



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA FÍSICA

**INTERCAMBIO ENERGÉTICO RELATIVISTA ENTRE UN
POLITROPO Y UN FLUIDO TIPO WYMAN IIA**

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

FÍSICO/A

AUTORES:

JORGE FABRICIO GALLEGOS MALDONADO

DOMÉNICA SOLANGE QUIZHPE ROMERO

Riobamba - Ecuador

2025



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA FÍSICA

**INTERCAMBIO ENERGÉTICO RELATIVISTA ENTRE UN
POLITROPO Y UN FLUIDO TIPO WYMAN IIA**

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

FÍSICO/A

AUTORES:

JORGE FABRICIO GALLEGOS MALDONADO

DOMÉNICA SOLANGE QUIZHPE ROMERO

DIRECTOR: FIS. JULIO CÉSAR ANDRADE LANDETA, MSC.

Riobamba - Ecuador

2025

© 2025, Jorge Fabricio Gallegos Maldonado y Doménica Solange Quizhpe Romero

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Nosotros, Jorge Fabricio Gallegos Maldonado y Doménica Solange Quizhpe Romero, declaramos que el presente Trabajo de Integración Curricular es de nuestra autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autores asumimos la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 11 de abril de 2025

Jorge Fabricio Gallegos Maldonado

0604900183

Doménica Solange Quizhpe Romero

1150208203

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA FÍSICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación: **INTERCAMBIO ENERGÉTICO RELATIVISTA ENTRE UN POLITROPO Y UN FLUIDO TIPO WYMAN IIA**, realizado por: **JORGE FABRICIO GALLEGOS MALDONADO Y DOMÉNICA SOLANGE QUIZHPE ROMERO**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal autoriza su presentación.

	FIRMA	FECHA
Dr. Richard Pachacama PRESIDENTE DEL TRIBUNAL	_____	2025-04-11
Fis. Julio César Andrade, Msc. DIRECTOR DEL TRABAJO DE TITULACIÓN	_____	2025-04-11
Dra. Diana Coello DELEGADA POR EL COORDINADOR DE CARRERA	_____	2025-04-11

DEDICATORIA

Al niño interior que soñó con este momento. A las personas que me acompañaron en este camino, a las nuevas amistades y a las viejas. A mi familia que me apoyo en todo este trayecto. Y, por supuesto, a mi amiga y compañera de tesis, quien me demostró el verdadero significado de la amistad.

Jorge

A mi familia por su apoyo incondicional en mi pasión por la ciencia y especialmente a mi madre, Luz Victoria, por guiarme en cada paso de mi vida y a mi padre, Wilson Humberto, por todo su esfuerzo en ser mejor cada día por sus hijos. A mi gran amigo, Jorge y su familia por hacerme sentir parte de ellos en un lugar desconocido. Y a todas las personas que formaron parte de mi formación personal y académica en estos cuatro años.

Solange

AGRADECIMIENTO

Deseamos manifestar nuestro profundo agradecimiento al físico Julio César Andrade Landeta por el generoso tiempo, dedicación y apoyo brindados en la realización de este trabajo de integración curricular. Asimismo, extendemos nuestro sincero reconocimiento al Dr. Marlon Moscoso, cuya valiosa colaboración resultó fundamental para culminar exitosamente esta investigación.

Gallegos & Quizhpe

ÍNDICE DE CONTENIDO

RESUMEN	x
SUMMARY/ABSTRACT	xi
INTRODUCCIÓN	1
 CAPÍTULO I	 3
1 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	3
1.1 Antecedentes	3
1.2 Planteamiento del problema	5
1.3 Pregunta de Investigación	6
1.4 Objetivos	6
1.4.1 Objetivo General	6
1.4.2 Objetivos específicos	6
1.5 Justificación	6
 CAPÍTULO II	 9
2 MARCO TEÓRICO	9
2.1 Bases Teóricas	9
2.1.1 Ecuaciones de Campo de Einstein (EFE)	9
2.1.2 Métrica de Schwarzschild (solución exterior)	10
2.1.3 Soluciones interiores anisótropas	10
2.1.4 Condiciones de Aceptabilidad Física	11
2.1.5 Desacople Gravitacional (GD)	13
2.1.6 Deformación Geométrica Mínima extendida (MGDe)	13
2.1.7 Politropo	15
2.1.8 Wyman IIa	15
2.2 Bases conceptuales	16
2.2.1 Modelo Estelar	16
2.2.2 Desacople Gravitacional	16
2.2.3 Intercambio Energético	16
2.2.4 Fluido Relativista	16
2.2.5 Isotropía y Anisotropía Estelar	16

CAPÍTULO III	17
3 MARCO METODOLÓGICO	17
3.1 Tipo de investigación	17
3.1.1 No experimental	17
3.1.1.1 Localización del Estudio	17
CAPÍTULO IV	19
4 MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	19
4.1 Desarrollo	19
4.1.1 Cálculo de la función de deformación del espacio $f(r)$	19
4.1.2 Cálculo de la función de deformación del tiempo $g(r)$	20
4.1.3 Cambio en la geometría del espacio-tiempo	20
4.1.4 Cálculos del sector material	21
4.1.5 Aplicación de las condiciones de Matching	22
4.1.5.1 Cálculo del factor de compacticidad, u	23
4.2 Resultados	23
4.2.1 Condiciones de Aceptabilidad Física	23
4.2.1.1 Sector Material	23
4.2.1.2 Métricas	24
4.2.1.3 Condiciones de energía	25
4.2.1.4 Corrimiento al rojo	26
4.2.1.5 Condición de causalidad	26
4.2.2 Anisotropía	27
4.2.3 Intercambio Energético	28
CAPÍTULO V	31
5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	31
5.1 Conclusiones	31
5.2 Recomendaciones	32

BIBLIOGRAFÍA

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 4-1:	Densidad de energía para diferentes valores de K	24
Ilustración 4-2:	Presión radial para diferentes valores de K	24
Ilustración 4-3:	Presión tangencial para diferentes valores de K	24
Ilustración 4-4:	Métrica radial para diferentes valores de K	25
Ilustración 4-5:	Métrica temporal para diferentes valores de K	25
Ilustración 4-6:	Condición energía débil (DEC) para diferentes valores de K	25
Ilustración 4-7:	Condición energía débil (DEC) para diferentes valores de K	25
Ilustración 4-8:	Condición energía fuerte (SEC) para diferentes valores de K	26
Ilustración 4-9:	Corrimiento al rojo para diferentes valores de K	26
Ilustración 4-10:	Velocidad radial del sonido para diferentes valores de K	27
Ilustración 4-11:	Velocidad tangencial del sonido para diferentes valores de K	27
Ilustración 4-12:	Anisotropía para diferentes valores de K	27
Ilustración 4-13:	Anisotropías con la constantes $B = 0.3$, $n = 0.5$, $\kappa = 8\pi$, $R = 1$ para $K = 0.1$ línea negra, $K = 0.4001$ línea azul, $K = 0.321$ línea negra.	28
Ilustración 4-14:	Intercambio energético para diferentes valores de K	28
Ilustración 4-15:	a) Intercambio energético para el modelo estelar de $K = 0.44$ y con $u =$ 0.3029 . b) Intercambio energético para el modelo estelar de $K = 0.43$ y con $u = 0.3340$. c) Intercambio energético para el modelo estelar de $K = 0.47$ y con $u = 0.1764$	29
Ilustración 4-16:	Intercambio energético con la constantes $B = 0.3$, $n = 0.5$, $\kappa = 8\pi$, $R = 1$ a) $K = 0.1$ y con $u = 0.3401$. b) $K = 0.321$ y con $u = 0.3489$. c) $K = 0.4001$ y con $u = 0.3433$	30

RESUMEN

Este trabajo de titulación aborda el problema de modelar y comprender el intercambio energético entre un politropo relativista y un fluido isotrópico Wyman IIa en un cuerpo estelar compacto, empleando desacoplamiento gravitacional por deformación geométrica mínima extendida para describir flujos energéticos y estabilidad interna del sistema. Como objetivo general, se propone analizar la naturaleza de dicho intercambio y su impacto en la estabilidad del modelo. Para ello, se adopta una metodología cuantitativa no experimental de carácter descriptivo-explicativo, que combina revisión bibliográfica, desarrollo analítico de las ecuaciones de campo desacopladas y simulaciones numéricas en MATLAB para integrar la deformación temporal $g(r)$ y validar criterios de aceptabilidad física y condiciones de frontera. Los resultados muestran que el politropo cede energía al fluido Wyman IIa ($\Delta E > 0$) en capas externas mientras el núcleo permanece estable ($\Delta E = 0$), y que las configuraciones solo son físicamente realistas si satisfacen la condición de energía fuerte, pues su violación conduce a soluciones inestables. Se concluye que, dentro de MGDe, los valores de la deformación temporal en el rango $[-1.638, -3.121]$ generan modelos que cumplen con todas las condiciones de aceptabilidad física, demostrando la eficacia de este enfoque para estudiar el intercambio energético en objetos compactos.

Palabras clave: <ECUACIONES DE CAMPO>, <SOLUCIONES INTERIORES>, <DESACOPLO GRAVITACIONAL>, <POLITROPO>, <INTERCAMBIO ENERGÉTICO>

0481-DBRAI-UPT-2025

ABSTRACT

This thesis addresses the problem of modeling and understanding the energy exchange between a relativistic *polytrope* and an isotropic Wyman IIa fluid in a compact stellar body, using gravitational decoupling by extended minimum geometric deformation to describe energy fluxes and internal stability of the system. As a general objective, it is proposed to analyze the nature of this exchange and its impact on the stability of the model. To this end, a non-experimental quantitative methodology of a descriptive-explanatory nature is adopted, combining a bibliographic review, analytical development of the decoupled field equations and numerical simulations in MATLAB to integrate the time deformation $g(r)$ and validate physical acceptability criteria and boundary conditions. The results show that the polytrope transfers energy to the Wyman fluid IIa ($\Delta E > 0$) in its outer layers while the core remains stable ($\Delta E = 0$), and that the configurations are only physically realistic if they satisfy the condition of the strong energy, as its violation leads to unstable solutions. It is concluded that, within MGDe, time deformation values in the range $[-1.638, -3.121]$ generate models that meet all the conditions for physical acceptability, demonstrating the effectiveness of this approach for studying energy exchange in compact objects.

Keywords: <FIELD EQUATIONS>, <INTERIOR SOLUTIONS>, <GRAVITATIONAL DECOUPLING>, <POLYTROPE>, <ENERGY EXCHANGE>

0481-DBRAI-UPT-2025

Lic. Luis Armando Quishpe Hipo, **Mgs.**

C.I. 0102801016

DOCENTE INGLÉS CARRERA DE FÍSICA

INTRODUCCIÓN

La presente investigación, titulada *Intercambio energético relativista entre un politropo y un fluido tipo Wyman IIa*, constituye un aporte significativo al estudio de los cuerpos estelares compactos mediante el empleo del método de desacople gravitacional por deformación geométrica mínima extendida (MGDe). Este trabajo está orientado a analizar las interacciones energéticas entre un politropo relativista y un fluido tipo Wyman IIa, lo cual permite profundizar en la comprensión de los procesos físicos fundamentales que ocurren en entornos astrofísicos extremos.

El documento inicia con un análisis exhaustivo de los antecedentes teóricos que sustentan la investigación. En este contexto, se abordan los principios de la Relatividad General y las ecuaciones de campo de Einstein, así como las soluciones isotrópicas y anisótropas relevantes para el estudio de los cuerpos estelares. Se plantea además el problema de investigación, articulando la pregunta principal, los objetivos generales y específicos, y justificando la pertinencia del análisis del intercambio energético entre estos fluidos en un marco teórico riguroso.

En el desarrollo teórico, se profundiza en los conceptos fundamentales como las soluciones de las ecuaciones de campo de Einstein, la métrica de Schwarzschild, los modelos politrópicos y los fluidos de tipo Wyman IIa. Este capítulo también detalla las condiciones de aceptabilidad física que deben cumplir los modelos y explica la metodología basada en el desacople gravitacional, una herramienta que permite extender soluciones conocidas hacia configuraciones complejas y analizar el intercambio energético entre distintas fuentes gravitacionales.

La metodología de la investigación, fundamentada en un enfoque teórico y cuantitativo, combina el análisis bibliográfico con simulaciones y cálculos analíticos. Se implementan algoritmos basados en estudios previos para modelar las interacciones energéticas, con el objetivo de determinar las implicaciones dinámicas y estables de estas configuraciones en el contexto de la Relatividad General. Asimismo, se incluye una descripción detallada del presupuesto y del cronograma de actividades, asegurando una planificación adecuada para la ejecución del trabajo.

En síntesis, este trabajo busca contribuir al entendimiento de la física de los remanentes estelares, ofreciendo una herramienta teórica robusta para el modelado y análisis de los fenómenos más extremos del universo. La estructura desarrollada proporciona una base sólida para futuros estudios relacionados con la dinámica de fluidos relativistas y sus interacciones energéticas, abriendo nuevas posibilidades para la interpretación de observaciones astrofísicas y el avance del conocimiento en este campo.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Antecedentes

La teoría moderna de la gravitación actual se fundamenta en los trabajos de Albert Einstein de 1905 (Einstein, 1905). Esta teoría ha cambiando nuestra percepción del espacio y el tiempo absoluto newtoniano hacia un concepto más dinámico donde el espacio y el tiempo no son entes separados, sino más bien forman un solo ente físico dinámico llamado espacio-tiempo (Einstein, 1915; Einstein, 1916).

Específicamente la Teoría de la Relatividad General (TGR) es una teoría que describe la geometría del espacio-tiempo mediante una variedad pseudo Riemanniana la cual se deforma debido a la presencia de distribuciones de masa, energía, radiación y cualquier fuente gravitatoria (Einstein, 1916; Foster et al., 2010; Carroll, 2004). Esta nueva visión del espacio-tiempo genera que la naturaleza de las interacciones gravitatorias ya no tengan un carácter de fuerzas clásicas newtonianas, sino más bien como un efecto directo de la deformación del espacio-tiempo.

Un año después de la publicación de los trabajos de Einstein (Einstein, 1915; Einstein, 1916) sobre sus ecuaciones de campo gravitacional (EFE), K. Schwarzschild encontró la primera solución exacta a estas ecuaciones, conocida como la Solución Exterior de Schwarzschild. Esta solución describe el campo gravitacional exterior de un cuerpo con simetría perfectamente esférica (Schwarzschild, 1916a). De hecho, ya en 1916 el mismo K. Schwarzschild encontró la primera solución que describe el interior de una esfera autogravitante de densidad uniforme en el régimen de fluido isótropo relativista (Schwarzschild, 1916b). Estos trabajos abrieron la puerta de la posibilidad de encontrar nuevas soluciones a las EFE que sean de interés físico para la astrofísica y la cosmología.

Inicialmente el interior de los cuerpos estelares compactos se considero como un fluido isotrópico con propiedades estadísticas similares en todas las direcciones del espacio. Así, varios modelos estelares con isotropía han sido generados (Knutson, 1991; Kuchowicz, 1971; Kuchowicz, 1972a; Kuchowicz, 1972b; Kuchowicz, 1973; Avakian et al., 1990; Wyman, 1946; Buchdahl, 1964; Mehra, 1966; Heintzmann, 1969; Adler, 1974). Por otro lado, el principio cosmológico

implica que el universo a escalas lo suficientemente grandes es isotrópico y exige que las cantidades observables sean independientes de la dirección de observación. Sin embargo, son muchas las causas en el interior de los cuerpos estelares compactos que hacen que la premisa del fluido isótropo no sea la más adecuada, entre ellas podemos mencionar altas densidades, altas temperaturas, campos magnéticos fuertes, entre otros (Cardall et al., 2001; Kunz, 2022; Manchester, 2017; Herrera et al., 1985). De hecho, en 2020 se ha demostrado que la evolución estelar tiende a marcar que el interior de una estrella sea siempre una configuración de fluido anisótropo, (Herrera, 2020).

Ya en 1933, Lemaître (Lemaître, 1933), encontró la primera solución anisotrópica para un objeto estelar auto-gravitante, y posteriormente fueron encontradas otros modelos estelares de fluido anisótropo (Fuente et al., 2011). Entre estos trabajos mencionados anteriormente, destaca el trabajo de Bowers y Liang (Bowers et al., 1974).

Así, para modelar los cuerpos estelares compactos se ha hecho uso de las EFE mediante varios métodos y técnicas, pero recientemente, destaca el método de desacople gravitacional por deformación geométrica mínima (MGD) (Ovalle, 2008; Ovalle, 2019; Ovalle, 2017a), por cuanto provee una herramienta poderosa al momento de generar nuevas soluciones anisótropas, producto de ello se pueden mencionar los siguientes trabajos (Ovalle et al., 2020a; Rocha, 2017; Fernandes-Silva et al., 2018; Casadio et al., 2018; Fernandes-Silva et al., 2018; Contreras et al., 2018a; Contreras, 2018; Contreras et al., 2018b; Rocha et al., 2019; Las Heras et al., 2019; Panotopoulos et al., 2018; Rincon et al., 2019; Rocha, 2020a; Contreras et al., 2020; Arias et al., 2020; Rocha, 2020b; Rocha et al., 2020; Meert et al., 2021; Maurya et al., 2022a).

En cambio si el GD es utilizado con la deformación geométrica mínima extendida (Ovalle, 2019) también es posible generar nuevas soluciones anisótropas, pero además nos permite estudiar el intercambio energético entre fluidos relativistas al interior de un cuerpo compacto, esto se lo muestra detalladamente en (Ovalle et al., 2022). Este trabajo nos presenta un estudio acerca de la relación de un politropo y un fluido perfecto (Tolman IV) dentro de un objeto estelar, además, nos proporciona el esquema base para estudiar el posible intercambio de energético ΔE entre una fuente dada por la gravedad de Einstein y cualquier otro sector gravitacional no descrito por la TGR.

Mientras tanto, (Contreras et al., 2022) analiza el intercambio de energía entre un fluido perfecto (Tolman VII) y un fluido politrópico, con base en (Ovalle et al., 2022), demostrando que el politropo necesita ceder energía para lograr la coexistencia con el fluido perfecto compatible con

la solución de Schwarzschild exterior.

Es necesario resaltar que el análisis de la interacción de un fluido relativista con respecto a un fluido genérico ha sido investigado en diferentes trabajos tales como (Ovalle, 2017b), (Maurya et al., 2023), (Ovalle et al., 2020b). Lo cual nos ha motivado a llevar a cabo un estudio sobre el intercambio energético entre un politropo relativista y un fluido tipo Wyman IIa mediante el uso del GD por MGDe.

1.2. Planteamiento del problema

Una estrella es una esfera de gas (principalmente hidrógeno) en equilibrio entre la gravedad, que la comprime, y la presión del gas de plasma caliente generado por reacciones nucleares, que la expande. Las colisiones moleculares calientan la nube hasta que se permiten las condiciones para la fusión termonuclear liberando una gran cantidad de energía, aumentando la presión, temperatura y la velocidad de las partículas, lo que incrementa las reacciones nucleares. Estas estrellas pueden evolucionar hasta sus fases finales de remanentes estelares, donde los efectos de gravitación son importantes y son estudiados en el marco de la TRG. En este sentido, el modelado de estos cuerpos estelares es un tema importante de actualidad en la astrofísica teórica; este tipo de modelos surgen de la obtención de soluciones analíticas de las ecuaciones de campo de Einstein relativas a la estructura interna de estos cuerpos estelares. Estos modelos parten de la premisa de que estos cuerpos se consideran como esferas de fluido relativista perfectas con sus características internas determinadas por las ecuaciones de campo de Einstein. Entre tantos fenómenos aún no bien estudiados a profundidad relacionados con estos cuerpos estelares, resalta la interacción e intercambio energético de los fluidos relativistas que soportan estos cuerpos estelares. Este intercambio energético a priori se pensaría muy complejo de abordar y modelar dada la naturaleza interna compleja de los cuerpos estelares compacto, más sin embargo, ya desde el año 2022 esto se ha abordado de una manera analítica más simple para cierto tipo de configuraciones (Ovalle et al., 2022), e incluso se ha llevado otro tipo de estudios similares recientemente como por ejemplo (Carrasco-Hidalgo et al., 2021), (Maurya et al., 2022b; Lohakare et al., 2023), también (Ovalle, 2017b), (Maurya et al., 2023). Estos tipos de estudios se basan en el enfoque teórico del desacople gravitacional por deformación geométrica mínima extendida, el cual nos permite estudiar de manera analítica el intercambio energético entre los distintos fluidos componentes en un cuerpo estelar compacto.

Por lo tanto, resulta interesante resolver el problema de estudiar el intercambio energético entre un politropo y un fluido isótropo tipo Wyman IIa utilizando un enfoque teórico similar a los traba-

jos mencionados anteriormente. En particular, este trabajo resalta por el uso de politropos como modelos cruciales para entender cómo se forman, evolucionan y terminan las estrellas, permitiendo realizar estudios exhaustivos de enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros, (Contreras et al., 2022). Asimismo, las configuraciones como las de Wyman tipo IIa pueden describir estrellas de neutrones y otros objetos compactos que se encuentran en condiciones extremas de densidad y gravedad. Esto es esencial para interpretar observaciones astrofísicas y profundizar en nuestro conocimiento de los fenómenos más extremos del universo.

1.3. Pregunta de Investigación

¿Cuál es la naturaleza del intercambio energético entre un politropo relativista y un fluido tipo Wyman IIa, y cómo afecta este intercambio a la estabilidad del sistema?

1.4. Objetivos

1.4.1. *Objetivo General*

- Analizar el intercambio energético relativista entre un politropo y un fluido tipo Wyman IIa.

1.4.2. *Objetivos específicos*

- Realizar un estudio bibliográfico del intercambio energético entre fluidos relativistas.
- Estudiar el desacople gravitacional por deformación mínima extendida.
- Emplear la semilla de fluido isótropo de tipo Wyman IIa en el algoritmo desarrollado por (Ovalle et al., 2022) para resolver nuestro problema.
- Analizar el intercambio energético de ambas fuentes gravitacionales

1.5. Justificación

El estudio del intercambio energético relativista entre un politropo y un fluido tipo Wyman IIa reviste particular importancia, basada en la búsqueda de la comprensión de la física al interior de los remanentes estelares. Esta interacción, presente en entornos como estrellas compactas, desempeña un papel crucial como una alternativa para obtener soluciones relativistas de politropos anisotrópicos mediante el método de desacople gravitacional y deformación geométrica mínima extendida. Comprender estos modelos es crucial para la interpretación de observaciones astrofísicas, por mencionar algunas de ellas, supernovas, estrella de neutrones, agujeros negros, enanas blancas, entre otros. Asimismo, para la predicción de comportamientos estelares, como

por ejemplo, sismos estelares, erupciones estelares, ráfagas estelares, novas, supernovas, colapsos, etc. Se espera que los resultados obtenidos en este estudio proporcionen información valiosa para comprender la dinámica y evolución de sistemas astrofísicos. Además, los métodos desarrollados en este trabajo podrán ser aplicados a otros problemas de intercambio energético en el contexto de la TRG. Dada la cantidad de cálculos que se debe realizar en el proyecto de titulación y el tiempo limitado que se dispone, se llegó a la opción de realizarlo en pareja. Los integrantes de este proyecto de titulación trabajaron conjuntamente para realizar un estudio bibliográfico del intercambio energético entre fluidos relativistas, también, obtener el modelo analítico del intercambio energético entre una fuente de fluido perfecto tipo Wyman IIa y un politropo relativista mediante desacople gravitacional por deformación mínima extendida.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Bases Teóricas

2.1.1. Ecuaciones de Campo de Einstein (EFE)

Actualmente la mejor teoría sobre la gravitación es la TGR, cuyos principios se ven codificados en las EFE (Einstein, 1916; Einstein, 1915). Estas ecuaciones son escritas en forma tensorial de la siguiente forma:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

donde $R_{\mu\nu}$ el tensor de Ricci, R el escalar de curvatura, $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, κ es una constante de proporcionalidad¹, $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento. Estas ecuaciones modelan la deformación del espacio-tiempo en presencia de cualquier fuente de masa energía y cantidad de movimiento. El espacio-tiempo de cuatro dimensiones, $g_{\mu\nu}$ tiene 10 componentes independientes y por lo tanto, en TRG tenemos 10 ecuaciones independientes para el campo, (Foster et al., 2010; Carroll, 2004).

Los componentes del tensor de Ricci y el escalar de Ricci vienen dados por:

$$R_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho}, \quad (2.2)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

donde $R_{\mu\rho\nu}^{\rho}$ es el tensor de Riemann. Asimismo, el tensor de Riemann se define a través de las conexiones $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ y sus derivadas

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\rho}^{\lambda}, \quad (2.4)$$

que a la vez se definen, como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\nu}g_{\mu\rho} + \partial_{\mu}g_{\nu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}). \quad (2.5)$$

Mientras tanto, el lado derecho de las EFE contiene el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$, que contiene

¹ $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$.

la información sobre todas las fuentes de energía y momento que deforman el espacio-tiempo. También tenemos que mencionar que las componentes de este tensor de energía momento deben cumplir con una ecuación de conservación:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.6)$$

Está es una consecuencia directa del cumplimiento de las identidades de Bianchi. En el caso que $T_{\mu\nu}$ represente el fluido al interior de un cuerpo estelar compacto, esta ecuación físicamente representa el equilibrio hidrostático de cada punto interno.

2.1.2. *Métrica de Schwarzschild (solución exterior)*

Schwarzschild consideró que el espacio-tiempo alrededor de un cuerpo masivo esféricamente simétrico es estático, con simetría esférica, vacío y asintóticamente plano. Con estas premisas obtuvo la siguiente solución, (Schwarzschild, 1916a)²:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.7)$$

donde M es la masa del cuerpo masivo.

2.1.3. *Soluciones interiores anisótropas*

El espacio tiempo al interior de un cuerpo estelar compacto se lo modela a través de la siguiente métrica:

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.8)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, $\nu(r)$ y $\lambda(r)$ son funciones de la coordenada radial r ³. Usando la métrica (2.8) junto con las ecuaciones (2.1) obtenemos las componentes no nulas del tensor de Einstein:

$$G_{00} = -\frac{e^{-(\lambda-\nu)}}{r^2} (1 - \lambda' r - e^\lambda), \quad (2.9)$$

$$G_{11} = \frac{1}{r^2} (1 - e^\lambda + \nu' r), \quad (2.10)$$

$$G_{22} = r^2 e^{-\lambda} \left(\frac{\nu''}{2} - \frac{\lambda' \nu'}{4} + \frac{(\nu')^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right), \quad (2.11)$$

$$G_{33} = G_{22} \sin^2 \theta. \quad (2.12)$$

²Para este trabajo utilizamos la signature (+ - - -)

³Va desde el centro de la estrella hasta la superficie de la estrella

Por otro lado, el tensor energía-momento $T_{\mu\nu}$ para un fluido anisótropo al interior de un cuerpo estelar es:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(T_0^0, T_1^1, T_2^2, T_3^3) = \text{diag}(\rho, -p_r, -p_t, -p_t) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p_t \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Si incluimos las ecuaciones (2.9) - (2.12) junto con (2.13) en las EFE, obtenemos:

$$\kappa\rho = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right). \quad (2.14)$$

$$\kappa p_r = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right). \quad (2.15)$$

$$\kappa p_t = -\frac{e^{-\lambda}}{4} \left(2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right). \quad (2.16)$$

El cual es el sector material de un fluido anisótropo relativista. Este sistema de ecuaciones resulta indefinido dado que posee cinco incógnitas, por tanto, es necesario proveer dos relaciones extras para resolver el problema.

2.1.4. Condiciones de Aceptabilidad Física

Toda solución interior anisotropa debe cumplir un conjunto de condiciones de aceptabilidad física que se encuentran muy bien detalladas en (Ivanov, 2017):

1. Métrica regular:

Las componentes métricas del espacio-tiempo de la solución interior son funciones positivas, deben ser finitas y libres de singularidades en el interior de la estrella. En el centro deben satisfacer $e^{-\lambda(0)} = 1$ y $e^{\nu(0)} = \text{constante}$. Además, $e^{-\lambda}$ es monótonamente decreciente y e^{ν} es monótonamente creciente.

2. Condiciones de continuidad en la superficie estelar:

En la superficie de la estrella $r = R$ la solución interior debe coincidir con la solución exterior de Schwarzschild (2.7) lo cual determina que:

$$e^{\nu(R)} = e^{-\lambda(R)} = 1 - \frac{2M}{R}, \quad (2.17)$$

donde R es el radio de la estrella y M su masa. Asimismo, la presión radial en este punto

desaparece

$$p_r(r = R) = 0, \quad (2.18)$$

debido a que en el exterior de la estrella compacta se tiene vacío.

3. Condición de causalidad:

La velocidad radial $v_r^2 = \frac{dp_r}{d\rho}$ y tangencial $v_t^2 = \frac{dp_t}{d\rho}$ del sonido al interior del cuerpo estelar no deben sobrepasar el límite causal de la velocidad de la luz ($c = 1$). Por ende

$$0 \leq v_r^2 < 1, \quad y \quad 0 \leq v_t^2 < 1. \quad (2.19)$$

4. Sector material

Las cantidades ρ, p_r, p_t deben ser funciones positivas, monótonamente decrecientes y continuas. Además, alcanzan su máximo en el centro, es decir, $\rho'(0) = p_r'(0) = p_t'(0) = 0$. La presión tangencial debe mantenerse mayor a la radial en el interior de la estrella con la excepción del centro donde $p_t(0) = p_r(0)$.

5. Condiciones de energía

El sector material de la solución debe satisfacer la condición de energía dominante (DEC):

$$\rho \geq p_r, \quad y \quad \rho \geq p_t. \quad (2.20)$$

Es deseable que incluso la condición de energía fuerte (SEC):

$$\rho \geq p_r + 2p_t, \quad (2.21)$$

sea satisfecha

6. Corrimiento al rojo

La función de corrimiento al rojo $Z(r) = \frac{1}{\sqrt{e^\nu}} - 1$, debe ser continua y positiva, decreciente de la variable radial r . Su valor en la superficie $Z(r = R)$ tiene que ser menor al límite universal $Z_{\text{bound}} = 5.211$. Y si la solución satisface las SEC, entonces el límite es $Z_{\text{bound}} = 3.842$, (Ivanov, 2002), (Buchdahl, 1959).

2.1.5. Desacople Gravitacional (GD)

En esta sección revisaremos brevemente el método del GD (Para ver mas detalles leer las referencias (Ovalle, 2019; Ovalle, 2017a). El GD resuelve la Eq. (2.1) con:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(s)} + \alpha\theta_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

donde $T_{\mu\nu}^{(s)} = \text{diag}[T_0^{0(s)}, T_1^{1(s)}, T_2^{2(s)}, T_3^{3(s)}]$ es una fuente gravitacional conocida, $\theta_{\mu\nu} = \text{diag}[\theta_0^0, \theta_1^1, \theta_2^2, \theta_3^3]$ es una fuente extra desconocida, y la constante α adimensional que mide la influencia de la segunda fuente sobre la primera. Usando (2.22) el sistema de ecuaciones (2.14)-(2.16) obtenemos lo siguiente:

$$\kappa \left(T_0^{0(s)} + \alpha\theta_0^0 \right) = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right). \quad (2.23)$$

$$\kappa \left(T_1^{1(s)} + \alpha\theta_1^1 \right) = \frac{1}{r^2} - e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) \quad (2.24)$$

$$\kappa \left(T_2^{2(s)} + \alpha\theta_2^2 \right) = -\frac{e^{-\lambda}}{4} \left(2\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + 2\frac{\nu' - \lambda'}{r} \right). \quad (2.25)$$

Entonces se tiene el sector material efectivo dado por las siguientes cantidades físicas:

- densidad efectiva:

$$\rho = T_0^0 + \alpha\theta_0^0, \quad (2.26)$$

- presión radial efectiva:

$$p_r = -T_1^1 - \alpha\theta_1^1, \quad (2.27)$$

- presión tangencial efectiva:

$$p_t = -T_2^2 - \alpha\theta_2^2, \quad (2.28)$$

donde hemos utilizado $\alpha = 1$, es decir, consideramos una deformación completa. Se observa entonces que este sector material posee una función de anisotropía

$$\Pi \equiv p_t - p_r, \quad (2.29)$$

por lo cual el sistema resultante es un fluido anisotrópico.

2.1.6. Deformación Geométrica Mínima extendida (MGDe)

En el GD por MGDe, deformamos la solución de la Ec. (2.1) solo para la fuente semilla $T_{\mu\nu}^{(s)}$, dado por la métrica:

$$ds^2 = e^{\xi(r)} dt^2 - e^{\mu(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.30)$$

de la siguiente manera:

$$\xi \rightarrow v = \xi + g, \quad (2.31)$$

$$e^{-\mu} \rightarrow e^{-\lambda} = e^{-\mu} + f, \quad (2.32)$$

donde f y g son respectivamente deformaciones geométricas para los componentes métricos radial y temporal. Luego, usando las ecuaciones (2.31)-(2.32) sobre (2.23)-(2.25) se obtiene dos conjuntos de sistemas de ecuaciones diferenciales:

El primer conjunto relacionado con la fuente semilla $T_{\mu\nu}^{(s)}$:

$$kT_0^{0(s)} = \frac{1}{r^2} - e^{-\mu} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\mu'}{r} \right). \quad (2.33)$$

$$kT_1^{1(s)} = -\frac{1}{r^2} + e^{-\mu} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\xi'}{r} \right) \quad (2.34)$$

$$kT_2^{2(s)} = \frac{e^{-\mu}}{4} \left(2\xi'' + \xi'^2 - \mu'\xi' + 2\frac{\xi' - \mu'}{r} \right), \quad (2.35)$$

el segundo conjunto relacionado con la fuente $\theta_{\mu\nu}$:

$$\kappa\theta_0^0 = -\frac{f}{r^2} - \frac{f'}{r}, \quad (2.36)$$

$$\kappa\theta_1^1 - Z_1 = f \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right), \quad (2.37)$$

$$\kappa\theta_2^2 - Z_2 = \frac{f}{4} \left(2\nu'' + \nu'^2 + 2\frac{\nu'}{r} \right) - \frac{f'}{4} \left(\nu' + \frac{2}{r} \right) \quad (2.38)$$

donde:

$$Z_1 = \frac{e^{-\mu} g'}{r} \quad (2.39)$$

$$4Z_2 = e^{-\mu} \left(2g'' + g'^2 + \frac{2g'}{r} + 2\xi'g' - \mu'g' \right). \quad (2.40)$$

Por otro lado, si usamos el tensor energía momento (2.22) junto a la ecuación (2.6), podemos obtener (Ver los detalles en (Ovalle et al., 2022)):

$$\nabla_\sigma T_\nu^\sigma = -\nabla_\sigma \theta_\nu^\sigma = -\frac{g'}{2} (T_0^0 - T_1^1) \delta_\nu^\sigma. \quad (2.41)$$

Finalmente, la ecuación (2.41) nos muestra el intercambio energético entre los fluidos $\{T_{\mu\nu}^{(s)}, \theta_{\mu,\nu}\}$,

dada por:

$$\Delta E = \frac{g'}{2\kappa} \frac{e^{-\mu}}{r} (\xi' + \mu'), \quad (2.42)$$

donde, si $g' > 0$ obtenemos $\Delta E > 0$, en consecuencia la fuente $\theta_{\mu\nu}$ cede energía al entorno, mientras que, si $g' < 0$ sucede el caso contrario en el que $T_{\mu\nu}^{(s)}$ es la que da energía al medio para sustentar el cuerpo compacto. Efectivamente dentro del marco de GD por MGDe es posible modelar el intercambio entre fluidos al interior de un cuerpo estelar.

2.1.7. *Politropo*

Los politropos corresponden a soluciones de interiores estelares cuya ecuación de estado se puede escribir como:

$$p = K \rho_0^\Gamma = K \rho_0^{\frac{n+1}{n}}, \quad (2.43)$$

donde p es la presión isótropa y ρ_0 es la densidad de masa (barionica). Las constantes K , Γ , y n son usualmente denominadas constante politrópica, exponente politrópico, e índice politrópico, respectivamente. De lo anterior, sabemos que esta ecuación de estado sólo dependerá de la presión, $\rho = \rho(p)$ (Kippenhahn et al., 1990). Cuando la constante K se calcula a partir de constantes naturales, la ecuación de estado politrópica se puede utilizar para modelar un gas de Fermi completamente degenerado no relativista ($n = 5/3$), y en el límite relativista ($n = 4/3$). De lo contrario, si K es un parámetro libre, los modelos pueden usarse para describir un gas ideal isotérmico o una estrella completamente convectiva. Así también, se sabe que los politropos juegan un papel importante dentro del estudio de estructuras estelares de varios problemas astrofísicos fundamentales. Por ejemplo, objetos como enanas blancas anisotrópicas se han modelado considerando un formalismo general para estudiar los politropos newtonianos para la materia anisotrópica (Abellán et al., 2020; Herrera et al., 2013; Horedt, 2004).

2.1.8. *Wyman IIa*

La solución Wyman IIa es un fluido estelar isótropico, cuya métrica es (Wyman, 1946):

$$e^\xi = (A - Br^2)^2$$

$$e^{-\mu} = 1 + cr^2(A - 3Br^2)^{-\frac{2}{3}} \quad (2.44)$$

donde A es una constante adimensional, mientras que B y C son constantes con dimensiones de la inversa de una longitud al cuadrado. Esta solución ha sido utilizada dentro del método del desacople gravitacional para hallar nuevas soluciones en trabajos tal como en (Andrade et al.,

2024; Santana et al., 2022).

2.2. Bases conceptuales

2.2.1. *Modelo Estelar*

El modelo estelar se refiere a las teorías y representaciones que describen la formación, evolución y estructura de las estrellas en el universo. Este concepto incluye diversas etapas, desde la formación de nubes moleculares hasta la evolución de las estrellas en diferentes tipos, como enanas, gigantes y supergigantes, así como su eventual muerte como supernovas o enanas blancas, (Kippenhahn et al., 1990).

2.2.2. *Desacople Gravitacional*

Es un método que permite construir soluciones interiores anisótropas a partir de soluciones isótropas.

2.2.3. *Intercambio Energético*

Se refiere a los procesos mediante los cuales la energía se transfiere entre diferentes componentes de un sistema estelar. Es esencial para comprender la dinámica de la materia y la energía en el universo logrando modelar sistemas simples y complejos, (Kippenhahn et al., 1990).

2.2.4. *Fluido Relativista*

El fluido relativista describe la dinámica de sistemas de muchas partículas a altas velocidades o en condiciones de gravedad intensa. Toma como entrada la física de escalas microscópicas y produce como salida predicciones de movimiento macroscópico masivo que al comprender las características relativistas puede llevar a una comprensión de la física a escala microscópica, (Andersson et al., 2021; Carroll, 2004).

2.2.5. *Isotropía y Anisotropía Estelar*

La isotropía estelar se refiere a las propiedades estadísticas de las estrellas que son similares en cualquier dirección del espacio. Por otro lado, la anisotropía estelar, se refiere a la falta de uniformidad, debido a la presencia de estructuras a gran escala, como cúmulos y supercúmulos de galaxias o a la existencia de campos magnéticos y flujos de gas, (Weinberg, 1971; Andersson et al., 2021).

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Tipo de investigación

Este trabajo utiliza un método de investigación cuantitativa que se basa en los objetivos teóricos mencionados en este manuscrito. Por lo cual, se trata de un estudio descriptivo y explicativo. Además, al ser una investigación netamente teórica es pertinente que se use una interferencia lógica-deductiva. Esta metodología permite desarrollar una comprensión profunda de los principios subyacentes y hacer predicciones sobre el comportamiento del sistema que pueden ser probadas posteriormente. Así, nosotros pretendemos estudiar y analizar el intercambio energético entre una fuente de fluido isótropo tipo Wyman IIa y un politropo relativista mediante el uso del desacople gravitacional por deformación geométrica extendida mediante el algoritmo desarrollado en el trabajo (Ovalle et al., 2022).

3.1.1. *No experimental*

Este estudio se enmarca en un enfoque teórico debido a que se basa en modelos matemáticos ideales cuya replicación experimental resulta compleja. Dichos modelos permiten analizar fenómenos energéticos bajo condiciones ideales, lo cual es particularmente relevante en áreas como la astrofísica.

3.1.1.1. *Localización del Estudio*

La localización del presente estudio será en la Carrera de Física de la Facultad de Ciencias de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo se usa la información del marco teórico para obtener el nuevo modelo estelar compacto, y a su vez analizar la aceptabilidad y estabilidad física del modelo resultante. A partir de esta sección hacemos un cambio de nomenclatura con fines prácticos para la fuente semilla $T_0^0 = \rho^{(s)}, T_1^1 = p_r^{(s)}, T_2^2 = p_t^{(s)}$ y para la fuente desconocida $\theta_0^0 = \varepsilon, \theta_1^1 = P_r, \theta_2^2 = P_t$.

4.1. Desarrollo

4.1.1. Cálculo de la función de deformación del espacio $f(r)$

Para la obtención de la deformación geométrica $f(r)$ usamos la restricción mímica para la densidad, es decir,

$$\varepsilon \sim \rho^{(s)}, \quad (4.1)$$

siendo esta la expresión más simple para $\varepsilon(r)$ que satisface la restricción (4.1) dada por:

$$\varepsilon(r) = \alpha(K, \Gamma) \rho(r)^{(s)}. \quad (4.2)$$

donde usamos $\alpha(K, \Gamma)$ que es consistente con la ecuación del politropo, (2.43), y con la condición $f(r)|_{K=0} = 0$, la cual se expresa de la siguiente forma:

$$\alpha(K, \Gamma) = K^\Gamma. \quad (4.3)$$

Y, para la ecuación (4.2) junto a las ecuaciones de Einstein desacopladas (2.33)-(2.38), se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{f'(r)}{r} + \frac{f(r)}{r^2} = -(K)^\Gamma \left(\frac{1}{r^2} - e^{-\mu(r)} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\mu'(r)}{r} \right) \right). \quad (4.4)$$

Remplazando las métricas del fluido isótropo, (2.44), en la anterior ecuación, se obtiene que:

$$f(r) = \frac{c K^{1+\frac{1}{n}} r^2}{(A - 3Br^2)^{\frac{2}{3}}}. \quad (4.5)$$

4.1.2. Cálculo de la función de deformación del tiempo $g(r)$

Para el cálculo de la deformación geométrica $g(r)$ primero obtenemos su $g'(r)$ mediante la ecuación del politropo (2.43) y la ecuación (4.2), obteniendo la nueva expresión:

$$P_r = K(K^\Gamma)^\Gamma \rho^{(s)}. \quad (4.6)$$

Y en esta ecuación, sustituimos las ecuaciones de Einstein desacopladas (2.33)-(2.38), obteniendo que:

$$g'(r) = \frac{r}{e^{-\mu(r)} + f(r)} \left(\kappa K \left(\frac{(K)^\Gamma}{\kappa} \left(\frac{1}{r^2} - e^{-\mu(r)} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\mu'(r)}{r} \right) \right) \right)^\Gamma - f(r) \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\xi'(r)}{r} \right) \right); \quad (4.7)$$

luego reemplazando (2.44) y (4.5), en (4.7), se halla:

$$g'(r) = \frac{r \left(-\frac{cK^{1+\frac{1}{n}}(A-5Br^2)}{(A-3Br^2)^{\frac{2}{3}}(A-Br^2)} + K \left(-\frac{cK^{1+\frac{1}{n}}(3A-5Br^2)}{(A-3Br^2)^{\frac{5}{3}}\kappa} \right)^{1+\frac{1}{n}} \kappa \right)}{1 + \frac{c(1+K^{1+\frac{1}{n}})r^2}{(A-3Br^2)^{\frac{2}{3}}}}. \quad (4.8)$$

Para integrar (4.8) hacemos uso de métodos numéricos, usando un cambio de variable $r \rightarrow xR$ con un intervalo de integración de $[0, 1]$. Entonces la ecuación de g es reescrita como:

$$g(x) = \int_0^1 (R) \left[\frac{Rx \left(-\frac{cK^{1+\frac{1}{n}}(A-5BR^2x^2)}{(A-3BR^2x^2)^{\frac{2}{3}}(A-BR^2x^2)} + K \left(-\frac{cK^{1+\frac{1}{n}}(3A-5BR^2x^2)}{(A-3BR^2x^2)^{\frac{5}{3}}\kappa} \right)^{1+\frac{1}{n}} \kappa \right)}{1 + \frac{c(1+K^{1+\frac{1}{n}})R^2x^2}{(A-3BR^2x^2)^{\frac{2}{3}}}} \right] dx \quad (4.9)$$

Esta ecuación fue resuelta dando valores a los parametros libres $[A, B, c, K, R, n]$ y usando Matlab mediante el método de cuadratura adaptativa global basado en el algoritmo de Gander y Gautschi que resuelve integrales con funciones con picos o comportamiento complicado en el intervalo de integración.

4.1.3. Cambio en la geometría del espacio-tiempo

Usando la ecuación (4.4) y junto con la ecuación de la metrica (2.44) en (2.32) llegamos a obtener:

$$e^{\lambda(r)} = 1 + \frac{c(1 + K^{1+1/n})r^2}{(A - 3Br^2)^{2/3}}. \quad (4.10)$$

Por otro lado, si derivamos la métrica de ν obtenemos $\nu'(r) = \xi'(r) + g'(r)$, en la cual reemplazamos (2.44) y (4.8), llegando a:

$$\nu'(r) = -\frac{4Br}{A - Br^2} + \frac{r \left(-\frac{c K^{1+\frac{1}{n}} (A-5Br^2)}{(A-3Br^2)^{\frac{2}{3}} (A-Br^2)} + K \left(-\frac{c K^{1+\frac{1}{n}} (3A-5Br^2)}{(A-3Br^2)^{\frac{5}{3}} \kappa} \right)^{1+\frac{1}{n}} \kappa \right)}{1 + \frac{c(1+K^{1+\frac{1}{n}})r^2}{(A-3Br^2)^{\frac{2}{3}}}}. \quad (4.11)$$

Al integrar numéricamente $g'(r)$ nos encontramos con un $\nu(r)$ que esta definido por

$$\nu(r) = \xi(r) + g(r) = \ln(A - Br^2)^2 + g(r) \quad (4.12)$$

De esta forma, obtenemos:

$$e^{\nu(r)} = c_1 (A - Br^2)^2 \quad (4.13)$$

donde c_1 representa una constante que varia según el valor numérico de la integral (4.9).

4.1.4. Cálculos del sector material

Usando las EFE del conjunto (2.14)-(2.16) y al evaluarlas con las métricas (2.44), obtenemos ρ , p_r y p_t efectivas:

$$\rho(r) = -\frac{c \left(K^{\frac{1}{n}+1} + 1 \right) (3A - 5Br^2)}{\kappa (A - 3Br^2)^{5/3}}. \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} p_r(r) = & \frac{\kappa K (A - Br^2)(A - 3Br^2) \left(-\frac{c K^{\frac{1}{n}+1} (3A-5Br^2)}{\kappa (A-3Br^2)^{5/3}} \right)^{\frac{1}{n}+1}}{\kappa (A - 3Br^2)(A - Br^2)} \\ & + \frac{c(A - 5Br^2) \sqrt[3]{A - 3Br^2}}{\kappa (A - 3Br^2)(A - Br^2)} \\ & + \frac{-4AB + 12B^2r^2}{\kappa (A - 3Br^2)(A - Br^2)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
p_t(r) = & \frac{1}{4(A-3Br^2)^{8/3}} \left[\frac{20Bcr^2(A-3Br^2)^2 K^{1+\frac{1}{n}}}{A-Br^2} \right. \\
& + \frac{4Bcr^2(A-3Br^2)^2(A-5Br^2) K^{1+\frac{1}{n}}}{(A-Br^2)^2} \\
& - \frac{4c(A-5Br^2)(A-3Br^2)^2 K^{1+\frac{1}{n}}}{A-Br^2} \\
& - \frac{8Bcr^2(A-5Br^2)(A-3Br^2) K^{1+\frac{1}{n}}}{A-Br^2} \\
& + \frac{2c^2(K^{1+\frac{1}{n}}+1)r^2(A-3Br^2)(A-5Br^2) K^{1+\frac{1}{n}}}{(A-3Br^2)^{2/3} + c(K^{1+\frac{1}{n}}+1)r^2} \\
& + \frac{c^2r^2(A-3Br^2)^2(A-5Br^2)^2 K^{2+\frac{2}{n}}}{(A-Br^2)^2((A-3Br^2)^{2/3} + c(K^{1+\frac{1}{n}}+1)r^2)} \\
& + \frac{c^2r^2(3A-5Br^2)^2 \left(-\frac{cK^{1+\frac{1}{n}}(3A-5Br^2)}{(A-3Br^2)^{5/3}\kappa} \right)^{2/n} K^{4+\frac{2}{n}}}{(A-3Br^2)^{2/3} + c(K^{1+\frac{1}{n}}+1)r^2} \\
& - 8Bc(K^{1+\frac{1}{n}}+1)r^2(A-3Br^2) \\
& + 4c(K^{1+\frac{1}{n}}+1)(A-Br^2)(A-3Br^2) \\
& - \frac{16B(A-3Br^2)^2((A-3Br^2)^{2/3} + c(K^{1+\frac{1}{n}}+1)r^2)}{A-Br^2} \\
& - \frac{2cK^{2+\frac{1}{n}}}{n(A-Br^2)((A-3Br^2)^{2/3} + c(K^{1+\frac{1}{n}}+1)r^2)} \times \\
& \left[5B^3(2(2-7n)(A-3Br^2)^{2/3} + c(2(n+2)K^{1+\frac{1}{n}} - 13n+4)r^2)r^6 \right. \\
& + AB^2(2(37n-20)(A-3Br^2)^{2/3} + c(-8(3n+5)K^{1+\frac{1}{n}} + 61n-40)r^2)r^4 \\
& + A^2B(2(10-13n)(A-3Br^2)^{2/3} + c(2(7n+10)K^{1+\frac{1}{n}} - 15n+20)r^2)r^2 \\
& \left. + 3A^3n(2(A-3Br^2)^{2/3} + cr^2) \right] \left(-\frac{cK^{1+\frac{1}{n}}(3A-5Br^2)}{(A-3Br^2)^{5/3}\kappa} \right)^{1/n} \Big].
\end{aligned} \tag{4.16}$$

4.1.5. Aplicación de las condiciones de Matching

Para que el objeto autogravitante sea físicamente aceptable debemos usar las ecuaciones (2.17) junto con (4.10) y (4.13), obteniendo las siguientes condiciones:

$$A = c_2 \left(c_3 B R^2 - \frac{c_4 \sqrt{R-2M}}{\sqrt{R}} \right), \tag{4.17}$$

$$c = -\frac{2M(A - 3BR^2)^{2/3}}{R^3 \left(K^{\frac{1}{n}+1} + 1\right)}. \quad (4.18)$$

donde las constantes c_2, c_3, c_4 dependen de los parámetros dados para la integración de (4.9).

4.1.5.1. Cálculo del factor de compacticidad, u

En este caso, para obtener el factor de compacticidad del objeto estelar:

$$u = \frac{M}{R} \quad (4.19)$$

debemos resolver la ecuación de p_r , ya que con ella podemos calcular un factor que sea capaz de cumplir con $p_r(r = R) = 0$ en la superficie de la estrella, lo cual permite que haya una condición de frontera que sea consistente entre el interior del cuerpo estelar con el medio exterior. Para ello, a la ecuación de p_r la sustituimos con $M \rightarrow uR, r \rightarrow xR$ de lo que resulta una ecuación que ya no depende de r y de esta forma evaluando a R y x en uno, logremos tener una ecuación que se pueda resolver para u . Este procedimiento fue necesario para obtener un comportamiento realista de nuestro modelo.

4.2. Resultados

En este punto se analizará la aceptabilidad física para el modelo estelar y el intercambio energético. Las condiciones para este caso son: $B = 0,45, \kappa = 8\pi, R = 1$ junto con la restricción (4.18). Para la ecuación (4.17), los parámetros c_2, c_3 y c_4 se determinan en función de las constantes mencionadas y la variable K . Estas constantes mencionadas anteriormente fueron determinadas de tal modo que nuestro modelo muestre un comportamiento físicamente realista. Es importante mencionar se desarrolla esta investigación con un índice politrópico de $n = 0.5$ que modela estrellas de neutrones, (Horedt, 2004). En las ilustraciones observamos que $K = 0.43$ es la línea azul, $K = 0.44$ es la línea negra y $K = 0.47$ es la línea roja.

4.2.1. Condiciones de Aceptabilidad Física

4.2.1.1. Sector Material

En las ilustraciones 4-1, 4-2 y 4-3, se observa el sector material $[\rho, p_r, p_t]$ del modelo que tiene sus valores máximos en el centro de la estrella $\rho'(0) = p_r'(0) = p_t'(0) = 0$, también, la presión tangencial domina a la presión radial $p_t(r) > p_r(r)$ en todo el espacio $0 < r \leq R$. A su vez, se confirma las condiciones de aceptabilidad física, ya que, son funciones positivas, continuas y decrecientes monótonamente en el cuerpo estelar cumpliendo con las condiciones para el sector

material, mencionadas en el capítulo II. Mientras que, en la ilustración 4-2 notamos que se cumple con la ecuación (2.18), la cual establece que la presión radial debe anularse en la superficie estelar.

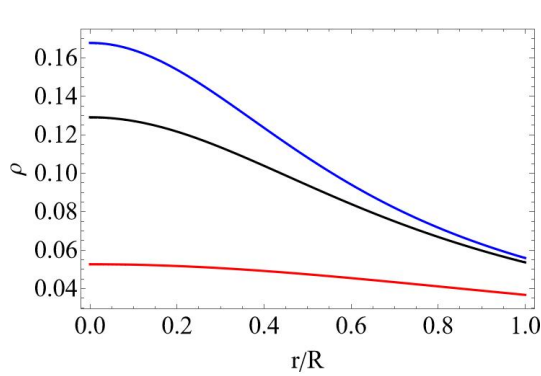


Ilustración 4-1: Densidad de energía para diferentes valores de K

Realizado por: Gallegos & Quizhpe, 2025.

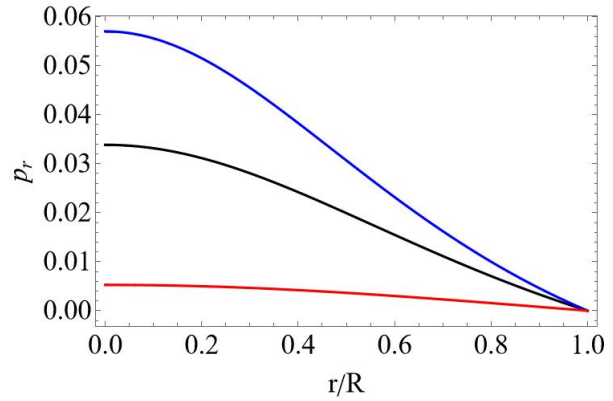


Ilustración 4-2: Presión radial para diferentes valores de K

Realizado por: Gallegos & Quizhpe, 2025.

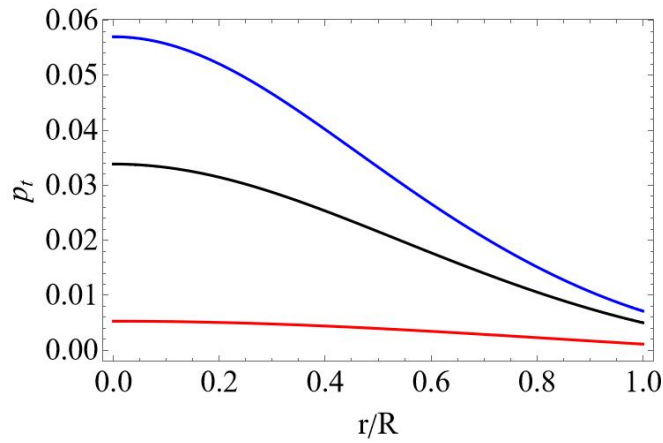


Ilustración 4-3: Presión tangencial para diferentes valores de K

Realizado por: Gallegos & Quizhpe, 2025.

La densidad de energía y las presiones tienen un valor alto en $K = 0.43$ (línea azul) y un valor mínimo en $K = 0.47$ (línea roja), esto nos da a conocer que mientras que la constante politrópica (K) aumenta su valor, el sector material tiene valores menores. Analizando las ilustraciones 4-2 y 4-3, notamos que el decrecimiento es mucho mas suave en la ilustración de p_t .

4.2.1.2. Métricas

Las componentes métricas del espacio-tiempo de la solución interior son funciones positivas y finitas. En el centro la métrica radial satisface $e^{-\lambda(0)} = 1$ y es monótonamente decreciente (Ver Ilustración: 4-4)

A diferencia de la métrica temporal, ya que $e^{\nu(0)} = \text{constante}$ y monótonamente creciente (Ver

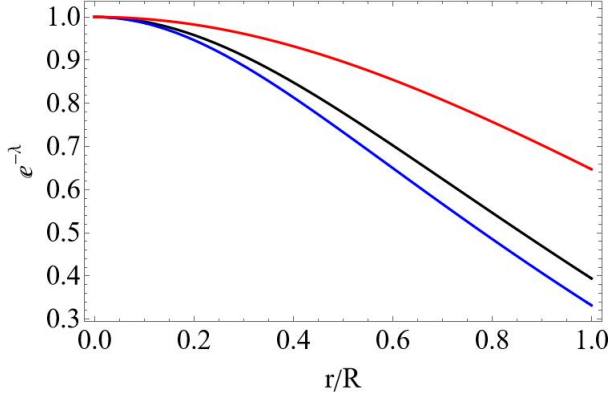


Ilustración 4-4: Métrica radial para diferentes valores de K

Realizado por: Gallegos & Quizhpe, 2025.

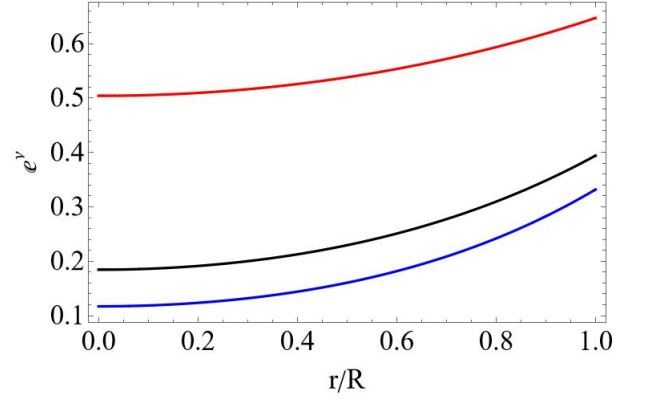


Ilustración 4-5: Métrica temporal para diferentes valores de K

ilustración 4-5).

Observamos que en la ilustración 4-4 cuando K es menor tiene un mayor decrecimiento, mientras que, en la ilustración 4-5 a medida que sube el valor de K la curva tiende a ser menos pronunciada. De esta manera se cumple la condición 1 del capítulo II.

4.2.1.3. Condiciones de energía

En las ilustraciones 4-6 y 4-7 se observa que el sector material de la solución satisface la condición de energía dominante (2.20).

En la ilustración 4-8, la condición (2.21) se satisface para $K = 0.44$ (línea negra) y $K = 0.47$ (línea roja), lo que indica que estos modelos estelares son físicamente viables y estables. Por el contrario, para $K = 0.43$ (línea azul), la SEC se viola, lo que sugiere que este modelo es inestable. Según (Visser et al., 2000), la violación de la SEC puede ocurrir en sistemas con presiones negativas o condiciones extremas, como en ciertos modelos de estrellas de neutrones.

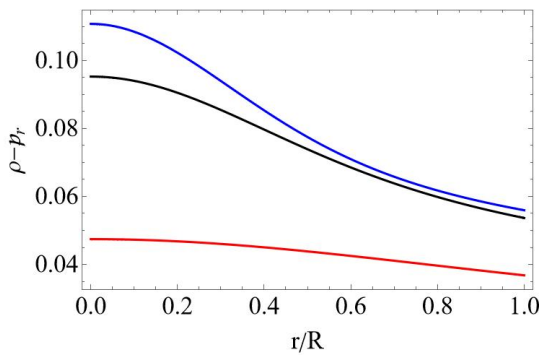


Ilustración 4-6: Condición energía débil (DEC) para diferentes valores de K

Realizado por: Gallegos & Quizhpe, 2025.

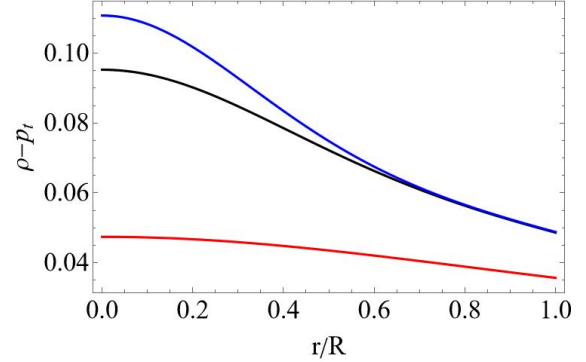


Ilustración 4-7: Condición energía débil (DEC) para diferentes valores de K

Realizado por: Gallegos & Quizhpe, 2025.

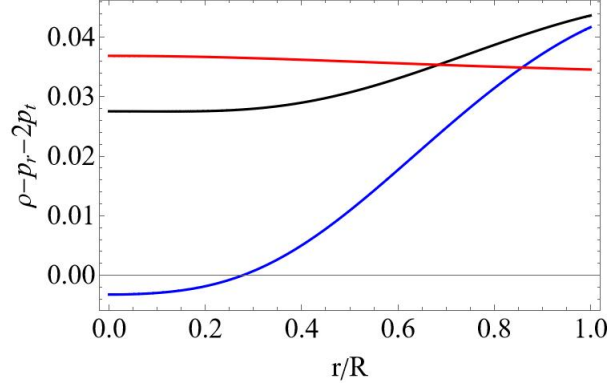


Ilustración 4-8: Condición energía fuerte (SEC) para diferentes valores de K

Realizado por: Gallegos & Quizhpe, 2025.

4.2.1.4. Corrimiento al rojo

En la ilustración 4-9 notamos que Z es positiva y es una función monótonamente decreciente de la variable radial r . También visualizamos que para los modelos que cumplen con la SEC (Ver ilustración 4-8), $K = 0.44$ y $K = 0.47$ el valor en la superficie es menor que 3.842, cumpliendo con la condición de aceptabilidad 6. Mientras que para el modelo $K = 0.43$ al no cumplir con la SEC debe tener un valor menor al límite universal 5.211, en la superficie estelar. De hecho, este valor es de $Z = 0.735938$ cumpliendo también con la condición mencionada.

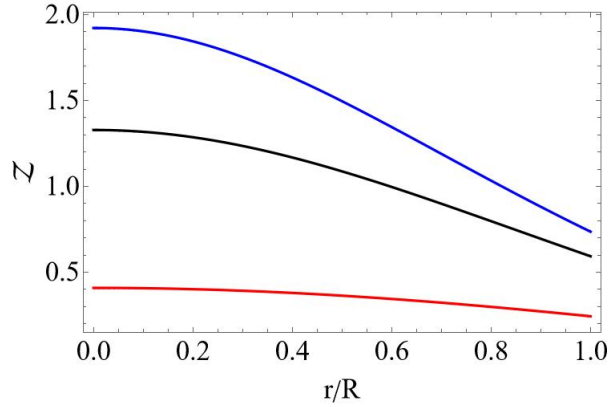


Ilustración 4-9: Corrimiento al rojo para diferentes valores de K

Realizado por: Gallegos & Quizhpe, 2025.

4.2.1.5. Condición de causalidad

Para satisfacer esta condición se debe cumplir con la ecuación (2.19). Podemos observar que en las ilustraciones 4-10 y 4-11 se cumple efectivamente esta condición.

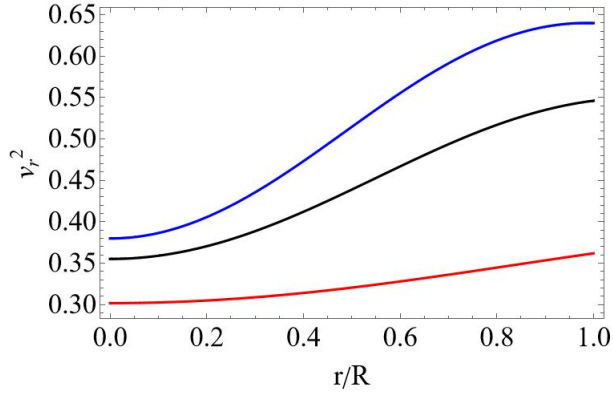


Ilustración 4-10: Velocidad radial del sonido para diferentes valores de K

Realizado por: Gallegos & Quizhpe, 2025.

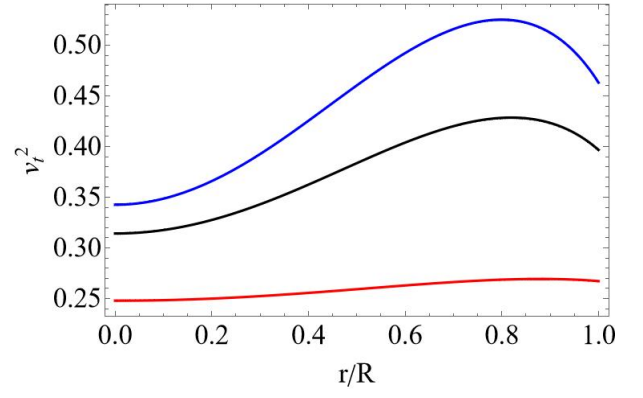


Ilustración 4-11: Velocidad tangencial del sonido para diferentes valores de K

Esto muestra que el modelo cumple con la condición de causalidad, debido a que la velocidad radial v_r^2 y la velocidad tangencial v_t^2 al interior del cuerpo estelar no excede el límite causal de la velocidad de la luz $c = 1$.

4.2.2. Anisotropía

La anisotropía en este modelo es positiva. Esta crece a medida que va creciendo en el radio de la estrella, (Ver Ilustraciones 4-12 y 4-13).

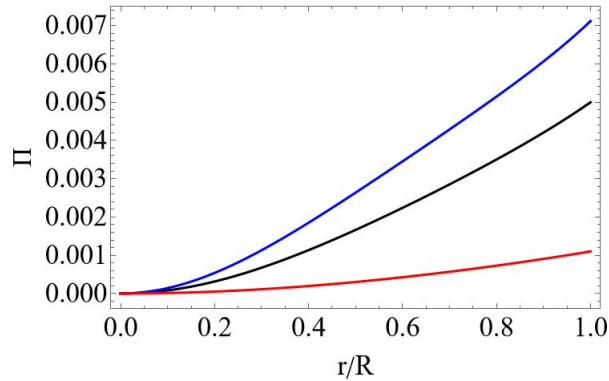


Ilustración 4-12: Anisotropía para diferentes valores de K

Realizado por: Quizhpe & Gallegos, 2025.

En este punto podemos comprender que tenemos presiones tangenciales mayores a las presiones radiales, lo que resulta en anisotropías positivas. Además, podemos notar que en el centro de la estrella la anisotropía es cero por lo que no existe ningún colapso y el núcleo de la estrella tiende a la estabilidad, (Herrera et al., 1997).

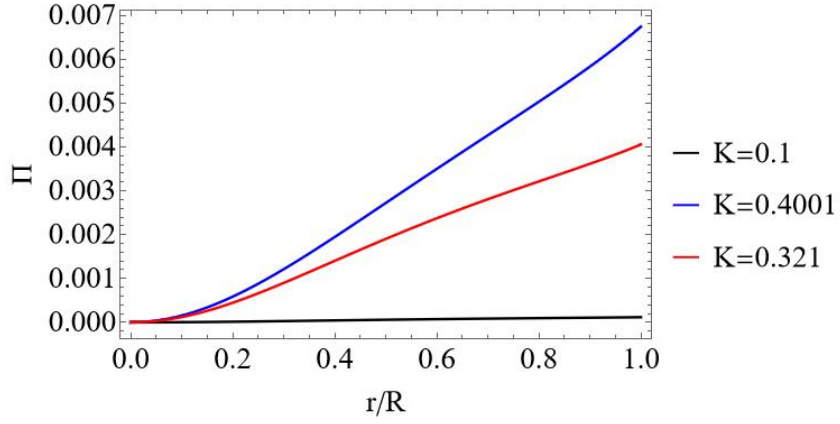


Ilustración 4-13: Anisotropías con la constantes $B = 0.3$, $n = 0.5$, $\kappa = 8\pi$, $R = 1$ para $K = 0.1$ línea negra, $K = 0.4001$ línea azul, $K = 0.321$ línea roja.

Realizado por: Quizhpe & Gallegos, 2025.

4.2.3. Intercambio Energético

El intercambio energético en este modelo es positivo y creciente a medida que va creciendo en el radio de la estrella. (Ver Ilustraciones 4-14, 4-15 y 4-16).

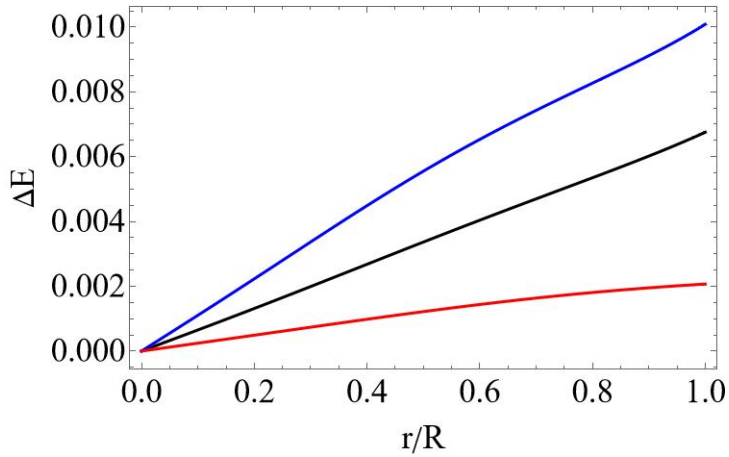


Ilustración 4-14: Intercambio energético para diferentes valores de K .

Realizado por: Quizhpe & Gallegos, 2025.

En la ilustración 4-15, analizamos el intercambio energético en función del factor de compactidad, u , donde observamos que existe un ΔE más elevado cuando las configuraciones son más compactas. En cambio, la ilustración 4-16 muestra valores similares para u , con constantes politrópicas distintas, K , lo que sugiere que ΔE depende principalmente de los valores que puede tener el factor K . En particular, se observa que una disminución en K genera una zona mas grande de intercambio energético ($\Delta E \uparrow$).

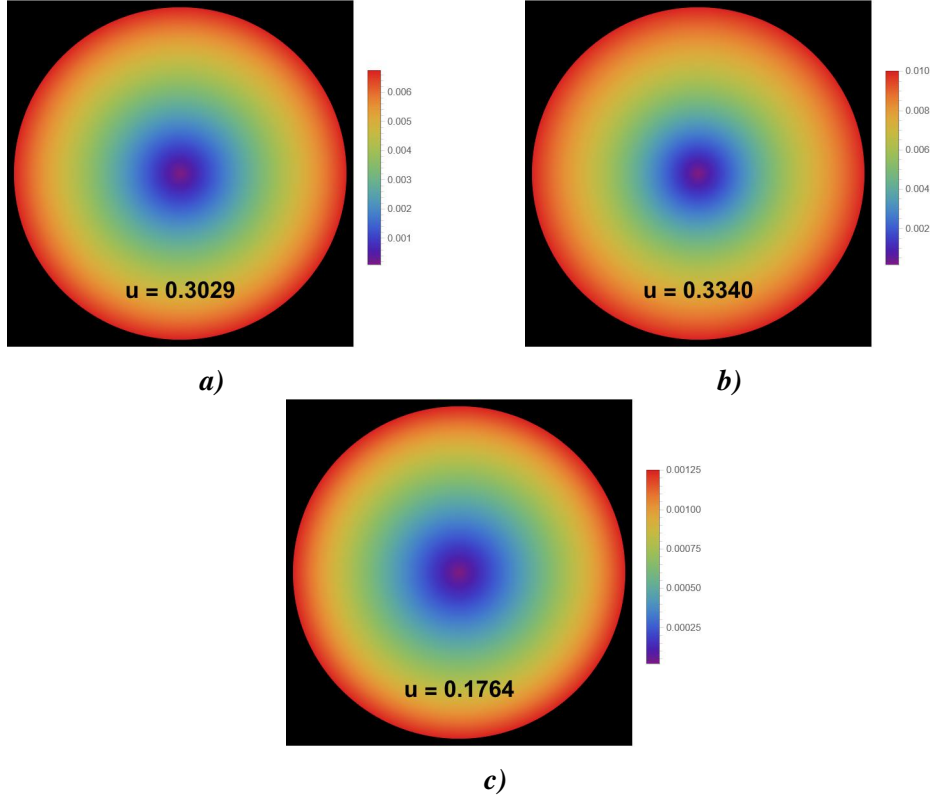


Ilustración 4-15: a) Intercambio energético para el modelo estelar de $K = 0.44$ y con $u = 0.3029$. b) Intercambio energético para el modelo estelar de $K = 0.43$ y con $u = 0.3340$. c) Intercambio energético para el modelo estelar de $K = 0.47$ y con $u = 0.1764$.

Realizado por: Quizhpe & Gallegos, 2025.

De la observación de las ilustraciones 4-15 y 4-16, se puede deducir $\Delta E > 0$, en consecuencia, el politropo cede energía al entorno para lograr la convivencia con el fluido perfecto dentro del cuerpo estelar resultante. Por otro lado, en el centro el intercambio energético es nulo ($\Delta E = 0$) lo que indica estabilidad en esa región, y este intercambio energético aumente a medida que el r se mueve a zonas mas externas de la estrella compacta.

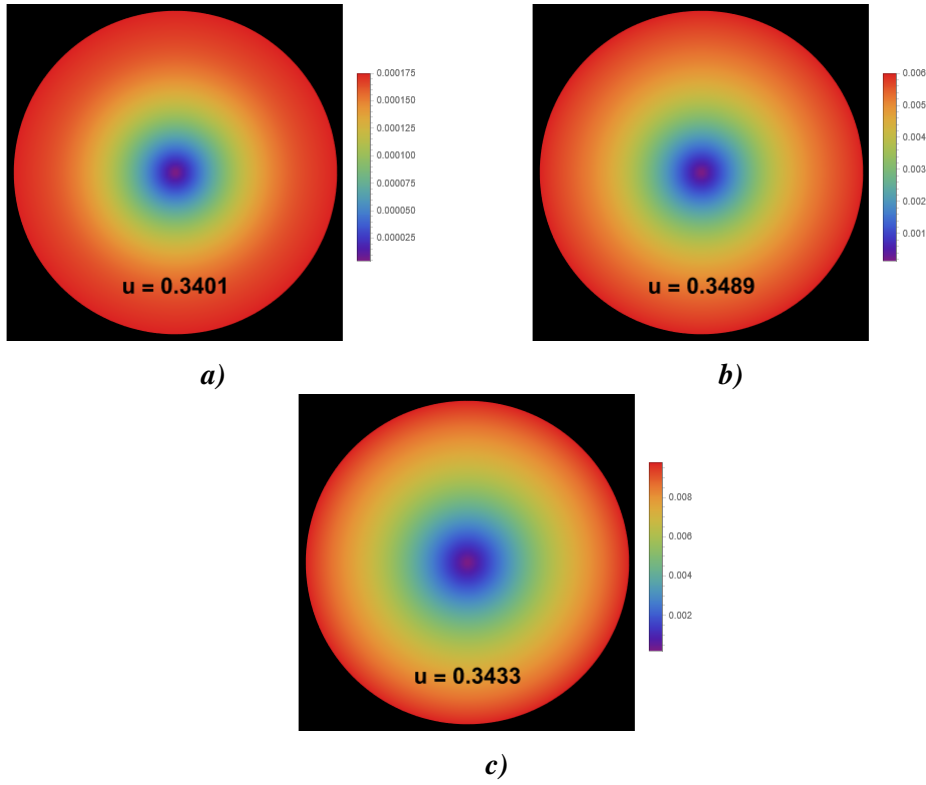


Ilustración 4-16: Intercambio energético con la constantes $B = 0.3$, $n = 0.5$, $\kappa = 8\pi$, $R = 1$ a) $K = 0.1$ y con $u = 0.3401$. b) $K = 0.321$ y con $u = 0.3489$. c) $K = 0.4001$ y con $u = 0.3433$.

Realizado por: Quizhpe & Gallegos, 2025.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

En este trabajo de titulación se llevó a cabo una revisión bibliográfica sobre los conceptos fundamentales del intercambio energético para fluidos relativistas mediante la utilización del GD por MGDe. Luego, se usó la semilla de fluido isótropo tipo Wyman IIa en el algoritmo desarrollado por (Ovalle et al., 2022), permitiendo determinar la función (4.8). Este resultado facilitó cuantificar el intercambio energético entre las dos fuentes del sistema, concluyendo que el entorno absorbe energía del politropo. Adicionalmente, mediante integración numérica de g' ejecutada en Matlab, se avanzó en la construcción de un modelo físicamente realista. Para ello, se diseñó un procedimiento computacional que involucró la asignación de valores distintos a las constantes A, B, c, K, R, n , lo que derivó en la identificación de funciones continuas, aptas para la integración numérica de (4.9), obteniendo valores reales para esta misma. Como resultado, se generaron tres configuraciones de estrellas de neutrones, todas consistentes con los criterios de aceptabilidad física. Sin embargo, únicamente dos de estas configuraciones para estrellas de neutrones cumplieron plenamente con la Condición de Energía Fuerte (SEC, por sus siglas en inglés; véase ecuación 2.21). La deformación temporal para estas configuraciones son las siguientes $g_1 \approx -1.638$ ($K = 0.44$) y $g_2 \approx -3.121$ ($K = 0.47$) garantizando así la estabilidad deseada. De esta forma, se concluye que para valores de g en el rango $[-1.638; -3.121]$ las configuraciones son físicamente realistas. Es importante que se realicen más configuraciones para seguir un análisis más preciso de los rangos en los que se cumplen las condiciones mencionadas ya que esto depende de algunas otras constantes.

Por otro lado, al realizar una comparativa entre las anisotropías de las configuraciones de la ilustración 4-12 y la ilustración 4-13, notamos la diferencia en el comportamiento ya que a medida que r aumenta, Π también crece, por lo que, la presión tangencial se vuelve progresivamente mayor que la presión radial en las regiones externas del objeto. Así, se muestra cambios más bruscos en Π cuando las SEC no se cumple. Y como resultado habrá implicaciones en la estabilidad y evolución del objeto, ya que una alta anisotropía podría evitar colapsos gravitacionales o modificar la dinámica del sistema. Reforzando esta interpretación con (Herrera et al., 1997).

En cuanto al intercambio energético, las ilustraciones 4-15 y 4-16 revelan diferencias significativas entre los casos donde la SEC se satisface y aquellos donde no. Específicamente, en el interior

del objeto compacto, se observan configuraciones energéticas con mas extensión cuando la SEC no se verifica, contrastando con los patrones ordenados registrados en los modelos que sí la respetan. Este contraste subraya el papel crítico de la SEC en la regulación de las interacciones energéticas dentro de sistemas relativistas complejos. También es importante resaltar la relación que tiene la anisotropía ($\Pi = p_t - p_r$) con el intercambio energético, precisamente esta es nula en el centro lo que puede estar relacionado con la supresión del intercambio energético ($\Delta E = 0$), al interior del cuerpo estelar. Sin embargo, en zonas más externas $r \rightarrow R$, las interacciones aumentan generando anisotropía y consecuentemente un intercambio energético.

Cabe mencionar que el factor de compacticidad, es crítico en el intercambio energético y la anisotropía como se muestra en la ilustración 4-15, donde se obtiene un Π más elevado cuando las configuraciones son más compactas ($u \sim 0.3 - 0.35$) lo que significa que existe una cantidad considerable de masa que está confinada en un radio pequeño, generando flujos energéticos más activos, $\Delta E > 0$. Por otro lado, si u es bajo (~ 0.17), como en el caso de $K = 0.47$ en la ilustración 4-15, la masa está distribuida en un volumen más grande en relación con su radio, haciendo que la estructura sea menos densa teniendo Π y ΔE más bajos. Sin embargo, en la ilustración 4-16 notamos que mantienen un u similar, pero con gran variación en K alterando significativamente ΔE y Π , mostrando que el factor K es un valor determinante en el comportamiento de estas configuraciones.

5.2. Recomendaciones

- Realizar simulaciones adicionales que permitan identificar el rango a partir del cual se garantiza la estabilidad del modelo en términos de energía y orden interno.
- Analizar el intercambio energético para configuraciones con un índice politrópico mas elevado, $n > 0.5$, para obtener el compartamiento de distintos objetos estelares.
- Dado el éxito del desacople gravitacional mediante deformación geométrica mínima extendida, se sugiere aplicar este método a otras semillas isotrópicas o anisotrópicas no analizadas en este trabajo, como por ejemplo, (Knutsen, 1991; Kuchowicz, 1971; Kuchowicz, 1972a; Kuchowicz, 1972b; Kuchowicz, 1973; Avakian et al., 1990; Buchdahl, 1964; Mehra, 1966; Heintzmann, 1969; Adler, 1974), para comparar resultados y llegar a nuevas conclusiones sobre la física al interior de estos cuerpos estelares.

BIBLIOGRAFÍA

1. **EINSTEIN, A.** Zur Elektrodynamik bewegter Körper. *Annalen der Physik*. 1905, vol. 322, no. 10, pp. 891–921. Available from DOI: <https://doi.org/10.1002/andp.19053221004>.
2. **EINSTEIN, Albert.** Die Feldgleichungen der Gravitation. *Annalen Der Physik*. 1915. Available from DOI: [10.1002/3527608958.ch5](https://doi.org/10.1002/3527608958.ch5).
3. **EINSTEIN, Albert.** Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen Der Physik*. 1916. Available from DOI: [10.1002/andp.19163540702](https://doi.org/10.1002/andp.19163540702).
4. **FOSTER, J. & NIGHTINGALE, D.** *A Short Course in General Relativity*. Springer New York, NY, 2010.
5. **CARROLL, Sean M.** An introduction to general relativity: spacetime and geometry. *Addison Wesley*. 2004, vol. 101, p. 102.
6. **SCHWARZSCHILD, Karl.** Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*. 1916a, pp. 189–196.
7. **SCHWARZSCHILD, Karl.** Sitzungsber. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1916b, vol. 189, p. 1916.
8. **KNUTSEN, Henning.** Constructing physically valid fluid spheres in general relativity. *General relativity and gravitation*. 1991, vol. 23, pp. 843–859.
9. **KUCHOWICZ, B.** General relativistic fluid spheres. IV. Differential equations for non-charged spheres of perfect fluid. *Acta Physica Polonica*. 1971, vol. 2, pp. 657–667.
10. **KUCHOWICZ, B.** Differential conditions for physically meaningful fluid spheres in general relativity. *Physics Letters A*. 1972, vol. 38, no. 5, pp. 369–370.
11. **KUCHOWICZ, B.** *GENERAL RELATIVISTIC FLUID SPHERES. V. NONCHARGED STATIC SPHERES OF PERFECT FLUID IN ISOTROPIC COORDINATES*. 1972. Tech. rep. Univ., Warsaw.
12. **KUCHOWICZ, B.** *General relativistic fluid spheres. VI. On physically meaningful static model spheres in isotropic coordinates*. 1973. Tech. rep. Univ., Warsaw.
13. **AVAKIAN, R. M. & CHUBARIAN, E. V. & SARKISSIAN, A. V. & SCHMUTZER, Ernst.** Treatment of a static spherically symmetric matter distribution on the basis of the projective unified field theory. *Astronomische Nachrichten*. 1990, vol. 311, no. 6, pp. 343–350. Available from DOI: [10.1002/asna.2113110604](https://doi.org/10.1002/asna.2113110604).

14. **WYMAN, Max.** Schwarzschild interior solution in an isotropic coordinate system. *Physical Review*. 1946, vol. 70, no. 1-2, 74 – 76. Available from DOI: 10.1103/PhysRev.70.74. Cited by: 12.
15. **BUCHDAHL, HA.** A Relativistic Fluid Sphere Resembling the Emden Polytrope of Index 5. *Astrophysical Journal*, vol. 140, p. 1512. 1964, vol. 140, p. 1512.
16. **MEHRA, AL.** Radially symmetric distribution of matter. *Journal of the Australian Mathematical Society*. 1966, vol. 6, no. 2, pp. 153–156.
17. **HEINTZMANN, H.** New exact static solutions of Einsteins field equations. *Zeitschrift für Physik*. 1969, vol. 228, no. 4, pp. 489–493.
18. **ADLER, Ronald J.** A fluid sphere in general relativity. *Journal of Mathematical Physics*. 1974, vol. 15, no. 6, pp. 727–729.
19. **CARDALL, Christian Y & PRAKASH, Madappa & LATTIMER, James M.** Effects of strong magnetic fields on neutron star structure. *The Astrophysical Journal*. 2001, vol. 554, no. 1, p. 322.
20. **KUNZ, Jutta.** *Neutron Stars*. 2022. Available from arXiv: 2204.12520 [gr-qc].
21. **MANCHESTER, R N.** Pulsar timing and its applications. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017, vol. 932, p. 012002. ISSN 1742-6596. Available from DOI: 10.1088/1742-6596/932/1/012002.
22. **HERRERA, L. & LEÓN, J. Ponce de.** Isotropic and anisotropic charged spheres admitting a one-parameter group of conformal motions. *Journal of Mathematical Physics*. 1985, vol. 26, no. 9, pp. 2302–2307. Available from DOI: 10.1063/1.526813.
23. **HERRERA, L.** Stability of the isotropic pressure condition. *Physical Review D*. 2020, vol. 101, no. 10, p. 104024.
24. **LEMAÎTRE, Georges.** L'univers en expansion. In: *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*. 1933, vol. 53, p. 51.
25. **FUENTE, Manuel Malaver de la & ESCULPI, María.** Un modelo de Estrella Anisótropa con densidad variable en Relatividad General. 2011.
26. **BOWERS, Richard L & LIANG, EPT.** Anisotropic spheres in general relativity. *Astrophysical Journal*, Vol. 188, p. 657 (1974). 1974, vol. 188, p. 657.
27. **OVALLE, J.** SEARCHING EXACT SOLUTIONS FOR COMPACT STARS IN BRANEWORLD: A CONJECTURE. *Modern Physics Letters A*. 2008, vol. 23, no. 38, pp. 3247–3263. Available from DOI: 10.1142/S0217732308027011.

28. **OVALLE, J.** Decoupling gravitational sources in general relativity: The extended case. *Physics Letters B*. 2019, vol. 788, pp. 213–218. ISSN 0370-2693. Available from DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2018.11.029>.
29. **OVALLE, Jorge.** Decoupling gravitational sources in general relativity: From perfect to anisotropic fluids. *Phys. Rev. D*. 2017, vol. 95, p. 104019. Available from DOI: [10.1103/PhysRevD.95.104019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.104019).
30. **OVALLE, J. & CASADIO, R.** *Beyond Einstein Gravity*. Cham: Springer Nature, 2020. SpringerBriefs in Physics.
31. **ROCHA, R. da.** Dark SU(N) glueball stars on fluid branes. *European Physical Journal C*. 2017, vol. 77, p. 355. Available from DOI: [10.1140/epjc/s10052-017-4915-5](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-017-4915-5).
32. **FERNANDES-SILVA, A. & ROCHA, R. da.** Gregory–Laflamme analysis of MGD black strings. *The European Physical Journal C*. 2018, vol. 78, no. 3. ISSN 1434-6052. Available from DOI: [10.1140/epjc/s10052-018-5754-8](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5754-8).
33. **CASADIO, Roberto & NICOLINI, Piero. & ROCHA, Roldão. da.** Generalised uncertainty principle Hawking fermions from minimally geometric deformed black holes. *Classical and Quantum Gravity*. 2018, vol. 35, no. 18, p. 185001. ISSN 1361-6382. Available from DOI: [10.1088/1361-6382/aad664](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aad664).
34. **FERNANDES-SILVA, A. & FERREIRA-MARTINS, A. J. & ROCHA, R. da.** The extended minimal geometric deformation of SU(N) dark glueball condensates. *The European Physical Journal C*. 2018, vol. 78, no. 8. ISSN 1434-6052. Available from DOI: [10.1140/epjc/s10052-018-6123-3](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6123-3).
35. **CONTRERAS, Ernesto & BARGUEÑO, Pedro.** Minimal geometric deformation decoupling in 2+1 dimensional space-times. *The European Physical Journal C*. 2018, vol. 78, no. 7. ISSN 1434-6052. Available from DOI: [10.1140/epjc/s10052-018-6048-x](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6048-x).
36. **CONTRERAS, Ernesto.** Minimal Geometric Deformation: the inverse problem. *European Physical Journal C*. 2018, vol. 78, no. 8. Available from DOI: [10.1140/epjc/s10052-018-6168-3](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6168-3). Cited by: 79; All Open Access, Gold Open Access, Green Open Access.
37. **CONTRERAS, Ernesto & BARGUEÑO, Pedro.** Minimal geometric deformation in asymptotically (A-)dS space-times and the isotropic sector for a polytropic black hole. *The European Physical Journal C*. 2018, vol. 78, no. 12. ISSN 1434-6052. Available from DOI: [10.1140/epjc/s10052-018-6472-y](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-6472-y).

38. **ROCHA, R. da & TOMAZ, A. A.** Holographic entanglement entropy under the minimal geometric deformation and extensions. *The European Physical Journal C*. 2019, vol. 79, no. 12. ISSN 1434-6052. Available from DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-7558-x.
39. **LAS HERAS, Camilo & LEÓN, Pablo.** New algorithms to obtain analytical solutions of Einstein's equations in isotropic coordinates. *The European Physical Journal C*. 2019, vol. 79, no. 12. ISSN 1434-6052. Available from DOI: 10.1140/epjc/s10052-019-7507-8.
40. **PANOTOPOULOS, Grigoris & RINCÓN, Ángel.** Minimal geometric deformation in a cloud of strings. *The European Physical Journal C*. 2018, vol. 78, no. 10. ISSN 1434-6052. Available from DOI: 10.1140/epjc/s10052-018-6321-z.
41. **RINCON, Angel & GABBANELLI, Luciano & CONTRERAS, Ernesto & TELLO-ORTIZ, Francisco.** *Minimal Geometric Deformation in a Reissner-Nordström background*. 2019. Available from arXiv: 1909.00500 [gr-qc].
42. **ROCHA, Roldão da.** MGD Dirac Stars. *Symmetry*. 2020, vol. 12, no. 4, p. 508. ISSN 2073-8994. Available from DOI: 10.3390/sym12040508.
43. **CONTRERAS, Ernesto & TELLO-ORTIZ, Francisco & MAURYA, S. K.** *Regular decoupling sector and exterior solutions in the context of MGD*. 2020. Available from arXiv: 2002.12444 [gr-qc].
44. **ARIAS, C. & TELLO-ORTIZ, Francisco & CONTRERAS, E.** Extra packing of mass of anisotropic interiors induced by MGD. *The European Physical Journal C*. 2020, vol. 80, no. 5. ISSN 1434-6052. Available from DOI: 10.1140/epjc/s10052-020-8042-3.
45. **ROCHA, Roldão da.** Minimal geometric deformation of Yang-Mills-Dirac stellar configurations. *Physical Review D*. 2020, vol. 102, no. 2. ISSN 2470-0029. Available from DOI: 10.1103/physrevd.102.024011.
46. **ROCHA, Roldão da & TOMAZ, Anderson A.** MGD-decoupled black holes, anisotropic fluids and holographic entanglement entropy. *The European Physical Journal C*. 2020, vol. 80, no. 9. ISSN 1434-6052. Available from DOI: 10.1140/epjc/s10052-020-8414-8.
47. **MEERT, P. & ROCHA, R. da.** Probing the minimal geometric deformation with trace and Weyl anomalies. *Nuclear Physics B*. 2021, vol. 967, p. 115420. ISSN 0550-3213. Available from DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2021.115420.

48. **MAURYA, S. K. & NEWTON SINGH, Ksh. & GOVENDER, M. & HANSRAJ, Sudan.** Gravitationally Decoupled Strange Star Model beyond the Standard Maximum Mass Limit in Einstein–Gauss–Bonnet Gravity. *The Astrophysical Journal*. 2022, vol. 925, no. 2, p. 208. ISSN 1538-4357. Available from DOI: 10.3847/1538-4357/ac4255.
49. **OVALLE, J. & CONTRERAS, E. & STUCHLIK, Z.** Energy exchange between relativistic fluids: the polytropic case. *Eur. Phys. J. C*. 2022. Available from DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10168-5>.
50. **CONTRERAS, E. & STUCHLIK, Z.** Energy exchange between Tolman VII and a polytropic fluid. *Eur. Phys. J. C*. 2022. Available from DOI: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-022-10350-9>.
51. **OVALLE, Jorge.** Decoupling gravitational sources in general relativity: from perfect to anisotropic fluids. *Physical Review D*. 2017, vol. 95, no. 10, p. 104019.
52. **MAURYA, SK & SINGH, Ksh Newton & GOVENDER, Megan & RAY, Saibal.** Complexity-Free Anisotropic Solution of Buchdahl’s Model and Energy Exchange Between Relativistic Fluids by Extended Gravitational Decoupling. *Fortschritte der Physik*. 2023, vol. 71, no. 6-7, p. 2300023.
53. **OVALLE, Jorge & CASADIO, Roberto.** *Beyond Einstein gravity: the minimal geometric deformation approach in the brane-world*. Springer Nature, 2020.
54. **CARRASCO-HIDALGO, M. & CONTRERAS, E.** Ultracompact stars with polynomial complexity by gravitational decoupling. *Eur. Phys. J. C*. 2021, vol. 81, no. 757. Available from DOI: 10.1140/epjc/s10052-021-09557-z.
55. **MAURYA, SK & GOVENDER, M & MUSTAFA, G & NAG, Riju.** Relativistic models for vanishing complexity factor and isotropic star in embedding Class I spacetime using extended geometric deformation approach. *The European Physical Journal C*. 2022, vol. 82, no. 11, p. 1006.
56. **LOHAKARE, Santosh V & MAURYA, SK & SINGH, Ksh Newton & MISHRA, B & ERREHYMY, Abdelghani.** Influence of three parameters on maximum mass and stability of strange star under linear $f(Q)$ -action. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2023, vol. 526, no. 3, pp. 3796–3814.
57. **IVANOV, B. V.** Analytical study of anisotropic compact star models. *The European Physical Journal C*. 2017, vol. 77, no. 11, p. 738. ISSN 1434-6052. Available from DOI: 10.1140/epjc/s10052-017-5322-7.
58. **IVANOV, Boiko V.** Maximum bounds on the surface redshift of anisotropic stars. *Physical Review D*. 2002, vol. 65, no. 10, p. 104011.

59. **BUCHDAHL, Hans A.** General relativistic fluid spheres. *Physical Review*. 1959, vol. 116, no. 4, p. 1027.
60. **KIPPENHAHN, Rudolf & WEIGERT, Alfred & WEISS, Achim.** *Stellar structure and evolution*. Vol. 192. Springer, 1990.
61. **ABELLÁN, G & FUENMAYOR, E & HERRERA, L.** The double polytrope for anisotropic matter: Newtonian Case. *Physics of the Dark Universe*. 2020, vol. 28, p. 100549.
62. **HERRERA, L & BARRETO, W.** Newtonian polytropes for anisotropic matter: General framework and applications. *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*. 2013, vol. 87, no. 8, p. 087303.
63. **HORED, G. P.** *Polytropes: Applications in Astrophysics and Related Fields*. 1st ed. Springer Dordrecht, 2004. Astrophysics and Space Science Library. ISBN 978-1-4020-2350-7. Available from DOI: 10.1007/1-4020-2351-0.
64. **ANDRADE, J. & ANDRADE, D.** Stellar models with like-Wyman IIa complexity factor. In: 2024, vol. 2796. No. 1. Available from DOI: 10.1088/1742-6596/2796/1/012007. Cited by: 0; All Open Access, Gold Open Access.
65. **SANTANA, D & FUENMAYOR, E & CONTRERAS, E.** Integration of the Lane–Emden equation for relativistic anisotropic polytropes through gravitational decoupling: a novel approach. *The European Physical Journal C*. 2022, vol. 82, no. 8, p. 703.
66. **ANDERSSON, Nils & COMER, G. L.** Relativistic fluid dynamics: physics for many different scales. *Living Reviews in Relativity*. 2021, vol. 24, no. 3. Available from DOI: 10.1007/s41114-021-00031-6.
67. **WEINBERG, Steven.** *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of The General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., 1971. ISBN 0-471-92567-5.
68. **VISSER, Matt & BARCELO, Carlos.** Energy conditions and their cosmological implications. In: *Cosmo-99*. World Scientific, 2000, pp. 98–112.
69. **HERRERA, Luis & SANTOS, Nilton O.** Local anisotropy in self-gravitating systems. *Physics Reports*. 1997, vol. 286, no. 2, pp. 53–130.