Actividad 1. (Poblacion de bacterias)

Cuestiones relacionadas con el crecimiento poblacional son de interés de los más diversos sectores de la sociedad; por ejemplo, es importante conocer la proyección de la población de un país, estado o municipio para planificar acciones que busquen satisfacer las necesidades de la sociedad en el ámbito de la educación, la salud, el trabajo, entre otros. Los biólogos buscan usar este conocimiento para proteger los recursos del medio ambiente y evitar la extinción de una o varias especies. Existen varias formas de describir el crecimiento poblacional, y de ellas, una de las más conocidas es el Modelo de Malthus. Se le llama el Modelo de Crecimiento Exponencial, porque `la tasa de variación de la población con respecto al tiempo es proporcional a la población existente en el instante t`:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Este modelo supone que las tasas de nacimiento y muerte son constantes; la población crecerá o decrecerá exponencialmente, es decir, el modelo malthusiano describe cómo las poblaciones crecen o decrecen cuando no ocurre nada más (ausencia de cualquier factor perturbador) y aun sabiendo que existen estos factores, el modelo nos da una descripción razonable del crecimiento poblacional dentro de su contexto de validez.

El tiempo de generación es el intervalo de tiempo requerido para que la población en un cultivo de microorganismos se duplique en número. La bacteria Mycobacterium tuberculosis, causante de la tuberculosis, tiene un tiempo de generación de aproximadamente 14 horas.[1]

a) Sabiendo que un cultivo de bacterias crece a una tasa que es proporcional a la cantidad de bacterias existentes en el instante t, escriba una ecuación diferencial que represente la situación y resuélvala para encontrar la solución general.

b) Determine la tasa de crecimiento del cultivo de bacterias Mycobacterium tuberculosis.

c) Considerando que inicialmente haya 200 bacterias, determine la solución particular para este caso.

d) Bosqueje un gráfico de la cantidad de bacterias en función del tiempo.

e) Determine el número de bacterias después de 5 horas y después de 20 horas.

f) ¿Cuándo alcanzará el número de bacterias 50000?

Solution:

Problemas Propuestos

1. Supongamos que un cultuivo de bacterias tiene una población inicial de 100. Si la población se duplica cada tres días, determine el número de bacterias presentes después de 30 días. ¿Cuánto tiempo se requiere para que la población alcance un número de 4250?

Solution:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$
$$P = ce^{kt}$$

por condición inicial: $t = 0$ $P = 100$

$$100 = ce^{k(0)} \implies c = 100$$
$$P(t) = 100e^{kt}$$

[1]**PELCZAR Jr., M. J. Et al. Microbiología Conceptos y Aplicaciones, Makron Books, 2005.**

Para $t=3$ entonces $P(3)=100e^{3k}=200 \implies e^{3k}=2 \implies k=\dfrac{1}{3}ln2$

luego:

$$P=100e^{\frac{1}{3}ln2t}$$

Nos pide: el número de bacterias presentes después de 30 días:

$$P=100e^{\frac{1}{3}ln2(30)}=1024$$

también: el tiempo se requiere para que la población llegue a 4250 bacterias

$$4250=100e^{\frac{1}{3}ln2t} \implies t=\frac{ln4250}{ln2}\approx 36.16$$

2. Supongamos que la población en un cultivo de levadura se triplica cada siete días. ¿Cuál será la población después de 35 días? ¿Cuánto tiempo se necesita para que la población sea diez veces la población inicial?

3. Supongamos que dos tercios de las células en un cultivo permanecen después de un día. Utilice esta información para determinar el número de días hasta que sólo un tercio de la población inicial permanezca.

4. Considera una sustancia radiactiva con una vida media de 10 días. Si inicialmente hay 5000 g de la sustancia, ¿cuánto queda después de 365 días?

5. Supongamos que la vida media de un elemento es de 1000 h. Si inicialmente hay 100 g, ¿cuánto queda después de 1 h? ¿Cuánto queda después de 500 h?

6. Supongamos que la población de un pequeño pueblo es inicialmente de 5000. Debido a la construcción de una autopista interestatal, la población se duplica durante el siguiente año. Si la tasa de crecimiento es proporcional a la población actual, ¿cuándo alcanzará la población los 25,000? ¿Cuál será la población después de cinco años?

7. Supongamos que el moho crece a una velocidad proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 500 g de moho y 6 horas después hay 600 g, determine la cantidad de moho presente después de un día. ¿Cuándo la cantidad de moho alcanza los 1000 g?

8. Supongamos que la población de conejos en una pequeña isla crece a una tasa proporcional al número de conejos presentes. Si esta población se duplica después de 100 días, ¿cuándo se triplicará la población?

9. En una reacción química, el químico A se convierte en el químico B a una velocidad proporcional a la cantidad de químico A presente. Si la mitad del químico A permanece después de cinco horas, ¿cuándo queda 1/6 de la cantidad inicial de químico A? ¿Cuánto de la cantidad inicial queda después de 15 horas?

10. Si el 90% de la cantidad inicial de un elemento radiactivo permanece después de un día, ¿cuál es la vida media del elemento?

Actividad 2. (Modelo Logístico o Modelo de Verhulst-Pearl.)

El modelo exponencial se ajustó muy bien al crecimiento de la población mundial y de la población de varias regiones durante décadas, e incluso siglos, pero con el tiempo las tasas de crecimiento relativo tienden a disminuir. El modelo exponencial debe fallar en algún momento, ya que predice que la población continuará creciendo sin límites a medida que pasa el tiempo, y esto no puede ser verdad para siempre. Generalmente, las poblaciones crecen dentro de sistemas ecológicos que solo pueden soportar un cierto número de individuos, o bien, el crecimiento puede ser inhibido por efectos de concentración, emigración, enfermedad, guerra, falta de alimentos, entre otros. Debemos reconocer que un modelo más realista debe reflejar el hecho de que un determinado ambiente tiene recursos limitados. El primer modelo que atiende a la variación de la tasa de crecimiento fue formulado por Pierre F. Verhulst en 1837. Se le llama el Modelo Logístico o Modelo de Verhulst-Pearl. Este modelo incorpora factores limitantes al crecimiento desenfrenado de la población en estudio, ya que supone que, viviendo en un determinado entorno, una población debe crecer hasta un límite máximo sostenible, es decir, tiende a estabilizarse.

En el modelo logístico, la tasa de variación de la población puede expresarse como:

$$\frac{dP}{dt} = kP - \frac{k}{L}P^2 \ \cdots \ (*)$$

donde: k es el coeficiente de crecimiento (este coeficiente es específico de cada población y se calcula basado en el índice de muertes y nacimientos de la población en estudio, además de otros factores como la alimentación disponible) y L es la capacidad de soporte poblacional del medio, es decir, el nivel máximo de población sostenible.

También podemos escribir la ecuación del crecimiento logístico a partir de $\frac{dP}{dt} = \text{tasa de nacimiento} - \text{tasa de muerte}$, en estas tasas ya se están considerando factores como alimentación, enfermedades, entre otros. En el modelo exponencial(Malthus), la constante k utilizada para trabajar con el crecimiento poblacional ya esta considerado los índices de nacimiento y muerte, las tasas se incluyeron en una única constante de crecimiento, porque en $\frac{dP}{dt} = kP$, $k = k_1\text{tasa de nacimiento} - k_2\text{tasa de muerte}$ y por lo tanto podemos escribir: $\frac{dP}{dt} = (k_1 - k_2)P$ o $\frac{dP}{dt} = k_1P - k_2P$ Trabajamos en el crecimiento de conejos usando esta idea.

En la ecuación del crecimiento logístico solo tenemos una diferencia, es que k_2P^2, podemos interpretar esto como una forma de asignar un mayor peso a los efectos de la "superpoblación" en las muertes que en los nacimientos, debido a los factores limitantes del medio que soporta una población máxima L.

Parte I.

a) Resuelva la ecuación diferencial $(*)$ para encontrar la solución general.

b) Considere que inicialmente existan 10.000 habitantes y que $k = 0.04/año$ y $L = 50.000$ habitantes y encuentre la solución particular.

c) Determine el número de personas después de 5 años y despues de 10 años.

d) ¿Cuándo llegará la población a 20.000 personas?

Parte II.

a) El crecimiento poblacional de un determinado municipio está modelado por la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = 0.012P - 0.000000375P^2$ ¿cuál es el soporte de esta población?

b) ¿Para qué valores de P la población está aumentando? ¿Y disminuyendo?

c) Considerando que en este municipio, actualmente (año 2006) existen $10,000$ habitantes, Construya el gráfico del número de individuos contra el tiempo.

Parte III.

a) En 1950, la población de Brasil era de aproximadamente $51,944$ millones de personas. Usando el modelo de crecimiento logístico, considerando que $k = 0,04182402$, $L = 248,656$ millones de personas.[2] (Consejo: Considere el año 1950 como tiempo cero.)

b) ¿Qué ocurre con la población a medida que pasa el tiempo?

c) Construya el gráfico de la población en función del tiempo.

[2] **Datos obtenidos de BASSANEZI, R. C. Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática, Editora Contexto, 2004.**

d) Según el "censo del IBGE26"[3], en 2000 la población de Brasil era de aproximadamente $171,279$ millones de personas, este valor coincide con el del modelo logístico.

e) Simule, con la ayuda de "Software Graficador", cada una de las situaciones siguientes y responda, en cada caso, si la población está creciendo, disminuyendo o permaneciendo constante.

- La población inicial P_0 está entre 0 y L.
- La población inicial P_0 está por encima de la capacidad límite P_L.
- La población se aproxima de la capacidad límite PL.

f) Siguiendo el crecimiento del modelo logístico, ¿en qué año aproximadamente la población de Brasil comienza a estabilizarse?

Resuelve correctamente los siguientes ejercicios:

Ejercicio 1.

La ecuación logística, tiene muchas formulaciones diferentes, pero equivalentes. Por ejemplo, si α y K representan constantes positivas, la ecuación logística puede escribirse como $\dfrac{dP}{dt} = \alpha P\left(1 - \dfrac{1}{k}P\right)$, $P(0) = P_0$. En esta formulación, α se llama la tasa de crecimiento y K se llama la capacidad de carga porque $\lim_{t\to\infty} P(t) = K$, a menos que $P(0) = P_0 = 0$. Sabemos que $P(0) = P_0$ es un número positivo porque nuestra interpretación de $P(t)$ es que $P(t)$ representa a población (número no Negativo) en el tiempo t.

Resuelva la ecuación logística, $\dfrac{dP}{dt} = \alpha P\left(1 - \dfrac{1}{k}P\right)$, viéndola como una ecuación de Bernoulli y luego resuelva la ecuación lineal resultante utilizando un factor integrante.

Solution:

bla blA

[3] https://www.ibge.gov.br/