינפי 2, פונקציית הגבול y רציפה.

בנוסף, מרציפות f, $f(t, y_n)$ רציפה ובנוסף מתקיים:

$$|f(t, y_n) - f(t, y)| \leq K \cdot |y_n - y| \leq \varepsilon$$

כלומר, $f(t, y_n)$ מתכנסת במ"ש ל-$f(t, y)$.

ממשפט מאינפי 2, הראנו ש-$y_n \to y$ במ"ש, ולכן:

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

סה"כ, פונקציית הגבול, y היא מהצורה:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

כלומר, y מקיימת את המשוואה האינטגרלית[1] ורציפה, לכן היא מקיימת את המדר: $y' = f(x, y)$ עם תנאי התחלה $y(x_0) = y_0$.

[1] משוואה אינטגרלית - משוואה מהצורה: $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$

7 הרצאה 7

7.1 דוגמא לשימוש במשפט

עבור המד"ר:

$$y' = \frac{y}{y^2 - x}$$

עם תנאי התחלתי, נראה קיום ויחידות פתרון.

נדרוש $y_0^2 \neq x_0$

ניקח מלבן D סביב (x_0, y_0) שלא "נוגע" ב-$y^2 = x$. נרצה להפעיל את המשפט על $f(x,y) = \frac{y}{y^2-x}$, תחום D, והנקודה (x_0, y_0).

נבדוק שמתקיים תנאי ליפשיץ נשים לב שf גזירה.

התנאי הדרוש מתקיים אם $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ חסומה בתחום. (משפט לגרנז').

נגזור,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2 - x - y \cdot 2y}{(y^2 - x)^2} = -\frac{y^2 + x}{(y^2 - x)^2}$$

הנגזרת חסומה כי היא רציפה בתחום סגור (ויירשטראס).

8 הרצאה 8

תחת התנאים של משפט הקיום והיחידות נקבל כמה מסקנות.

8.1 עקרון היחידות

תהי (x_0, y_0) נקודה בפנים של D. נניח ש-y_1, y_2 2 פתרונות למד"ר שנחתכים בתחום. נניח שנחתכים ב-(x_0, y_0).

אזי, הפתרונות חייבים להסכים בכל D. כלומר - לכל x בתחום - $y_1(x) = y_2(x)$

הוכחה נסמן $L = \{t < x_0 \mid \forall x \in (t, x_0] : y_1(x) = y_2(x)\}$

נשים לב ש-L הוא קטע וממשפט קיום ויחידות, L אינו ריק.

לL יש 2 אפשרויות:

1. $L = (\ell, x_0)$
2. $L = [\ell, x_0)$

אבל נשים לב ש-L תמיד באפשרות 2. אם L קטע פתוח אז, y_1 ו-y_2 מסכימים על $t > \ell$, ומרציפות - הן מסכימות גם ב -ℓ, כלומר - בהכרח $L = [\ell, x_0)$.

אם L בשפה של D, סיימנו. אחרת, L בפנים של D. בפרט - ℓ נקודה פנימית ב-D.

ממשפט הקיום והיחידות, קיימת סביבה כלשהי של ℓ כך ש-y_1, y_2 מסכימים בסביבה כלשהי של ℓ - בסתירה להגדרה של L. לכן, בהכרח ℓ בקצה של D (קיום ויחידות ניתן להפעיל רק בפנים של D).

8.1.1 דוגמא - משוואה לוגיסטית

מצאנו את כל הפתרונות ל-$y' = K \cdot y(1 - \frac{y}{2})$ שמקיימים $0 < y < L$.

מצאנו פתרונות סינגולריים:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = L \end{cases}$$

טענה: אם פתרון y חותך את $y = 0$ אז $y \equiv 0$.

הסבר: יהי $T \geq 1$. נראה ש-$y \equiv 0$ עבור $-T \leq t \leq T$.

נגדיר

$$D = \{[-2T, 2T] \times [-M, M]\}$$

נבחר M מספר כך ש-$(x, y(x))$ נמצא בפנים של D.

$$M = \max_{|t| \leq 2T} |y(t)| + 1$$

$y(t)$ ופתרון האפס נחתכים ב-D. בנוסף, תנאי הליפשיציות של f מתקיימים:

$$\frac{\partial(K \cdot y(1-\frac{y}{2})}{\partial y} = y\text{-פונקציה לינארית ב}$$

y חסום $\Leftarrow$ נגזרת חסומה $\Leftarrow$ ליפשיציות

לכן, לפי עיקרון היחידות: $y(x) = 0$ לכל x בתחום.

8.2 עקרון ההמשכה

תחת אותם תנאים של משפט הקיום והיחידות. אם מצאנו פתרון y לבעיית תנאי ההתחלה:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

אז, ניתן להמשיך אותו עד שנתקע בשפה.

הוכחה נגדיר

$$L = \{t < x_0 \mid (t, x_0) \text{ -יש פתרון } y_t \text{ פתרון לבעיית תנאי התחלתי ומוגדר ב}\}$$

נשים לב, L הוא קטע לא ריק.

אם $L = (\ell, x_0)$, אז נוכל להגדיר: $y(\ell) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} y(\ell + \varepsilon)$.

נראה שגבול זה קיים, ע"י קריטריון קושי. לכל $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$:

$$|y(\ell+\varepsilon_1) - y(\ell+\varepsilon_2)| = \left| \int_{\ell+\varepsilon_1}^{\ell+\varepsilon_2} f(t, y(t))dt \right| \leq M|\ell+\varepsilon_2 - \ell - \varepsilon_1| = M|\varepsilon_2 - \varepsilon_1|$$

y רציפה, לכן $y(t) = y_0 + \int_{x_0}^{\ell} f(t, y(t))dt$. כלומר - ניתן להמשיך את y לקטע הסגור $[\ell, x_0)$. אם L קטע סגור, נוכל להשתמש שוב בקיום ויחידות בקצה של L עד שנגיע לשפת D.

8.3 פתרון גלובלי

יהי $\mathbb{R} \times \{|x-a| \leq b\} = D$ מלבן סגור אינסופי. תהא בעיית תנאי התחלתי:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

f ליפשיצית ב-D לפי y. אזי, קיים פתרון יחיד $y(x)$ למד"ר שמוגדר לכל $a-b \leq x \leq a+b$

הוכחה נגדיר

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 \\ y_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt \end{cases}$$

הראנו בהוכחה של קיום ויחידות.

8.4 דוגמאות מתי משפט הקיום והיחידות לא עובד

דוגמה 1: אינסוף פתרונות או העדר פתרון בנקודה סינגולרית

$$y' - \frac{y}{x} = x$$

הפתרון למשוואה ההומוגנית הוא: $y(x) = e^{-\int -\frac{1}{t}dt} = e^{ln(x)+c} = x \cdot c$

לכן הפתרון למשוואה הלא הומוגנית הוא: $y(x) = x \cdot (\int x \cdot \frac{1}{x}dx) = x^2 + C \cdot x$. הפתרון מוגדר ב-$\mathbb{R}$ ופותר את המד"ר בתחום הגדרתו.

נשים לב שעבור $C \in \mathbb{R}$ - הפתרון $y_C = x^2 + C \cdot x$ פותר את בעיית התנאי ההתחלתי:

$$\begin{cases} y' - \frac{y}{x} = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

כלומר, קיימים אינסוף פתרונות לבעיית התנאי ההתחלתי.

דוגמה 2: עקרון ההדבקה ואי-יחידות

$y' = -2\sqrt{y}, \quad y \geq 0$ - זו משוואה ניתנת להפרדה ואוטונומית.

פתרון אחד הוא $y(x) = (c-x)^2$. גם $y = 0$ הוא פתרון. נשים לב שהתנאי למשפט ליפשיץ לא מתקיים ב-$y = 0$ (הנגזרת של $\sqrt{y}$ שואפת לאינסוף), ולכן אין יחידות.

ניתן להגדיר פתרון חדש על ידי הדבקה של שני הפתרונות. נגדיר:

$$y_c(x) = \begin{cases} (c-x)^2 & x \leq c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

פונקציה זו גזירה ומקיימת את המד"ר. מכאן שדרך הנקודה $(0,0)$ עוברים אינסוף פתרונות (עבור כל $c \geq 0$).

מסקנה מדוגמא זו היא:

8.4.1 עקרון ההדבקה

נניח שקיים פתרון סינגולרי: $y(x) = y_0$ בתחום אחד, ופתרון אחד y_2 בתחום השני, ונניח שהתחומים נחתכים בנקודה אחת.
אם הם מסכימים בנקודת החיתוך, ניתן להגדיר פתרון חדש ע"י הדבקת הפתרונות.

דוגמה 3: תחום הגדרה חסום
נתונה המשוואה $y' = -\frac{x}{y}$. זוהי משוואה ניתנת להפרדה:

$$yy' = -x \implies \frac{(y^2)'}{2} = -x \implies \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

לאחר סידור נקבל משוואת מעגל:

$$x^2 + y^2 = 2C$$

לכל $C \geq 0$ נקבל זוג פתרונות $y(x) = \pm\sqrt{2C - x^2}$.

תחום ההגדרה הוא $|x| \leq \sqrt{2C}$. הנגזרת מתפוצצת כאשר $x \to \pm\sqrt{2C}$, ולכן לא ניתן להמשיך את הפתרון מעבר לנקודות אלו.

דוגמה 4: התפוצצות בזמן סופי
נתונה המשוואה $y' = y^2$. פתרונה הוא:

$$y(x) = \frac{1}{C - x}$$

(בנוסף קיים פתרון סינגולרי $y = 0$). הפתרון מוגדר עבור $x < C$ או $x > C$.

דוגמה מספרית: נניח $y(1) = 2$. אז $2 = \frac{1}{C-1} \implies C = 1.5$. הפתרון הוא:

$$y(x) = \frac{1}{1.5 - x}$$

התחום המקסימלי המכיל את $x = 1$ הוא $x < 1.5$. הפתרון שואף לאינסוף ככל שמתקרבים ל-1.5 ("התפוצצות"). זה מראה שמשפט הקיום והיחידות מבטיח קיום **מקומי** בלבד, ולא גלובלי.

9 הרצאה 9

9.1 המשך דוגמאות

9.1.1 אין ליפשיציות, אין יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נשים לב, כי למרות ש-$y^{\frac{1}{3}}$ מוגדרת ב-$x = 0$, היא אינה ליפשיצית שם. (נוכל להראות ע"י נגזרת לא רציפה ב-0 או בעזרת כפל בצמוד).

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} = 1$$

$$\int_0^{y(x)} \frac{dv}{v^{\frac{1}{3}}} \underset{y(t):=v}{=} \int_0^x \frac{y'}{y^{\frac{1}{3}}} dt = \int_0^x dt$$

$$\frac{3}{2}(y(x))^{\frac{2}{3}} = x$$

כלומר, יש 2 פתרונות לבעיית התנאי ההתחלתי: $y(x) = \pm\left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}$

נשים לב שקיים גם הפתרון הטריוויאלי: $y = 0$.

מצד שני, מצאנו 2 פתרונות נחתכים בתוך התחום שלא מכיל את $y = 0$, אז הם יהיו שווים, מעיקרון היחידות.

9.1.2 אין ליפשיציות, כן יש יחידות בסביבה

$$\begin{cases} y' = y^{\frac{1}{3}} + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} = 1$$

זו משוואה ניתנת להפרדה, כאשר $h = x^{\frac{1}{3}} + 1$. נסמן H פונקציה קדומה של $\frac{1}{h}$.

$$\frac{y'}{y^{\frac{1}{3}} + 1} = 1$$

$$H(y(x)) = \int_0^x \frac{1}{h(y(t))} dt = \int_0^x 1 dt = x + c$$

ע"י הפעלת הופכית של H, נקבל: $y(x) = H^{-1}(x + c)$.

מתקיים $y(0)=0$ ולכן:
$$0=y(0)=H^{-1}(c)\Rightarrow c=H(0)$$

נשים לב: $y(x)=H^{-1}(x+H(0))$ פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי בסביבת $x=0$.

9.1.3 דוגמא לשימוש במשפט הפתרון הגלובלי

$$\begin{cases} y'=\tan x\cdot\sin y \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

נראה שיש פתרון יחיד שמוגדר ב-$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

נרצה להפעיל את משפט הפתרון הגלובלי ב"פס": $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\times K$ - אבל אסור. :(

ניקח פס סגור בתוך הפס הפתוח:

$$D=\{x_0+a\le x\le x_0+b\}\times R$$

כאשר a,b נבחרו כך ש-$-\frac{\pi}{2}-x_0<a<0$, $0<b<\frac{\pi}{2}-x_0$

לכן, ממשפט הפתרון הגלובלי - יש פתרון יחיד לבעיית התנאי ההתחלתי.

נוודא ליפשיציות:
$$\frac{\partial(\tan x\cdot\sin y)}{\partial y}=\tan x\cdot\cos y$$

נשים לב, ש-$x=\pm\frac{\pi}{2}$ ולכן $\tan x$ חסום, $\cos y$ חסום גם הוא ולכן - הנגדרת לפי y חסומה ולכן, הפונקצייה ליפשיצית.

נבנה פתרון כללי בפס עצמו, ע"י הדבקה. לכל $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ נרחיב את הפס עד שיכיל את x, ואז נגדיר את $y(x)$ לפי המשפט הקיום הגלובלי.

y מוגדרת היטב שכן אם יש 2 פתרונות שנחתכים בנקודה, אז נפעיל את המשפט על פס סגור שמכיל את נקודת החיתוך.

10 הרצאה 10

תזכורת באמצעות משפט פיקרד לינדלוף, הוכחנו שמתקיימים עיקרון היחידות ועיקרון ההמשכה, בתחום בו: f רציפה וליפשיצית מקומית ב-y.

תזכורת

עקרון ההמשכה: בהינתן $y' = f(x,y)$ ו-D כמו בקיום ויחידות.
בנוסף, תהא קבוצה קומפקטית $K \subseteq D$, כך ש-$(x_0, y_0) \in K$.
אזי, יש פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי הנתונה שיוצא מ-K (יוצא גם משמאל ל-x_0 וגם ומימן ל-x_0).

10.1 חקירה איכותית של מד"ר

היום, נדבר על $y' = f(y)$ במקרה בו f ליפשיצית מקומית.

תזכורת אם α מספר כך ש-$f(\alpha) = 0$ אז $y = \alpha$ פתרון ל-$y' = f(y)$. נקרא לו סינגולרי.

10.1.1 משפט

יהיו $\alpha < \beta$ שני פתרונות סינגולריים עוקבים, המקיימים:

$$f(\alpha) = f(\beta) = 0 \quad \text{וכן} \quad \forall \gamma \in (\alpha, \beta) : f(\gamma) \neq 0$$

יהי $y(x)$ הפתרון לבעיית ההתחלה:

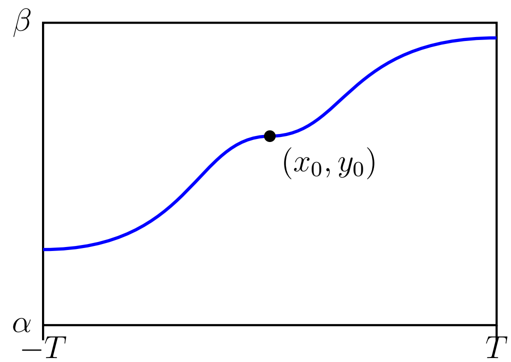
$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

כאשר $y_0 \in (\alpha, \beta)$. אזי מתקיים:

1. הפתרון $y(x)$ **מוגדר** לכל $x \in \mathbb{R}$.
2. הפונקציה $y(x)$ **מונוטונית ממש** (עולה או יורדת בהתאם לסימן של f בתחום).
3. y **מקבל כל ערך** בין α ל-β.
   - אם y עולה (כאשר $f(y) > 0$ בתחום):
   $$\lim_{x \to \infty} y(x) = \beta, \quad \lim_{x \to -\infty} y(x) = \alpha$$
   - אם y יורדת (כאשר $f(y) < 0$ בתחום):
   $$\lim_{x \to \infty} y(x) = \alpha, \quad \lim_{x \to -\infty} y(x) = \beta$$

הוכחה נבחין שקיים y פתרון לבעיית תנאי ההתחלתי. הפתרון לא חותך את $y=\alpha, y=\beta$ לכן $\alpha<y(x)<\beta$ עבור x בתחום ההגדרה.

למה מוגדר ב-$\mathbb{R}$? כדי להראות שמוגדר עבור $|x|\le T$ לכל T, נשתמש בעיקרון ההמשכה:



נקח מלבן $K=[-T,T]\times[\alpha,\beta]$. הפיתרון יוצא מהמלבן הקומפקטי - אבל לא מהצלע העליונה או מהצלע התחתונה - לכן יוצא מהצדדים ומוגדר בפרט ל-$|x|\le T$.

למה y מונוטונית? כי $y'=f(y)$, y בין α ל-β, f מקבלת סימן קבוע בקטע, לכן אם f מקבלת סימן חיובי אז y עולה ממש. בהתאם גם עבור סימן שלילי.

נותר חלק 3:

לשם הפשטות, נניח y עולה ממש. לכן הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$ קיים וסופי. נסמן אותו ב-L.

נניח בשלילה: $L<\beta$. בפרט - $y'=f(y)\to f(L)>0$. זה גורר y לא חסומה ולכן סתירה. לכן $L=\beta$.

למה y לא חסומה?

$$\begin{aligned} y(x)-y(x_1) &= \int_{x_1}^{x} y'(t)dt \\ &\ge \int_{x_1}^{x} \frac{f(L)}{2}dt \underset{x\to\infty}{\to} \infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שאם $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=f(L)>0$ אז יש x_1 כך ש-$y'(x)=\frac{f(L)}{2}$ לכל $x\ge x_1$.

בדומה, $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=\alpha$ למה? אחרת נקרא לגבול L_2. $\alpha<L_2$ נמשיך כמו קודם ונסיים.

10.2 משפט משלים

שוב, f ליפשיצית מקומית. נניח $y=\alpha$ פיתרון סינגולרי מקסימלי.
לבעיית התנאי ההתחלתי יש פתרון עם התכונות הבאות:

1. מונוטוני ממש
2. מקבל את כל הערכים -(α,∞)
3. אם y עולה אז תחום ההגדרה הוא $(-\infty,x_+)$ עבור $x_+=x_0+\int_{y_0}^{\infty}\frac{1}{f(t)}dt$ או $x_+=\infty$ אם האינטגרל מתבדר.

הוכחה קיימים 2 מקרים:

1. $f(x) > 0$ ולכן $x > \alpha$
2. $f(x) < 0$ ולכן $x > \alpha$

נוכיח תחת מקרה 1.

למה מונוטוני ממש? כי $y' = f(y)$ (לפי עיקרון היחידות, y לא חותך את $y = \alpha$), לכן y נשאר מעל α לאורך תחום ההגדרה.

למה y מקבל את כל הערכים - (α, ∞)? נסתכל על הגבול $\lim_{x\to-\infty} y(x) = L$. אם $L = \alpha$ סיימנו. אחרת, נניח בשלילה כי $L > \alpha$ אז y מתנהגת כמו פונקציה לינארית ב-$-\infty$.

$$f(y(x)) \to f(L) > 0$$

מכאן:

$$\begin{aligned} y(x) - y(x_1) &= \int_{x_1}^{x} f(t)dt \\ &\leq \int_{x_1}^{x} \frac{f(L)}{2} dt \underset{x\to-\infty}{\to} -\infty \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בכך שקיים x_1 כך ש-$f(x) \geq \frac{f(L)}{2}$ לכל $x \leq x_1$.

תחום הגדרה: למה הפתרון ניתן להמשכה עד $-\infty$? כי נוכל להפעיל עיקרון ההמשכה על $K = [-T, x_0] \times [\alpha, y_y]$ לכל $T > \infty$.

נוכיח את 3: בשביל x_+ נפריד משתנים:

$$\begin{gathered} y' = f(y) \\ \frac{y'}{f(y)} = 1 \\ \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} \underset{V=y(t)}{=} \int_{x_0}^{x} \frac{y'}{f(y)} dt = \int_{x_0}^{x} dt = x - x_0 \end{gathered}$$

כאשר $x \to x_+$ משמאל, אז $y(x)$ שואף לאינסוף. נשאיף את x ל-x_+ משמאל במשוואה שקיבלנו:

$$x_0 + \int_{y_0}^{y(x)} \frac{dV}{f(V)} = x$$

$$x_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{dV}{f(V)} = x_+$$

10.3 גדרות

נסתכל על $y' = f(x,y)$ כאשר f רציפה בתחום D וליפשיציית מקומית.

גדר תחתית

פונקציה $\alpha : I \to \mathbb{R}$ גזירה נראית **גדר תחתית** של המד"ר אם:

$\alpha'(x) < f(x,\alpha(x))$ לכל $x \in I-$ קטע פתוח.

גדר עילית

פונקציה $\alpha : I \to \mathbb{R}$ גזירה נראית **גדר עילית** של המד"ר אם:

$\alpha'(x) > f(x,\alpha(x))$ לכל $x \in I-$ קטע פתוח.

10.3.1 משפט הגדר

תהא בעיית תנאי התחלה:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ותהא $\alpha(x)$ גדר תחתית למד"ר. נניח כי $f(x,y)$ רציפה וליפשיצית מקומית ביחס ל-y בתחום:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y > \alpha(x)\}$$

אם מתקיים $y_0 > \alpha(x_0)$, אזי לכל $x \in I \cap [x_0,\infty)$ שבו הפתרון $y(x)$ קיים, מתקיים:

$$y(x) > \alpha(x)$$

הוכחה נסתכל על $g(x) = y(x) - \alpha(x)$. נניח בשלילה שהמשפט לא נכון.
$g(x_0) > 0$ אבל יש $x_0 < x$ כך ש-$g(x) \leq 0$. ניקח x מינימלי שמקיים $g(x) \leq 0$.
נסתכל על שיפוע g בנקודה x.

$$g'(x) = y'(x) - \alpha'(x) > f(x,y(x)) - f(x,\alpha(x)) = 0$$

כאשר $y(x) = \alpha(x)$ בנקודה x כי היא מינימלית.

מצד שני, $g'(x) = \lim\limits_{h\to 0^-} = \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \leq 0$ מכיוון ש-$h < 0$.

סה"כ הגענו ל-$0 < g(x) \leq 0$ - סתירה! לכן המשפט נכון.

הערה אפשר למצוא גדרות ע"י איזוקלינות.

איזוקלינות

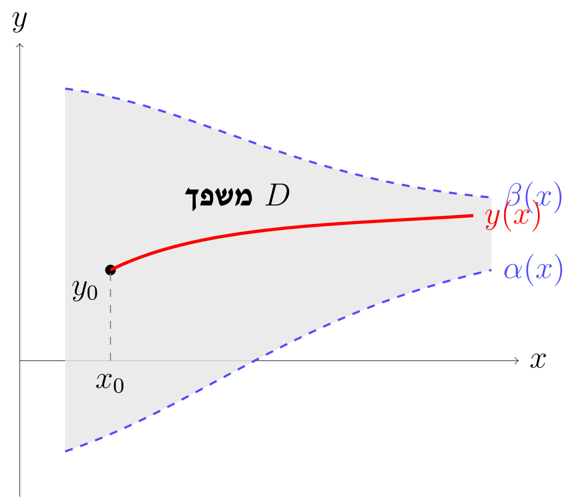
בהנתן מד"ר $y' = f(x,y)$, זה אוסף הנקודות המקיים $f(x,y) = k$

10.3.2 מסקנה - משפט המשפך

נניח $y' = f(x,y)$ מד"ר עם α גדר תחתית ו-β גדר עילית.
אם f ליפשיצית מקומית ב-y בתחום

$$D = \{(x,y) \mid x \in I,\, \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אז, הפתרון y לבעיית התנאי ההתחלתי מקיים: $\alpha(x) < y(x) < \beta(x)$ עבור $x \geq x_0$ בתחום ההגדרה.



10.4 דוגמאות

דוגמא 1

$$y' = x^4 - y^4 = f(x,y)$$

נשים לב ש-f רציפה וליפשיצית.

דוגמא לגדר עילית: $\beta(x) = x$. נראה שזו אכן גדר עילית:

$$x^4 - (\beta(x))^4 = x^4 - x^4 = 0 < 1 = \beta'(x)$$

דוגמא לגדר תחתית: $\alpha(x) = 0$. נראה שזו גדר תחתית:

$$x^4 - (\alpha(x))^4 = x^4 > 0 = \alpha'(x)$$

דוגמא 2

$$y' = y^2 - x = f(x,y)$$

דוגמא לגדר עילית: $\beta(x) = -\sqrt{x-1}$.

דוגמא לגדר תחתית: $\alpha(x) = -\sqrt{x+1}$.

11 הרצאה 11

11.1 כמה השלמות על משוואות אוטונומיות

11.1.1 טענה

יהא y פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי :

$$\begin{cases} f' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ועבור α, β פתרונות סינגולריים עוקבים המקיימים: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ מתקיים:

$$y_0 \in (\alpha, \beta)$$

אזי, קיימת נקודה x_1 כך ש-$y''(x_1) = 0$

הערה: לפעמים x_1 תהיה נקודת פיתול.

הוכחה y מקיים $y' = f(y)$. נגזור את 2 האגפים:

$$y'' = y' \cdot f'(y)$$

נרצה להראות שקיים x_1 כך ש-$f''(x_1) = 0$. אכן, לפי משפט רול - $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ ולכן קיים $\gamma \in (\alpha, \beta)$ כך ש- $f'(\gamma) = 0$.

נרצה: $y(x_1) = \gamma$. נשים לב שהוכחנו ש-y מקבל את כל הערכים בין α ל-β לכן בהכרח קיים x_1 כזה. $\square$

ראינו בתחילת הסמסטר: אם y פתרון למשוואה אוטונומית $y' = f(y)$, אז גם $y(x+c)$ פתרון לכל $c \in \mathbb{R}$.

11.1.2 טענה

תהי $y' = f(y)$ משוואה אוטונומית, f ליפשיצית מקומית ב-$\mathbb{R}$.
נניח שקיימים 2 פתרונות: y_1, y_2 ו-x_1, x_2 כך ש-$y_1(x_1) = y_2(x_2)$. אזי:

$$y_1(x + x_1 - x_2) = y_2(x), \quad \text{לכל } x$$

הוכחה נסמן $\tilde{y} = y_1(x + x_1 - x_2)$. $\tilde{y}$ פתרון למד"ר. (משפט שראינו: $c := x_1 - x_2$).

נשים לב ש-$\tilde{y}$ ו-y_2 נחתכים ב-x_2:

$$\tilde{y}(x_2) = y_1(x_2 + x_1 - x_2) = y_1(x_1) \underset{\text{הגדרה}}{=} y_2(x_2)$$

לכן, מעיקרון היחידות - $\tilde{y} = y_2$ לכל x. $\square$

11.1.3 שכלול למשפט הגדר

יהא y פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי :

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

תהא α כמו במשפט הגדר. נניח שמתקיים:

$$\alpha(x_0) \geq y(x_0)$$

אם מתקיימים תנאי משפט הקיום והיחידות ב - $D = \{(x,y) \mid x \in I, y(x) \leq \alpha(x)\}$
אזי, לכל $x \in I$ עבורו הפתרונות מוגדרים:

$$\forall x > x_0, \quad y(x) < \alpha(x)$$

הוכחה אם $\alpha(x_0) > y(x_0)$ - סיימנו (משפט הגדר). אחרת, נניח $\alpha(x_0) = y(x_0)$.
נגדיר: $g(x) = \alpha(x) - y(x)$. g מקיימת:

$$g'(x_0) = \alpha'(x_0) - y'(x_0) \underset{\text{גדר עילית}}{>} f(x_0, \alpha(x_0)) - f(x_0, y(x_0)) \underset{y(x_0)=\alpha(x_0)}{=} 0$$
$$g(x_0) = \alpha(x_0) - y(x_0) = 0$$

מסקנה: יש סביבה $(x_0, x_0+\varepsilon)$ בה g חיובית, כלומר $y(x) < \alpha(x)$ לכל $x \in (x_0, x_0+\varepsilon)$

נפעיל את משפט הגדר על הסדרה:

$$\boxed{x_n = x_0 + \frac{\varepsilon}{n}}$$

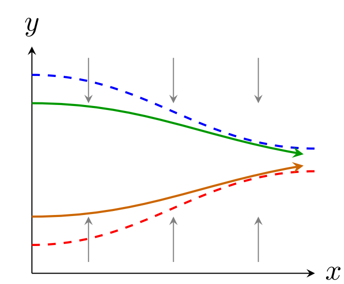
מתקיים $x_n \in (x_0, x_0+\varepsilon)$ ולכן $y(x_n) < \alpha(x_n)$.

נובע: $y(x) < \alpha(x)$ עבור $x \geq x_n$. אם נשאיף את n ל-∞ נקבל: $y(x) < \alpha(x)$, לכל $x > x_0$ $\square$

11.2 אינטואיציה למשפך ומשפך הפוך

משפך (Funnel)

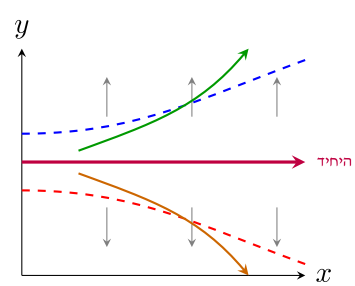
מנקז פנימה - יציבות



כל הפתרונות שמתחילים בתחום (או נכנסים אליו) נלכדים בו, והמרחק ביניהם מצטמצם לאפס.

משפך הפוך (Anti-Funnel)

מפזר החוצה - אי יציבות



הפתרונות "בורחים" מהתחום ככל ש-x גדל. רק פתרון אחד ייחודי נשאר כלוא בין הגדרות לאורך זמן.

11.3 משפט המשפך ההפוך

(הגדר התחתית מעל הגדר העילית)

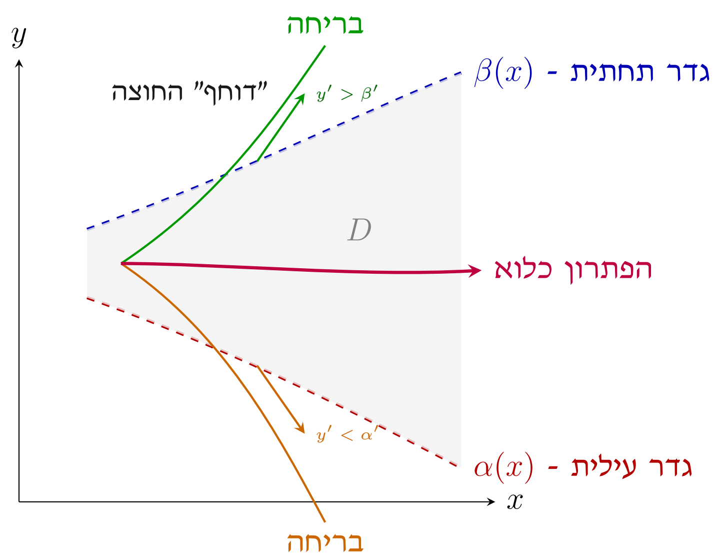
אם $y' = f(x, y)$ מד"ר, β גדר תחתית, α גדר עילית. מתקיים: $\beta > \alpha$.
נגדיר משפך הפוך:

$$D := \{(x, y) \mid x \in I, \quad \alpha(x) < y(x) < \beta(x)\}$$

אם מתקיים קיום ויחידות ב-D, אז:

1. יש פתרון למד"ר שנמצא בתוך D - $(x, y(x)) \in D$ לכל $x \in I$.
2. נניח $I = [a, \infty)$. אז $\beta - \alpha \underset{x\to\infty}{\to} 0$, ואם $\frac{\partial f}{\partial y} \geq 0$ ב-D אז הפתרון בסעיף 1 הוא יחיד.

מסקנה: רוב הפתרונות מתפזרים, אך קיים פתרון יחיד שנשאר בתוך התחום.



דוגמא $y' = y^2 - x = f(x, y)$. ניקח $\alpha(x) = \sqrt{x-1},\ \beta(x) = \sqrt{x+1}$.

$$\begin{cases} f(x, \alpha(x)) = -1 \\ f(x, \beta(x)) = 1 \end{cases}$$

נבדוק מתי α גדר עילית:

$$\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\alpha' > f(x, \alpha) = 1 \iff x > 1$$

נבדוק מתי β גדר תחתית:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\alpha' < f(x, \alpha) = -1 \iff x > -\frac{3}{4}$$

לפי המשפט, עבור $x > 1 + \varepsilon$, יש פתרון יחיד בתוך המשפך ההפוך. נסמן את הפתרון הזה בתור y_ε. מיחידות, אם $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, y_{ε_2} מצומצם ל-$x \geq \varepsilon_1$ נותן עוד פתרון שכלוא במשפך ההפוך. y_{ε_1},y_{ε_2} שונים בתחום ההגדרה המשותף. באופן זה, ניתן לבנות את $y(x)$ בתוך המשפך ההפוך שמוגדר לכל $x > 1$.

הוכחה נתחיל בסעיף 2:

נניח בשלילה שיש זוג פתרונות y_1, y_2 שמוגדרת לכל $x \geq a$, פותרים את המד"ר ונשארים בתוך D - המשפך ההפוך.

נגדיר את פונקציית ההפרש: $g = y_1 - y_2$. נשים לב שמתקיים:

$$0 \underset{x\to\infty}{\leftarrow} \alpha - \beta < y_1 - y_2 < \beta - \alpha \underset{x\to\infty}{\rightarrow} 0$$

לכן לפי סנדוויץ', $g \underset{x\to\infty}{\rightarrow} 0$. נגזור את g:

$$g' = f(x, y_1) - f(x, y_2)$$

מעקרון היחידות: y_1, y_2 לא נחתכים, לכן g בעלת סימן קבוע. בה"כ: $g > 0$ לכל $x \geq a$. כלומר-

$$g' = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial}{\partial y} f(x,t)dt \geq 0$$

מסקנה: g עולה ממש ויש לה גבול, לכן מתכנסת לסופרימום שלה - $\sup y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$ בסתירה להנחה שלנו.

$\square$

כעת נוכיח את סעיף 1, עבור שתי נקודות $s_2 < s$:

נגדיר פתרון $y_{s,\beta}$ המקיים: $y_{s,\beta}(s) = \beta(s)$. פתרון זה נמצא בתוך המשפך כאשר $x \in [a, s]$. למה? כי β גדר תחתית ו-α עילית.

נגדיר פתרון $y_{s,\alpha} = \alpha(s)$. פתרון זה נמצא ב-D עבור $x \in [a, s]$.

שני הפתרונות אף פעם לא נחתכים עבור $s \geq \alpha$. אם הם נחתכים - אז מעקרון היחידות, הם שווים. בסתירה לכך שלכל פתרון יש נקודת חיתדו שונה עם הגדרות.

מעקרון אי החיתוך, אם $s_2 < s$ אז $[y_{s_2,\alpha}(a), y_{s_2,\beta}(a)] \subseteq [y_{s,\alpha}(a), y_{s,\beta}(a)]$.

לפי משפט קנטור על חיתוך קטעים סגורים המוכלים אחד בשני, יש לפחות נקודה אחת בחיתוך:

$$A \in \bigcap_{s \geq a} [y_{s,\alpha}(a), y_{s,\beta}(a)]$$

נסתכל על פתרון למד"ר $y' = f(x,y)$ המקיים $y(a) = A$. פתרון זה נשאר בתוך D. למה? מעקרון אי-החיתוך:

$$y_{s,\alpha}(x) < y(x) < y_{s,\beta}(a) \quad x \geq a$$

בפרט, למה לא נחתכים עם השפה של D? כי אם s נקודה בה y נחתך עם $y = \alpha(x)$ פעם ראשונה, אז y נחתך עם $y_{s,\alpha}$ בסתירה ליחידות.

12 הרצאה 12

הערה: הוא העלה קבצים למודל, הם חלק מהחומר. (דוגמא לשימוש בעקרון ההמשכה)

12.1 משוואה לינארית מסדר n

הגדרה

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y(x) = b(x)$$

נניח: כל ה-a_i-ים וכל ה-b-ים רציפים בקטע I.

12.1.1 משפט קיום ויחידות גלובלי למשוואה לינארית מסדר n

נניח: כל ה-a_i-ים וכל ה-b-ים רציפים בקטע I.

אזי: יש פיתרון אחד ויחיד למד"ר המקיים את תנאי ההתחלה: $\begin{cases} y(x_0) = \alpha_0 \\ y'(x_0) = \alpha_1 \\ \dots \end{cases}$

למה צריך n תנאים? נסתכל על המקרה הכי פשוט, בו כל ה-a_i-ים וכל ה-b הם אפס:

$$\boxed{y^{(n)} = 0, \quad \text{עבור } x \in I}$$

ע"י המשפט היסודי של החדוו"א: זה שקול לכך ש-y פולינום ממעלה $n-1$ לכל היותר. נשיב לב, שמרחב הפתרונות הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ממימד n. ($\{1, x^2, ..., x^n\}$)

לפי משפט טיילור: אם y פולינום ממעלה $n-1 \geq$,

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i + R_n(x)$$

בעצם, $R_n(x)$ זהותית אפס: $R_n(x) = \frac{y^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$, $c \in (x_0, x)$ כי $y \equiv 0$. קיבלנו שיוויון:

$$\boxed{y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{y^{(i)}}{i!}(x-x_0)^i}$$

(המקדמים $y^i(x_0)$ קובעים את y).

12.1.2 מסקנה ממשפט קיום ויחידות

נגדיר קבוצה:

$$V = \{y : I \to \mathbb{R} \mid y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y(x) = 0\}$$

זה אוסף הפתרונות למד"ר לינארי הומוגני.

1. V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$
2. V ממימד n מעל $\mathbb{R}$
3. בסיס ל-V נתון ע"י n הפתרונות עם תנאי התחלה הבאים: $y_i^j(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

הוכחה

1. V מ"ו:
$0 \in v$ כי 0 הוא הפתרון הטריוויאלי.
$y_1, y_2 \in V$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ אז $c_1 y_1 + c_2 y_2 \in V$ אלגברה א....

2. נבנה איזומורפיזם בין V ל-$\mathbb{R}^n$:

$$\phi(y) = \begin{pmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \\ \cdots \\ y^{(n)}(x_0) \end{pmatrix}$$

ϕ לינארית כי נגזרת לינארית. למה היא חח"ע? נראה שהגרעין טריוויאלי:

$$\phi(y) = \vec{0} \iff y = \begin{cases} y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 0 \\ \cdots \\ y^{(n)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

לפי משפט הקיום ויחידות (12.1.1), יש בדיוק y אחת כזו - נסמנה y_1. מצד שני, $y = 0$ בוודאי מקיימת את המד"ר עם תנאי ההתחלה. לכן $y_1 = 0$. כלומר קיים בגרעין רק פתרון טריוויאלי.
בנוסף, ϕ על: לפי משפט הקיום והיחידות מהיום, בהינתן $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ יש פתרון $y \in V$ המקיים $y^{(i)}(x_0) = \alpha_i$. לכן $\phi(y) = \vec{v}$.

3. בגלל ש-ϕ איזומורפיזם, אם $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ בסיס ל-$\mathbb{R}^n$, אז $y_1, ..., y_n$ המקיימים $\phi(y_i) = \vec{v}_i$ הם בסיס ל-V. בפרט, ניתן לקחת $\vec{v}_i = e_i$.

השבוע ושבוע הבא: רק הומוגניות. נחקור את השאלה הבאה: בהינתן פתרונות $y_1, ..., y_n$ למד"ר $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y(x) = 0$, האם הם בלתי תלויים ליניארית?

נחדד: פונקציות $y_1, ..., y_n$ נקראות בלתי תלויות לינארית אם לכל $(c_1, ..., c_n) \neq 0$ מתקיים $\sum c_i y_i \neq 0$

הערה: אם y פתר את המד"ר, אז הוא גזיר ברציפות n פעמים. הסבר: אם y מקיימת מד"ר אז $y^{(n)}$ חייב להיות מוגדר. $y^{(n)} = -\sum\limits_{i \neq n} y^{(i)} a_{n-i}$.

נציג את מושג ה-wronskian.

Wronskian

בהניתן n פונקציות גזירות $n-1$ פעמים, נסמן $y_1,...,y_n$ המוגדרות על I.
ורונסקיאן זו פונקציה שמוגדרת גם היא על I:

$$W(y_1,\dots,y_n)(x)=\left|\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}\right|$$

12.1.3 טענה - ורונסקיאן מתאפס עבור פונקציות ת"ל

אם $y_1,\cdots,y_n$ פונקציות תלויות לינארית, אז $W(y_1,...,y_n)\equiv 0$

הוכחה אם $y_1,\cdots,y_n$ ת"ל אז נביע את אחת מהם ע"י צ"ל של הנותרים: $y_j=\sum\limits_{i\neq j}y_ic_i$
נגזור:

$$(y_j)^{(k)}=\sum_{i\neq j}(y_i)^{(k)}c_i$$

נקבל:

$$\begin{pmatrix} y_j \\ y_j' \\ y_j'' \\ \vdots \\ y_j^{(n-1)} \end{pmatrix}=\sum_{i\neq j}c_i\begin{pmatrix} y_i \\ y_i' \\ y_i'' \\ \vdots \\ y_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

כלומר - יש צ"ל לא טריוויאלי של העמודות $\Leftarrow$ דטרמיננטה מתאפסת. כלומר - הורונסקיאן מתאפס.

12.1.4 משפט - פתרונות בת"ל לא מאפסות ורונסקיאן

יהיו $y_1,...,y_n$ פתרונות למד"ר הלינארי הומוגני: $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny(x)=0$, עבור $x\in I$.
נניח, ש-$y_1,...,y_n$ בת"ל.
אזי, $W(y_1,...,y_n)\neq 0$ לכל $x\in I$.

הוכחה נניח שהורונסקיאן מתאפס ונראה ש-y_i ת"ל.
אם $W(y_1,...,y_n)=0$, אז יש תלות לינארית בין העמודות כש-$x=x_0$: יש קבועים $c_1,...,c_n$ לא כולם אפס, כך שאם נגדיר $\tilde{y}=\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i)^{(k)}c_i$. אז, $\tilde{y}^{(i)}(x_0)=0$. מצד שני, יודעים שפתרון האפס מקיימת את השיווינות האלו. מקיום ויחידות בנקודה $x=x_0$, $\tilde{y}$ חייב להיות פתרון האפס.
מסקנה: $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i)^{(k)}c_i=0$, כלומר - $(y_i)_{i=1}^{n}$ ת"ל. $\square$

13 הרצאה 13

13.1 מסקנה - ורונסקיאן מתאפס אז ורונסקיאן שווה זהותית ל-0

אם $y_1, ..., y_n$ פתרונות למד"ר לינארי הומוגני מסדר n,
אם $W(y_1, ..., y_n)$ מתאפס עבור x_0 כלשהו, אז $W(y_1, ..., y_n) \equiv 0$.

שימוש במסקנה המקרה הכי "משעמם":

$$n = 1, \quad y' + py = 0$$

נזכיר, כל פתרון נראה כך: $y_C(x) = C \cdot e^{-\int_a^x p(t)dt}$.
המסקנה אומרת: אם y_C מתאפס בנקודה, אז $y_C \equiv 0$, מכיוון ש- $W(y_C) = y_C$.

13.2 דוגמאות, תרגילים ומשפטים

13.2.1 מציאת פתרונות בת"ל - $y'' + y = 0$

כלומר - $n = 2, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad b = 0$.
דוגמאות לפתרונות: $\sin(x), \cos(x)$. נראה שאלו בת"ל - נחשב את הורונסקיאן:

$$W(\sin x, \cos x) = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

כלומר, שונה מאפס בכל נקודה. (מספיק לבדוק עבור נקודה ספציפית). לכן, $\cos x, \sin x$ בת"ל ולכן מהווים בסיס למרחב הפתרונות (שמימדו 2). כלומר, כל פתרון הוא מהצורה: $a \cos x + b \sin x$.

הערה: אם f פתרון ל-$y'' + y = 0$, אז גם $f(x + c)$ לכל בחירה של c.

13.2.2 פתרונות מתאפסים בנקודה, תלויים לינארית - $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

הראו שאם y_1, y_2 זוג פתרונות שמתאפסים ב-x_0, אז הם תלויים לינארית.

הוכחה:

$$W(y_1, y_2)(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = 0$$

לכן, הפתרונות תלויים לינארית.

$\square$

13.2.3 אם פתרון מתאפס בשני נקודות, פתרון בת"ל אחר מתאפס בינהן - $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

נתונים 2 פתרונות בת"ל: y_1, y_2. הוכיחו: אם $y_1(a)=y_1(b)=0$, אז קיים $c\in[a,b]$ כך ש-$y_2(c)=0$.

הוכחה: נניח בשלילה שלא קיים c כזה. בפרט, y_2 לא מתאפס ב-$[a,b]$.
נבנה בניית עזר:

$$h(x)=\frac{y_1(x)}{y_2(x)}$$

ממשפט רול, קיימת $c\in[a,b]$ כך ש-$h'(c)=0$. כלומר:

$$\frac{y_1'y_2-y_1y_2'}{y_2^2}=\frac{W(y_2,y_1)}{y_2^2}=\frac{-W(y_1,y_2)}{y_2^2}$$

מכיוון ש-$W(y_1,y_2)=0$ נקבל y_1,y_2 תלויים לינארית. סתירה! לכן קיים $c\in[a,b]$ כנדרש. $\square$

13.2.4 פתרון למד"ר לינארי הומוגני מסדר n מתאפס אינסוף פעמים, שווה זהותית ל-0

אם y פיתרון למד"ר לינארי הומוגני מסדר n בקטע סגור I. אז אם ל-y יש אינסוף אפסים בקטע I, אז $y=0$.

פתרון: נבנה סדרת אפסים של y - $x_1,x_2,x_3...,$. נבנה אותה בצורה מונוטונית (ניקח אפס בקטע I, יש ∞ אפסים או מימינו או משמאלו).

לסדרה x_i יש גבול L. הגבול L סופי כי (x_i) חסומה בקטע I. בנוסף, L שייך לקטע I כי הקטע סגור.

מרציפות נקבל:

$$y(L)=y(\lim x_n)=\lim y(x_n)=\lim 0=0$$

כלומר - L הוא בעצמו אפס של y.

ממשפט רול, בין כל זוג x_i-ים יש אפס של y'. כלומר $y'\left(x_i^{(1)}\right)=0$. נסתכל על הסדרה $x_i^{(1)}$.
נשים לב, $x_i^{(1)}$ גם מונוטונית. מסנדוויץ': $x_i^{(1)}\to L$, ומרציפות y':

$$y'(L)=\lim y'(x_i^{(1)})=0$$

נבנה באותו אופן $x_i^{(2)}$ בין כל $x_i^{(1)}, x_{i+1}^{(1)}$ כך ש-$y''(x_i^{(2)}=0$.

ניתן להמשיך n פעמים (כל עוד $y^{(i)}$ גזירה ברציפות). מצד שני, פתרון האפס גם מקיים זאת. מיחידות: $y=0$.

$\square$

הערה השתמשנו בטענה "לסדרה X_n חסומה יש תת סדרה מתכנסת".

14 הרצאה 14 - 15/12

תזכורת ראינו את הטענות: 13.2.2 ואת 13.2.3. משתי טענות אלו ניתן להסיק את המשפט:

14.1 משפט ההפרדה של שטרום

יהיו y_1, y_2 פתרונות בת"ל למדר: $y'' + py' + qy = 0$.
יהיו a, b זוג אפסים עוקבים של y_1.

$$y_1(a) = y_1(b) = 0, \quad \forall c \in (a,b) \to y_1(c) \neq 0$$

אזי, ל-y_2 יש אפס **יחיד** בין a ל-b ו-$y_2(a) \neq 0$, $y_2(b) \neq 0$.

הוכחה נשים לב ש-y_1, y_2 לא חולקים אפסים (לפי 13.2.2 - אם הם חולקים אפס הם תלויים לינארית).

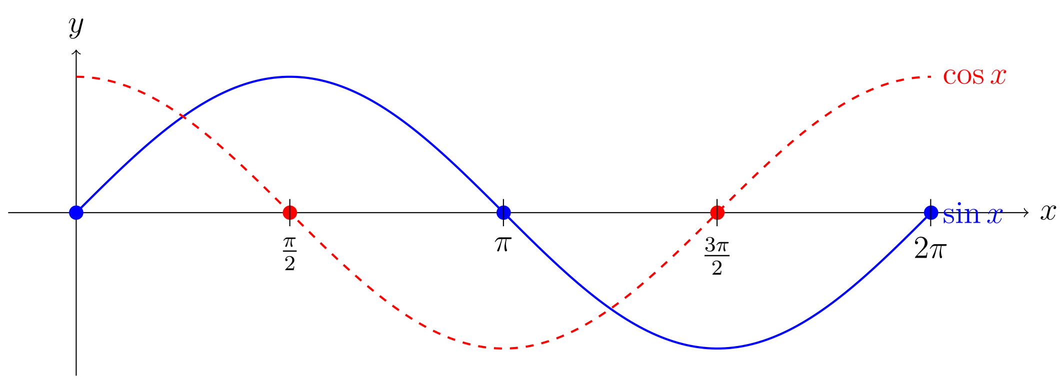
מטענה 13.2.3 - קיים אפס של y_2 בקטע <u>הסגור</u>, ומההבחנה הקודמת - קיים אפס של y_2 בקטע <u>הפתוח</u> (a,b).

נראה שזה האפס היחיד בקטע:

נניח בשלילה $y_2(c) = y_2(d) = 0 \quad a < c < d < b$. אז באותו אופן, קיים אפס ל-y_1 בקטע הפתוח (c,d).
סתירה להנחה ש-a, b זוג אפסים עוקבים של y_1.

$\square$

דוגמא $y'' + y = 0$. נסתכל על הפתרונות $\{\cos x, \sin x\}$. בין כל זוג אפסים של $\sin$ יש אפס של $\cos$.



תרגיל

נתונות $y_1,...,y_n$ פונקציות בת"ל, גזירות ברציפות n פעמים.
מצאו מד"ר לינארי הומוגני מסדר n, כך ש-$y_1,...,y_n$ פתרונות שלו.

פתרון:

נסתכל על $W(y,y_1,...,y_n)$:

$$W(y,y_1,...,y_n)=\left|\begin{pmatrix} y(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}\right|$$

נשים לב, $W(y,y_1,...,y_n)$ מתאפס אם y שווה לאחת הפונקציות הנתונות (יהיו 2 עמודות שוות).
<u>הבחנה</u>: $W(y,y_1,...,y_n)=0$ הוא מד"ר לינארי הומוגני מסדר n.
הסבר:

$$W(y,y_1,...,y_n)=y^{(n)}\cdot(-1)^{n-1}\cdot\left|\begin{pmatrix} y(x) & y_1(x) & \cdots & y_n(x) \\ y'(x) & y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n-1)}(x) & y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}\right|+y^{(n-1)}\cdot(\text{מקדם})+...$$

הערה: המקדם של $y^{(n)}$ אינו 1. המשפטים שהוכחנו על ורונסקיאן נכונים כשמקדם 1 - משוואה מנורמלת.

14.2 נוסחת אבל

תהי מד"ר ליניארית הומוגנית מנורמלת:

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+...+p_n(x)y=0$$

כאשר המקדמים p_i רציפים בקטע I. יהיו $y_1,\ldots,y_n$ פתרונות של המשוואה.
אזי, הוורונסקיאן $W_1(x)=W(y_1,...,y_n)$ מקיים:

$$W_1'(x)+p_1(x)W_1(x)=0$$

ולכן:

$$W_1(x)=W_1(x_0)\cdot e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(t)\,dt}$$

הוכחה נתחיל ב-$n=2$:

$$W(x)=\left|\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\right|=y_1y_2'-y_2y_1'$$

נגזור:

$$\cancel{y_1'y_2'}+y_1y_2''-\cancel{y_2'y_1'}-y_2y_1''=y_1y_2''-y_2y_1''=y_1\underbrace{(-p_1y_2'-p_2y_2)}_{y_2''}-y_2\underbrace{(-p_1y_1'-p_2y_1)}_{y_1''}=p_1(y_1'y_2-y_1y_2')$$

כעת, המקרה הכללי: ננסח את הטענה הבאה:

תהי $A=(a_{ij}(x))$ מטריצה $n\times n$ של פונקציות גזירות.
נסמן A_k - המטריצה המתקבלת מלגזור את השורה ה-k של A.
אזי:
$$|A|'=|A_1|+...+|A_n|$$

נשתמש בטענה ונקבל:
$$W_1'=\left|\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1^{(n)}(x) & y_2^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x)\end{pmatrix}\right|$$

בסימוני הטענה: $|A_1|=...=|A_{n-1}|=0$. (אחרת נקבל 2 שורות זהות והורונסקיאן יתאפס).

כדי לפשט את הדטרמיננטה הנותרת, נשתמש בכך ש-$y^{(n)}=-p_1y^{(n-1)}-...-p_ny$ ונקבל:
$$W_1'=\left|\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -p_1y_1^{(n-1)}-... & \cdots & -p_1y_n^{(n-1)}-...\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -p_1y_1^{(n-1)} & \cdots & -p_1y_n^{(n-1)}\end{pmatrix}\right|$$

כאשר פישטנו את השורה האחרונה ע"י הוספת כפולות של שורות קודמות. (פעולות שורה לא משנות דטרמיננטה). נוציא $(-p_1)$ מהשורה האחרונה ונקבל:
$$W_1'(x)=-p_1\left|\begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)}\end{pmatrix}\right|\Rightarrow W_1'(x)=-p_1W(x)$$

הוכחת טענת העזר קיימות 3 דרכים:

1. נוסחא: דטרמיננטה היא סכום של $n!$ תמורות. (אליאש מוכיח ככה)
2. אינדוקציה ופיתוח לפי שורות/ עמודות.
3. מולטי-לינאריות: פונקציה ב-n משתנים נקראית מולטי-לינארית אם היא לינארית בכל משתנה בנפרד.

טענת העזר היא שיוויון בין 2 פונקציות של $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

<u>הבחנה</u>: אגף שמאל ואגף ימין של טענת העזר הם פונקציות מולטי-לינאריות בשורות והעמודות של A.
<u>הבחנה</u>: כדי להוכיח שיוויון בין שתי פונקציות מולטי-לינאריות, מספיק לבדוק שיוויון במקרה הפשוט שבכל שורה של A יש בדיוק איבר אחד שונה מ-אפס ובכל עמודה של A יש בדיוק איבר אחד שונה מ-אפס.

כלומר, מספיק לקחת: $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0\\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1n}\\ & \iddots & \\ a_{n1} & \cdots & 0\end{pmatrix}$. עבור A אלכסונית הטענה קלה:
$$|A|=a_{11}\cdot...\cdot a_{nn}\Rightarrow |A|'=a_{11}'(a_{22}...a_{nn})+...$$

14.3 הורדת סדר

הקדמה ומטרה תהי $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny(x)=0$. נניח שידועים m פתרונות בת"ל ($m<n$). נראה שאפשר לבנות מד"ר חדש מסדר $n-m$ שמפתרונותיו ניתן למצוא $n-m$ פתרונות נוספים בת"ל למד"ר המקורי. יהיו $y_1,\dots,y_m$ פתרונות בת"ל למד"ר. נבחר את הפתרון y_1 (נעבוד בקטע בו y_1 לא מתאפס).

ביצוע החלפת משתנים נציב $y=y_1\cdot v$: נכתוב את המד"ר כמד"ר במשתנה v:

$$(y_1v)^{(n)}+p_1(y_1v)^{(n-1)}+...+p_n(y_1v)=0$$
$$\downarrow$$
$$y_1v^{(n)}+(q_1v^{(n-1)}+...+q_nv)$$

(כאשר q_i היא פונקציה של p_i ו-y_1)

הסקת מסקנה על המקדם q_n נבחן את המקרה הפרטי $v=1$:
מצד אחד, הצבה זו שקולה להצבת $y=y_1$ במד"ר המקורית. מכיוון ש-y_1 הוא פתרון ידוע, אגף שמאל חייב להתאפס.
מצד שני, עבור $v=1$ קבוע, כל הנגזרות שלו מתאפסות, ולכן רק האיבר החופשי $q_n\cdot v$ נותר במשוואה.
מכאן נובע בהכרח כי $q_n=0$. כלומר, המד"ר החדשה תלויה רק בנגזרות של v, ונראית כך:

$$y_1v^{(n)}+q_1v^{(n-1)}+\cdots+q_{n-1}v'=0 \qquad (**)$$

הורדת הסדר נגדיר $u=v'$: נשים לב, אם v פתרון של (**), אז u פתרון של מד"ר מסדר $n-1$:

$$\boxed{y_1u^{(n-1)}+q_1u^{(n-2)}+...+q_{n-1}u=0} \qquad (***)$$

בניית מערכת הפתרונות אם נמצא $n-1$ פתרונות בת"ל ל-(***), $(\tilde{y_2},...,\tilde{y_n})$, אז נבצע על כל אחד אינטגרל, נכפול ב-y_1, ונקבל n פתרונות בת"ל למד"ר המקורי:

$$\underbrace{y_1,\quad y_1\cdot\int_{x_0}^{x}\tilde{y_2}\quad,\dots,\quad y_1\cdot\int_{x_0}^{x}\tilde{y_n}}_{n\text{ פתרונות בת"ל}}$$

הוכחת אי-תלות ליניארית (בת"ל) נראה שהפתרונות בת"ל: ניקח צ"ל, נשווה לאפס ונראה שהוא טריוויאלי:

$$c_1y_1+c_2\cdot y_1\int_{x_0}^{x}\tilde{y_2}+...+c_n\cdot y_1\int_{x_0}^{x}\tilde{y_n}=0$$

נחלק ב-y_1:

$$c_1+c_2\cdot y_1\int_{x_0}^{x}\tilde{y_2}+...+c_n\cdot y_1\int_{x_0}^{x}\tilde{y_n}=0$$

נגזור:

$$c_1+c_2\cdot y_1\tilde{y_2}+...+c_n\cdot y_1\tilde{y_n}=0$$

הנחנו כי $\tilde{y_2},...,\tilde{y_n}$ בת"ל ולכן $c_i=0$.

הכללה: שימוש ב-m פתרונות והוכחת אי-תלות

אם ידועים לנו m פתרונות בת"ל $\{y_1, \ldots, y_m\}$, נוכל להוריד את סדר המשוואה ב-m דרגות באופן רקורסיבי. המפתח לכך הוא היכולת "להעביר" פתרונות מהמד"ר המקורית למד"ר המצומצמת.

1. **המרת פתרונות למד"ר המצומצמת** אם y_i הוא פתרון למד"ר המקורית, אזי הפונקציה $u_i = \left(\frac{y_i}{y_1}\right)'$ היא פתרון למד"ר המצומצמת מסדר $n-1$.

2. **הוכחת שימור בת"ל-יות** כדי לוודא שניתן להמשיך בתהליך, נראה כי אם הקבוצה $\{y_1, \ldots, y_m\}$ בת"ל, אז גם קבוצת הנגזרות $\left\{\left(\frac{y_2}{y_1}\right)', \ldots, \left(\frac{y_m}{y_1}\right)'\right\}$ היא בת"ל.

נניח צ"ל שמתאפס:

$$\sum_{i=2}^{m} c_i \left(\frac{y_i}{y_1}\right)' = 0$$

נבצע אינטגרציה על שני האגפים (נקבל קבוע אינטגרציה c_1):

$$\sum_{i=2}^{m} c_i \left(\frac{y_i}{y_1}\right) = c_1$$

נכפיל ב-y_1 ונעביר אגף:

$$\sum_{i=2}^{m} c_i y_i - c_1 y_1 = 0$$

מכיוון ש-$\{y_1, \ldots, y_m\}$ הם פתרונות בת"ל למד"ר המקורית, כל המקדמים c_i יהיו אפס. לכן, הפתרונות החדשים בת"ל.

3. **תהליך רקורסיבי** ניתן לחזור על התהליך: נשתמש במד"ר המצומצמת (***) ונעזר בפתרון u_2 כדי להוריד את הסדר פעם נוספת ע"י הצבה מהצורה $u = u_2 \cdot w = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \cdot w$.

סיכום (לעצמי):

1. **הנחת הפתרון:** נגדיר $y = y_1 \cdot v$.
2. **הצבה:** האיברים של v (ללא נגזרת) מתבטלים תמיד.
3. **הורדת סדר:** נגדיר $u = v'$ לקבלת סדר $n-1$.
4. **פתרון:** מציאת u וביצוע אינטגרציה.
5. **חזרה:** הרכבת הפתרון הכללי $y = y_1 \cdot \int u\, dx$.

דוגמא: מד"ר ליניארית מסדר שני

תהי המד"ר $y'' + p_1y' + p_2y = 0$. נניח כי y_1 הוא פתרון ידוע. נמצא עוד פתרון.

נבצע את ההצבה $y = y_1 \cdot v$:

$$(y_1v)'' + p_1(y_1v)' + p_2(y_1v) = 0$$

משימוש בכלל המכפלה וסידור איברים, המד"ר עבור v היא:

$$y_1v'' + v'(2y_1' + p_1y_1) + v(y_1'' + p_1y_1' + p_2y_1) = 0$$

נשים לב כי $v = 1$ הוא פתרון של המד"ר החדשה. (שקול להציב $y = y_1$). מאחר ו-y_1 פתרון, הביטוי בסוגריים של v מתאפס, וקיבלנו:

$$y_1v'' + v'(2y_1' + p_1y_1) = 0$$

<u>הורדת הסדר</u> נגדיר $u = v'$. המשתנה u מקיים מד"ר מסדר ראשון:

$$y_1u' + (2y_1' + p_1y_1)u = 0$$

נחלק ב-y_1 ונקבל את הצורה הסטנדרטית:

$$u' + \left(\frac{2y_1'}{y_1} + p_1\right)u = 0$$

נעביר אגפים, נעשה אינטגרל על שני האגפים, ונקבל את u_0:

$$u_0 = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p_1(x)dx}$$

נבצע אינטגרציה כדי למצוא את v_0:

$$v_0 = \int_{x_0}^{x} u_0(t)\,dt$$

מסקנה הפתרון הנוסף למד"ר המקורית, הבלתי תלוי ב-y_1, הוא:

$$y_2 = y_1 \cdot v_0 = y_1 \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-\int p_1(t)dt}}{y_1^2(t)}\,dt$$

15 הרצאה 15 - 16/12

15.1 מד"ר לינארי הומוגני עם מקדמים קבועים

$$a_0y^{(n)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

דוגמאות

1. $y' = y$, הפתרון הוא $y = C \cdot e^x$
2. $y' = 0$, הפתרון הוא $y = C$
3. $y'' = y$, הפתרון הוא $y = C \cdot e^{\pm x}$
4. $y'' = 0$, הפתרון הוא $y = ax + b$
5. $y'' + y = 0$, הפתרון הוא $y = \sin x, \cos x$

מה התורה הכללית?
נראה מה קורה אם מציבים במד"ר $y = e^{\lambda x}$ כאשר λ סקלר?

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, ..., y^{(i)} = \lambda^i e^{\lambda x}$$

כלומר, המד"ר נראה כך:

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + ... + a_ne^{\lambda x} = 0$$

נצמצם ב-$e^{\lambda x}$:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = 0$$

נגדיר את המושג הבא:

הפולינום האופייני של המד"ר

$$P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

הראנו: אם λ שורש ממשי של הפולינום האופייני, אז $e^{\lambda x}$ פתרון למד"ר.

לכן, אם ל-P יש n שורשים ממשיים שונים, נוכל למצוא n פתרונות למד"ר.

נותרו 3 שאלות:

1. מה אם יש שורש שמופיע פעמיים?
2. מה אם יש שורש מרוכב?
3. האם הפתרונות הם בת"ל?

נענה על השאלות.

שאלה 1 - מה אם יש שורש שמופיע פעמיים?

נניח ש-λ שורש שמאפס את P K פעמים. נוכל לפרק את הפולינום:

$$P(x) = (x-\lambda)^k Q(x)$$

נראה שמתקיים: $P^{(i)}(\lambda) = 0 \quad \forall i \in [0, k-1]$.
נגזור את P ונקבל:

$$\begin{aligned} P'(x) &= K(x-\lambda)^{k-1}Q(x) + (x-\lambda)^k Q'(x) \\ &= (x-\lambda)^{K-1}(KQ + (x-\lambda)Q') \end{aligned}$$

כלומר, P' מתאפס $k-1$ פעמים בנקודה λ. ניתן להמשיך באינדוקציה עד לנגזרת ה-$k-1$.

נראה ש-$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, ..., x^{K-1}e^{\lambda x}$ הם K פתרונות למד"ר

נגדיר אופרטור ליניארי:

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y$$

נציב $y = x^i e^{\lambda x}$ ונשתמש בתכונת הנגזרת לפי הפרמטר λ:

$$L[x^i e^{\lambda x}] = L\left[\frac{\partial^i}{\partial \lambda^i}(e^{\lambda x})\right] = \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} L[e^{\lambda x}] \underset{\text{לפי זה}}{=} \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i}(P(\lambda)e^{\lambda x}) \underset{\text{כלל לייבניץ}}{=} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} P^{(j)}(\lambda)(e^{\lambda x})^{(i-j)}$$

אם ניקח את λ להיות שורש מריבוי K של P, וניקח אינדקס i הקטן מ-K ($i < K$), בהכרח נקבל $L[y] = 0$.
זאת מכיוון שלפי ההבחנה הקודמת, כל הנגזרות $P^{(j)}(\lambda)$ מתאפסות לכל $j \le i < K$.

דוגמא עבור המד"ר $y'' = 0$, הפולינום האופייני הוא $x^2 = 0$ עם שורש יחיד $x = 0$ מריבוי $K = 2$. לכן נובע ש-e^{0x}, xe^{0x} (כלומר $\{1, x\}$) הם זוג פתרונות בת"ל.

מסקנה סה"כ, הראנו שאם יש שורש מריבוי K אז קיימים K פתרונות שונים למד"ר.

שאלה 2 - מה אם יש שורש מרוכב? אם λ מרוכב, אז $e^{\lambda x}$ פתרון מרוכב למד"ר.

נראה: אם λ שורש של P, אז $\bar{\lambda}$ שורש של P, מרוכב ושונה מ-λ.

נכתוב את הפולינום כמכפלת השורשים שלו: $P(x) = \prod(x - \lambda_i)$.
מתקיים ש-λ שורש:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_n = \prod(\lambda - \lambda_i) = 0$$

נפעיל צמוד מרוכב על השיוויון:

$$\bar{\lambda}^n + a_1\bar{\lambda}^{n-1} + ... + a_n = \prod(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_i) = 0$$

מסקנה: אם λ שורש מרוכב, אז $e^{\lambda x}x^i, e^{\bar{\lambda}x}x^i$ פתרונות מרוכבים. כלומר - אם קיים שורש מרוכב, נוכל ליצור ממנו ומהצמוד שלו פתרונות ממשיים:

$$\Re(e^{\lambda x}x^i) = \underbrace{\frac{e^{\lambda x} + e^{\bar{\lambda}x}}{2}}_{e^{\Re(\lambda)\cdot x}\cdot\cos(\Im(\lambda)\cdot x)} \cdot x^i, \quad \Im(e^{\lambda x}x^i) = \underbrace{\frac{e^{\lambda x} - e^{\bar{\lambda}x}}{2i}}_{e^{\Re(\lambda)\cdot x}\cdot\sin(\Im(\lambda)\cdot x)} \cdot x^i$$

16 הרצאה 16 - 22/12

הערה הוא הוכיח דברים על מרוכבים. חזרה על אקפוננט מרוכב. לא כתבתי.

שאלה 3 - האם כל הפתרונות בת"ל?

16.1 משפט מסכם עבור מד"ר הומוגני, לינארי מסדר n, בעל מקדמים קבועים

יהי P פולינום אופייני של מד"ר הומוגני, לינארי מסדר n, בעל מקדמים קבועים.
נכתוב את השורשים שלו כך:

1. $\lambda_1, ..., \lambda_k$ שורשים ממשיים שונים, כאשר לכל i, λ_i מריבוי $m_i \geq 1$.
2. עבור שורשים מרוכבים נסמן $\mu_j, \bar{\mu_j}$ מריבוי m'_j , זוגות שורשים מרוכבים צמודים.

אז, n הפתרונות הבאים הם בת"ל:

- עבור שורשים ממשיים:

$$e^{\lambda_i x}x^j, \quad i = 1, ..., k \quad ,0 \leq j < m_i$$

- עבור שורשים מרוכבים:

$$e^{\Re(\mu_j)\cdot x} \cdot \cos(\Im(\mu_j) \cdot x) \cdot x^\ell, \quad j = 1, ..., k'$$
$$e^{\Re(\mu_j)\cdot x} \cdot \sin(\Im(\mu_j) \cdot x) \cdot x^\ell, \quad 0 \leq \ell < m'_j$$

הוכחה הראנו בהרצאה קודמת שאלו פתרונות למד"ר. כעת נותר להוכיח רק אי-תלות לינארית.

נניח שיש צ"ל של הפתרונות שנותן 0. זה גורר שיש צ"ל של הפתרונות הבאים שנותן 0:

$$\underset{\substack{1\leq i\leq k\\0\leq j<m_i}}{\{e^{\lambda_i x}x^j\}}, \underset{\substack{1\leq i\leq k'\\0\leq j<m'_i}}{\{e^{\mu_i x}x^j, e^{\bar{\mu}_i x}x^j\}}$$

אנחנו רוצים להראות לכל $x \in I$:

$$\sum_{i=1}^{k''=k+2k'} c_i e^{\lambda_i x}x^j = \sum_{i=1}^{k''} P_i(x)e^{\lambda_i x} = 0 \Rightarrow P_i(x) = 0 \quad \forall i \tag{*}$$

נחלק את אגף שמאל ב-$e^{\lambda_1 x}$:

$$\sum_{i=1}^{k''} P_i(x)e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = P_1(x) + P_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + \cdots = 0$$

נניח P_1 פולינום ממעלה $d > 0$. נגזור את השיוויון $d+1$ פעמים כך ש-P_1 יעלם.

טענת עזר:

> אם P פולינום ממעלה r ו-$\lambda \neq 0$, אז לכל $d \geq 0$:
>
> $$(P(x)e^{\lambda x})^{(d)} = Q_d(x)e^{\lambda x}$$
>
> (עבור Q_d פולינום ממעלה r)

הוכחה:

$$(P(x)e^{\lambda x})^{(d+1)} = ((P(x)e^{\lambda x})^{(d)})' \underset{\text{הנחת אינדוקציה}}{=} (Q_d(x)e^{\lambda x})' = Q'_d(x)e^{\lambda x} + \lambda Q_d(x)e^{\lambda x}$$

קיבלנו ע"י הנחת אינדוקציה: $(P(x)e^{\lambda x})^{(d+1)} = e^{\lambda x}(Q_d(x) + Q'_d(x))$. אז $Q_{d+1}(x) = Q'_d(x) + Q_d(x)$ ממעלה d. $\square$

נשתמש בטענה בשביל לגזור $1 + \deg(P_1(x))$ פעמים את $\sum_{i=1}^{k''} P_i(x)e^{(\lambda_i - \lambda_1)x}$ ונקבל:

$$\sum_{i=2}^{k''} Q_i(x)e^{(\lambda_i - \lambda_1)x} = 0 \qquad (**)$$

עבור Q_i פולינום עם אותה מעלה כמו P_i.

אינטואיציה: קיבלנו שיוויון דומה למה שהתחלנו עם פחות פונקציות. לכן כדאי להפעיל הוכחה באינדוקציה על k'' - מספר השורשים השונים של הפ"א.

כלומר נניח ש-$\sum_{i=2}^{k''} \tilde{Q}_i(x)e^{(\tilde{\lambda_i} - \lambda_1)x} = 0$ גורר כי $\tilde{Q}(x)_i = 0$ לכל i.

מהצעדים שעשינו והנחת האינדוקציה נובע ש-$Q_i = 0$ ב-$(**)$ לכל $2 \leq i \leq k''$.

מעלת P_i היא מעלת Q_i לכן $P_i = 0$ ב-$(**)$ לכל $2 \leq i \leq k''$. כלומר, $P_1(x)e^{\lambda_1 x} = 0$. אבל $e^{\lambda_1 x}$ לא מתאפס באף נקודה ולכן $P_1(x) = 0$ לכל x בקטע לכן P_1 פולינום האפס.

זה מסיים את צעד האינדוקציה ($P_i \equiv 0$ לכל i). מקרה הבסיס דומה.

$\square$

דוגמא $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5y^{(2)} - 4y' + 4y = 0$.

הפ"א נראה כך:

$$P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2(x+1)^2$$

השורשים הממשיים: $\lambda_1 = 2, m_1 = 2$. לכן פתרונות הם e^{2x}, xe^{2x}.
השורשים מרוכבים: $\mu_1 = i, \mu_2 = -i, m'_1 = 1$. לכן פתרונות הם $\sin x, \cos x$.
סה"כ מצאנו 4 פתרונות בת"ל:

$$\{e^{2x}, xe^{2x}, \sin x, \cos x\}$$

16.1.1 תרגילים

הראו שאם יש מד"ר הומוגני, סדר n, מקדמים קבועים שכל פתרונותיו חסומים ב-$[0,\infty)$ אז $\Re[\lambda_i]\le 0$ לכל i (λ_i - שורשי הפ"א). בנוסף, אם $\Re[\lambda_i]=0$, אז הריבוי של λ_i הוא 1. (גם הכיוון השני נכון).

נתחיל בכיוון השני: כל פתרון הוא מהצורה $e^{\lambda_i x_j}x^j$ או $e^{\Re(\lambda_j)\cdot x}\cdot\cos(\Im(\lambda_j)\cdot x)$, $e^{\Re(\lambda_j)\cdot x}\cdot\sin\left(\Im(\lambda_j)\cdot x\right)$.

אם $\Re(\lambda_i)<0$: $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\lambda_i x_j}x^j=0$ ולכן $e^{\lambda_i x_j}x^j$ חסומה. אותו דבר עבור $e^{\Re(\lambda_j)\cdot x}\cdot\cos(\Im(\lambda_j)\cdot x)$, $e^{\Re(\lambda_j)\cdot x}\cdot\sin\left(\Im(\lambda_j)\cdot x\right)$.

אם $\Re(\lambda_i)=0$, אבל הריבוי הוא 1: אז $j=0$ והפתרונות כולם חסומים:

$$1,\sin(\Im[\lambda_i]\cdot x),\cos(\Im[\lambda_i]\cdot x)$$

הכיוון הראשון: נניח בשלילה שקיים שורש λ_i כך ש-$\Re(\lambda_i)>0$, ונבנה פתרון לא חסום ונקבל סתירה: אם λ_i ממשי, אז $e^{\lambda_i x}$ דוגמא לפתרון לא חסום.
אם λ_i מדומה, אז $e^{\Re(\lambda)\cdot x}\cdot\sin\left(\Im(\lambda)\cdot x\right)$ דוגמא לפתרון לא חסום.
נותר לדבר על המקרה ש-$\Re(\lambda_i)=0$. נניח בשלילה שקיים λ_i כזה עם ריבוי גדול מ-1. נבנה פתרון לא חסום: $e^{\lambda_1 x}x^j$.

אם λ_i ממשי: $\lambda_i=0$ ואז x פתרון לא חסום, סתירה.

אם λ_i מדומה, אז $\cos(\Im[\lambda_i]x)\cdot x$ פתרון לא חסום, סתירה.

$\square$

הוכיחו כי הקבוצה $\{1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,...,\sin nx,\cos nx\}$ בת"ל בקטע I.

נבנה מד"ר לינארי הומוגני מסדר $2n+1$ עם מקדמים קבועים, שהקבוצה הנ"ל היא בסיס למרחב הפתרונות שלה. נשים לב ש-

$$\sin(nx)=e^{0x}\sin(nx)\cdot x^0$$
$$\cos(nx)=e^{0x}\cos(nx)\cdot x^0$$

נבנה פולינום:

$$P(t)=\prod_{k=1}^{n}(t-ik)(t+ik)t=\prod_{k=1}^{n}(t^2+k^2)t$$

נבנה מד"ר שזה הפ"א שלו. מהמשפט המסכם, $\{1,\sin t,\cos t,\sin 2t,\cos 2t,...,\sin nt,\cos nt\}$ בסיס למרחב הפתרונות, בפרט בת"ל.

$\square$

17 הרצאה 17 - 23/12

17.1 משוואות אוילר

הגדרה

משוואת אוילר היא משוואה מהצורה הבאה:

$$a_i \in \mathbb{R}, \quad x^n \cdot y^{(n)} + a_1 x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0$$

הערה משוואה זו לא מנורמלת. אם ננרמל, נקבל משוואה שלא מוגדרת באפס:

$$y'' + \frac{a_1}{x} y' + \frac{a_2}{x^2} y = 0 \quad \xleftarrow{\text{נחלק ב-} x^2} x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0$$

משפט קיום ויחידות למד"ר לינארית דורש שהמקדמים יהיו רציפים בקטע שבו מחפשים פתרון. מכיוון שיש לנו בעיה ב-$x=0$, המשפט "נשבר" שם. הוא יכול להבטיח לנו פתרון רק מימין לאפס $(0,\infty)$ או משמאל לאפס $(-\infty,0)$, אבל לא קטע שכולל את אפס. לפעמים נוכל למצוא פתרון שמוגדר בכל $\mathbb{R}$, ולפעמים לא.

דוגמאות:

1. $x^2 y^{(2)} - 2y = 0$, פתרונות הם $x^2, \frac{1}{x}$.
2. $x^2 y^{(2)} + \frac{y}{4} = 0$, פתרונות הם $\sqrt{x}, \sqrt{x}\ln x$.

17.1.1 2 שיטות למציאת פתרון למשוואת אוילר

שיטה א נניח שנרצה למצוא פתרון שמוגדר לכל $x>0$.

נגדיר $\mathbf{Y(x) = y(e^x)}$. מתקיים $Y(\ln x) = y(x)$, לכן נציב במד"ר ונקבל משוואה עם מקדמים קבועים:

$$a_2 y(x) \to a_2 Y(\ln x), \quad a_1 x y' \to a_1 x \cdot \frac{1}{x} Y'(\ln x) = a_1 Y'(\ln x)$$

אנחנו יודעים למצוא את $Y(\ln x)$ לפי המשפט המסכם, ולכן את y.

שיטה ב מציבים $y = x^r$ במשוואת אוילר, ומוצאים את r.

דוגמא: $x^2 y^{(2)} - 2y = 0$

נציב $y = x^r$:

$$y' \to (x^r)' = r x^{r-1}, \quad y'' \to (x^r)'' = r(r-1)x^{r-2}$$

לכן, אם נציב במד"ר, נקבל:

$$x^2 \cdot r(r-1)x^{r-2} - 2 \cdot x^r = 0$$

נצמצם ב-x^r:

$$r(r-1) - 2 = 0 \iff (r-2)(r+1) = 0 \iff r = 2, -1$$

לכן הפתרונות הם: $y_1 = x^2,\ y_2 = x^{-1}$.

שורה תחתונה למד"ר מסוג אוילר מתאימה משוואה עם מקדמים קבועים. פתרון $Y(x)$ של המד"ר עם המקדמים הקבועים יתן פתרון $y(x)$ למד"ר מסוג אוילר אם נחליף את x ב-$\ln x$.

17.2 מד"ר לינארי לא הומוגני

תזכורת

V_q - אוסף הפתרונות למד"ר לינארית **לא** הומוגנית
V_0 - אוסף הפתרונות למד"ר לינארית הומוגנית

<u>הבחנה</u> לכל $g \in V_q$, קיימת העתקה חח"ע ועל בין V_q לבין V_0 שנתונה ע"י:

$$y \mapsto y - g, \quad y \in V_q$$

וההופכית נתונה ע"י:

$$u \mapsto u + g, \quad u \in V_0$$

נראה: (לכל $g \in V_q$)

1. אם $y \in V_q$, אז $y - g \in V_0$
2. אם $u \in V_0$, אז $u + g \in V_q$

נגדיר L אופרטור לינארי מ-מרחב הפונקציות הגזירות n פעמים על I ל-מרחב הפונקציות על I:

$$L[y] = y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_n(x)y$$

נשים לב, שאם $y \in V_q$ אז $L[y] = q(x)$.

סעיף 1 נפעיל על $y - g$:

$$L[y-g] = L[y] - L[g] = q(x) - q(x) = 0$$

לכן, $y - g \in V_0$.

סעיף 2 נפעיל על $u + g$:

$$L[u+g] = L[u] + L[g] = 0 + q(x) = q(x)$$

לכן, $u + g \in V_q$.

לסיכום:

$$V_q = \{u + g \mid u \in V_0\}$$

במילים אחרות, אם נמצא איזשהו $g \in V_q$ ואת כל V_0, אז נמצא את כל V_q.

איך למצוא פתרון כלשהו $g \in V_q$, בהנתן V_0? נניח שנתונים n פתרונות בת"ל למשוואה ההומוגנית. נסמן $y_1, ..., y_n$, מתקיים $L[y_i] = 0$. כלומר $V_0 = span\{y_1, ..., y_n\}$. נסביר איך מוצאים y שמקיים $L[y] = q$.

עבור $n = 1$: "ננחש" פתרון מהצורה $y = C_1(x)y_1 + ... + C_n(x)y_n$ עבור מקדמים $C_1(x), ..., C_n(x)$. נסביר למצוא מקדמים כך שזה אכן פתרון (שיטת וריאציית הפרמטרים).

18 הרצאה 18 - 29/12

18.1 שיטת וריאציית הפרמטרים

תהי מד"ר לינארית לא הומוגנית:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + ... + a_n(x) \cdot y = q(x) \qquad (*)$$

פתרון כללי למד"ר מצורה זו הוא מהצורה: פתרון כללי למד"ר ההומוגני + פתרון פרטי למד"ר הלא הומוגני

השיטה ניקח n פתרונות בת"ל למד"ר ההומוגנית, $y_1, ..., y_n$. נחפש מקדמים $c_1, ..., c_n$ (פונקציות גזירות) כך ש- $y = c_1y_1 + c_2y_2 + ... + c_ny_n$ הוא פתרון פרטי למד"ר הלא הומוגני (*).

נרצה להציב את y הזו ב-(*). נוסיף אילוצים על ה-c_i-ים שיקלו את ההצבה:

נגזור את y ונקבל:

$$y' = \sum c_i'y_i + \sum c_iy_i'$$

נדרוש $\sum c_i'y_i = 0$ ולכן:

$$y' = \sum c_iy_i'$$

כעת, נגזור את y' ונקבל:

$$y'' = \sum c_i'y_i' + \sum c_iy_i''$$

נדרוש $\sum c_i'y_i' = 0$ ולכן:

$$y'' = \sum c_iy_i''$$

נמשיך כך... בסוף, דורשים $\sum c_i'y_i^{(n-2)} = 0$ ואז $y^{(n-1)} = \sum c_iy_i^{(n-1)}$.

סה"כ, נקבל n דרישות לינאריות:

$$\begin{aligned} &\sum c_i'y_i = 0 \\ &\sum c_i'y_i' = 0 \\ &\vdots \\ &\sum c_iy_i^{(n-2)} = 0 \\ &\sum c_i'y_i^{(n-1)} = q(x) \end{aligned}$$

כעת נוכל להציב את הצירוף $y = \sum c_iy_i$ במקום y ב-(*) כאשר מתקיים:

$$\begin{aligned} y &= \sum c_iy_i \\ y' &= \sum c_iy_i' \\ y'' &= \sum c_iy_i'' \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= \sum c_iy_i^{(n-1)} \end{aligned}$$

כעת,

$$\left(y^{(n-1)}\right)' = \sum c_i' y_i^{(n-1)} + \sum c_i y_i^{(n)}$$

המד"ר (*) מתקיים אם מתקיים השיוויון הבא:

$$\sum c_i' y_i^{(n-1)} + \left[\sum c_i y_i^{(n)} + a_1(x) \underbrace{\sum c_i y_i^{(n-1)}}_{y^{(n-1)}} + ... + a_n(x) \underbrace{\sum c_i y_i}_{y}\right] = q(x)$$

נשים לב, כל מה שבתוך הסוגריים מתאפס:

$$\begin{cases} c_1 \cdot \left(y_1^{(n)} + a_1(x) y_1^{(n-1)} + ... + a_n(x) y_1\right) \underset{\text{פתרון למד"ר ההומוגני } y_1}{=} 0 \\ \vdots \\ + \\ c_n \cdot \left(y_n^{(n)} + a_n(x) y_n^{(n-1)} + ... + a_n(x) y_n\right) \underset{\text{פתרון למד"ר ההומוגני } y_n}{=} 0 \\ \hline \sum c_i y_i^{(n)} + a_1(x) \underbrace{\sum c_i y_i^{(n-1)}}_{y^{(n-1)}} + ... + a_n(x) \underbrace{\sum c_i y_i}_{y} = 0 \end{cases}$$

<u>מסקנה</u>: אם $c_1, ..., c_n$ מקיימים את הדרישות $\sum c_i' y_i^{(j)} = 0$, אז:

$$\sum c_i' y_i^{(n-1)} = q(x) \iff \text{(*) פותר את } y = \sum c_i y_i$$

לכן, אם נפתור n משוואות לינאריות במשתנים $c_1', ..., c_n'$, נמצא את y - הפתרון למד"ר הלא הומוגני:

$$\begin{gathered} \sum c_i' y_i = 0 \\ \sum c_i' y_i' = 0 \\ \vdots \\ \sum c_i' y_i^{(n-1)} = q(x) \end{gathered}$$

נכתוב את n המשוואות בצורה מטריציונית:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}}_{A(y_1, ..., y_n)} \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ q(x) \end{pmatrix}$$

נשים לב: המטריצה היא בדיוק מטריצת הורונסקיאן של n הפתרונות הבת"ל, לכן הדטרמיננטה שלה שונה מ-0. כלומר, מטריצת הורונסקיאן הפיכה לכל x.

נכפיל בהופכית, נקבל c_i':

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = A^{-1}(y_1, ..., y_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ q \end{pmatrix} = q(x) \cdot \begin{pmatrix} (A^{-1})_{1,n} \\ \vdots \\ (A^{-1})_{n,n} \end{pmatrix}$$

כלומר, שווה לעמודה אחרונה של $(A(y_1, ..., y_n))^{-1}$ כפול q.

לאחר שנמצא את כל ה-c_i', נוכל למצוא את כל הפתרונות למד"ר הלא-הומוגני:

$$c_i(x) = \int_{x_0}^{x} c_i'(t)dt + d_i$$

$$y(x) = \sum c_i y_i = \underbrace{\sum y_i \int_{x_0}^{x} c_i'(t)dt}_{\text{פתרון פרטי ללא הומוגנית}} + \underbrace{\sum y_i d_i}_{\text{פתרון כללי להומוגנית}}$$

דוגמא

$$u'' + u = q$$

נתחיל במקרה ההומוגני:

$$u'' + u = 0$$

פתרונות הם: $y_1 = \cos x \, , y_2 = \sin x$. נחפש פתרון למד"ר המקורי:

$$u = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix}$$

נשים לב, זו מטריצת סיבוב לכן אנו יודעים את ההופכית שלה: $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$

לכן:

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ q \end{pmatrix} = q \cdot \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

כלומר, המקדמים c_i הם:

$$\begin{cases} c_1 = -\int_{x_0}^{x} \sin t \cdot q(t)dt \\ c_2 = \int_{x_0}^{x} \cos t \cdot q(t)dt \end{cases}$$

סה"כ:

$$u = -\int_{x_0}^{x} \sin t \cdot q(t)dt \cdot \cos x + \int_{x_0}^{x} \cos t \cdot q(t)dt \cdot \sin x$$

פתרון פרטי למד"ר (הלא-הומוגני) שהתחלנו איתו.

עבור מקרה פרטי בו $q = \frac{1}{\cos x}$ כאשר $|x| < \frac{\pi}{2}, \; x_0 = 0$

פתרון הוא $u = -\cos x \int_0^x \tan(t)dt + \int_0^x 1dt \cdot \sin x = -\cos x \ln(\cos x) + x \sin x$.

18.2 השוואת מקדמים

שיטה נוספת לפתירת מד"ר לא הומוגני עם מקדמים קבועים.

$$y^{(n)}+\underbrace{a_1}_{\text{סקלרים}}\cdot y^{(n-1)}+...+\underbrace{a_n}_{\text{סקלרים}}y=\underbrace{q(x)}_{\text{פולינום}}$$

טענה:

אם q פולינום ממעלה m, והפולינום האופייני של המד"ר ההומוגני, $P(\lambda)$ לא מתאפס בנקודה $\lambda=0$, אז, יש פתרון שהוא פולינום ממעלה m.

בהינתן הטענה, נניח שקיים פתרון למד"ר שהוא פולינום כללי ממעלה m:

$$y=c_mx^m+...+c_0$$

נציב את y במד"ר:

$$y'=mc_mx^{m-1}+(m-1)c_{m-1}x^{m-2}+...$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)}=c_m\cdot\boxed{\text{סקלר}}x^{m-n}+c_{m-n}\cdot\boxed{\text{סקלר}}x^{m-n-1}+...$$

כדי שיתקיים :

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=q$$

נרצה שהמקדמים של x^i באגף ימין ושמאל יהיו שווים לכל i. המקדם של x^i באגף שמאל הוא צ"ל של $c_0,...,c_m$.

דוגמא (אני הוספתי)

$$y''+3y'+2y=4x^2$$

נסתכל על אגף ימין: $q(x)=4x^2$ הוא פולינום ממעלה $m=2$.

נבדוק את הטענה מההרצאה: הפולינום האופייני הוא

$$P(\lambda)=\lambda^2+3\lambda+2$$

נציב $\lambda=0$: נקבל $P(0)=2$. מכיוון ש-$P(0)\neq 0$ (הפולינום לא מתאפס ב-0), הטענה קובעת שקיים פתרון פרטי שהוא פולינום ממעלה $m=2$.

"ננחש": $y=c_2x^2+c_1x+c_0$ ונציב במד"ר:

$$(2c_2)+3(2c_2x+c_1)+2(c_2x^2+c_1x+c_0)\underset{\text{כינוס איברים}}{=}x^2(2c_2)+x(6c_2+2c_1)+(2c_2+3c_1+2c_0)=4x^2$$

לכן:

$$\begin{aligned}
&2c_2=4 &&\Longrightarrow c_2=2\\
&6c_2+2c_1=12c_2+2c_1=0 &&\Longrightarrow c_1=-6\\
&2c_2+3c_1+2c_0=4-18+2c_0=0 &&\Longrightarrow c_2=7
\end{aligned}$$

פתרון פרטי למד"ר הוא: $y=2x^2-6x+7$.

18.3 מערכות של n משוואות לינאריות

יהיו n פונקציות נעלמות $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ הניתנות לגזירה.

הגדרה

מערכת של n משוואות לינאריות מסדר ראשון נראית כך:

$$\begin{cases} y_1' = P_{1,1}(x)y_1 + P_{1,2}(x)y_2 + ... + P_{1,n}(x)y_n + q_1(x) \\ y_2' = P_{2,1}(x)y_1 + P_{2,2}(x)y_2 + ... + P_{2,n}(x)y_n + q_2(x) \\ \vdots \\ y_n' = P_{n,1}(x)y_1 + P_{n,2}(x)y_2 + ... + P_{n,n}(x)y_n + q_n(x) \end{cases}$$

סימונים

1. y וקטור עמודה של פונקציות גזירות:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

2. את המערכת שהגדרנו אפשר לכתוב בכתיב מטריציוני:

$$\vec{y'} = P(x) \cdot \vec{y} + \vec{q}(x)$$

כאשר $(P(x))_{ij} = P_{i,j}(x), \quad q(x) = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$

- y_k' - קואורדינטה k של y'.
- קואורדינטה k של $P(x)y$ מהגדרת כפל מטריצות:

$$\left(P_{k,1}, ..., P_{k,n}\right) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P_{k,1}y_1 + ... + P_{k,n}y_n$$

18.3.1 משפט קיום ויחידות למערכת

נניח שה-$p_{i,j}$ וה-q_i הן פונקציות רציפות בקטע I. נניח גם $x_0 \in I$, $\vec{y_0} \in \mathbb{R}^n$.
אז יש פתרון אחד ויחיד למשוואה

$$\vec{y'} = P(x) \cdot \vec{y} + \vec{q}(x)$$

עם תנאי התחלה נתון: $\vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$.

נסביר את הקשר למשוואה בודדת, לינארית מסדר n: ניקח משוואה לינארית מסדר n:

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + ... + P_n(x) \cdot y = q(x)$$

נגדיר:

$$P(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ p_n & p_{n-1} & \cdots & \cdots & p_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ q(x) \end{pmatrix}$$

המערכת $\vec{y'} = P(x) \cdot \vec{y} + \vec{q}(x)$ נראית כך:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_n' = -p_n y_1 - p_{n-1} y_2 - ... - p_1 y_n + q \end{cases}$$

נגדיר וקטור משתנים חדש $\vec{y}$ כך שכל רכיב מייצג נגזרת גבוהה יותר:

$$y_1 = y_1, \quad y_2 = y_1', \quad y_3 = y_1'', \quad \ldots \quad , y_{n-1} = y_{n-2}' = (y_1^{(n-3)})' = y_1^{(n-2)}, \quad y_n = y_1^{(n-1)}$$

המערכת שמתקבלת היא:

$$\begin{cases} y_2 = y_1' \\ \vdots \\ y_n = y_1^{(n-1)} \end{cases}$$

נשים לב, מצד אחד מתקיים: $y_n' = -p_n y_1 - ... - p_1 y_n + q$. מצד שני, מתקיים: $y_n' = (y_1^{(n-1)})' = y_1^{(n)}$.
לכן, לאחר העברת אגפים נקבל:

$$y_1^{(n)} + p_n y_1 + p_{n-1} y_1' + ... + p_1 y_1^{(n-1)} = q \qquad \textbf{(*)}$$

לסיכום, $y_1, ..., y_n$ פתרונות למערכת שבנינו $\iff$ y_1 פותר את המד"ר שבנינו **(*)**, ו- $y_i = y_1^{(i-1)}$

19 הרצאה 19 - 30/12

תזכורת - משפט קיום ויחידות למערכת

נניח ש-$p_{i,j}$ ו-q_i הן פונקציות רציפות בקטע I. נניח גם $x_0 \in I$, $\vec{y_0} \in \mathbb{R}^n$.
אז יש פתרון אחד ויחיד למשוואה

$$\vec{y'} = P(x) \cdot \vec{y} + \vec{q}(x)$$

עם תנאי התחלה נתון: $\vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$.

הוכחה על קטע I "פס" סימון: בהינתן $\vec{x}$, נסמן ערך מוחלט: $|\vec{x}| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$. מקיים תכונות נורמות. (נורמת אינסוף)

המשפט נובע ממשפט כללי:

תהא מד"ר: $\vec{y'} = f(x, \vec{y})$. $f : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ רציפה ב-I קטע סגור וליפשיצית בפס אינסופי. כלומר:

$$|f(x, \vec{y_1}) - f(x, \vec{y_2})|_\infty \le |\vec{y_1} - \vec{y_2}|_\infty \cdot L(x)$$

אזי, קיים פתרון אחד ויחיד למד"ר זו עם תנאי התחלה $\vec{y}(x_0) = \vec{y_0}$ והוא מוגדר בכל I.

ניקח $f(x, \vec{y}) = P(x)\vec{y} + \vec{q}$. נבדוק ליפשיציות:

$$|f(x, \vec{y_1}) - f(x, \vec{y_2})| = |P(x)\vec{y_1} + \vec{q} - P(x)\vec{y_2} - \vec{q}| = |P(x)\vec{y_1} - P(x)\vec{y_2}| = |P(x)(\vec{y_1} - \vec{y_2})|$$

מתקיים:

$$|P(x)(\vec{y_1} - \vec{y_2})| = \max_i |\sum_j p_{i,j}(\vec{y_1} - \vec{y_2})| \le |\vec{y_1} - \vec{y_2}|_\infty \cdot \underbrace{\max \sum |p_{i,j}|}_{\text{חסום כאשר } x \in I}$$

זה מוכיח קיום ויחידות ב-I <u>סגור, חסום</u>.

אם I פתוח וסופי, למשל $(1,2)$ אז נפעיל את המשפט על $I_n = \left[1 + \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right]$. אם I אינסופי, למשל $\mathbb{R}$, נפעיל על $I_n = [-n, n]$.

הוכחת משפט קיום ויחידות <u>גלובלי</u> למערכת נדבר רק על קיום (יחידות כמו בהוכחה עבור $n = 1$ עם גרונוול.

בדומה להוכחת קיום ויחידות עבור $n = 1$. נגדיר איטרציות פיקארד: $\vec{y}_{n+1}(x) = \vec{y_0} + \int_{x_0}^{x} f(x, \vec{y}_n(x))\, dx$.

מתקיים באינדוקציה:

$$\forall m, \forall x \in I \quad ||\vec{y}_{m+1}(x) - \vec{y}_m(x)||_\infty \le \frac{|x - x_0|^{m+1}}{(m+1)!} \cdot L^m \cdot M, \quad M := \max_{x \in I} |f(x, \vec{y_0}(x))| < \infty$$

מהאינדוקציה, $\vec{y_n}$ מתכנס במ"ש לפונקציה $\vec{y}$ רציפה.

19.1 מערכת לינארית הומוגנית

תהי מערכת לינארית הומוגנית ($\vec{q}(x)=\vec{0}$):

$$\vec{y'}=P(x)\vec{y}$$

מקדמי P הם רציפים בקטע I. נגדיר את V מרחב הפתרונות למערכת הומוגנית:

$$V=\left\{\vec{y}:I\to\mathbb{R}^n,\,\vec{y'}=P(x)\vec{y}\right\}$$

V תמיד מכיל את $\vec{0}$. למעשה, V מרחב וקטורי.

טענה:

V איזומורפי ל-$\mathbb{R}^n$ - $R^n\cong V$.
לכל $x_0\in I$ קיים האיזומורפיזם הבא:

$$\varphi:\mathbb{R}^n\to V$$

$$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\mapsto y:I\to\mathbb{R}^n,\,y(x_0)=\vec{a}$$: y פתרון לבעיית התנאי ההתחלתי עם התנאי

ההעתקה שבנינו מוגדרת היטב - לכל וקטור של תנאי התחלה $\vec{a}$, קיים פתרון יחיד למערכת שעובר בנקודה הזו (לפי משפט הקיום והיחידות).

<u>נראה שההעתקה לינארית:</u>

$$\vec{y}_{\vec{a}}(x_0)=\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\vec{y}_{\vec{b}}(x_0)=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

לפי ההגדרה,

$$\begin{cases}\vec{a}\mapsto\vec{y}_{\vec{a}} & (x_0,\vec{a})\ \text{הפתרון שעובר דרך}\\ \vec{b}\mapsto\vec{y}_{\vec{b}} & (x_0,\vec{b})\ \text{הפתרון שעובר דרך}\end{cases}$$

נרצה: $\varphi(c_1a+c_2b)=c_1y_a+c_2y_b$. כלומר, הפתרון שעובר דרך (x_0,c_1a+c_2b) הוא הצ"ל של הפתרונות שעוברים דרך $(x_0,\vec{a})$, $(x_0,\vec{b})$.

נשים לב, $c_1y_a+c_2y_b$ פותר את המד"ר (V מ"ו), ותנאי ההתחלה שלו הוא:

$$(c_1y_a+c_2y_b)(x_0)=c_1y_{\vec{a}}(x_0)+c_2y_b(x_0)=c_1\vec{a}+c_2\vec{b}$$

<u>נראה שההעתקה על:</u> יהא פתרון למד"ר, $y\in V$. נסמן $\vec{a}=y(x_0)$. אזי, $\varphi(a)=y$.

<u>נראה שההעתקה חח"ע:</u> בגלל שההעתקה היא לינארית רק צריך לבדוק גרעין טריויאלי.

יהא $\vec{a}$ כך ש-$\varphi(\vec{a})=0$. כלומר, $y\equiv 0$ הוא פתרון למד"ר שמקיים $y(x_0)=\vec{a}$. לכן a חייב להיות וקטור ה-0.

ורונסקיאן למערכת לינארית

בהניתן n פונקציות וקטוריות $y_1, ..., y_n : I \to \mathbb{R}^n$, הורונסקיאן שלהן מוגדר להיות:

$$W(y_1, ..., y_n)(x) = \det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

טענה

נניח שקיימים $y_1, ..., y_n$ n פתרונות למד"ר $y' = Py$ בקטע I. יהי $x_0 \in I$.
אזי,

- $W(y_1, ..., y_n)(x_0) \neq 0$ $\leftarrow$ $y_1, ..., y_n$ בת"ל
- $W(y_1, ..., y_n)(x_0) = 0$ $\leftarrow$ $y_1, ..., y_n$ ת"ל $\leftarrow$ $W \equiv 0$

מסקנה מהטענה: אם $W(y_1, ..., y_n)(x_0) \neq 0$ אז לכל $x \in I$, $W(y_1, ..., y_n)(x) \neq 0$.

20 הרצאה 20 - 5/1

נמשיך לדבר על מערכות מד"ר-ים לינאריות הומוגניות.

טענה

נניח שקיימים $y_1, ..., y_n$ n פתרונות למד"ר $y' = Py$ בקטע I. יהי $x_0 \in I$.
אזי,

$$W(y_1, ..., y_n)(x_0) \neq 0 \iff y_1, ..., y_n \text{ בת"ל}$$

הוכחה אם $y_1, ..., y_n$ בת"ל, אז כל צ"ל $\sum c_i y_i$ ששווה לאפס, חייב לקיים $c_i = 0$ לכל i.
נניח בשלילה, $W(y_1, ..., y_n)(x_0) = 0$. אז $\varphi(y_1), ..., \varphi(y_n)$ ת"ל. (עבור $\varphi_{x_0} : V \to \mathbb{R}^n$, $(y \mapsto y(x_0))$.
נסתכל על $\sum c_i' \varphi(y_i) = 0$:
מתלות לינארית, קיימים c_i' שונים מ-0. מלינאריות וחח"ע של φ (הראנו הרצאה קודמת), $\sum c_i' y_i = 0$.
לכן $y_1, ..., y_n$ ת"ל. סתירה. (כיוון שני דומה)

$\square$

מסקנה פתרונות בת"ל $\iff$ $W(y_1, ..., y_n)(x) \neq 0$ לכל $x \in I$

20.0.1 נוסחאת אבל - ליוביל

יהי מד"ר $y' = Py$. יהיו $y_1, ..., y_n$ פתרונות של המד"ר.
אז,

$$W(y_1, ..., y_n)' = W(y_1, ..., y_n) \cdot Tr(P)$$

הוכחה ניזכר שהוכחנו $|A|' = \sum |A_i|$ כאשר A מטריצה $n \times n$ של פונקציות גזירות. A_i מתקבלת מ-A ע"י גזירת שורה i של A, ואי שינוי שאר השורות.

נפעיל על מטריצת הורונסקיאן $A = W$:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} (y_1)_1' & (y_2)_1' & \dots & (y_n)_1' \\ (y_1)_2 & (y_2)_2 & \dots & (y_n)_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (y_1)_n & (y_2)_n & \dots & (y_n)_n \end{vmatrix}$$

לכל y_j שמקיים את המד"ר מתקיים: $(y_j)_1' = \sum_{i=1}^{n} P_{1,i}(x) \cdot (y_j)_i$. לכן, השורה הראשונה של A_1 היא למעשה צירוף ליניארי של שורות המטריצה המקורית A:

$$\text{Row}_1(A_1) = P_{1,1}R_1 + P_{1,2}R_2 + \dots + P_{1,n}R_n$$

כאשר R_i הן השורות של A.

הדטרמיננטה $|A_1|$ נראית ככה (כאשר $R_2, R_3 \dots$ הן השורות המקוריות של A):

$$|A_1| = \det \begin{pmatrix} P_{1,1}R_1 + P_{1,2}R_2 + \dots + P_{1,n}R_n \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_n \end{pmatrix}$$

לכן, אחרי פעולות שורה, נישאר עם:

$$|A_1| = \det \begin{pmatrix} -- \ P_{1,1}R_1 \ -- \\ -- \ R_2 \ -- \\ -- \ R_3 \ -- \\ \vdots \\ -- \ R_n \ -- \end{pmatrix} = P_{1,1}|A|$$

סה"כ:

$$|A|' = \sum_{i=1}^{n} |A_i|' = (P_{1,1} + ... + P_{n,n})|A|$$

ובגלל שסימנו $A = W(y_1, ..., y_n) := W$ נקבל:

$$W' = \underbrace{(P_{1,1} + ... + P_{n,n})}_{Tr(P)} \cdot W$$

20.1 מערכת מטריציונית

מערכת מטריצית/ מטריציונית

בהינתן $P(x)$, נגדיר מד"ר מטריצי באופן הבא:

$$\begin{cases} Y' = P \cdot Y \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

כאשר כעת Y זו מטריצה $n \times n$.

הבחנה: כל עמודה y_i של Y מקיימת מד"ר $\begin{cases} y' = Py \\ y(x_0) = (\text{עמודה של } Y_0) \end{cases}$

<u>תכונות של $Y' = P \cdot Y$:</u>

1. יש פתרון אחד ויחיד אם נוסיף תנאי התחלה.
2. $\det Y = W(\text{עמודות } Y)$

מסקנה מתכונה 2: אם $\det Y \neq 0$ באיזשהי נקודה, אז היא שונה מאפס בכל נקודה. בנוסף,

$$\det Y = \det\left(Y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} Tr(P)dt}\right)$$

נגדיר מושג חדש:

20.1.1 פתרון יסודי

פתרון יסודי

פתרון ל-$Y' = P \cdot Y$ יקרא פתרון יסודי אם **Y הפיכה לכל $\mathbf{x \in I}$**.

אם מצאנו פתרון יסודי אז מצאנו n פתרונות בת"ל - העמודות של הפתרון Y. כלומר מצאנו בסיס למרחב הפתרונות.

משפט

אם Y פתרון יסודי של $Y' = P \cdot Y$, אז כל פתרון $V(x)$ ל-$Y' = P \cdot Y$ ניתן לכתוב כך:

$$V(x) = Y(x) \cdot \underbrace{C}_{\text{קבוע}}$$

למעשה, אם יש תנאי התחלה $V(x_0) = C$ אז V חייב להיות $V(x) = Y(x) \cdot (V(x_0) \cdot C)$

הוכחה יהי V פתרון כלשהו ל-$Y' = P \cdot Y$ עם תנאי התחלה $V(x_0) = V_0$.

נסתכל על $\tilde{V}(x) = Y(x) \cdot \underbrace{\left(Y^{-1}(x_0) \cdot V_0\right)}_{C}$:

נשתמש בטענת עזר:

> אם $Y(x)$ פתרון למד"ר, אז גם $C \cdot Y(x)$ פתרון.

הוכחה:

$$(C \cdot Y(x))' = C'Y(x) + Y'(x)C = Y'(x) \cdot C = P \cdot Y \cdot C \implies (CY)' = P(CY)$$

מטענת העזר: $\tilde{Y}$ מקיים $\tilde{Y}' = P \cdot \tilde{Y}$ ($\tilde{Y}$ גם פתרון). נבדוק את תנאי ההתחלה:

$$\tilde{Y}(x_0) = Y(x_0) \cdot Y^{-1}(x_0)V_0 = V_0$$

ל-$\tilde{Y}$ יש את אותו תנאי התחלה כמו ל-V.

20.2 מערכת הומוגנית עם מקדמים קבועים

נסתכל על $y' = Py$, כאשר עכשיו P מטריצה של **סקלרים**.

נתחיל ב"לנחש" פתרונות: נחפש פתרון מהצורה:

$$e^{\lambda x} \cdot \vec{v}$$

נציב $y = e^{\lambda x} \cdot \vec{v}$ במד"ר. ($\vec{v}$ וקטור קבוע).

$$y' = (e^{\lambda x} \cdot \vec{v})' = \lambda e^{\lambda x} \cdot \vec{v} \underset{\text{נרצה}}{=} PY$$

כלומר, נחפש $\lambda, \vec{v}$ כך שמתקיים:

$$\lambda e^{\lambda x} \cdot \vec{v} = Pe^{\lambda x} \cdot \vec{v}$$

נחלק ב-$e^{\lambda x}$:

$$\lambda \vec{v} = P\vec{v}$$

כלומר, אם λ ע"ע של P ו-V ו"ע מתאים, אז מצאנו פתרון $e^{\lambda x} \cdot \vec{v}$.

תזכורת

> עבור מטריצה $P \in \mathbb{M}_{n\times n}$ מעל $\mathbb{C}$, התנאים הבאים שקולים:
>
> 1. למטריצה P יש n וקטורים עצמיים בלתי תלויים ליניארית (בת"ל).
>
> $$\Updownarrow$$
>
> 2. לכל ערך עצמי λ של המטריצה P, הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגיאומטרי.
>
> $$\Updownarrow$$
>
> 3. המטריצה P לכסינה מעל $\mathbb{C}$

20.2.1 משפט

נניח ש-P ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{C}$, אזי יש n פתרונות בת"ל מעל $\mathbb{C}$ מהצורה:

$$e^{\lambda x}\cdot\vec{v}$$

פתרונות מרוכבים יגיעו בזוגות, חלק ממשי וחלק מרוכב.

הוכחה נניח ש-P לכסינה, לכל ע"ע יש מספר כלשהו של ו"ע בת"ל. נסמן - ל-λ_i ריבוי אלגברי/גיאומטרי m_i ו-$v_{i,1},...,v_{i,m_i}$ בסיס למרחב העצמי $\ker(P-\lambda_i I)$.

בגלל לכסינות של P יש סה"כ n וקטורים עצמיים בת"ל. נחשב ורונסקיאן ונראה שלא מתאפס:

$$\begin{aligned}W&=\det(\underbrace{\vec{v}_{1,1}e^{\lambda_1 x}|...|}_{\text{עמודות } m_1}...|\vec{v}_{k,m_k}e^{\lambda_k x})\\&=e^{m_1\cdot(\lambda_1 x)+...+m_k\cdot(\lambda_1 k)}\det(\vec{v_1}|...|\vec{v_k})\\&=e^{Tr(P)}\det(\vec{v_1}|...|\vec{v_k})=e^{Tr(P)}W(0)\underbrace{\neq 0}_{\text{מטריצה לכסינה}}\end{aligned}$$

אם λ_i ממשי $\leftarrow$ כל הו"ע שלו ממשיים.

אם λ_i מרוכב עם ו"ע v_i $\leftarrow$ $\bar{\lambda_i}$ גם ע"ע מאותו ריבוי עם ו"ע $\bar{v_i}$.

במקום לעבוד עם פתרונות מרוכבים, נשתמש בחלק הממשי והמדומה כדי לקבל שני פתרונות ממשיים בת"ל:

$$\begin{aligned}\vec{y}_{\text{real}}&=\text{Re}(e^{\lambda x}\vec{v})=\frac{e^{\lambda x}\vec{v}+e^{\bar{\lambda}x}\bar{\vec{v}}}{2}\\\vec{y}_{\text{imag}}&=\text{Im}(e^{\lambda x}\vec{v})=\frac{e^{\lambda x}\vec{v}-e^{\bar{\lambda}x}\bar{\vec{v}}}{2i}\end{aligned}$$

אם נחליף זוג מרוכב בזוג ממשי נקבל: ורונסקיאן מקורי כפול סקלר שונה מ-0.

20.2.2 דוגמאות

דוגמא 1

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} y$$

נחפש ע"ע:

$$\det(xI - P) = x^2 - tr(P)x + \det(P) = x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = 3, -1$$

הערכים העצמיים הם: $\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$ מסקנה: יש 2 פתרונות ממשיים בת"ל:

$$e^{3x}\vec{v_1},\ e^{-x}\vec{v_2}$$

דוגמא 2

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} y$$

הפולינום האופייני הוא: $x^2 - 2x + 5$. נחשב ע"ע:

$$x^2 - 2x + 5 \iff x = 1 \pm 2i$$

הערכים העצמיים הם: $\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i$. הוקטור העצמי של λ_1 הוא $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$. לכן מצאנו 2 פתרונות מרוכבים בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix} e^{x(1-2i)}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} e^{x(1+2i)}$$

בשביל לקבל זוג פתרונות ממשיים בלתי תלויים, ניקח חלק ממשי וחלק מדומה:

$$\Re\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} e^{x(1+2i)}\right) = e^x \Re\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} e^{2ix}\right) = \boxed{e^x \begin{pmatrix} \cos 2x \\ \cos 2x + \sin 2x \end{pmatrix}}$$

$$\Im\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} e^{x(1+2i)}\right) = e^x \Im\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix} [\cos 2x + i \sin 2x]\right) = \boxed{e^x \begin{pmatrix} \sin 2x \\ \sin 2x - \cos 2x \end{pmatrix}}$$

אלו הפתרונות הממשיים בת"ל למד"ר.

21 הרצאה 21 - 6/1

הערה על המשפט למציאת פתרונות אם P לא לכסינה, הפתרונות הנ"ל בת"ל. בגלל שאם $v_{i,j}$ ו"ע בת"ל של ע"ע, אז $v_{i,j}$ סדרה (לכל הע"ע-ים) בת"ל של וקטורים עצמיים. לכן, $e^{\lambda_i x} \cdot v_{i,j}$ סדרה בת"ל של פונקציות. (נניח שיש תלות, נציב $x = x_0$ ונקבל תלות של $v_{i,j}$. סתירה.)

21.1 אקספוננט של מטריצה

מטרה ורקע השימוש באקספוננט מטריציוני מיועד לפתרון המערכת $y' = Py$ גם במקרים שבהם המטריצה P אינה לכסינה.

הגדרת האקספוננט המטריציוני לכל מטריצה ריבועית A, ניתן להגדיר את המטריצה e^A.

- הפיכות: e^A היא מטריצה הפיכה מאותו סדר של A.
- תכונות: המטריצה e^A מקיימת תכונות הדומות לאלו של הפונקציה המעריכית הסקלארית e^x.

יישום לפתרון המערכת כדי לפתור את המערכת $y' = Py$, נגדיר מטריצה Y באופן הבא:

$$Y = e^{Px}$$

גזירת הפתרון: הנגזרת של המטריצה Y מקיימת:

$$Y' = P \cdot e^{Px} = P \cdot Y$$

מכיוון ש-Y מקיימת את המשוואה $Y' = PY$, היא מהווה פתרון יסודי של המערכת.

בסיס למרחב הפתרונות כתוצאה מכך ש-Y הוא פתרון יסודי: עמודות המטריצה Y מהוות בסיס למרחב הפתרונות של המד"ר.

הגדרה

האקספוננט המטריציוני

האקספוננט המטריציוני מוגדר עבור מטריצה ריבועית A באמצעות הטור:

$$e^A = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}, \quad A^0 = I$$

הערה: התכנסות של סדרת מטריצות $A \xrightarrow[m\to\infty]{} A_m$ שקולה להתכנסות של כל רכיב ורכיב במטריצה בנפרד:

$$(A_m)_{i,j} \xrightarrow[m\to\infty]{} (A)_{i,j}$$

משפט

נגדיר את הפונקציה המטריציונית:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i x^i}{i!}$$

הטור המגדיר את $f(x)$ מתכנס במידה שווה (במ"ש) בכל קטע סופי.

הוכחה נגדיר נורמה על מטריצות באופן הבא:

$$||B||=\sum_{1\le i,j\le n}^{\infty}|B_{i,j}|$$

נורמה זו מקיימת את התכונות הבאות:

1. $||B||\ge 0$
2. $||B||=0 \iff B=0$
3. לינאריות וכפל בסקלר
4. $||AB||\le ||A||\cdot||B||$. נוכיח:

$$||AB||=\sum_{1\le i,j\le n}^{\infty}|(AB)_{i,j}|=\sum_{i,j}^{\infty}\sum_{k}|(A)_{i,k}(B)_{k,j}|\le\sum_{i,j,k}|(A)_{i,k}(B)_{k,j}|\le\underbrace{\sum_{i,k}|(A)_{i,k}|}_{||A||}\underbrace{\sum_{\ell,j}|(B)_{\ell,j}|}_{||B||}$$

נניח ש-x שייך לקטע סופי $I\subseteq[-N,N]$. נחסום את האיבר הכללי בטור של $f(x)$:

$$\left|\left|\frac{A^i x^i}{i!}\right|\right|\underset{\text{תכונה 4}}{\le}||A^i||\frac{||x^i||}{i!}\le||A^i||\frac{||x^i||}{i!}N^i$$

נשים לב שהטור $\sum||A^i||\frac{||x^i||}{i!}N^i$ מתכנס. לכן נוכל להפעיל את מבחן M של וירשטראס וסיימנו.

$\square$

תכונות של הפונקציה $f(x)$ להלן מספר תכונות של הפונקציה המטריציונית $f(x)=e^{Px}$.

1. $f(0)=I_n$
2. $f(x)\cdot f(y)=f(x+y)$. בפרט, $f(x)\cdot f(-x)=I_n$
3. $f'(x)=P\cdot f(x)$

22 הרצאה 22 - 12/01

הוכחת התכונות של אקספוננט מטריציוני

.2

$$f(x_1)\cdot f(x_2)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^ix_1^i}{i!}\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^jx_2^j}{j!}=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^{i+j}x_1^ix_2^j}{i!j!}\underset{n=i+j}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{A^nx_1^ix_2^{n-i}}{i!(n-i)!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}x_1^ix_2^{n-i}\underset{\text{בינום}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n(x_1+x_2)^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[A(x_1+x_2)]^n}{n!}=f(x_1+x_2)$$

.3

$$f'(x)=\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^ix^i}{i!}\right)'\underset{\text{גזירה איבר איבר}}{=}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i\cdot x^{i-1}}{i!}A^i=A\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}A^{i-1}=A\cdot f(x)$$

22.1 דוגמאות לחישוב e^{xP}

להלן חישובים של האקספוננט המטריציוני עבור מקרים פרטיים של המטריצה P:

דוגמה 1: מטריצת היחידה $P=I$ עבור מטריצת היחידה, כל החזקות הן $I^i=I$, ולכן:

$$e^{xI}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{I^ix^i}{i!}=I\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}=e^x\cdot I$$

דוגמה 2: $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ קודם נחשב את חזקות המטריצה A:

$$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-I$$
$$A^3=A^2\cdot A=-I\cdot A=-A$$
$$A^4=(A^2)^2=(-I)^2=I$$

נשתמש בטור החזקות של האקספוננט ונפצל את הסכום לאיברים זוגיים ואי-זוגיים:

$$e^{xA}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^iA^i}{i!}=\sum_{2|i}\frac{x^iA^i}{i!}+\sum_{2\nmid i}\frac{x^iA^i}{i!}=\sum_{2|i}\frac{x^i(-I)^{i/2}}{i!}+A\sum_{2\nmid i}\frac{x^i(-I)^{\frac{i-1}{2}}}{i!}$$

נשים לב, ניתן להוציא את המטריצות I ו-A מחוץ לסכומים ולקבל את טורי הטיילור של הפונקציות

הטריגונומטריות:

$$\sum_{2|i} \frac{x^i(-I)^{i/2}}{i!} = I \sum_{2|i} \frac{x^i(-1)^{i/2}}{i!} = I\cos x$$
$$A\sum_{2\nmid i} \frac{x^i(-I)^{\frac{i-1}{2}}}{i!} = A \sum_{2\nmid i} \frac{x^i(-1)^{\frac{i-1}{2}}}{i!} = A\sin x$$

סיכום: המטריצה המתקבלת היא מטריצת סיבוב:

$$e^{xA} = I\cos x + A\sin x = \begin{pmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin x \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

22.2 שיטות לחישוב e^{Ax} עבור מטריצה A כללית

שתי הבחנות המקלות על חישוב:

הבחנה 1: פעולה על וקטור עצמי

אם v הוא וקטור עצמי של A המתאים לערך עצמי λ ($Av = \lambda v$), אזי:

$$e^{Ax}v = e^{\lambda x}v$$

הוכחה: נשתמש בהגדרת הטור ובכך שמתקיים $A^i v = \lambda^i v$ לכל $i \geq 0$:

$$e^{Ax}v = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i x^i}{i!} v \underset{Av=\lambda v}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i x^i}{i!}$$

הבחנה 2: דמיון מטריצות

אם המטריצה A דומה למטריצה B דרך מטריצת מעבר T (כלומר $T^{-1}AT = B$), אזי:

$$T^{-1}e^{Ax}T = e^{Bx}$$

הוכחה:

$$T^{-1}e^{Ax}T = T^{-1}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i x^i}{i!} T = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} T^{-1}A^iT = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} B^i = e^{Bx}$$

חישוב e^{Ax} עבור מטריצה A לכסינה

במקרה שבו המטריצה A לכסינה, ניתן לפשט את חישוב האקספוננט המטריציוני באמצעות מטריצת המעבר T והמטריצה האלכסונית D:

תהליך הליכסון: אם $T^{-1}AT = D$ כאשר D מטריצה אלכסונית, אזי מתקיים:

$$T^{-1}e^{Ax}T = e^{Dx}$$
$$e^{Ax} = Te^{Dx}T^{-1}$$

חישוב האקספוננט למטריצה אלכסונית: החישוב של e^{Dx} הוא חזקה של מטריצה אלכסונית היא מטריצת החזקות של איברי האלכסון:

$$e^{Dx} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{D^i x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} d_1^i & & \\ & \ddots & \\ & & d_n^i \end{pmatrix} \frac{x^i}{i!} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(d_1 x)^i}{i!} & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(d_n x)^i}{i!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_n x} \end{pmatrix}$$

מבנה מטריצת המעבר: המטריצה T היא מטריצת הווקטורים העצמיים, כאשר העמודה ה-i היא הווקטור העצמי v_i המתאים לערך העצמי d_i.

$$e^{Ax} = (v_1|\dots|v_n) \cdot e^{Dx} \cdot T^{-1}$$

מציאת בסיס למרחב הפתרונות: העמודות של e^{Ax} מהוות n פתרונות בת"ל למערכת $y' = Py$. מכיוון שכל עמודה ב-e^{Ax} היא צירוף ליניארי של העמודות של המטריצה Te^{Dx}, מספיק לתאר את העמודות של המכפלה הזו:

$$Te^{Dx} = (v_1|\dots|v_n) \begin{pmatrix} e^{d_1 x} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{d_n x} \end{pmatrix} = (v_1 e^{d_1 x}|\dots|v_n e^{d_n x})$$

מסקנה: במקרה הלכסין, קבוצת הפונקציות $\{v_i e^{d_i x}\}$ מהווה בסיס למרחב הפתרונות.

נדבר עכשיו על המקרה ש-A לא לכסינה.

חישוב e^{Ax} עבור מטריצה A שאינה לכסינה (צורת ג'ורדן)

כאשר המטריצה A אינה לכסינה, נשתמש בפירוק לצורת ג'ורדן כדי לחשב את האקספוננט המטריציוני.

1. צורת ג'ורדן

קיימת מטריצה הפיכה T כך שמתקיים $T^{-1}AT = J_A$, כאשר J_A היא מטריצת בלוקי ג'ורדן:

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

2. חישוב אקספוננט של בלוק ג'ורדן

כדי לחשב את e^{xJ_i}, נפרק את הבלוק J לסכום של מטריצת יחידה ומטריצה נילפוטנטית N:

$$J = \lambda I + N$$

כאשר N היא מטריצה עם 1 מעל האלכסון ו-0 בכל שאר המקומות.

טענת עזר:

אם שתי מטריצות A, B מתחלפות ($AB = BA$), אזי $e^{A+B} = e^A e^B$

הוכחה: נוכל להראות באינדוקציה: $(A+B)^n = \sum \binom{n}{i} A^i B^{n-i}$ לכן:

$$e^{A+B} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{i} A^i B^{n-i}}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{i} A^i B^j}{n!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} \frac{B^j}{j!} = e^A e^B$$

יישום לבלוק ג'ורדן: מכיוון ש-λI מתחלפת עם כל מטריצה (ובפרט עם N), מתקיים:

$$e^{xJ} = e^{x(\lambda I + N)} = e^{x\lambda I} \cdot e^{xN} = e^{\lambda x} I \cdot e^{xN}$$

3. חישוב החלק הנילפוטנטי e^{xN}

מכיוון ש-N נילפוטנטית ($N^n = 0$), הטור סופי:

$$e^{xN} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^i}{i!} N^i = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \dots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & x & \dots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & x \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. סיכום התהליך ומבנה הפתרון

לאחר מציאת צורת ג'ורדן J_A ומטריצת המעבר T, האקספוננט המטריציוני הוא:

$$e^{xA} = Te^{xJ_A}T^{-1}$$

כאשר e^{xJ_A} היא מטריצת בלוקים המורכבת מהאקספוננטים של כל בלוק ג'ורדן בנפרד.

מסקנות על בסיס הפתרונות:

- בסיס למרחב הפתרונות ניתן על ידי העמודות של המטריצה Te^{xJ_A}.
- איברי הפתרונות הם מהצורה $\frac{x^i}{i!}e^{\lambda_j x}$.
- החזקה המקסימלית של x בפתרון המתאים ל-λ_j קטנה ממש מגודל בלוק הג'ורדן המתאים, ובפרט קטנה ממש מהריבוי האלגברי של λ_j.
- כל פתרון הוא מהצורה $\sum e^{\lambda_i x}\vec{P}_i(x)$, כאשר $\vec{P}_i(x)$ הוא וקטור שכל רכיב בו הוא פולינום במעלות שתוארו לעיל.

מבנה הבסיס למרחב הפתרונות במקרה הכללי כאשר מטריצת המקדמים A היא מטריצה קבועה, ניתן לתאר את בסיס מרחב הפתרונות של המערכת $y' = Ay$ ע"י עמודות של $Te^{J_A x}$. עמודות אלו מהוות קבוצה של n פתרונות בלתי תלויים ליניארית (בת"ל).

הערה האיברים המופיעים במטריצה $Te^{J_A x}$ הם מהצורה:

$$0 \quad \text{או} \quad \frac{x^i}{i!}e^{\lambda_j x}$$

תכונות המעריך i:

- i קטן ממש מגודל בלוק הג'ורדן המתאים לערך העצמי λ_j.
- גודל בלוק הג'ורדן של λ_j קטן או שווה לריבוי האלגברי של λ_j.

מבנה הפתרון הכללי לאחר הכפל משמאל במטריצת המעבר T, מתקבל כי כל פתרון של המערכת הוא צירוף ליניארי של פתרונות מהצורה:

$$e^{\lambda_i x}\vec{P}_i(x)$$

יש בסיס בגודל n של פתרונות כאלה.

מעלת הפולינום: כדי להקל על מציאת הווקטור הפולינומי $\vec{P}_i(x)$, ניתן להסתמך על כך שמעלת כל קואורדינטה ב-$\vec{P}_i(x)$ קטנה ממש מהריבוי האלגברי של הערך העצמי λ_i.

דוגמה: פתרון מערכת עם ערך עצמי חוזר (מקרה לא לכסין)

נפתור את המערכת הבאה:

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y$$

1. מציאת ערכים עצמיים: נחשב את הפולינום האופייני:

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det(A) = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0$$

קיבלנו ערך עצמי $\lambda = 1$ עם ריבוי אלגברי (ר"א) 2.

2. מציאת וקטורים עצמיים: נחפש וקטור עצמי v_1 המקיים $(A - I)v_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 - 2v_2 = 0 \implies \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מכיוון שקיבלנו רק וקטור עצמי אחד (ריבוי גיאומטרי 1), המטריצה אינה לכסינה ובלוק הג'ורדן הוא:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. מציאת פתרון שני (וקטור עצמי מוכלל): כבר יש לנו פתרון אחד: $y_1(x) = e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. לפתרון השני ישנן שתי דרכים (ניחוש או ג'ורדן), שתיהן מובילות לחיפוש פתרון מהצורה:

$$y_2(x) = e^x(\vec{v}_2 + x\vec{v}_1)$$

נמצא את הוקטור המוכלל $\vec{v}_2$ לפי ההגדרה $(A - I)v_2 = v_1$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. סיכום הפתרון: הפתרון הנוסף שמצאנו הוא:

$$y_2(x) = e^x \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = e^x \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ x \end{pmatrix}$$

בסיס למרחב הפתרונות הוא:

$$\left\{ e^x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ e^x \begin{pmatrix} 2x + 1 \\ x \end{pmatrix} \right\}$$

23 הרצאה 23

מציאת בסיס למרחב הפתרונות באמצעות צורת ג'ורדן

רקע ראינו כי העמודות של המטריצה e^{Px} מהוות n פתרונות בת"ל למערכת המד"ר. אם λ הוא ערך עצמי (ע"ע) עם וקטור עצמי (ו"ע) v, אזי $ve^{\lambda x}$ תמיד פתרון ל- $\vec{y'} = P\vec{y}$ (כאשר P קבועה).

1. צורת ג'ורדן

תמיד ניתן להביא מטריצה לצורת ג'ורדן:

$$T^{-1}AT = J_A, \quad J_A = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

על מנת למצוא את העמודות של e^{Px}, מספיק לחשב את עמודות המטריצה $Te^{J_P x}$.

2. מקרה של בלוק ג'ורדן בודד

נבחן בלוק ג'ורדן בודד עבור ערך עצמי λ עם ריבוי אלגברי n וריבוי גיאומטרי 1:

$$e^{Jx} = e^{\lambda x} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \dots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & x & \dots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. שרשראות ג'ורדן ובניית הפתרון

אם המטריצה P דומה לבלוק ג'ורדן J, נגדיר את מטריצת המעבר $T = (V_1| \dots |V_n)$. עמודי המטריצה יוצרים שרשרת ג'ורדן המקיימת:

$$\begin{cases} PV_1 = \lambda V_1 \\ (P - \lambda I)V_2 = V_1 \\ \vdots \\ (P - \lambda I)V_n = V_{n-1} \end{cases}$$

נחשב את המכפלה Te^{Jx}:

$$e^{x\lambda}\underbrace{(V_1|\dots|V_n)}_{T}\begin{pmatrix}1 & x & \frac{x^2}{2!} & \dots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\ 0 & 1 & x & \dots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & x\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix} = e^{x\lambda}\left(V_1 \mid xV_1+V_2 \mid \cdots \mid \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}V_k\right)$$

4. מסקנה

אם $V_1,\dots,V_n$ הם הוקטורים במטריצה המג'רדנת T המתאימים לבלוק ג'ורדן ספציפי עם ערך עצמי λ, אזי n הפתרונות המתאימים בבסיס הם:

$$\left\{e^{\lambda x}V_1,\ e^{\lambda x}(xV_1+V_2),\ \dots,\ e^{\lambda x}\left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}V_1+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}V_2+\cdots+V_n\right)\right\}$$

ראינו העמודות של e^{Px} הן n פתרונות בת"ל. אם λ ע"ע עם ו"ע v, אז $ve^{\lambda x}$ תמיד פתרון ל- $\vec{y}' = \underbrace{P}_{\text{קבועה}}\vec{y}$.

תמיד ניתן לג'רדן מטריצה:

$$T^{-1}AT = J_A, \quad J_A = \begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k\end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_i & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i\end{pmatrix}$$

על מנת למצוא את העמודות של e^{Px} מספיק לחשב את $Te^{J_P x}$.

נראה מה קורה במקרה של בלוק גורדן בודד:

$$J = \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix} \quad \lambda$$ ע"ע עם ריבוע אלגברי n וריבוי גיאומטרי 1

$$e^{Jx} = e^{\lambda x}\cdot\begin{pmatrix}1 & x & \frac{x^2}{2!} & \dots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\ 0 & 1 & x & \dots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}\\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & x\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

אם P דומה ל-J:

$$T = (V_1|...|V_n)$$

$$\begin{cases} PV_1 = \lambda V_1 \\ \vdots \\ (P-\lambda I)V_n = V_{n-1} \end{cases}$$

נשים לב:

$$e^{x\lambda}\underbrace{(V_1|...|V_n)}_{T}\begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2!} & \dots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & x & \dots & \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{x\lambda}\left(V_1 \mid xV_1+V_2 \mid ...| \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}V_1 + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}V_2 + ... + V_n\right)$$

מסקנה: אם $V_1, ..., V_n$ וקטורים במטריצה המג'רדנת T שמתאימים לבלוק גורדן ספציפי עם ע"ע λ, אז n העמודות המתאימות ב-$Te^{J_P x}$ הן:

$$\left\{e^{x\lambda}V_1, e^{x\lambda}(xV_1+V_2), ..., e^{x\lambda}\left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}V_1 + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}V_2 + ... + V_n\right)\right\}$$

דוגמא

$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y$$

פ"א: $(x-1)^3$ ע"ע 1 עם ריבוי אלגברי 3.

ו"ע:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0$$

לכן המרחב העצמי הוא:

$$sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

לכן הריבוי הגיאומטרי הוא 2. מספר הבלוקים שמתאימים לע"ע בצורת זורדן הוא תמיד הריבוי הגיאומטרי.

$$J_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

איך נראית המטריצה המג'רדנת?

$$T = (\underbrace{v_1|v_2}_{\text{מתאימות לבלוק הראשון}} \quad | \quad \underbrace{v_3}_{\text{מתאים לבלוק השני}})$$

יש כבר 2 פתרונות בת"ל $\left\{e^x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ הפתרון הנוסף יהיה $e^x(x\underbrace{\vec{v_1}}_{\text{ו"ע}} + \underbrace{\vec{v_2}}_{\text{ו"ע מוכלל}})$.

נחפש ו"ע $\vec{v_1}$ שיש לו ו"ע מוכלל $\vec{v_2}$: $v_1 \in span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

מחפשים v_1 כך שהמערכת הבאה פתירה: $(P-I)v_2 = v_1$

$$v_2 = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} e^{xJ}$$

לכן $v_1 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ ואז $v_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

ניקח לדוגמא: $v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

נסכם: v_1, v_3 בסיס למרחב העצמי אז

$$\left\{e^x\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, e^x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \leftarrow \left\{e^x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, e^x\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}, e^x\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}x + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$ 3 פתרונות בת"ל

23.1 מערכת לא הומוגנית

נרצה לפתור את

$$y' = \vec{P}y + \vec{q}$$

q, P פונקציות.

ממשפט הקיום והיחידות: יש פתרון אחד ויחיד לכל תנאי התחלה $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$

נסמן את מרחב הפתרונות ב-V_q.

יש קשר בין V_q ל-V_0. אם q פיתרון ב-V_q אז:

$$V_0 \to V_q, f \mapsto f + g$$

$$V_q \to V_0, f \mapsto f - g$$

לכן

$$V_q = \{f + g : f \in V_0\}$$

נסביר למה אם f פתרון ל-$y' = Py$ אז $f + g$ פתרון ל-$y' = Py + q$.

$$(f+g)' = f' + g' = Pf + Pg + q = P(f+g) + q$$

24 הרצאה 24 - 19/1

מערכת לינארית לא הומוגנית
$$\vec{u'} = P\vec{u} + q$$

תזכורת אם V_q אוסף הפתרונות למד"ר בקטע I, אז קיימות 2 העתקות:

$$\begin{aligned} V_0 &\to V_q & V_q &\to V_0 \\ f &\mapsto f+g & f &\to f-g \end{aligned}$$

העתקות אלו חח"ע ועל (כי $u \to u - Pu$ זו העתקה לינארית).

אז כדי להבין את V_q, צריך למצוא את V_0 ופתרון פרטי $g \in V_q$ אוסף הפתרונות של המד"ר הלא הומוגני. V_q צ"ל של הבסיס של V_0 מוזז ב-g.

איך נמצא את g? ננחש g מהצורה:

$$g = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i = \underbrace{Y}_{\text{מטריצה שעמודותיה } y_i} \cdot C(x)$$

נציב $Y \cdot C(x)$ בתור $\vec{u}$ ב-$u' = Pu + q$:

$$u' = (Y \cdot C(x))' = Y' \cdot C(x) + Y \cdot C'(x)$$

נרצה ש-$Y \cdot C(x)$ יקיים:
$$Y' \cdot C(x) + Y \cdot C'(x) = P \cdot YC(x) + q$$

Y פתרון יסודי, לכן מקיים $Y' = PY$ לכן מתקיים $Y \cdot C'(x) = q$. עוד מהגדרת פתרון יסודי, Y הפיכה לכל x. לכן נכפול ב-$Y(x)^{-1}$ משמאל:

$$C'(x) = (Y(x))^{-1} q$$

כלומר $\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} q(t) dt + d$ פתרון כללי ל-$C(x)$ כאשר $d \in \mathbb{R}^n$ ו-x_0 נקודה ב-I.

נציב פתרון זה בתוך g:

$$g = Y(x)C(x) = Y(x) \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} q(t) dt + Y(x) d$$

המחובר $Y(x)d$ מייצג פתרון כללי ל-$u = Pu$ המערכת ההומוגנית.

המחובר $Y(x) \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} q(t) dt$ מייצג פתרון פרטי למערכת הלא הומוגנית.

כמה תופעות + דוגמא

1. $Y(x) \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} q(t) dt$ פתרון פרטי שמתאפס ב-$x = x_0$.
2. אם מחפשים פתרון פרטי $u' = Pu + q$ עם תנאי התחלה $u(x_0) = u_0$, אפשר למצוא אותו כך $u = Y(x) \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} q(t) dt + Y(x) d$. נחפש d כך ש-$u(x_0) = u_0$, $Y(x_0) d = u_0$, $d = Y(x_0)^{-1} u_0$.

   לסיכום $u = Y(x) \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1} q(t) dt + Y(x_0)^{-1} u_0$ הפתרון היחיד ל-$u = Pu + q$ עם תנאי התחלה $u(x_0) = u_0$.

3. דוגמא - המקרה ש-P מטריצה קבועה. במקרה זה: $Y(x) = e^{Px}$ פתרון יסודי, לכן הפתרון היחיד ל-$u' = Pu + q$ עם תנאי התחלה $u(x_0) = u_0$ הוא:

$$u(x) = e^{Px} \left(\int_{x_0}^{x} e^{-Pt} g(t) dt + e^{-Px_0} u_0 \right) = \int_{x_0}^{x} e^{P(x-t)} g(t) dt + e^{P(x-x_0)} u_0$$

תורת שטרום ליוביל

עוסקת במד"ר לינארי מסדר 2:

$$y'' + p_1 y' + p_2 y = q$$

כאשר p_1, p_2, q פונקציות רציפות ב-I ו-$y : I \to \mathbb{R}$.

נתחיל בזוג משפטים של שטרום - המקרה ההומוגני:

1. משפט ההפרדה של שטרום

יהיו y_1, y_2 פתרונות בת"ל למד"ר ההומוגני.
בין זוג אפסים של y_1 קיים אפס של y_2.

2. משפט ההשוואה של שטרום

ניקח 2 מד"ר-ים:

$$\begin{cases} u'' + Pu = 0 \\ v'' + Qv = 0 \end{cases}$$

נניח P, Q זוג פונקציות רציפות ב-I, $Q \geq P$ בקטע. נסמן α, β אפסים של u פתרון לא טריוויאלי. נניח שקיים לפחות $x \in (\alpha, \beta)$ כך ש-$Q(x) > P(x)$.

אזי ל-v פתרון לא טריוויאלי למד"ר השני, קיים אפס בקטע (α, β).

הוכחה נניח בה"כ ש-α, β זוג אפסים עוקבים. (מותר כי ל-u יש מספר סופי של אפסים).

בהכרח, u עם סימן קבוע ב-(α, β):

$$x \in (\alpha, \beta), \quad u(x) > 0$$

מתקיים:

$$u'(\alpha) > 0 > u'(\beta)$$

הסבר: $u'(\alpha), u'(\beta) \neq 0$ כי אין אפסים כפולים. בנוסף, $u'(\alpha) = \lim \frac{u(\alpha+h)-u(\alpha)}{h} \geq 0$ ולכן $u'(\alpha) > 0$. בדומה $u'(\beta) < 0$.

נניח בשלילה: איו ל-v אפס בין α ל-β. בה"כ $v(x) > 0$ לכל $x \in (\alpha, \beta)$. לכן נובע $v(x) \geq 0$ עבור $x \in [\alpha, \beta]$.

$$0 = (v'' + Qv)u - (u'' + Pu)v = v''u - u''v + (Q-P)vu = (v'u - u'v)' + (Q-P)vu$$

נעשה אינטגרל על הקטע (α, β):

$$\int_\alpha^\beta 0 dx = \int_\alpha^\beta (v'u - u'v)' + (Q-P)vu\, dx = [(v'u - u'v)]_{x=\alpha}^{x=\beta} + \int_\alpha^\beta (Q-P)vu\, dx$$

כאשר $\int_\alpha^\beta (Q-P)vu\,dx$ חיובי כי u,v חיוביות ב-(α,β).
האינטגרל חיובי ממש. המחובר הוא:

$$[(v'u-u'v)]_{x=\alpha}^{x=\beta} = \cancel{v'(\beta)u(\beta)} - \underbrace{u'(\beta)}_{\geq 0}\underbrace{v(\beta)}_{\leq 0} - \cancel{v'(\alpha)u(\alpha)} + \underbrace{u'(\alpha)}_{\leq 0}\underbrace{v(\alpha)}_{\geq 0} \geq 0$$

סתירה!

דוגמאות לשימוש

1. נניח P פונקציה רציפה בקטע I חסום וסגור. נניח $P \leq 0$ ב-I. אז פתרון u ל-$u''+Pu=0$ יכול להתאפס לכל היותר פעם אחת ב-I.

   הוכחה נניח בשלילה - קיימים ל-u זוג אפסים ב-I. נשווה ל-$v''+0\cdot v=0$. יש שני מקרים:

   (א) $P=0$ ב-I: $u''=0$ לכן $u=ax+b$ לכן קיים אפס אחד לכל היותר.

   (ב) $P(x)>0$ עבור איזשהו $x \in I$: לפי משפט ההשוואה ל-v יש אפס בין זוג האפסים של u. אבל v - יכולה להיות כל פונקציה לינארית. ניקח v חיובית בקטע I ונקבל סתירה. ($v=1$).

2. נחקור אפסים של פתרונות של משוואת בסל:

$$x^2u''+xu'+(x^2-\alpha^2)u=0$$

α - פרמטר ממשי.

נוכיח משפט:

(א) לכל פתרון u יש אינסוף אפסים ב-$(0,\infty)$.

(ב) אפשר לסדר את האפסים בסדרה עולה: $c_1<c_2<\ldots$ ומתקיים $\lim(C_{n+1}-C_n)=\pi$.

נעשה שינוי משתנים:
טענה כללית: $u''+p_1u'+p_2u=0$. נראה שיש g רציפה כך שאם נגדיר $u=y\cdot g$ אז y תקיים: $y''+y\cdot h=0$, $h=p_2-\frac{p_1^2}{4}-\frac{p_1'}{2}$.
הוכחת הטענה: נציב $u=y\cdot g$:

$$(yg)''+p_1(yg)'+p_2yg=0$$

$$y''g+2y'g'+yg''+p_1y'g+p_1yg'+p_2yg=0$$

המקדם של y' זה p_1g+2g' נרצה g כך שמקדם זה הוא 0:

$$p_1g+2g'=0$$

לדוגמא $g=e^{-\int_{x_0}^x \frac{p_1}{2}dx}$. מה שנותר:

$$y''g+yg''+p_1yg'+p_2yg=0 \iff y''+y'\left(\frac{g''}{g}+p_2\frac{g'}{g}+p_2\right)$$

מה נקבל עבור משוואת בסל?

$$x^2u'' + xu' + (x^2-\alpha^2)u = 0$$
$$u'' + \frac{u'}{x} + \left(1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)u = 0$$
$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{x} \\ p_2 = 1-\frac{\alpha^2}{x^2}\end{cases} \to h = 1-\frac{\alpha^2}{x^2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2x^2}$$

לכן שינוי המשתנים $u = y\frac{1}{\sqrt{x}}$ מוביל למד"ר בצורס שטרום:

$$y'' + \left(1+\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{x^2}\right)y = 0$$

ל-u, v יש אותם אפסים.

נוכיח את (א): אם x גדול מספיק, $1+\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{x^2} \geq \frac{1}{2}$. לכן, ל-$x$ גדול מספיק מותר להשוות את האפסים של $v'' + \frac{1}{2}v = 0$ ולאפסים של $y'' + \left(1+\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{x^2}\right)y = 0$.

ל-v יש פתרון מהצורה $v = \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

ל-v הזו יש ∞ אפסים בין x_0 ל-∞, לא משנה מהוא x_0 לכן ל-y יש אינסוף אפסים. (למעשה זה נותן סדרה של אפסים של y שואפת ל-∞, לאו דווקא כל האפסים).

25 הרצאה 25 - 20/1

נוכיח את (ב): ניזכר, בכל קטע חסום וסגור, יש מספר סופי של אפסים של y. נשתמש בעובדה זו בסדרת הקטעים:

$$\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], ..., [n, n+1]$$

קטעים אלו מכסים את $(0,\infty)$, וכל אחד מכיל מספר סופי של אפסים. לכן, מספר האפסים בכל $(0,\infty)$ הוא בן מניה. נראה שלא קיימת סדרת אפסים ששואפת ל-0: (כי אז נקבל סדרה ללא איבר מינימלי - לא ניתן לסדר אותה בסדר עולה).

טענה: קיים $\varepsilon > 0$ כך שלא קיימים אפסים ב- $(0,\varepsilon]$.

נניח קודם: $\alpha \neq 0$ עבור x קטן מספיק ($x \leq x_0$) כך ש:

$$1+\frac{\frac{1}{4}-\alpha^2}{x^2} \leq \frac{c}{x^2} \quad c < \frac{1}{4} \text{ עבור}$$

נשווה את y לפתרון של $u'' + \frac{c}{x^2}u = 0$. נשים לב, אם נכפיל ב-x^2 נקבל משוואת אוילר. לכן, אם נציב $u = x^r$ נקבל פתרונות: $r = \frac{1\pm\sqrt{1-4c}}{2}$ ממשי. נשים לב ש-x^r לא מאתפס בכלל, לכן אין ל-y אפסים בין 0 ל-x_0.

עכשיו נניח $\alpha = 0$: המד"ר נראה כך - $y'' + \left(1+\frac{1}{4x^2}\right)y = 0$. כל פתרון $u = x^r$ יכיל r לא ממשי.

נשים לב, $\Re(x^r)$ מתאפס אינסוף פעמים ב-$(0,1)$.

נחזור להגדרת המשוואה המקורית:

$$\begin{cases} u'' + \frac{u'}{x} + u = 0 & \alpha = 0 \\ v'' + \frac{v'}{x} + v\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0 & \alpha = 1 \end{cases}$$

אנו יודעים של-v יש אפס מינימלי. מסתבר שיש קשר בין v ל-u.

נשתמש במשפט רול ונקבל שבין כל 2 אפסים של u יש אפס של u'. נגזור את משוואת בסל עבור $\alpha = 0$:

$$u^{(3)} + \frac{u''}{x} - \frac{u'}{x^2} + u' = u^{(3)} + \frac{u''}{x} + u'\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 0$$

כלומר, u' פותר את משוואת בסל עבור $\alpha = 1$. ראינו של-u' קיים אפס מינימלי. לכן, גם ל-u - נוכל לסדר את האפסים בסדר עולה.

כעת, נראה $c_{n+1} - c_n \to \pi$. יהיו זוג אפסים עוקבים של הפתרון ל-$y'' + \left(1 - \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2}\right) y = 0$.

כלומר, אם x גדול מספיק, מתקיים:

$$1 - \varepsilon \leq 1 + \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2} \leq 1 + \varepsilon$$

נובע ממשפט ההשוואה: בין c_{n+1}, c_n יש אפס של המד"ר הבא:

$$v'' + (1+\varepsilon)v = 0$$

בפרט, עבור $v = \sin(\sqrt{1+\varepsilon}(x - c_n))$ יש אפס בין c_{n+1}, c_n. האפס הראשון של v מימין ל-c_n הוא: $c_n + \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}$.

לכן נובע: $c_{n+1} > c_n + \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}}$.

נצטרך עוד הפעלה של שטרום עבור המד"ר: $v'' + (1-\varepsilon)v = 0$.

פתרון למד"ר זה $v = \sin(\sqrt{1-\varepsilon}(x - c_n))$ מתאפס ב-$c_n, c_n + \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}}$. לכן לפתרון של המד"ר $y'' + \left(1 - \frac{\frac{1}{4} - \alpha^2}{x^2}\right) y = 0$ יש גם אפס בקטע $\left(c_n, c_n + \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}}\right)$. נובע - $c_n < c_{n+1} < c_n + \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}}$.

סה"כ קיבלנו - בהינתן $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$$c_n + \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}} < c_{n+1} < c_n + \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}} \iff \frac{\pi}{\sqrt{1+\varepsilon}} < c_{n+1} - c_n < \frac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon}}$$

כלומר, $c_{n+1} - c_n \to \pi$.

$\square$

26 הרצאה 26 - 26/01

הערה משוואות מדויקות ושדה כיוונים, לא במבחן. פתרון באמצעות טורי חזקות - רק אם הוא ילמד מחר.

26.1 בעיות שפה וערכים עצמיים

מעוניינים למצוא לאיזה ערכים של λ (ממשי) יש פתרון y לא טריוויאלי למד"ר הבא:

$$-(py')' - Ry = \lambda y$$

עם תנאי שפה $y(a) = y(b) = 0$ (y מוגדל בקטע $[a,b]$). כאשר P, R פונקציות רציפות ב-$[a,b]$ נתונות.
נראה שיש מעט λ-ים כאלו. λ עבורו יש פתרון y נקרא ערך עצמי של בעיית שטרום ליובילץ
לפונקציה y קוראים "פונקציה עצמית".

דוגמא

$$-y'' = \lambda y$$
$$y(0) = y(1) = 0 \quad P = 1, R = 0$$

אם $\lambda < 0$: הפ"א נראה כך:

$$x^2 + \lambda = 0 \iff x = \pm\sqrt{-\lambda}$$

לכן קיימים 2 פתרונות: $e^{\pm x\sqrt{-\lambda}}$.

נחפש צ"ל שלהן שמקיים תנאי שפה $y = ae^{x\sqrt{-\lambda}} + be^{-x\sqrt{-\lambda}}$:

$$\begin{cases} y(0) = a + b = 0 \iff b = -a \\ y(1) = ae^{\sqrt{-\lambda}} + be^{-\sqrt{-\lambda}} = a(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}) \implies a = 0 \implies b = 0 \end{cases}$$

אם $\lambda = 0$:

$$-y'' = 0 \iff y = ax + b$$

אם נציב תנאי שפה נקבל: $y = 0$.

אם $\lambda > 0$: 2 שורשים של הפולינום האופייני הם: $\pm i\sqrt{\lambda}$. לכן זוג פתרונות למד"ר הוא:

$$\sin x\sqrt{\lambda}, \cos x\sqrt{\lambda}$$

נחפש צ"ל שלהן שמקיים תנאי שפה $y = a\cos x\sqrt{\lambda} + b\sin x\sqrt{\lambda}$:

$$y(0) = 0 : a\cos 0 = 0 \implies a = 0$$
$$y(1) = 0 : b\sin\sqrt{\lambda} = 0 \iff \sin\sqrt{\lambda} = 0 \iff \sqrt{\lambda} = \pi k \iff \lambda = (\pi k)^2$$

נסכם: הע"ע הם $\lambda_k = (\pi k)^2$. הפונקציה העצמית המתאימה ל-λ_k היא:

$$y_k = \sin(\pi k x), \quad y_k : [0,1] \to \mathbb{R}$$

הפונקציות $(y_k)_{k\geq 1}$ מקיימות מספר תכונות. בפרט, מאונכות:

$$\int_0^1 y_k \cdot \bar{y_j} dx = 0$$

בהינתן f פונקציה רציפה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. נגדיר:

$$\tilde{f} = \sum \langle f, \tilde{y_k}\rangle \tilde{y_k}$$

כאשר $\tilde{y_k} = \sqrt{2}\cdot y_k$ (נירמול).

משפט מנומרית:

$$\int_0^1 |f-\tilde{f}_N|^2 \underset{N\to\infty}{\to} 0$$

הטור $\tilde{f}_N$ עוזר לנו לפתור את $-y''=f$: נכתוב $f=\tilde{f}$. נגדיר $y=-\sum\frac{\langle f,\tilde{y_k}\rangle\tilde{y_k}}{\lambda_k}$

$$y'' = -\sum \frac{\langle f, \tilde{y_k}\rangle}{\lambda_k}(\tilde{y_k})'' \underset{-y_k''=\lambda_k y_k}{=} -\sum \frac{\langle f, \tilde{y_k}\rangle}{\lambda_k}(\tilde{y_k})\lambda_k = -\sum\langle f,\tilde{y_k}\rangle\tilde{y_k} = -f$$

* - לא נוכיח, אך ניתן לגזור איבר איבר.

באופן כללי, כדי לפתור בעיית שפה לא הומוגנית מהצורה:

$$-(Py')' - Ry = f, \quad y(a)=y(b)=0$$

"עוברים דרך" בעיית שטרום ליוביל:

$$-(Py')'-Ry=\lambda y$$

בנוסף, נתעניין גם בוריאציה הבאה:

$$-(py')'-Ry=\lambda y Q$$

Q פונקציה רציפה נתונה ($Q=1$ מקרה קודם). במקרה כזה, נאמר ש-λ ע"ע ביחס למשקל Q ו-y פ"ע ביחס למשקל Q.

26.1.1 המשפט המרכזי של שטרום ליוביל

נניח Q,R רציפות ב-$[a,b]$. P גזירה ברציפות. בנוסף P,Q חיוביות ב-$[a,b]$. נסתכל על המד"ר

$$-(Py')'-Ry=\lambda yQ$$

עם תנאי שפה $y(a)=y(b)=0$. מתקיים:

1. לכל ע"ע λ ביחס ל-Q יש פ"ע אחת עד כדי כפל בקבוע
2. יש אינסוף ערכים עצמיים ממשיים, ואפשר לסדר אותם בסד"ר עולה:

$$\lambda_1<\lambda_2<\dots$$

השואפת לאינסוף. הפונקציה העצמית המתאימה ל-λ_n מסומנת y_n ויש לה $n-1$ אפסים ב-(a,b).

3. הפונקציות y_n מאונכות ביחס למ"פ:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b y_n y_m Q dx$$

4. אין ע"ע מרוכבים אפילו אם נרשה y מרוכב
5. הסכום החלקי $\tilde{y}_N=\sum\langle f,\tilde{y}_n\rangle\tilde{y}_n$ מתכנס ל-f במובן הבא:

$$\int_a^b |f-\tilde{y}_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

לא נוכיח: מסקנה 2, ו-"הפונקציות העצמיות מהוות בסיס אורתונורמלי לפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$ המתאפסות בקצוות.

סעיפים 3,4 קשורים לאלגברה ב'. נגדיר העתקה:

$$L[y]=(Py')'-Ry$$

זו העתקה לינארית. נראה שהיא מקיימת תכונה שקשורה למושג של אופרטור צמוד לעצמו:

למה:

אם נגדיר $\langle f,g\rangle=\int_a^b f\cdot\bar{g}\,dx$, מתקיים

$$\langle L[f],g\rangle=\langle f,L[g]\rangle$$

לכל f,g גזירות פעמיים.

קודם נראה אין ע"ע מרוכבים: נניח λ ע"ע. ניקח פ"ע f. מתקיים:

$$\langle L[f],f\rangle=\langle f,L[f]\rangle$$

לפי הלמה:

$$\lambda\langle f,f\rangle=\langle\lambda f,f\rangle=\langle f,\lambda f\rangle=\bar{\lambda}\langle f,f\rangle\implies\lambda=\bar{\lambda}\iff\lambda\in\mathbb{R}$$

נשתמש בלמה עבור הוכחת 3:

f פ"ע עם ע"ע λ: $L[f] = \lambda f$

g פ"ע עם ע"ע λ': $L[g] = \lambda' g$.

מתוך הלמה:

$$\langle L[f], g\rangle = \langle f, L[g]\rangle$$

נפשט כך:

$$= \lambda\langle f, f\rangle = \langle \lambda f, f\rangle = \langle f, \lambda' g\rangle = \lambda'\langle f, g\rangle$$

אם $\lambda \neq \lambda'$, אז:

$$(\lambda - \lambda')\langle f, g\rangle = 0 \iff \langle f, g\rangle = 0$$

נוכיח את 1 בלי הלמה: לע"ע λ יש פ"ע יחידה עד כדי קבוע. נניח בשלילה שיש זוג פתרונות שמתאפסים ב-a, b והם בת"ל.

$$L[y_1] = \lambda y_1$$
$$L[y_2] = \lambda y_2$$

לכן y_1, y_2 פותרים מד"ר לינארי הומוגני מהצורה:

$$L[y] - \lambda y = 0$$

נסתכל על הורונסקיאן בנקודה a:

$$\left|\begin{pmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1'(a) & y_2'(a) \end{pmatrix}\right| = 0$$

כי $y_1(a) = y_2(a) = 0$.

27 הרצאה 27 ואחרונה - 27/01

תזכורת נגדיר אופרטור לינארי

$$L[y] = -(Py')' - Ry$$
$$V = \{y : [a,b] \to \mathbb{R} \mid y(a) = y(b) = 0, y \in C^2\}$$

מתעניינים בלמצוא ע"ע ופונקציה-עצמית[2] של L:

$$L[y] = \lambda y$$

אבל גם:

$$L[y] = \lambda Q y$$
$$L[y] = f$$

למה (תזכורת)

אם נגדיר $\langle f, g\rangle = \int_a^b f \cdot \bar{g}\, dx$, מתקיים

$$\langle L[f], g\rangle = \langle f, L[g]\rangle$$

לכל f, g גזירות פעמיים.

הערה יש דימיון בין התכונות של L למשפט הספקטרלי. האופרטור L צמוד לעצמו (במובן של הלמה) ויש "בסיס אורתונורמלי" של פ"ע.

הוכחה נרצה שיתקיים:

$$\int_a^b f(x) \cdot (-(Pg')' - Rg)\, dx = \int_a^b g(x) \cdot (-(Pf')' - Rf)\, dx$$

בשני האגפים מופיע Rfg לכן נצמצם ונקבל שמספיק להראות:

$$\int_a^b f(x) \cdot (Pg')'\, dx = \int_a^b g(x) \cdot (Pf')'\, dx$$

ע"י אינטגרציה בחלקים נקבל:

$$f \cdot (Pg')|_a^b - \int_a^b f' \cdot (Pg') dx \underset{\text{נרצה להראות}}{=} g \cdot (Pf')|_a^b - \int_a^b g' \cdot (Pf') dx$$

נשים לב, $f(a) = f(b) = g(a) = g(b) = 0$ כי הן מקיימות את תנאי השפה ולכן:

$$f \cdot (Pg')|_a^b = g \cdot (Pf')|_a^b = 0$$

לכן קיים שיוויון.

---

[2] λ עבורו יש פתרון y נקרא **ערך עצמי** של בעיית שטרום ליוביל. לפונקציה y קוראים "**פונקציה עצמית**".

27.1 פתרון עם טורי חזקות

נתעסק במד"ר מהצורה

$$y'' + P_1 y' + P_2 y = 0$$

P_1, P_2 - פונקציות רציפות שהן בעצם טורי חזקות סביב x_0 עם רדיוס התכנסות R:

$$P_1 = \sum_{i=1}^{\infty} (x-x_0)^i P_{1,i}\,, \quad |x-x_0| < R$$

$$P_2 = \sum_{i=1}^{\infty} (x-x_0)^i P_{2,i}\,, \quad |x-x_0| < R$$

תזכורת נוסחא לרדיוס התכנסות של טור

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

בנוסף: טור חזקות מתכנס לפונקציה רציפה.

משפט

בסיטואציה הנתונה P_1, P_2 טורי חזקות המתכנסים ב-$|x-x_0| < R$, כל פתרון של המד"ר בקטע $|x-x_0| < R$ ניתן לכתוב כטור חזקות סביב x_0 שמתכנס (לפחות) ב-$|x-x_0| < R$.

בזכות המשפט, אפשר למצוא y ע"י כך שנציב

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_i)^i$$

במד"ר ונמצא את a_n. המשפט מבטיח שהטור יתכנס ב-$|x-x_0| < R$. ברוב המקרים אפשר להוכיח התכנסות "בידיים" בלי המשפט.

עובדה מאינפי 2:

$$y' = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (x-x_0)^{i-1} \cdot i = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i+1} (x-x_0)^i \cdot (i+1)$$

וע"י גזירה שוב נקבל:

$$y'' = \sum_{i=0}^{\infty} a_{i+2} (x-x_0)^i \cdot (i+1)(i+2) \qquad (**)$$

y פתרון $\iff y'' + P_1 y' + P_2 y = 0$. נביע את אגף שמאל כטור:

$$P_1 y' = \sum_i \left[\sum_{j+k=i} (a_{j+1} P_{1,k} \right] (x-x_i)^i$$

$$P_2 y = \sum_i \left[\sum_{j+k=i} (a_{j+1} P_{2,k} \right] (x-x_i)^i$$

לכן המקדם של $(x-x_0)^i$ באגף זה הוא:

$$a_{i+2}(i+2)(i+1)+\sum_{j+k=i} a_{j+1}(j+1)P_{1,k}+\sum_{j+k=i} a_j P_{1,k}$$

כלומר, $\sum a_i(x-x_0)^i$ סותר את המד"ר אמ"מ $(a_i)_{i\geq 0}$ סדרה המקיימת את הרקורסיה הבאה:

$$a_{i+2}(i+2)(i+1)+\sum_{j+k=i} a_{j+1}(j+1)P_{1,k}+\sum_{j+k=i} (a_{j+1}P_{2,k})=0$$

לכל $i\geq 0$. בהינתן a_0, a_1: כל שאר האיברים בסדרה נקבעים.

הערך של הטור ב-$x=x_0$: a_0

הערך של הנגזרת ב-$x=x_0$: a_1

דוגמא

$$y''+y=0$$

אם נציב $y=\sum a_n x^n$ אז זה פתרון למד"ר אמ"מ:

$$a_{n+2}(n+2)(n+1)+a_n=0$$

נוכל להראות באינדוקציה: $a_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}a_1 \quad , a_{2k}=\frac{(-1)^k}{(2k)!}a_0$.

לכן, פתרון כללי הוא מהצורה:

$$a_0\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}}_{\cos x}+a_1\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}}_{\sin x}$$