

## ESSAI EDP-JANVIER 2019

YANN BRENIER, THOMAS GALLOUËT

### 1. ENONCÉ

Etant donné un ouvert lisse et borné  $U$  de  $\mathbb{R}^d$ , on note  $H_0^1(U)$  l'espace obtenu par complétion de  $C_c^\infty(U)$  pour la norme

$$u \rightarrow \|u\|_{H^1} = \sqrt{\int_U (|\nabla u(x)|^2 + u^2(x)) dx}.$$

On considère le problème de minimisation

$$\inf_{u \in H_0^1(U)} J_\epsilon(u), \quad J_\epsilon(u) = \int_U (|\nabla u(x)|^2 + 4\sqrt{\epsilon^2 + (u-f)^2(x)}) dx,$$

où  $f$  est une fonction donnée dans  $L^\infty(U)$  et  $\epsilon \geq 0$  est fixé.

- 1) Montrer que ce problème admet une unique solution  $u_\epsilon$  pour tout  $\epsilon \geq 0$ .
- 2) Trouver l'EDP satisfaite par  $u_\epsilon$  dans le cas où  $\epsilon > 0$ .
- 3) Obtenir, par le principe du maximum, quand  $\epsilon > 0$ , une borne  $L^\infty$  sur  $u_\epsilon$  ne dépendant que de  $f$  mais pas de  $\epsilon$ .
- 4) Montrer que les valeurs optimales  $J_{\epsilon, \text{opt}}$  convergent vers la valeur optimale  $J_{0, \text{opt}}$  quand  $\epsilon \downarrow 0$ . En déduire que les solutions optimales  $u_\epsilon$  convergent (faiblement dans  $H_0^1(U)$ ) vers la solution optimale  $u_0$  et obtenir pour  $u_0$  la même borne  $L^\infty$  que précédemment.
- 5) Dans le cas particulier  $d = 1$ ,  $U = ]0, R[$  et  $f = 1$  et dans la limite  $\epsilon = 0$ , trouver explicitement la solution quand  $R \geq 1$ . (On raisonnera en utilisant l'EDP obtenue formellement à la limite  $\epsilon \downarrow 0$  à partir de celle de la question 2) et on utilisera -tout en l'expliquant- que la solution est forcément de classe  $C^1$ .) Cette solution est-elle de classe  $C^\infty$ ? Que se passe-t-il quand  $R < 1$ ?
- 6) Dans ce même cas particulier, comparer avec le problème de minimisation purement quadratique

$$\inf_{u \in H_0^1([0, R])} \int_{]0, R[} (u'(x)^2 + (u-f)^2(x)) dx,$$

avec  $f = 1$ , dont on établira l'EDP associée et qu'on résoudra explicitement.

## 2. CORRIGÉ

Etant donné un ouvert lisse et borné  $U$  de  $\mathbb{R}^d$ , on note  $H_0^1(U)$  l'espace obtenu par complétion de  $C_c^\infty(U)$  pour la norme

$$u \rightarrow \|u\|_{H^1} = \sqrt{\int_U (|\nabla u(x)|^2 + u^2(x)) dx}.$$

On considère le problème de minimisation

$$\inf_{u \in H_0^1(U)} \int_U \left( |\nabla u(x)|^2 + 4\sqrt{\epsilon^2 + (u-f)^2(x)} \right) dx,$$

où  $f$  est une fonction donnée dans  $L^\infty(U)$  et  $\epsilon \geq 0$  est fixé.

1) Ce problème admet une unique solution pour les raisons suivantes :

- a) la fonctionnelle, qu'on note  $J : u \rightarrow J(u)$  est *strictement* convexe (cela se voit directement si  $\epsilon > 0$  car  $y \in \mathbb{R} \rightarrow \sqrt{\epsilon^2 + y^2}$  est strictement convexe, ce qui n'est plus vrai quand  $\epsilon = 0$  ; dans ce dernier cas on utilise que  $u \rightarrow \|\nabla u\|_{L^2}^2$  est strictement convexe sur  $H_0^1(U)$  à cause de l'inégalité de Poincaré) ;
- b) elle est sci sur l'espace complété  $H_0^1(U)$  (alors qu'elle ne le serait pas sur  $C_c^\infty(U)$ ) ;
- c) l'infimum  $J_{opt}$  est positif ou nul (évident) et fini (Il suffit de prendre  $u = 0$  pour le voir.)
- d) Pour toute suite minimisante  $u_n$ , i.e. t.q.  $J(u_n) \downarrow J_{opt}$ , on voit que

$$\sup_n \int_U |\nabla u_n(x)|^2 < +\infty,$$

donc, par inégalité de Poincaré (cf. cours)

$$\sup_n \|u_n\|_{H^1} < +\infty,$$

et il s'ensuit qu'il existe une sous-suite, encore notée  $u_n$  qui converge faiblement dans  $H^1$  vers une limite  $u$ . Comme la fonctionnelle est convexe sci on a forcément  $J(u) \leq \liminf J(u_n)$  et donc  $J(u) = J_{opt}$  ce qui montre que  $u$  est optimale. Comme  $J$  est strictement convexe, le minimum est forcément unique.

2) En perturbant  $u$  par  $\epsilon\phi$ , où  $\phi$  est arbitrairement donnée dans  $H^1(U)$ , et en dérivant  $J(u + \epsilon\phi)$  par rapport à  $\epsilon \rightarrow 0$ , on voit que

$$\int_U 2\nabla u(x) \cdot \nabla \phi(x) + 4\phi(x) \frac{u(x) - f(x)}{\sqrt{\epsilon^2 + (u-f)^2(x)}} dx = 0,$$

ce qui est la formulation "variationnelle" de l'EDP

$$-\Delta u + 2 \frac{u-f}{\sqrt{\epsilon^2 + (u-f)^2}} = 0,$$

avec condition aux limites de "Dirichlet homogène"  $u = 0$  sur  $\partial U$ .

En revanche, le cas  $\epsilon = 0$  pose problème car l'équation limite formelle

$$-\Delta u + 2 \operatorname{signe}(u-f) = 0$$

n'est pas clairement définie.

3) Le principe du maximum montre que

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

(En effet, sans trop entrer dans les détails, en un point de maximum  $x_0$  de  $u$  on a

$$-\Delta u(x_0) \geq 0$$

et donc, en utilisant l'équation,  $(u - f)(x_0) \leq 0$ , ce qui prouve

$$u(x) \leq u(x_0) \leq f(x_0) \leq \|f\|_{L^\infty}, \quad \forall x \in U,$$

et de même pour le minimum.)

4) Pour cette question on note explicitement la dépendance par rapport à  $\epsilon \geq 0$  : la fonctionnelle est notée  $J_\epsilon$ , la valeur optimale  $J_{\epsilon, \text{opt}}$  et la solution optimale  $u_\epsilon$ . On va montrer qu'en fait  $u_0$  est bien la limite de  $u_\epsilon$  dans  $H_0^1(U)$ . Notons que, par définition, on a  $J_\epsilon \geq J_0$  et il est facile de vérifier que  $J_\epsilon(v) \downarrow J_0(v)$  pour tout  $v \in H_0^1(U)$ . On a aussi

$$J_\epsilon(u_0) \geq J_\epsilon(u_\epsilon)$$

(car  $u_\epsilon$  est optimale pour  $J_\epsilon$ )

$$\geq J_0(u_\epsilon)$$

(car  $J_\epsilon \geq J_0$ )

$$\geq J_0(u_0)$$

(car  $u_0$  est optimale pour  $J_0$ ). Comme  $J_\epsilon(u_0) \downarrow J_0(u_0)$  on en déduit que  $J_{\epsilon, \text{opt}} \rightarrow J_{0, \text{opt}}$ . D'autre part, la famille  $u_\epsilon$  est bornée dans  $H_0^1(U)$  et donc faiblement relativement compacte. Notons l'un quelconque de ses points d'accumulation par  $u$ . Comme  $J_0$  est sci on a forcément

$$J_0(u) \leq \liminf J_0(u_\epsilon).$$

Or

$$J_0(u_\epsilon) \leq J_\epsilon(u_\epsilon) = J_{\epsilon, \text{opt}} \rightarrow J_{0, \text{opt}}$$

ce qui prouve que  $u$  est optimale pour  $J_0$  et donc égale à  $u_0$  (par unicité de la solution optimale). En conséquence c'est toute la famille  $u_\epsilon$  qui converge vers  $u_0$ . Enfin, comme la norme  $L^\infty$  est sci relativement à la convergence faible de  $H_0^1(U)$  (ce dont on peut s'assurer de diverses manières), la borne

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty},$$

établie précédemment, passe à la limite et s'applique aussi à  $u_0$ .

5) Prenons le cas particulier  $d = 1$ ,  $U = ]0, R[$  et  $f = 1$ , dans la limite  $\epsilon = 0$ . Le problème de minimisation peut être abordé directement, de façon un peu heuristique. Par le principe du maximum, on a  $u(x) \leq 1$ . L'équation d'optimalité est (au moins heuristiquement car il y a problème à le justifier complètement)  $u'' = 2sg(u - f)$  et on a donc  $u'' = 2sg(u - 1)$ . On s'attend donc à ce que, ou bien  $u''(x) = -2$ , quand  $u(x) < 1$  et  $u''(x) = 0$  si  $u(x) = 1$  et, en tout état de cause  $-2 \leq u'' \leq 0$ . Ceci implique d'ailleurs que  $u$  est de classe  $C^1$  (car de dérivée seconde bornée). Comme  $u(0) = u(R) = 0$ , on s'attend, du côté gauche

près de  $x = 0$  (et on peut faire le raisonnement symétriquement à droite, près de  $x = R$ ), que

$$u(x) = -x^2 + 2\alpha x,$$

pour une certaine constante  $\alpha$ , jusqu'à ce que, éventuellement,  $u$  atteigne la valeur maximale 1 en un certain point  $x_0$ . Comme  $u$  est de classe  $C^1$ , on doit avoir

$$u'(x_0) = 0, u(x_0) = 1$$

et donc  $-2x_0 + 2\alpha = 0$ , d'où  $u(x) = -(x - x_0)^2 + x_0^2$  et  $1 = u(x_0) = x_0^2$ , d'où finalement  $\alpha = x_0 = 1$  et

$$u(x) = 1 - (x - 1)^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Par symétrie gauche-droite, ceci n'est possible que si  $R > 2$ . Finalement, la solution pressentie est obtenue par symétrie autour de  $x = R/2$ . Evidemment, il faudrait un raisonnement plus détaillé pour montrer qu'il s'agit bien de l'unique solution optimale. Si  $R < 1$ , la solution prédéterminée construire n'est plus valable. La solution est alors en fait plus simple : elle satisfait  $u < 1$ ,  $u'' = -2$  et donc tout simplement

$$u(x) = x(R - x)$$

et est alors  $C^\infty$  !

6) Si on avait minimisé la fonctionnelle entièrement quadratique

$$\inf_{u \in H_0^1([0, R])} \int_{[0, R]} (|u'(x)|^2 + (u - f)^2(x)) dx,$$

avec  $f = 1$ , la solution optimale serait obtenue en résolvant le problème linéaire

$$-u'' + u = 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

qu'on peut obtenir explicitement sous la forme

$$u(x) = \alpha \exp(x) + \beta \exp(-x) + 1$$

en ajustant les constantes  $\alpha$  et  $\beta$ . On peut alors vérifier que  $u$  est *strictement* majoré par 1. En conclusion, on voit que, dans les deux cas, la solution  $u$  est une sorte d'approximation  $H_0^1$  de la constante 1 (qui n'appartient pas à cet espace, car les conditions aux limites ne sont pas satisfaites), mais de natures différentes. Avec la minimisation  $L^2$  on a une solution de classe  $C^\infty$  alors que la minimisation  $L^1$  limite la régularité  $C^{1,1}$  (i.e.  $C^1$  avec dérivée bornée) mais "respecte" davantage la donnée  $f = 1$  puisque la solution  $u$  vaut *exactement* 1 dans le sous intervalle  $[1, R - 1]$ . Une telle propriété est très appréciée dans certaines applications au traitement d'images !

### 3. ANNEXE : CORRIGÉ DU PARTIEL

Soit  $(\omega, v)$  une solution, dans  $BC^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ , des équations d'Euler dans le plan (qu'on a vues dans le premier cours):

$$\begin{aligned} v &= v(t, x) = (\partial_2 \psi, \partial_1 \psi)(t, x_1, x_2) \\ \partial_t \omega + \nabla \cdot (\omega v) &= 0, \quad -\Delta \psi = \omega. \end{aligned}$$

On note la valeur initiale de  $\omega$  par  $\omega_0$  et

$$\kappa = \max\{\|\omega_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, \|\omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\}.$$

On veut obtenir des estimations sur  $(\omega, v)$  qui ne dépendent que de cette constante  $\kappa$ .

1) En introduisant le flot  $\xi_s^t$  (notations du cours), on a, comme dans le cours, immédiatement

$$\omega(t, x) = \omega_0(\xi_t^0(x))$$

et donc

$$|\omega(t, x)| \leq \kappa.$$

2) En utilisant la fonction de Green de  $-\Delta$  sur  $\mathbb{R}^2$ , on voit qu'il existe une constante numérique  $\alpha$  telle qu'en coordonnées polaires,

$$v(t, x) = \alpha \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} (-\sin \theta, \cos \theta) \omega(t, x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) d\theta.$$

On déduit

$$\begin{aligned} |v(t, x)| &\leq c \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} |\omega(t, x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta)| d\theta \\ &\quad + c \int_1^\infty dr \int_0^{2\pi} r |\omega(t, x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta)| d\theta \\ &\leq c \sup_x |\omega(t, x)| + c \int_{\mathbb{R}^2} |\omega(t, x)| dx \leq c\kappa. \end{aligned}$$

(On note par  $c$  n'importe quelle constante numérique.)

3) Pour  $\epsilon \in ]0, 1]$ , on introduit

$$v_\epsilon(t, x) = \alpha \int_0^\infty dr \inf(1, r^2/\epsilon^2) \int_0^{2\pi} (-\sin \theta, \cos \theta) \omega(t, x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta) d\theta.$$

On voit tout de suite que

$$|v_\epsilon(t, x) - v(t, x)| \leq c\epsilon \sup_x |\omega(t, x)| \leq c\epsilon\kappa.$$

Par ailleurs, on vérifie que

$$\begin{aligned}
|D_x v_\epsilon(t, x)| &\leq c \int_0^\epsilon dr \int_0^{2\pi} \epsilon^{-1} |\omega(t, x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta)| d\theta \\
&+ c \int_\epsilon^1 dr \int_0^{2\pi} r^{-1} |\omega(t, x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta)| d\theta \\
&+ c \int_1^\infty dr \int_0^{2\pi} r |\omega(t, x_1 + r \cos \theta, x_2 + r \sin \theta)| d\theta \\
&\leq c(1 + \log(1/\epsilon))\kappa = c \log(e/\epsilon)\kappa.
\end{aligned}$$

On a donc, pour tous  $x, y$  dans  $\mathbb{R}^2$

$$|v(t, x) - v(t, y)| \leq c(|x - y| \log(e/\epsilon) + e^{-2}\epsilon)\kappa.$$

En optimisant en  $\epsilon$  ou, plus simplement, en posant  $\epsilon = e^2 d(x, y)$ , où

$$d(x, y) = \min(e^{-2}, |x - y|),$$

on obtient

$$|v(t, x) - v(t, y)| \leq c(|x - y| \log(e^{-1}/d(x, y)) + d(x, y))\kappa \leq c|x - y| \log(1/d(x, y))\kappa.$$

4) On a, en fixant  $x$  et  $y$  avec  $x \neq y$  (ce qui garantit  $\xi_s^t(x) \neq \xi_0^t(y)$  pour tout  $t$ , car  $\xi_s^t$  est toujours une bijection de  $\mathbb{R}^2$ )

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \log(|\xi_s^t(x) - \xi_s^t(y)|) &= \frac{(v(t, \xi_s^t(x)) - v(t, \xi_s^t(y))) \cdot (\xi_s^t(x) - \xi_s^t(y))}{|\xi_s^t(x) - \xi_s^t(y)|^2} \\
&\leq c \log(1/d(\xi_s^t(x), \xi_s^t(y))) \kappa = -c \log(d(\xi_s^t(x), \xi_s^t(y))) \kappa.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{d}{dt} \log(d(\xi_s^t(x), \xi_s^t(y))) \leq -c \log(d(\xi_s^t(x), \xi_s^t(y))) \kappa,$$

d'où

$$\log(d(\xi_s^t(x), \xi_s^t(y))) \leq \log(d(x, y)) \exp(-c\kappa|t - s|),$$

et finalement

$$d(\xi_s^t(x), \xi_s^t(y)) \leq d(x, y)^{\exp(-c\kappa|t-s|)}.$$

FIMFA, DMA, ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE, FR-75005 PARIS, FRANCE

*E-mail address:* yann.brenier@ens.fr, thomas.gallouet@inria.fr