Existence d'une masse critique pour un modèle de chemotaxis en dimension 2

Thomas Gallouët
Directeur de Recherche : Cédric Villani

7 Septembre 2007

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Ce stage de M2, réalisé à l'Ecole Normale de Lyon sous la direction de Cédric Villani, s'est basé sur l'article de Jean Dolbeault et Benoît Perthame publié en 2004, *Optimal critical mass in the two dimensional Keller-Segel model in* $\mathbb{R}^2$.
Il a consisté en l'étude d'un problème d'attraction-diffusion de cellules, la chemotaxis. On considère ainsi l'évolution dans le plan de la densité n de cellules émettant une substance c et étant attirés par cette dernière.

Le modèle simplifié dit de Keller-Segel de ce problème s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = \Delta n(x,t) - \chi \nabla . \big(n(x,t) \nabla c(x,t) \big) & \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0 \text{ et avec } \chi > 0 \\ -\Delta c(x,t) = n(x,t) & \forall x \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, \\ n(x,t=0) = n_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^2, \text{ avec } n_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \geq 0 \end{array} \tag{1.1}$$

où χ est un coefficient de sensibilité à la substance : plus il est grand, plus les cellules sont attirées par la substance.

Comme on connait le noyau du laplacien, on peut écrire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, t > 0, c(x,t) = -\frac{1}{2\pi} (\log(|.|) * n(.,t))(x)$$

Ici $*$ est l'opérateur de convolution en espace.

La masse des cellules est l'intégrale de leur densité sur l'espace total. Nous verrons que cette masse reste constante dans le temps. L'apport de l'article étudié est de montrer que $\frac{8\pi}{\chi}$ est une masse critique, c'est-à-dire qu'au dessus de cette masse les cellules se concentrent en un ou plusieurs points.

Chapitre 2

Étude du système

2.1 Définition de solutions

2.1.1 Solutions au sens fort

Les solutions fortes sont les solutions n telles que :

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^2, n(x,.) \in C^1([0,T]) \\ \forall t \in [0,T], n(.,t) \in C^2(\mathbb{R}^2) \\ n \in L^1(\mathbb{R}^2 \times [0,T]) \end{array} \tag{2.1}$$

2.1.2 Solutions au sens faible

Pour définir les solutions au sens faible, on teste l'équation (1) avec $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{array}{l} \forall t > 0, \\ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial n}{\partial t}(x,t)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} \Delta n(x,t)\psi(x)dx - \chi \int_{\mathbb{R}^2} \nabla.\big(n(x,t)\nabla c(x,t)\big)\psi(x)dx \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\Delta\psi(x)dx + \chi \int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\nabla c(x,t)\nabla\psi(x)dx \end{array} \tag{2.2}$$

Or :

$$\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^2, t > 0, \\ c(x,t) = -\frac{1}{2\pi}(\log(|.|) * n(.,t))(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \log(|x-y|)n(y,t)dy \\ \Rightarrow \nabla c(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \log(|x-y|)n(y,t)dy \\ \Rightarrow \nabla c(x,t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2}n(y,t)dy \end{array} \tag{2.3}$$

Donc :

$$\begin{array}{l} \forall t > 0, \\ \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\Delta\psi(x)dx + \frac{\chi}{2\pi}\int\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2}n(y,t)n(x,t)\nabla\psi(x)dydx \end{array} \tag{2.4}$$

Par symétrie on peut écrire :

$$\begin{array}{l} \forall t > 0, \\ \frac{d}{dt}\int \psi(x)n(x,t)dx = \int \Delta\psi(x)n(x,t)dx + \frac{\chi}{4\pi}\int\int \frac{x-y}{|x-y|^2}(\nabla\psi(x) - \nabla\psi(y))n(x,t)n(y,t)dydx \end{array} \tag{2.5}$$

On contrôle ainsi la singularité en $\frac{1}{x-y}$ car $\frac{1}{|x-y|}(\nabla\psi(x) - \nabla\psi(y))$ est bornée.

On définit donc une solution faible de la façon suivante :

Définition 2.1.1 *n est solution faible de* (1) *si n appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^1(\mathbb{R}^2))$ et si de plus :*
$\forall\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\frac{d}{dt}\int \psi(x)n(x,t)dx = \int \Delta\psi(x)n(x,t)dx + \frac{\chi}{4\pi}\int\int \frac{x-y}{|x-y|^2}(\nabla\psi(x) - \nabla\psi(y))n(x,t)n(y,t)dydx$

Comme souvent, une solution forte est aussi une solution faible.
Une autre façon de voir des solutions au sens des distributions est de remarquer que :

$$\Delta n - \chi\nabla.(n\nabla c) = \nabla.[n(\nabla \log n - \chi\nabla c)]$$

Si on appele $n(\nabla \log n - \chi\nabla c)$ le flux. On voit que la solution est bien définie dès que le flux est dans $L^1(\mathbb{R}^+_{loc} \times \mathbb{R}^2)$. C'est ce que l'on va essayer de prouver en se basant sur l'inégalité suivante :

$$\int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} n|n(\nabla \log n - \chi\nabla c)|dxdt \leq (\int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} ndxdt)^{1/2}(\int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} n|n(\nabla \log n - \chi\nabla c)|^2 dxdt)^{1/2}$$

Et en trouvant les estimations qui conviennent.

2.2 Conservation de la masse

Un premier théorème utile :

Théorème 2.2.1 *Si n est solution faible de* (1)*, alors la masse est conservée dans le temps, c'est-à-dire :* $\forall t > 0, \int n(x,t)dx = \int n_0(x)dx$.

Démonstration : Soit $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ tel que $\psi(r) = 1$ si $r < 1/2$ et $\psi(r) = 0$ si $r > 1$. On note alors, pour tout $R > 0$ et pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^2$, $\psi_R(x) = \psi(\frac{|x|^2}{R^2})$.
On a alors : $\nabla\psi_R(x) = \frac{2x}{R^2}\psi'(\frac{|x|^2}{R^2})$
et donc : $\Delta\psi_R(x) = \frac{4}{R^2}\psi'(\frac{|x|^2}{R^2}) + \frac{4}{R^2}|x|^2\psi''(\frac{|x|^2}{R^2})$

Soit, puisque ψ et donc ses dérivées sont nulles pour $\frac{|x|^2}{R^2} \geq 1$,

$$|\int_{\mathbb{R}^2} \Delta\psi_R(x)n(x,t)dx| \leq \frac{C}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} |n(x,t)|dx \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.6}$$

Et comme $2x\psi'(\frac{|x|^2}{R^2})$ est différentiable (et nulle loin de 0), on a :

$$\int\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2}\nabla(\psi_R(x) - \psi_R(y))n(x,t)n(y,t)dydx \leq \frac{C}{R^2}\int\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} |n(x,t)n(y,t)|dxdy \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.7}$$

De plus, comme $n \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\frac{d}{dt}\int \psi_R(x)n(x,t)dx \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d}{dt}\int n(x,t)dx \tag{2.8}$$

et donc

$$\frac{d}{dt}\int n(x,t)dx = 0.$$

On a donc bien montré que la masse est conservée.

2.3 Principe de positivité

Étant donné que l'on veut représenter une densité de particules, il semble important d'établir un principe de positivité :

Théorème 2.3.1 *On considère n une solution faible de* (1), *avec pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^2$, $n_0(x) > 0$. Alors n est positive.*

Démonstration :
Nous allons démontrer le principe de positivité pour une équation de forme plus générale :

$$\begin{aligned} &\partial_t n - \Delta n + \mathrm{div}(n.V) = f \\ &n(x, t = 0) = n_0(x) \qquad\qquad \forall x \in \mathbb{R}^2,\ \text{avec } n_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \leq 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

avec $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times (0,T)) \leq 0$ (on va donc montrer que la solution reste négative), $V \in L^b(\mathbb{R}^2)$ pour un $b > 2$, et $n \in L^1(\mathbb{R}^2 \times (0,T))$ avec $T \geq 0$.

Nous démontrerons tout d'abord ce principe pour le cas stationnaire afin de simplifier l'écriture, puis nous rajouterons dans un deuxième temps le terme d'évolution.
Ce dernier résultat, plus général, sera utile par la suite pour résoudre le probléme régularisé linéaire.

2.3.1 Principe de positivité pour le problème stationnaire

On veut établir ici le principe de positivité pour le cas stationnaire. On s'intéresse donc à l'équation :

$$-\Delta n + \nabla(n.V) = f, f \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \leq 0 \tag{2.10}$$

Pour η et ϵ strictement positifs, on définit $T_{\epsilon,\eta}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ par $T_{\epsilon,\eta}(z) = 0$ si $z \leq \eta$, $T_{\epsilon,\eta}(z) = \epsilon$ si $z \geq \eta + \epsilon$ et $T_{\epsilon,\eta}(z) = z - \eta$ si $z \in [\eta, \eta + \epsilon]$.
On teste alors l'équation contre $T_{\epsilon,\eta}(n)$.
On obtient par IPP :

$$\int_\Omega \nabla(n).\nabla T_{\epsilon,\eta}(n) - \int_\Omega nV.\nabla T_{\epsilon,\eta}(n) = \int_\Omega f T_{\epsilon,\eta}(n) \tag{2.11}$$

Avec ici $\Omega = \mathbb{R}^2$. Comme $f \leq 0$ et $T_{\epsilon,\eta} \geq 0$, le second membre est négatif.
De plus, $\nabla T_{\epsilon,\eta}$ est nulle hors de $[\eta, \eta+\epsilon]$, et est linéaire de pente 1 sur cet intervalle, donc on peut écrire :

$$\int_\Omega \nabla(n).\nabla T_{\epsilon,\eta}(n) = \int_{\Omega_{\epsilon,\eta}} |\nabla T_{\epsilon,\eta}(n)|^2,\ \text{avec } \Omega_{\epsilon,\eta} = \{n/\eta \leq n \leq \eta + \epsilon)\} \tag{2.12}$$

On veut maintenant majorer $\int_\Omega nV.\nabla T_{\epsilon,\eta}(n)$, c'est-à-dire $\int_{\Omega\epsilon,\eta} nV.\nabla T_{\epsilon,\eta}(n)$.
Pour q et r tels que $1/q + 1/r + 1/2 = 1$, on a par Holder :

$$\int_{\Omega\epsilon,\eta} nV.\nabla T_{\epsilon,\eta}(n) \leq ||\nabla T_{\epsilon,\eta}(n)||_{L^2(\Omega_{\epsilon,\eta})} ||V||_{L^r(\Omega_{\epsilon,\eta})} ||n||_{L^q(\Omega_{\epsilon,\eta})} \tag{2.13}$$

On remarque que $q > 2$, donc q est le p^* d'un $p < 2$.
On a donc la suite de majoration suivante :
Par les inégalités de Sobolev on a :

$$||n||_{L^q(\Omega_{\epsilon,\eta})} \leq ||\nabla(n)||_{L^p(\Omega_{\epsilon,\eta})} \tag{2.14}$$

et on a déjà vu que :

$$||\nabla(n)||_{L^p(\Omega_{\epsilon,\eta})} = ||\nabla T_{\epsilon,\eta}(n)||_{L^p(\Omega_{\epsilon,\eta})} \tag{2.15}$$

et comme la mesure des $\{x \in \mathbb{R}^2/n(x) \geq \eta\}$ est finie ($n \in L^1(\mathbb{R}^2)$), on a de plus :

$$||\nabla T_{\epsilon,\eta}(n)||_{L^p(\Omega_{\epsilon,\eta})} \leq C_{\eta,p}||\nabla T_{\epsilon,\eta}(n)||_{L^2(\Omega_{\epsilon,\eta})} \tag{2.16}$$

Au final on obtient donc :

$$||\nabla T_{\epsilon,\eta}(n)||^2_{L^2(\Omega_{\epsilon,\eta})} - C_{\eta,p}||V||_{L^r(\Omega_{\epsilon,\eta})}||\nabla T_{\epsilon,\eta}(n)||^2_{L^2(\Omega_{\epsilon,\eta})} \leq 0 \tag{2.17}$$

Comme pour tout η fixé on peut choisir un ϵ tel que $C_{\eta,p}||V||_{L^r(\Omega_{\epsilon,\eta})} \leq 1/2$ (par intégrabilité), on obtient que $\Omega_{\epsilon,\eta}$ est vide, ce qui force $n \leq \eta$ pour tout η, et donc $n \leq 0$.

On a donc montré que $f \leq 0$ entraîne que $n \leq 0$. On a de même le cas positif.

2.3.2 Principe de positivité avec terme d'évolution

$$\begin{array}{ll} \partial_t n - \Delta n + \mathrm{div}(n.V) = f & \\ n(x, t = 0) = n_0(x) & n_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^2 \end{array} \tag{2.18}$$

avec $f \in L^\infty(\mathbb{R}^2 \times (0, T)) \leq 0$, $V \in L^b(\mathbb{R}^2)$ pour un $b > 2$, et $n \in L^1(\mathbb{R}^2 \times (0, T))$ avec $T \geq 0$.

Pour rajouter le terme d'évolution, on remarque que la majoration des $\{x \in \mathbb{R}^2/n(x, t) \geq \eta\}$ est indépendante du temps (conservation de la masse).

L'autre terme qui s'ajoute est :

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_t n) T_{\epsilon,\eta}(n)) \\ &= \int_0^T (\int_{\mathbb{R}^2} (\partial_t (T_{\epsilon,\eta}(n)) T_{\epsilon,\eta}(n)) \\ &= \int_0^T \frac{d}{dt} (\int_{\mathbb{R}^2} (T_{\epsilon,\eta}(n))^2/2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (T_{\epsilon,\eta}(n(T, .))^2/2) - \int_{\mathbb{R}^2} (T_{\epsilon,\eta}(n_0(.))^2/2) \end{aligned}$$

n_0 étant négative, $T_{\epsilon,\eta}(n_0(.))^2/2 = 0$, donc la quantité rajoutée est bien positive, ce qui permet de faire le même raisonnement.

On a donc également le principe de positivité dans le cas d'évolution, et avec $V = \nabla c$ pour le cas particulier de notre problème.

2.4 Un résultat d'explosion

On note $M = \int_{\mathbb{R}^2} n(x, t) dx$ (conservation de la masse), et de plus on suppose que :

$$\begin{array}{l} n_0 \in L^1(\mathbb{R}^2, (1 + |x|^2) dx) \\ n_0 \log(n_0) \in L^1(\mathbb{R}^2, dx) \end{array} \tag{2.19}$$

On s'intéresse au moment d'ordre 2 de n. On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.4.1 *On considère une solution faible positive n de* (1) *sur un intervalle* $[0, T]$ *dont le moment d'ordre 2 est borné, qui vérifie* (1.19) *et est telle que* $(x, t) \to \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1+|x|}{|x-y|} n(y, t) dy$ *est bornée dans* $L^\infty(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$.
On a alors :

$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}|x|^2 n(x,t)dx = 4M(1-\frac{\chi M}{8\pi})$.

DÉMONSTRATION :
On considère une suite φ_ϵ de fonctions $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ qui converge vers $|x|^2$ quand ϵ tend vers 0.
On a :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\varphi_\epsilon dx = \int_{\mathbb{R}^2}\varphi_\epsilon(\Delta n - \chi\nabla.(n\nabla c))dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2}\Delta\varphi_\epsilon n - \frac{\chi}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)n(y,t)\frac{(\nabla\varphi_\epsilon(x)-\nabla\varphi_\epsilon(y)).(x-y)}{|x-y|^2}dxdy$$

En passant à la limite par convergence monotone, car $\Delta\varphi_\epsilon$ et $\frac{(\nabla\varphi_\epsilon(x)-\nabla\varphi_\epsilon(y)).(x-y)}{|x-y|^2}$ sont bornées et $n\in L^1(\mathbb{R}^2)$, on a :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\varphi_\epsilon dx$$

$$= 4M - \frac{\chi}{2\pi}M^2$$

$$= 4M(1-\frac{\chi M}{8\pi}).$$

On voit ici la compétition entre le terme de diffusion qui régularise la solution et le terme d'attraction qui tend à la faire exploser.
On a donc :
- Si $\chi M > 8\pi$, le second moment est strictement décroissant, donc la solution explose en temps fini (le second moment ne peut pas être negatif) .
- Si $\chi M < 8\pi$ et que la solution assez régulière, alors le second moment est borné dans $L^\infty([0,T];L^1(\mathbb{R}^2)))$.
Il ne reste donc plus qu'à démontrer l'existence d'une solution dans le cas où $\chi M < 8\pi$.

2.5 Le résultat classique d'existence

L'idée est de calculer l'entropie de $\int_{\mathbb{R}^2} n\log(n)$. On s'intéresse donc à :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} n\log(n)dx = -4\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\sqrt{n}|^2dx + \chi\int_{\mathbb{R}^2}\nabla n.\nabla c dx$$

$$= -4\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\sqrt{n}|^2dx + \chi\int_{\mathbb{R}^2} n^2dx.$$

Grâce à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev avec $u=\sqrt{n}$ et $p=4$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^2} n^2dx \le (C_{GNS}^{(4)})^{-2}M\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla\sqrt{n}|^2dx \tag{2.20}$$

On a ainsi la décroissance de l'entropie lorsque $\chi M \le 4(C_{GNS}^{(4)})^{-2}$. Numériquement, on sait que cette valeur est inférieure à 8π, mais cela ne couvre pas entièrement le second cas.

Rappel de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev :
Pour la norme L^2 :

$$||u||_p^2 \le C_{GNS}^{(p)}||\nabla u||_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{4}{p}}||u||_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{2-\frac{4}{p}}\ \forall u\in H^1(\mathbb{R}^2),\ \forall p\in[2,\infty) \tag{2.21}$$

2.6 Estimation des normes L^p

Beckner et Lauckhauss ont montré que les normes L^p se transmettent, c'est-à-dire que si $n_0 \in L^p(\mathbb{R}^2)$, alors pour tout t, $n(t) \in L^p(\mathbb{R}^2)$. Ce résultat est basé sur l'estimation suivante :
On note $pG_p(t) = \int n(x,t)^p dx$. Vu l'équation, et par IPP successives :

$$G_p'(t) = \int n(x,t)^{(p-1)} \frac{\partial n(x,t)}{\partial t} dx = \int n(x,t)^{(p-1)} (\Delta n - \chi \nabla.(n \nabla c))$$

$$= -(p-1) \int |\nabla n|^2 n^{p-2} dx + (p-1)\chi \int (\nabla n) n^{p-1} (\nabla c) dx$$

$$= -\frac{4(p-1)}{p^2} \int |\nabla n^{\frac{p}{2}}|^2 dx + \frac{\chi(p-1)^2}{p} \int (\nabla n^p)(\nabla c) dx$$

$$= -\frac{4(p-1)}{p^2} \int |\nabla n^{\frac{p}{2}}|^2 dx - \frac{\chi(p-1)^2}{p} \int n^p (\Delta c) dx$$

soit, comme $-\Delta c = n$,

$$-\frac{4(p-1)}{p^2} \int |\nabla n^{\frac{p}{2}}|^2 dx + \frac{\chi(p-1)^2}{p} \int n^{p+1} dx$$

Or thanks to the Galiardo-Nirenberg-Sobolev inequation :

$$\int n^{p+1} \leq C(d,p) \int |\nabla n^{\frac{p}{2}}| dx ||n||_{L^1}$$

Ce qui donne au final :

$$G_p'(t) \leq (\int |\nabla n^{\frac{p}{2}}|^2 dx)(-\frac{4(p-1)}{p^2} + C(d,p)\frac{\chi(p-1)^2}{p}||n||_{L^1})$$

On voit encore ici la compétition entre le terme de diffusion qui régularise la solution et le terme d'attraction qui tend à la faire exploser.

Cette estimation permet effectivement de transmettre les normes L^p, mais nécessite que la norme L^1, c'est-à-dire M, soit plus petite qu'une constante dépendant de $C(d,p) = C_p$. Ce n'est pas une bonne condition, on va donc s'en débarasser.
Pour cela, on va "tronquer" n et refaire le calcul. On s'intéresse donc à $G_p(t) = \int (n(x,t) - K)_+^p dx$.
On calcule :

$$G_p'(t) = p(\int (n(x,t) - K)_+^{(p-1)} \frac{\partial n(x,t)}{dt} dx) = p(\int (n(x,t) - K)_+^{(p-1)} (\Delta n - \chi \nabla.(n \nabla c)))$$

$$= p(-(p-1) \int |\nabla n|^2 (n(x,t) - K)_+^{p-2} dx - \chi \int (n(x,t) - K)_+^{p-1} \nabla(n(\nabla c)) dx)$$

$$= p(-\frac{4(p-1)}{p^2} \int |\nabla (n(x,t) - K)_+^{\frac{p}{2}}|^2 dx - \chi \int (n(x,t) - K)_+^{p-1} \nabla(n(\nabla c)) dx)$$

On ne s'intéresse plus qu'au second terme :

$$-p\chi \int (n(x,t) - K)_+^{p-1} \nabla(n(\nabla c)) dx = -p\chi \int (n(x,t) - K)_+^{p-1} (\nabla(n-K).\nabla c + n\Delta c) dx$$

$$= -\chi \int (n(x,t) - K)_+^{p-1} ((n-K)_+(-\Delta c) - pn(-\Delta c)) dx$$

$$= (p-1)\chi \int (n(x,t)-K)_+^{p+1} dx + (2p-1)\chi K \int (n(x,t)-K)_+^{p} dx + p\chi K^2 \int (n(x,t)-K)_+^{p-1} dx$$

Pour le terme à la puissance $p-1$, on fait comme suit :

$$\int (n(x,t)-K)_+^{p-1} dx = \int_{K<n\leq K+1} (n-K)_+^{p-1} dx + \int_{n>K+1} (n-K)_+^{p-1} dx$$

or :

$$\int_{K<n\leq K+1} (n-K)_+^{p-1} dx \leq \int_{K<n\leq K+1} 1 dx \leq \frac{1}{K} \int_{K<n\leq K+1} n dx \leq \frac{M}{K}$$

et pour le second on utilise le fait que la différence est plus grande que 1, et donc :

$$\int_{n>K+1} (n-K)_+^{p-1} dx \leq \int (n-K)_+^{p} dx.$$

On est donc bien parti pour appliquer Gronwall. Il reste à faire disparaître (c'est-à-dire à rendre négatif) le dernier terme : $-\frac{4(p-1)}{p} \int |\nabla(n(x,t)-K)_+^{\frac{p}{2}}|^2 dx + (p-1)\chi \int (n(x,t)-K)_+^{p+1} dx$.
Pour cela on utilise G.N.S avec $(n-K)_+$. Le seul changement est que la norme L^1 de n est changée par celle de $n-K$, que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut, quitte à choisir K grand.
Au final, on obtient une inégalité de la forme :

$$\frac{d}{dt} \int (n-K)_+^{p} dx \leq A \int (n-K)_+^{p} dx + B$$

On a donc via Gronwall une borne pour tout temps fini.
On sent bien que l'on contrôle les normes L^p (car n est positive, régulière et de masse finie), mais précisons tout de même le raisonnement :
On partage l'intégrale en deux parties :

$$\int n^p dx \leq \int_{n\leq K} n^p dx + \int_{n\geq K} n^p dx$$

La première partie se traite facilement avec la masse de n :

$$\int_{n\leq K} n^p dx \leq K^{p-1} M$$

Pour la seconde, on remarque que pour $1 < \lambda \leq x$:

$$x^p \leq (\frac{\lambda}{\lambda-1})^{p-1} (x-1)^p$$

Puis on écrit :

$$\int_{K\leq n} n^p dx \leq \int_{K\leq n\leq \lambda} n^p dx + \int_{n>\lambda K} n^p$$
$$\leq (\lambda K)^{p-1} M + (\frac{\lambda}{\lambda-1})^{p-1} K^p \int_{K\leq n\leq \lambda} (\frac{n}{K}-1)_+^{p} dx$$
$$\leq (\lambda K)^{p-1} M + (\frac{\lambda}{\lambda-1})^{p-1} \int (n-K)_+^{p} dx$$

C'est donc gagné, on a propagé, du moins a priori, les normes L^p.

2.7 Stratégie

Ici une petite explication de la stratégie qui va être utilisée semble la bienvenue.
L'entropie n'étant pas assez précise, on définira une notion plus proche du système : l'énergie libre. Ensuite, nous allons donner quelques estimations a priori pour des solutions classiques. La suite de la démonstration se fera par une régularisation du système via la régularisation du noyau de convolution, la résolution par un point fixe de Banach de ces problèmes et enfin un argument de compacité pour passer à la limite.

2.8 L'énergie libre : pour en savoir un peu plus

L'entropie, quantité utilisée précédemment, n'est pas assez précise. On définit donc une quantité plus proche du problème, l'énergie libre, par :

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^2} n\log(n)dx - \frac{\chi}{2}\int_{\mathbb{R}^2} ncdx$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 2.8.1 *On considère une solution de* (1) *n positive, continue, à valeur $L^1(\mathbb{R}^2)$.*
Si $n(1+|x|^2)$ et $n\log(n)$ sont bornées dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^2))$, et si $\nabla\sqrt{n}$ est bornée dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^2))$ et ∇c dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$, alors

$$\tfrac{d}{dt}F(t) = -\textstyle\int_{\mathbb{R}^2} n|\nabla(\log(n)) - \chi\nabla c|^2 dx.$$

L'énergie libre a donc vocation à être décroissante.

Démonstration :
Pour le premier terme :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2} n|\nabla(\log(n))dx &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{d}{dt}n(\log(n)+1)dx\\ &= \int(\log(n)+1)(\Delta n - \chi\nabla.(n\nabla c))dx\\ &= -\int\nabla(\log(n))(\nabla n - \chi(n\nabla c))dx\\ &= -\int n\nabla(\log(n))(\nabla\log(n) - \chi(\nabla c))dx.\end{aligned}$$

Pour le second :

$$\frac{d}{dt}\frac{\chi}{2}\int ncdx = \frac{\chi}{2}(\int n\frac{d}{dt}c + c\frac{d}{dt}n)dx$$

Mais comme $c(x,t) = -\frac{1}{2\pi}(\log(|.|)) * n(.,t)$, on a :

$$\frac{d}{dt}c(x,t) = -\frac{1}{2\pi}(\log(|.|)) * \frac{d}{dt}n(.,t)$$

soit :

$$\frac{d}{dt}\frac{\chi}{2}\int ncdx = \frac{\chi}{2}(\int\int -\frac{1}{2\pi}n(x,t)\log(|x-y|)\frac{d}{dt}n(y,t)dxdy + \int c(x,t)\frac{d}{dt}n(x,t)dx)$$

Étant donné la symétrie du noyau du laplacien, on peut écrire par Fubini :

$$\frac{d}{dt}\frac{\chi}{2}\int ncdx = \frac{\chi}{2}(\int(\frac{d}{dt}n(y,t))(-\frac{1}{2\pi}(\log(|.|)) * n(.,t))dy + \int c(x,t)\frac{d}{dt}n(x,t)dx)$$

donc

$$= \chi(\int c(y,t)\frac{d}{dt}n(y,t)dy)$$

soit

$$= (\int \chi c(\Delta n - \chi\nabla.(n\nabla c))dx)$$

$$= -(\int \chi\nabla c(\nabla n - \chi n\nabla c)dx)$$

et donc

$$= -\int \chi\nabla c(\nabla n - \chi n\nabla c)dx$$

$$= -\int n\chi\nabla c(\nabla\log(n) - \chi\nabla c)dx$$

On somme alors les deux et on obtient :

$$\frac{d}{dt}F(t) = -\int n\nabla(\log(n))(\nabla\log(n) - \chi(\nabla c))dx + \int n\chi\nabla c(\nabla\log(n) - \chi\nabla c)dx$$

$$\frac{d}{dt}F(t) = -\int n(\nabla\log(n) - \chi(\nabla c))(\nabla(\log(n)) - \chi\nabla c)dx$$

et donc le résultat :

$$\frac{d}{dt}F(t) = -\int n|(\nabla\log(n) - \chi(\nabla c))|^2dx.$$

F est donc décroissante.
On va maintenant chercher à en déduire une borne supérieure et inférieure sur l'entropie ce qui nous permettra d'appliquer la démonstration classique (on obtient l'équiintégrabilité avec le second moment).
On a donc $F(t) \leq F(0)$, soit :

$$\int n\log(n)dx \leq F(0) + \int \frac{\chi}{2}ncdx$$

que l'on écrit :

$$\int n\log(n)dx \leq F(0) - \frac{\chi}{4\pi}\int\int n(x,t)n(y,t)\log|x-y|dxdy$$

On utilise alors l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev logarithmique (voir plus loin) qui dit ici :

$$M(1+\log(\pi)+\log(M)) \leq \int n\log(n)dx + \frac{2}{M}\int\int n(x,t)n(y,t)\log|x-y|dxdy$$

Avec $M = \int n(x,t)dx$ (on a déja vu que c'était constant), et en notant $C(M) = \frac{M^2}{2}(1+log(\pi)+log(M))$, on a :

$$\int n\log(n)dx \leq F(0) - \frac{\chi}{4\pi}C(M) - \frac{M}{2}\int n\log(n)$$

ce qui donne une borne supérieure de l'entropie.
On aurait également pu procéder comme suit :

$$F: t \to (1-\theta)\int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\log(n(x,t))dx + \theta(\int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\log(n(x,t))dx + \frac{\chi}{4\pi\theta}\int\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} n(x,t)n(y,t)\log(|x-y|dxdy)$$

est bornée par sa valeur en 0, puisqu'elle est décroissante.
On choisit alors $\theta = \frac{\chi M}{8\pi}$ et on applique Hardy-Littlewood-Sobolev logarithmique :

$$(1-\theta)\int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\log(n(x,t))dx - \theta C(M) \leq F(0)$$

si $\chi M \leq 8\pi$, alors $\theta \leq 1$ et donc :

$$\int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\log(n(x,t))dx \leq \frac{F(0)+\theta C(M)}{1-\theta}$$

On obtient ainsi une borne supérieure de $\int n\log(n)$.

Pour la borne inférieure on utilise :

$$\frac{1}{1+t}\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 n(x,t)dx \leq K \ \forall t > 0$$

ce qui est vrai par hypothèse.
On en déduit que :

$$\int_{\mathbb{R}^2} n(x,t)\log(n(x,t))dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{n(x,t)}{\mu(x,t)}\log(\frac{n(x,t)}{\mu(x,t)})\mu(x,t)dx - M\log[\pi(1+t)] - K$$

avec $\mu(x,t) = \frac{1}{\pi(1+t)}\exp(-\frac{x^2}{1+t})$
Par Jensen on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{n(x,t)}{\mu(x,t)}\log(\frac{n(x,t)}{\mu(x,t)})\mu(x,t)dx \geq X\log X \text{ où } X = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{n(x,t)}{\mu(x,t)}\mu(x,t)dx = M$$

L'entropie $\int_{\mathbb{R}^2} n\log(n)$ est bornée inférieurement.
Il suffit donc de montrer des résultats de régularité pour obtenir l'existence.
La démonstration d'existence se déroule en deux temps : régulariser le problème afin de le résoudre avec un point fixe de Banach, puis obtenir des estimations a priori suffisantes pour avoir de la conpacité et pour passer à la limite.

Chapitre 3

Démonstration du théorème

Oui mais de quel théorème ? Il faudrait le donner.
Donc le voilà : (C'est une phrase sans verbe. En voici une autre.)

Théorème 3.0.1 *Si $\chi M \leq 8\pi$ et qu'on a les conditions (1.19) sur n_0, alors le problème* (1) *a une solution globale positive, avec :*
$(1 + |x|^2 + |\log n|)n \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^2))$

On a déjà vu que si une solution existait elle était positive, et que la condition sur M était nécessaire. On a aussi vu que les normes L^p se transmettaient. On verra que l'on a même mieux grâce à des propriétés d'hypercontractivité.

3.1 Régularisation

On approche le noyau du laplacien par la fonction $\kappa^\epsilon(z) = -\frac{1}{2\pi}log|z|$ si $|z| > \epsilon$ et $\kappa^\epsilon(z) = -\frac{1}{2\pi}log|\epsilon|$ sinon, avec $\epsilon > 0$. On a donc le problème suivant (on oubliera d'écrire le ϵ partout) :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = \Delta n(x,t) - \chi\nabla.(n(x,t)\nabla c(x,t)) & \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ c(x,t) = (\kappa(.) * n(.,t))(x) & \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ n(x,t=0) = n_0(x) \geq 0 & \forall x \in R^2 \end{array} \tag{3.1}$$

avec $n^0 \in L^1(\mathbb{R}^2) > 0$. De plus : $\forall z/|z| >> \epsilon, \nabla\kappa(z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{z}{|z|^2}$
On va résoudre ce problème avec un point fixe de Banach.
On notera E l'espace $C((0,T); L^1(R^2))$ muni de sa norme naturelle de Banach. On regarde alors l'application de E dans E qui à $m \in E$ associe la solution (dont on dira un mot plus tard, mais admise) du problème linéaire correspondant, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial n}{\partial t}(x,t) = \Delta n(x,t) - \chi\nabla.(n(x,t)\nabla c(x,t)) & \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ c(x,t) = (\kappa(.) * m(.,t))(x) & \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \\ n(x,t=0) = n_0(x) \geq 0 & \forall x \in R^2 \end{array} \tag{3.2}$$

Le principe de positivité s'applique également sur ce problème. On peut donc se restreindre à l'espace où m et donc n sont positives. On notera B^+ cet espace, qui est toujours de Banach. On peut également se restreindre aux m de masse M égale à celle de n_0.

On s'attache donc ici à démontrer le caractère contractant de notre application. Pour ce faire, prenons $m1$ et $m2$ dans B^+ et leurs solutions correspondantes $n1$ et $n2$, puis calculons $n1 - n2$. Pour cela, il est

utile d'introduire le noyau de la chaleur : $Q(x,t) = \frac{1}{\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{t}}$.
On peut alors écrire, par la formule de Duhamel :

$$n = n_0(.) * Q(.,t) - \int_0^T Q(.,t-s) * div(n\nabla c)(.,s)ds$$

que l'on réecrit :

$$n = n_0(.) * Q(.,t) + \int_0^T \nabla Q(.,t-s) * (n\nabla c)(.,s)ds$$

On peut donc écrire (car n_0 ne dépend pas de m) :

$$||n1 - n2||_{L^1} \leq \int_0^T ||\nabla Q(.,t-s) * ((n1\nabla c1)(.,s) - (n2\nabla c2)(.,s))||_{L^1} ds$$

Remarquons que $\nabla Q(x,t) = \frac{-2x}{t\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{t}}$, donc $||\nabla Q||_{L^1} \leq \frac{A}{\sqrt{t}}$, et donc :

$$||n1 - n2||_{L^1} \leq \int_0^T \frac{A}{\sqrt{t-s}} ||((n1\nabla c1)(.,s) - (n2\nabla c2)(.,s))||_{L^1} ds$$

soit

$$||n1 - n2||_{L^1} \leq \int_0^T \frac{A}{\sqrt{t-s}} (||n1||_{L^1} ||(\nabla c1)(.,s) - (\nabla c2)(s,.))||_{L^\infty} + ||n1 - n2||_{L^1} ||(\nabla c2)(.,s))||_{L^\infty} ds$$

On note alors M la masse constante des solutions. Par simple calcul, on a :

$$||n1 - n2||_{L^1} \leq A\sqrt{t}(M||\nabla\kappa||_{L^\infty} sup_{0,T}(||m1 - m2||_{L^1}) + sup_{0,T}(||n1 - n2||_{L^1})||\nabla\kappa||_{L^\infty} M$$

En passant au sup, en mettant à gauche ce qui est en n et en supposant t assez petit, on obtient alors :

$$||n1 - n2||_E \leq \frac{A\sqrt{t}M||\nabla\kappa||_{L^\infty}}{1 - A\sqrt{t}M||\nabla\kappa||_{L^\infty}} ||m1 - m2||_E = B||m1 - m2||_E$$

avec $B < 1$.
L'application est donc contractante, le théorème du point fixe de Banach nous livre alors une solution.

3.2 Un mot sur le problème linéaire

Pour l'existence du problème linéaire, j'ai été orienté vers une méthode de type équation de renouvellement, où les estimations découlent d'inégalités d'entropie et d'inégalités de type Poincaré. Le problème est que cette méthode nécessite que le noyau soit indépendant du temps, ce qui n'est pas le cas ici (et je m'en suis rendu compte tard).
Je ne suis pas allé plus loin dans la recherche de cette solution, qui parait-il est classique (il est peut être possible d'utiliser les méthodes de la chaleur).

Par contre, on a l'unicité de cette solution grâce au théorème de positivité demontré dans la première partie.

3.3 Passage à la limite

Revenons à la démonstration. Il faut maintenant obtenir des estimations pour passer à la limite. Pour cela on va utiliser le théorème d'Aubin, que je vais brièvement justifier.

3.3.1 Lemme d'Aubin

Lemme 3.3.1 *Soit $T > 0$, $p \in (1, \infty)$ et f_n une famille de fonctions bornées dans $L^p((0,T); H)$, òu H est un espace de Banach. De plus, soit V un espace s'injectant compactement dans H et V' son dual. Si les f_n sont bornées dans $L^p((0,T); V)$ et que les $\frac{\partial}{\partial t} f_n$ sont bornées uniformément par rapport à n dans $L^p((0,T); V')$, alors f_n est relativement compacte dans $L^p((0,T), H)$.*

Le lemme d'Aubin nous permet de récupérer de la compacité en temps à partir de la compacité en espace. Dans notre cas, on va prendre $H = L^2(\mathbb{R}^2)$, $V = \{u \in H^1(\mathbb{R}^2), \sqrt{|x|}u \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$ et $p = 2$.
Il faut donc montrer les estimations permettant de justifier ces espaces, et notament de transformer nos estimations L^1 en estimations L^2.

Digression, justification

On aurait pu dans le même esprit se borner aux estimations L^1. Je vais expliquer ce point par un petit calcul qui en même temps justifiera le lemme d'Aubin (moralement en tout cas, car on verra comment de la compacité en espace peut donner de la compacité en temps).

Lemme 3.3.2 *Soit $n_k(x,t)$ des fonctions telles que :*
$\omega(\beta) = sup_{1 \le k, 0 \le t \le T} \int_B |n_k(x+\beta, t) - n_k(x,t)|dx \underset{\beta \to 0}{\longrightarrow} 0$ ($\approx$ les n_k sont compacts en x uniformément en temps), $\frac{\partial}{\partial t} n_k = D^\alpha \phi_k(x,t)$ et $||\phi_k||_{L^\infty} < \infty$
alors n_k est compacte dans $C((0,T), L^1(B))$

Démonstration :
On prend une approximation de l'unité $\rho_\epsilon(x)$ telle que :
$\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^d}\rho(\frac{x}{\epsilon})$ avec $\rho \in D(\mathbb{R}^d)$, $\rho \ge 0$ et $\int \rho = 1$
On convole alors l'équation dans le but de mettre les dérivées sur ρ :

$$\frac{\partial}{\partial t} n_k(x,t) * \rho_\epsilon(x) = \phi * D^\alpha \rho_\epsilon$$

On réecrit alors l'équation (en oubliant à partir de maintenant les k) :

$$\frac{\partial}{\partial t} n(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}(n(x,t) - n(x,t) * \rho_\epsilon(x)) + \phi * D^\alpha \rho_\epsilon$$

Et on s'intéresse logiquement à une différence d'incrémentation en t en intégrant l'équation entre t et $t+h$:

$$n(x,t+h) - n(x,t) = [\int n(x,t) - n(y,t)\rho_\epsilon(x-y)dy]_t^{t+h} + \int_t^{t+h} \phi * D^\alpha \rho_\epsilon ds$$

Calcul à verifier ici.
On intègre sur la boule B.

$$||n(x,t+h) - n(x,t)||_{L^1(B)} \le 2sup_{(t,t+h)}(\int \rho_\epsilon(z) \int |n(x+z,t) - n(x,t)|dxdz + \int_t^{t+h} ||\phi||_{L^1(2B)} \frac{c}{\epsilon^\alpha} ds$$

$$\le 2\omega_\epsilon + \frac{c_\phi h}{\epsilon^\alpha}$$

Il suffit alors de prendre $\epsilon^\alpha = \sqrt{h}$ et la borne devient $2\omega_\epsilon + c_\phi \sqrt{h}$. On passe alors au sup sur t, et on obtient :

$$||n(.+h, x) - n(.,x)||_{C((0,T), L^1(B))} \le 2\omega_\epsilon + c_\phi \sqrt{h}$$

La borne étant aussi petite que l'on veut quand h tend vers 0, on obtient bien la compacité en temps.
Remarque : d'autres conditions auraient donné la compacité L^1.
Ce résultat en tant que tel ne sera pas appliqué, mais il permet de rendre un peut moins abstrait le lemme d'Aubin.

3.3.2 Estimations

Je donne ici une série d'estimations a priori qui permettent de passer à la limite, la difficulté étant le terme non linéaire pour lequel on ne peut pas se contenter d'une limite distribution.

Lemme 3.3.3 *Les solutions du problème régularisé vérifient les assertions suivantes, uniformément par rapport à ϵ et avec des bornes dépendant uniquement de $\int(1+|x|^2)n_0dx$ et $\int n_0log(n_0)dx$:*

(i) $|x|^2n^\epsilon(x,t)$ *est bornée dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+_{loc};L^1(\mathbb{R}^2))$

(ii) $\int n^\epsilon(x,t)\log n^\epsilon(x,t)dx$ *et* $\int n^\epsilon(x,t)c^\epsilon(x,t)$ *sont bornées dans* $\mathbb{R}$

(iii) $n^\epsilon(x,t)\log n^\epsilon(x,t)$ *est bornée dans* $L^\infty(\mathbb{R}^+_{loc};L^1(\mathbb{R}^2))$

(iv) $\nabla\sqrt{n}^\epsilon(x,t)$ *est bornée dans* $L^2(\mathbb{R}^+_{loc}\times\mathbb{R}^2)$

(v) $n^\epsilon(x,t)$*est bornée dans* $L^2(\mathbb{R}^+_{loc}\times\mathbb{R}^2)$

(vi) $n^\epsilon(x,t)\Delta c^\epsilon(x,t)$ *est bornée* $L^1(\mathbb{R}^+_{loc}\times\mathbb{R}^2)$

(vii) $\sqrt{n}^\epsilon(x,t)\nabla c^\epsilon(x,t)$ *est bornée* $L^2(\mathbb{R}^+_{loc}\times\mathbb{R}^2)$.

Commençons par montrer ces estimations, nous les exploiterons après.
Démonstration : (i) La même démonstration que pour le lemme (1.1) s'applique, c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^2}|x|^2n^\epsilon(x,t)dx=\int_{\mathbb{R}^2}|x|^2(\Delta n^\epsilon-\chi\nabla.(n^\epsilon\nabla c^\epsilon))dx$$

$$=4M+2\chi\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}n^\epsilon(x,t)n^\epsilon(y,t)(\nabla\kappa^\epsilon(x)-\nabla\kappa^\epsilon(y)).(x-y)$$

$$\leq 4M-\frac{\chi}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{n^\epsilon(x,t)n^\epsilon(y,t)}{|x-y|}\leq 4M.$$

Pour (ii), on calcule et on trouve :

$$\frac{d}{dt}(\int n^\epsilon(x,t)\log n^\epsilon(x,t)dx-\frac{\chi}{2}\int n^\epsilon(x,t)c^\epsilon(x,t)dx)=-\int n^\epsilon(x,t)|\nabla(\log(n^\epsilon(x,t))-\chi\nabla c^\epsilon(x,t)|^2dx$$

Puis le même calcul que dans le lemme (1.2) nous permet d'obtenir les estimations (ii)

Pour (iii) démontrons le lemme (d'équiintégrabilité) suivant :

Lemme 3.3.4 *Si $u\in L^1_+$ et que l'entropie et le second moment sont bornés, alors $u\log u$ est uniformément borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^+_{loc};L^1(\mathbb{R}^2))$*

La seule difficulté est quand $u\leq 1$:

$$\int_{u\leq 1}n|\log n|\leq\int_{e^{-|x|^2}\leq u\leq 1}n|\log n|+\int_{u\leq e^{-|x|^2},u\leq\frac{1}{e}}n|\log n|+\int_{\frac{1}{e}\leq u\leq e^{-|x|^2}}n|\log n|$$

Comme $|\log|$ est décroissant sur $[0,1]$, on a $\int_{e^{-|x|^2}\leq u\leq 1}n|\log n|\leq\int|x|^2udx$.
Sur $[0,\frac{1}{e}]$, $.|\log.|$ est croissante, donc $\int_{u\leq e^{-|x|^2},u\leq\frac{1}{e}}n|\log n|\leq\int|x|^2e^{-|x|^2}$ qui est fini.
Il reste le dernier morceau, mais on intègre sur un ensemble de mesure finie une quantité bornée, donc il est fini, ce qui prouve le lemme, et donc le (iii).

Passons au (iv)

On a déjà vu qu'un simple calcul donne :

$$\frac{d}{dt}\int n\log n dx \leq -4\int |\nabla\sqrt{n}|dx + \chi n(-\Delta c)dx$$

Comme on a déjà une borne pour $\int n\log n$, il reste à estimer le dernier terme :

$$\int n(-\Delta c)dx = \int n(-\Delta(\kappa^\epsilon * n)dx = (1) + (2) + (3)$$

avec $(1) = \int_{n<K} n(-\Delta(\kappa^\epsilon * n))dx$, $(2) = \int_{K\leq n} n(-\Delta(\kappa^\epsilon * n))dx - (3)$ et $(3) = \int_{K\leq n} |n|^2 dx$.
Pour simplifier les calculs, on écrit $-\Delta\kappa^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^2}\phi_1(\frac{1}{\epsilon})$. Par définition, on sait que $\phi_1 > 0$. On peut alors écrire :

$$(1) = \int_{n<K} n \int \frac{1}{\epsilon^2}\phi_1(\frac{x-y}{\epsilon})n(y,t)dx \leq KM$$

On espère contrôler (2) car $-\Delta(\kappa^\epsilon)$ tend faiblement vers un dirac. Précisemment :

$$(2) = \int_{K\leq n} n(x,t)\int (n(x-\epsilon y,t) - n(x,t))\phi_1(y)dydx$$

$$\leq \int_{K\leq n}\int (\sqrt{n(x-\epsilon y,t)} - \sqrt{n(x,t)})\sqrt{\phi_1(y)})(\sqrt{n(x-\epsilon y,t)} - \sqrt{n(x,t)} + 2\sqrt{n(x,t)}\sqrt{\phi_1(y)})dydx$$

On utilise alors Cauchy-Schwartz et l'ingalité $(a+2b)^2 \leq 2a^2 + 8b^2$, ce qui donne :

$$\leq \int_{K\leq n}(||\phi 1||^{1\ 2}_{L^\infty}\int_{1\ 2\leq y\leq 2} |(\sqrt{n(x-\epsilon y,t)} - \sqrt{n(x,t)})|^2 dy)^{1\ 2})(\int |((\sqrt{n(x-\epsilon y,t)} - \sqrt{n(x,t)})|^2 + 8|n(x,t)|)\phi_1(y)dy)^{1\ 2})dx$$

On utilise alors l'inégalité de Poincaré, ce qui donne :

$$(2) \leq \int_{K\leq n} n||\phi 1||^{1\ 2}_{L^\infty} C_p||\nabla\sqrt{n}||_{L^2(\mathbb{R}^2)} \times [\sqrt{2}||\phi 1||^{1\ 2}_{L^\infty} C_p||\nabla\sqrt{n}||_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\sqrt{2}\sqrt{|n|}||\phi_1||^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R}^2)}]dx$$

Faisons une légère pose pour contrôler (3). On réutilise GNS dans ce cas :

$$\int_{K\leq n}|n|^2 dx \leq C^2_{GNS}\int_{K\leq n}||\nabla\sqrt{n}||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dx\int_{K\leq n} ndx$$

On a déjà vu que l'on peut rendre $\int_{K\leq n} ndx$ aussi petit que l'on veut (avec K assez grand). On majore donc ce terme par un $\eta(K)$, et donc :

$$\int_{K\leq n}|n|^2 dx \leq C\eta(K)\int_{K\leq n}||\nabla\sqrt{n}||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}dx$$

Par Cauchy-Schwarz on a alors :

$$\int_{K\leq n}|n|^{\frac{3}{2}}dx \leq (\int_{K\leq n}|n|dx)^{\frac{1}{2}}(\int_{K\leq n}|n|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \eta(K)C_{GNS}||\nabla\sqrt{n}||_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

Donc en sommant $(2) + (3)$ on obtient :

$$(2) + (3) \leq B\eta(K)||\nabla\sqrt{n}||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$$

En revenant au début, en notant $X(t) = ||\nabla\sqrt{n}||^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ et en prenant $\eta(K) < \frac{4}{B}$, on a :

$$\frac{d}{dt}\int n\log n dx \leq MK + (-4 + B\eta(K))X(t)$$

Et donc en intégrant on obtient la borne voulu.

Ouf on passe maintenant à (v) qui découle de l'inégalité de Gagliardo-Niremberg-Sobolev :

$$||u||_p^2 \leq C_{GNS}^{(p)}||\nabla u||_{L^2}^{\frac{4}{p}}||u||_{L^2}^{2-\frac{4}{p}} \quad u = \sqrt(n), p = 4 \tag{3.3}$$

Pour (vi) : on l'a vu dans (iv).

Reste (vii) qui est l'estimation importante pour le passage à la limite. Calculons alors :

$$\frac{d}{dt}\int \frac{1}{2}ncdx = \int c(\Delta n - \chi\nabla(n\nabla c))dx$$
$$= \int n\Delta c dx + \chi\int n|\nabla c|^2 dx$$

On peut écrire

$$\int_{(0,T)\times\mathbb{R}^2} n|\nabla c|^2 dxdt \leq \frac{1}{2\chi}|\int ncdx - \int n_0(\kappa * n_0)dx| + \frac{1}{\chi}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^2} n(-\Delta c)dx.$$

(vi) et (ii) donnent les bornes des termes de droite.

On remarque que ces majorations sont uniformes en ϵ (c'est facile sans l'écrire). Le lemme d'Aubin donne l'existence d'un n limite. Il faut alors passer à la limite dans l'équation et surtout dans le terme non linéaire. Au passage une chose importante à voir pour passer à la limite est que $n|\nabla(\log n) - \chi\nabla c|$ est bornée dans L^1 en temps et espace.

La difficulté se trouve donc dans le terme $n^\epsilon(x,t)\nabla c^\epsilon(x,t)$ (terme non linéaire). On remarque qu'il est borné dans $L^1((0,T)\times\mathbb{R}^2)$ uniformément par rapport à ϵ.
En effet :

$$(\int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} n^\epsilon|\nabla c^\epsilon|dxdt)^2 \leq (\int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} n^\epsilon dxdt)(\int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} n^\epsilon|\nabla c^\epsilon|^2 dxdt) = MT(\int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} n^\epsilon|\nabla c^\epsilon|^2 dxdt)$$

Et par (vii) on contrôle ce dernier terme. Par contre, à cause de la non-linearité, cela ne suffit par pour que n soit solution. Pour cela, il faut recupérer une limite forte.
On remarque alors grâce a l'inégalitée G.N.S que pour $p > 2$ et $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |n^\epsilon|^{p/2} \leq (C_{GNS}^{(p)}M\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\sqrt{n}^\epsilon|^2 dx)^{p/2-1}$$

Ce qui donne $n^\epsilon \in L^q(\mathbb{R}^+_{loc}\times\mathbb{R}^2)$ pour tout $q \in [1,\infty)$.
On a donc a une extraction près (on ne change pas la notation) la convergence faible de n^ϵ vers n dans tout ces espaces.

Reste a évaluer ∇c^ϵ :

$$\nabla c^\epsilon - \nabla c = -\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{x-y}{|x-y|^2}(n^\epsilon(y,t) - n(y,t))dy + \int_{|x-y|\leq 2\epsilon}(\frac{1}{\epsilon}\nabla\kappa(\frac{x-y}{\epsilon}) + \frac{x-y}{2\pi|x-y|^2})n^\epsilon(y,t)dy.$$

On a donc convergence p.p.t. (x,t) vers 0 Ce qui maintenant suffit pour dire que $n^\epsilon \nabla c^\epsilon$ converge vers $n\nabla c$ au sens des distributions.
De plus les estimations (v), (vii), et (iv) passent alors par semi continuité à la limite. On en déduit via

$$\int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} n|(\nabla \log n - \chi \nabla c)|^2 dxdt = 4\int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} |\nabla \sqrt{n}^\epsilon|^2 dxdt - 2\chi \int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} |n^\epsilon|^2 dxdt + \chi^2 \int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} n^\epsilon |\nabla c^\epsilon|^2 dxdt$$

et via l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} n|(\nabla \log n - \chi\nabla c)| dxdt \leq (\int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} ndxdt)^{1/2} (\int\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^2} n|(\nabla \log n - \chi \nabla c)|^2 dxdt)^{1/2}$$

que le flux est bien dans $L^1([0,T]\times\mathbb{R}^2)$, et donc l'existence de la solution.

3.4 Ultracontractivité

La transmission des normes L^p telle qu'on l'a montrée nécessite une borne à l'instant initial. Cette condition initiale n'est en fait pas nécessaire. En effet, il existe un résultat d'hypercontractivité qui dit que pour tout temps $t > 0$, la norme L^p est finie. Pour l'exprimer en termes mathématiques, on peut écrire :

Théorème 3.4.1 *On considère une solution de (1) avec les hypothèses (1.19) et $\chi M \leq 8\pi$. Alors pour tout $p \in (1, +\infty)$, il existe une fonction notée h_p, continue sur $(0, +\infty)$, telle que pour presque tout t, $||n(.,t)||_{L^p} \leq h_p(t)$.*

On voit que l'on autorise la valeur infinie en 0.

Je ne tape pas la preuve ici. Elle mélange un peu tout ce qui a déjà été utilisé. Le calcul se rapproche de la méthode de Jager et Luckhaus (avec les $(n-K)_+$). La différence (quand même importante) est que l'exposant p n'est pas fixe : on prend pour tout t une fonction affine $p(s)$ telle que $p(0) = 1$ (on sait que la norme L^1 de n est finie en $t = 0$) et $p(t) = P$. Cela rajoute quelques termes en plus dans la dérivation. Les nouveaux termes sont alors contrôlés avec une inégalité de Sobolev logarithmique.

En réalité le problème n'est pas complètement résolu, il semblerait que la distance de Waserstein aux solutions constantes soit en fait la bonne estimation du problème.

Chapitre 4

Inégalité de Gagliardo-Niremberg-Sobolev

$\forall u \in H^1(\mathbb{R}^2),\ \forall r \in [2, \infty)$, on a :

Théorème 4.0.2 $||u||_{\mathbb{R}}^2 \leq C_{GNS}^{(r)} ||\nabla u||_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{4}{r}} ||u||_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{2-\frac{4}{r}}$

Démonstration :
Cette équation est une amélioration des inégalités de Sobolev traditionnelles avec de l'interpolation. En effet, pour $u \in S(\mathbb{R}^d)$ (les inégalités générales s'en déduisent par densité), l'inégalité de Sobolev s'écrit :

$$||u||_{L^{p^*}} \leq ||\nabla u||_{L^p}$$

avec $\frac{1}{p^*} = \frac{dp}{d-p}$ et $1 \leq p < d$. En particulier on n'a pas d'inégalité lorsque $p = d$.
Comme de plus :

$$||u||_{L^q} \leq ||u||_{L^q}$$

pour $1 \leq q \leq \infty$, par interpolation on a pour $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{1-\theta}{p^*}, \theta \in [0, 1]$:

$$||u||_{L^r} \leq ||u||_{L^q}^{\theta} ||\nabla u||_{L^p}^{1-\theta}$$

Remarque : c'est plus simplement Holder puis Sobolev.

On remarque que la condition sur les indices peut sécrire $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{q} + \frac{(1-\theta)(d-p)}{dp}$, ce qui laisse à penser que l'on peut prendre $d = p$. Et bien c'est vrai.
Et c'est celle-là que l'on utilise. En effet, pour $p = q = d = 2$ et $\theta = \frac{2}{r}$, on a :

$$||u||_r^2 \leq C_{GNS}^{(r)} ||\nabla u||_{L^2(R^2)}^{\frac{4}{r}} ||u||_{L^2(R^2)}^{2-\frac{4}{r}}$$

Chapitre 5

Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev

5.1 Tout d'abord la normale

Théorème 5.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 < \lambda < n$, $p > 1$ et $r > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} + \frac{1}{r} = 2$.*
Alors il existe C ne dépendant que de n, p et λ tel que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ on ait :

$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)|x-y|^{-\lambda} g(y) dx dy \leq C||f||_p||g||_r$

De plus, si on note encore C la constante optimale, on a :

$C \leq \frac{n}{n-\lambda} \frac{|S^{n-1}|}{n}^{\frac{\lambda}{n}} \frac{1}{rp}((\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{1}{r}})^\lambda n + (\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{1}{p}})^\lambda n)$

5.2 Démonstration

Par homogénéité on prend f et g normées à un (pour leur norme associée). On utilisera également des fonctions positives ($|\int| < \int||$). On notera χ les fonctions caractéristiques d'ensemble.
On a alors :

$$f(x) = \int_0^\infty \chi_{0 \leq a \leq f(x)} da$$

$$g(y) = \int_0^\infty \chi_{0 \leq b \leq g(y)} db$$

$$|x-y|^\lambda = \int_0^\infty \lambda . c^{-\lambda-1} \chi_{B(0,c)}(x-y) dc$$

On réecrit alors le membre de gauche de l'inégalité, on applique Fubini-Tonelli (tout est positif) et on obtient :

$$K = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \lambda I(a,b,c) da db dc$$

avec

$$I(a,b,c) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{0 \leq a \leq f(x)} \chi_{0 \leq b \leq g(y)} c^{-\lambda-1} \chi_{B(0,c)}(x-y) dx dy.$$

Le but est donc de majorer I de la façon la plus faible possible. On va donc majorer par 1 le terme le moins souvent nul (un terme en moins suffit car on peut alors réaliser les intégrations).

Par commodité notons :

$$u(a) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{0\leq a\leq f(x)} dx$$

$$v(b) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{0\leq b\leq g(y)} dy$$

$$w(c) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B(0,c)}(z)dz = c^n \frac{|S^{n-1}|}{n}$$

On a alors, avec le changement de variable $z = x-y$ lorsque c'est nécessaire : $I \leq c^{-\lambda-1} min(u(a)v(b), u(a)w(c), v(b)w(c))$. De facon plus interessante :

$$I \leq c^{-\lambda-1} \frac{u(a)v(b)w(c)}{max(u(a), v(b), w(c))}$$

Il faut ensuite intégrer trois fois de 0 à l'infini. Notons pour la suite la remarque sur les normes suivantes (directe avec Fubini) :

$$||f||_p^p = \int_0^\infty pa^{p-1}u(a)da = 1$$

$$||g||_r^r = \int_0^\infty rb^{r-1}v(b)db = 1$$

On peut remarquer que a et b jouent des rôles symétriques et que l'on sait faire un peu plus de choses sur c. On va donc commencer par lui.
On suppose ici que $u(a) < v(b)$. Alors :

$$\int_0^\infty Idc = \int_{w(c)\leq u(a)} c^{-\lambda-1}w(c)v(b)dc + \int_{w(c)>u(a)} c^{-\lambda-1}u(a)v(b)dc.$$

On note $I1$ et $I2$ les deux intégrales obtenues. On voit que ces deux quantités sont faciles à calculer, il suffit de voir que $w(c) = u(a)$ entraîne $c = (\frac{nu(a)}{S^{n-1}})^{\frac{1}{n}}$ (ici w est croissant et $u(a) fixe$). On a donc $w(c) \leq u(a)$ tant que c est plus petit que cette valeur limite. On a donc :

$$I1 = v(b)\frac{1}{n-\lambda}(\frac{S^{n-1}}{n})^{\frac{\lambda}{n}})u(a)^{1-\frac{\lambda}{n}}$$

$$I2 = (\frac{S^{n-1}}{n})^{\frac{\lambda}{n}}\frac{1}{\lambda}v(b)u(a)^{1-\frac{\lambda}{n}}.$$

La valeur en 0 de $I1$ est nulle car $n - \lambda > 0$, et la valeur en l'infini de $I2$ est nulle car $\lambda > 0$. Ainsi :

$$\int_0^\infty Idc \leq (\frac{S^{n-1}}{n})^{\frac{\lambda}{n}} \frac{n}{\lambda(n-\lambda)} v(b)u(a)^{1-\frac{\lambda}{n}}.$$

et par symétrie, si $u(a) \geq v(b)$, on a :

$$\int_0^\infty Idc \leq (\frac{S^{n-1}}{n})^{\frac{\lambda}{n}} \frac{n}{\lambda(n-\lambda)} u(a)v(b)^{1-\frac{\lambda}{n}}.$$

Il faut maintenant intégrer suivant a et b, mais on ne sait pas donner une description explicite en fonction de a et b des domaines mis en jeu (f et g étant quelconques). On va donc partitionner différement. Pour cela remarquons le fait suivant (qui est du au bon choix de majoration) :

$$\int_0^\infty \lambda Idc \leq (\frac{S^{n-1}}{n})^{\frac{\lambda}{n}} \frac{n}{(n-\lambda)} min(u(a)v(b)^{1-\frac{\lambda}{n}}, v(b)u(a)^{1-\frac{\lambda}{n}}. \quad (5.1)$$

En effet, si $v(b) > u(a)$, alors $v(b)u(a)^{1-\frac{\lambda}{n}} > u(a)v(b)^{1-\frac{\lambda}{n}}$. Cela nous permet de choisir n'importe quelle partition de $\mathbb{R}^2$ et le terme à intégrer dessus.

On note $m(a,b)$ ce minimum, et on prend alors la partition définie par $A = \{a,b \in R^2, a^p < b^r\}$, $B = \{a,b \in R^2, a^p \geq< b^r\}$.
Sur A on choisi de majorer m par $v(b)u(a)^{1-\frac{\lambda}{n}}$, l'interêt étant d'avoir des bornes finies pour u, qui contient les difficultées. On fait l'inverse sur B. On s'intéresse donc à :

$$J1 = \int_0^\infty v(b)(\int_0^{b^{\frac{r}{p}}} u(a)^{1-\frac{\lambda}{n}} da)db,$$

$$J2 = \int_0^\infty u(a)(\int_0^{b^{\frac{r}{p}}} v(b)^{1-\frac{\lambda}{n}} db)da.$$

et plus particulierement à $J11 = \int_0^{b^{\frac{r}{p}}} u(a)^{1-\frac{\lambda}{n}} da$.
Étant donné la remarque sur l'expression de la norme de f faite précedement, on a envie d'appliquer Holder de façon à faire apparaître $u(a)a^{p-1}$. Cela nous incite à poser $\frac{1}{k} = 1 - \frac{\lambda}{n}$ et $\frac{1}{s} = \frac{\lambda}{n}$, puis à multiplier et diviser à l'intérieur de l'intgrale par $a^{\frac{p-1}{k}}$.
On applique alors l'inégalité de Holder car $f \in L^p$ (ce qui est une condition suffisante pour que le premier terme soit L^k du segment voulu) et $a^{-\frac{p-1}{k}}$ est dans L^s puisque $-s.\frac{p-1}{k} = -(p-1)\frac{n-\lambda}{\lambda} > -1$ vu la relation sur n, p, λ, r et le fait que $r > 1$. On remarque ici l'intérêt de la borne finie de l'intégrale.

Bref comme disait pepin on obtient (en majorant la borne supérieure par l'infini pour f) :

$$J11 \leq (\frac{1}{p}||f||)^{\frac{1}{k}}(\int_0^{b^{\frac{r}{p}}} (a^{-(p-1)\frac{n-\lambda}{\lambda}})^{\frac{\lambda}{n}}$$

Soit après calcul facile mais desagréable, on obtient :

$$J11 \leq (\frac{1}{p}(\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{1}{r}}))^{\frac{\lambda}{n}} p^{\frac{\lambda}{n}-1} b^{r-1}.$$

De même avec des notations évidentes :

$$J21 \leq (\frac{1}{r}(\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{1}{p}}))^{\frac{\lambda}{n}} r^{\frac{\lambda}{n}-1} a^{p-1}.$$

Il suffit pour finir de réintégrer $J11$ par rapport à b. Cela se résume à une constante près à :

$$\int_0^\infty v(b)b^{r-1}db = \frac{1}{r}$$

ceci toujours grâce à la même remarque sur les normes et grâce au fait que celle de g vaut 1.
Le calcul est analogue sur $J21$.
On a ainsi démontré l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev avec la constante :

$$\frac{n}{n-\lambda}(\frac{|S^{n-1}|}{n})^{\frac{\lambda}{n}} \frac{1}{rp}((\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{1}{r}})^{\frac{\lambda}{n}} + (\frac{\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{1}{p}})^{\frac{\lambda}{n}})$$

annoncé comme majorante de l'optimale.

5.3 Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev

Théorème 5.3.1 *$\int_{\mathbb{R}^d} f\log(f)dx + \frac{d}{M}\int\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} f(x)f(y)\log|x-y|dxdy \geq -C(M)$, avec $C(M) = M(1+\log(\pi) - \log(M))$*

Pour la démonstration, on considère les inégalités "normales" comme une famille de fonctionelles Φ_λ positives, définies sur les fonctions infiniment dérivables à support compact et indexée par le paramètre λ positif, avec $\Phi_0 = 0$ (en 0 on a égalité). Ce faisant on peut dériver cette famille en $\lambda = 0$ et comme $0 \leq \frac{\Phi_\lambda}{\lambda}$ on obtient que $\Phi_0' \geq 0$. Cette méthode donne des inégalités que l'on peut qualifier d'extrèmales. Dans notre cas on obtient :

$$\Phi_\lambda = C||f||_p||g||_r - \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} f(x)|x-y|^{-\lambda}g(y)dxdy$$

Il reste alors à estimer la constante, et c'est là le point le plus dur. Il existe deux méthodes, une de Carlen et Loss, et l'autre de Beckner. Je n'ai pas refait toutes les étapes de ces démonstrations point par point, c'est pourquoi je me contente d'en expliquer seulement l'idée ici.
Nous avons besoin de l'inégalité sur l'espace entier, alors que dans les démonstrations sont énoncées sur une boule. Cependant, il est précisé que via la projection stéréographique, on passe facilement d'une boule a l'espace.

5.4 Carlen et Loss

La démonsration est basée sur les fonctions qui rendent optimales les inégalités normales. Ces fonctions sont obtenues par une méthode de compétition symétrique. La méthode de base est d'utiliser l'invariance par transformation conforme de l'inégalité et de réaranger alors la masse des fonctions avec des réarrangements symétriques. Ces transformations (réalisables uniquement pour $p = r$) permettent d'optimiser l'inégalité.

5.5 Beckner

La méthode de Beckner est basée sur une décomposition du noyau en série de fonctions sphériques harmoniques, ce qui permet de calculer ensuite.

Bibliographie

[1] Dolbeaut Perthame, Optimal critical mass in the two dimensional Keller-Segel model in $\mathbb{R}^2$.

[2] Blanchet Dolbeaut Perthame, Two dimensional Keller-Segel model : optimal critical mass and qualitative properties of the solutions..

[3] Perthame, Cours de M2.

[4] Corrias, Perthame Zaag, A chemotaxis mobel motivated by angiogenesis.

[5] Elliott H.Lieb, Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities.

[6] Beckner, Sharp sobolev inequalities on the sphere and the Moser-Trudinger inequality.

[7] Calvez ,Carillo, Volume effect in the Keller Segel model : energy estimates preventing blow-up.

[8] Lieb ,Loss, Analysis.

[9] On explosions of solutions to a system of partial differential equations modelling chemotaxis.

[10] Carlen, loss, Competing symmetries the logarithmic HLS inequality and onofri's inequality on S^n