# ESSAI EDP-JANVIER 2019

YANN BRENIER, THOMAS GALLOUËT

## 1. Enoncé

Etant donné un ouvert lisse et borné $U$ de $\mathbb{R}^d$, on note $H_0^1(U)$ l'espace obtenu par complétion de $C_c^\infty(U)$ pour la norme

$$u \to ||u||_{H^1} = \sqrt{\int_U (|\nabla u(x)|^2 + u^2(x))\, dx}\ .$$

On considère le problème de minimisation

$$\inf_{u \in H_0^1(U)} J_\epsilon(u), \quad J_\epsilon(u) = \int_U \left(|\nabla u(x)|^2 + 4\sqrt{\epsilon^2 + (u-f)^2(x)}\right) dx,$$

où $f$ est une fonction donnée dans $L^\infty(U)$ et $\epsilon \geq 0$ est fixé.

1) Montrer que ce problème admet une unique solution $u_\epsilon$ pour tout $\epsilon \geq 0$.

2) Trouver l'EDP satisfaite par $u_\epsilon$ dans le cas où $\epsilon > 0$.

3) Obtenir, par le principe du maximum, quand $\epsilon > 0$, une borne $L^\infty$ sur $u_\epsilon$ ne dépendant que de $f$ mais pas de $\epsilon$.

4) Montrer que les valeurs optimales $J_{\epsilon,opt}$ convergent vers la valeur optimale $J_{0,opt}$ quand $\epsilon \downarrow 0$. En déduire que les solutions optimales $u_\epsilon$ convergent (faiblement dans $H_0^1(U)$) vers la solution optimale $u_0$ et obtenir pour $u_0$ la même borne $L^\infty$ que précédemment.

5) Dans le cas particulier $d = 1$, $U = ]0, R[$ et $f = 1$ et dans la limite $\epsilon = 0$, trouver explicitement la solution quand $R \geq 1$. (On raisonnera en utilisant l'EDP obtenue formellement à la limite $\epsilon \downarrow 0$ à partir de celle de la question 2) et on utilisera -tout en l'expliquant- que la solution est forcément de classe $C^1$.) Cette solution est elle de classe $C^\infty$? Que se passe-t'il quand $R < 1$?

6) Dans ce même cas particulier, comparer avec le problème de minimisation purement quadratique

$$\inf_{u \in H_0^1(]0,R[)} \int_{]0,R[} \left(u'(x)^2 + (u-f)^2(x)\right) dx,$$

avec $f = 1$, dont on établira l'EDP associée et qu'on résoudra explicitement.

## 2. Corrigé

Etant donné un ouvert lisse et borné $U$ de $\mathbb{R}^d$, on note $H_0^1(U)$ l'espace obtenu par complétion de $C_c^\infty(U)$ pour la norme

$$u \to ||u||_{H^1} = \sqrt{\int_U (|\nabla u(x)|^2 + u^2(x))\, dx}\ .$$

On considère le problème de minimisation

$$\inf_{u \in H_0^1(U)} \int_U \left( |\nabla u(x)|^2 + 4\sqrt{\epsilon^2 + (u-f)^2(x)} \right) dx,$$

où $f$ est une fonction donnée dans $L^\infty(U)$ et $\epsilon \geq 0$ est fixé.

1) Ce problème admet une unique solution pour les raisons suivantes (Lax-Milgram ne marche pas ici pas de forme bilinéaire) :
a) la fonctionnelle, qu'on note $J : u \to J(u)$ est *strictement* convexe (cela se voit directement si $\epsilon > 0$ car $y \in \mathbb{R} \to \sqrt{\epsilon^2 + y^2}$ est strictement convexe, ce qui n'est plus vrai quand $\epsilon = 0$ ; dans ce dernier cas on utilise que $u \to ||\nabla u||_{L^2}^2$ est strictement convexe sur $H_0^1(U)$ à cause de l'inégalité de Poincaré) : par stricte convexit de $|\cdot|^2$

$$||(1-t)\nabla u + t\nabla v||_{L^2}^2 \leq (1-t)||\nabla u||_{L^2}^2 + t||\nabla v||_{L^2}^2 - t(1-t)||\nabla u - \nabla v||_{L^2}^2$$

donc par inégalité de poincarré

$$||(1-t)\nabla u + t\nabla v||_{L^2}^2 \leq (1-t)||\nabla u||_{L^2}^2 + t||\nabla v||_{L^2}^2 - t(1-t)||u - v||_{H^1}^2$$

et $u \to ||\nabla u||_{L^2}^2$ est (uniformément) strictement convexe.

b) elle est sci sur l'espace complété $H_0^1(U)$ (alors qu'elle ne le serait pas sur $C_c^\infty(U)$) En effet
c) l'infimum $J_{opt}$ est positif ou nul (évident) et fini (Il suffit de prendre $u = 0$ pour le voir.)
d) Pour toute suite minimisante $u_n$, i.e. t.q. $J(u_n) \downarrow J_{opt}$, on voit que

$$\sup_n \int_U |\nabla u_n(x)|^2 < +\infty,$$

donc, par inégalité de Poincaré (cf. cours)

$$\sup_n ||u_n||_{H^1} < +\infty,$$

et il s'ensuit qu'il existe une sous-suite, encore notée $u_n$ qui converge faiblement dans $H_0^1$ vers une limite $u$. Comme la fonctionnelle est convexe sci fort on a forcément $J(u) \leq \liminf J(u_n)$ et donc $J(u) = J_{opt}$ (convexe sci fort donne convexe sci faible) ce qui montre que $u$ est optimale. Comme $J$ est strictement convexe, le minimum est forcément unique.

2) En perturbant $u$ par $\epsilon\phi$, où $\phi$ est arbitrairement donnée dans $H_0^1(U)$, et en dérivant $J(u + \epsilon\phi)$ par rapport à $\epsilon \to 0$, on voit que

$$\int_U 2\nabla u(x) \cdot \nabla\phi(x) + 4\phi(x) \frac{u(x) - f(x)}{\sqrt{\epsilon^2 + (u-f)^2(x)}} dx = 0,$$

ce qui est la formulation "variationnelle" de l'EDP

$$-\Delta u + 2\frac{u-f}{\sqrt{\epsilon^2+(u-f)^2}} = 0,$$

avec condition aux limites de "Dirichlet homogène" $u = 0$ sur $\partial U$.
En revanche, le cas $\epsilon = 0$ pose problème car l'équation limite formelle

$$-\Delta u + 2\ \text{signe}(u-f) = 0$$

n'est pas clairement définie.

3) Le principe du maximum montre que

$$||u||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^\infty}.$$

(En effet, sans trop entrer dans les détails, en un point de maximum $x_0$ de $u$ on a

$$-\Delta u(x_0) \geq 0$$

et donc, en utilisant l'équation, $(u-f)(x_0) \leq 0$, ce qui prouve

$$u(x) \leq u(x_0) \leq f(x_0) \leq ||f||_{L^\infty}, \quad \forall x \in U,$$

et de même pour le minimum.)

Remarque : cette méthode ne marche pas vraiment ici car la solution n'a pas de raison d'être $C^2$, la régularité de $f$ nous bloque pour utiliser la régularité elliptique. On pourrait par contre faire passer cette estimation par convolutions et passage à la limite.

On peut par contre directement faire le principe du maximum faible : on note $C = \|f\|_\infty$ et on teste la formulation variationelle contre $(u-C)^+$ qui appartient bien à $H^1_0$. En utilisant $\nabla(u-C)^+(x) = \nabla u(x)$ si $u(x) > C$ et 0 sinon on obtient

$$\int_U \frac{(u-C)^+(u-f)(x)}{\sqrt{\epsilon^2+(u-f)^2(x)}}dx = -\int_U \nabla u\cdot\nabla(u-C)^+(x) = -\int_{\{x|u(x)>C\}}(\nabla(u-C)^+)^2(x) \leq 0,$$

et donc puisque sur $\{x|u(x) > C\}$ on a également $u(x) \geq f(x)$ :

$$0 \leq \int_{\{x|u(x)>C\}} \frac{(u-C)(u-f)(x)}{\sqrt{\epsilon^2+(u-f)^2(x)}}dx \leq 0,$$

et donc la mesure de $\{x|u(x) > C\}$ est nulle soit $u \leq C$ p.p. On fait de même avec $(u+C)^-$ dont le gradient est $-\nabla u$ sur $\{x|u(x) < -C\}$. Sur cet ensemble on a aussi $u(x) < -C \leq f(x)$ donc $(u-f) \leq 0$. On en conclu que la mesure $\{x|u(x) < -C\}$ est nulle et donc $u \geq -C$ presque partout. Au final $\|u\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

4) Pour cette question on note explicitement la dépendance par rapport à $\epsilon \geq 0$ : la fonctionnelle est notée $J_\epsilon$, la valeur optimale $J_{\epsilon,opt}$ et la solution optimale $u_\epsilon$. On va montrer qu'en fait $u_0$ est bien la limite de $u_\epsilon$ dans $H^1_0(U)$. Notons que, par définition, on a $J_\epsilon \geq J_0$ et il est facile de vérifier que $J_\epsilon(v) \downarrow J_0(v)$ pour tout $v \in H^1_0(U)$ (remarque : on

a seulement besoin d'une inégalité ici et on utilise $\sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$ par exemple). On a aussi

$$J_\epsilon(u_0) \geq J_\epsilon(u_\epsilon)$$

(car $u_\epsilon$ est optimale pour $J_\epsilon$)

$$\geq J_0(u_\epsilon)$$

(car $J_\epsilon \geq J_0$)

$$\geq J_0(u_0)$$

(car $u_0$ est optimale pour $J_0$). Comme $J_\epsilon(u_0) \downarrow J_0(u_0)$ on en déduit que $J_{\epsilon,opt} \to J_{0,opt}$. D'autre part, la famille $u_\epsilon$ est bornée dans $H_0^1(U)$ et donc faiblement relativement compacte. Notons l'un quelconque de ses points d'accumulation par $u$. Comme $J_0$ est sci on a forcément

$$J_0(u) \leq \liminf J_0(u_\epsilon).$$

Or

$$J_0(u_\epsilon) \leq J_\epsilon(u_\epsilon) = J_{\epsilon,opt} \to J_{0,opt}$$

ce qui prouve que $u$ est optimale pour $J_0$ et donc égale à $u_0$ (par unicité de la solution optimale). En conséquence c'est toute la famille $u_\epsilon$ qui converge vers $u_0$. Enfin, comme la norme $L^\infty$ est sci relativement à la convergence faible de $H_0^1(U)$ (ce dont on peut s'assurer de diverses manières), la borne

$$||u_\epsilon||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^\infty},$$

établie précédemment, passe à la limite et s'applique aussi à $u_0$.

Pour la semi continuité inférieure on peut par exemple voir que la borne $L^\infty$ et la convergence faible $H_0^1(U)$ montre que $u_\epsilon$ converge faible étoile vers $u_0$ (extraction+unicité de la limite au sens des distributions) et donc Banach-Steinhauss implique $||u_0||_{L^\infty} \leq ||f||_{L^\infty}$ (une forme linéaire continue limite de formes linéaires continues est de norme inférieure à la liminf des normes). Finalement si la liminf $L^\infty$ est infini alors l'inégalité est trivialement satisfaite. La norme $L^\infty$ est donc bien sci faible sur $H_0^1(U)$.

5) Prenons le cas particulier $d = 1$, $U = ]0, R[$ et $f = 1$, dans la limite $\epsilon = 0$. Le problème de minimisation peut être abordé directement, de façon un peu heuristique. Par le principe du maximum, on a $u(x) \leq 1$. L'équation d'optimalité est (au moins heuristiquement car il y a problème à le justifier complètement) $u" = 2sg(u-f)$ et on a donc $u" = 2sg(u-1)$. On s'attend donc à ce que, ou bien $u"(x) = -2$, quand $u(x) < 1$ et $u"(x) = 0$ si $u(x) = 1$ et, en tout état de cause $-2 \leq u" \leq 0$. Ceci implique d'ailleurs que $u$ est de classe $C^1$ (car de dérivée seconde bornée). Comme $u(0) = u(R) = 0$, on s'attend, du côté gauche près de $x = 0$ (et on peut faire le raisonnement symétriquement à droite, près de $x = R$), que

$$u(x) = -x^2 + 2\alpha x,$$

pour une certaine constante $\alpha$, jusqu'à ce que, éventuellement, $u$ atteigne la valeur maximale 1 en un certain point $x_0$. Comme $u$ est de classe $C^1$, on doit avoir

$$u'(x_0) = 0, u(x_0) = 1$$

et donc $-2x_0 + 2\alpha = 0$, d'où $u(x) = -(x - x_0)^2 + x_0^2$ et $1 = u(x_0) = x_0^2$, d'où finalement $\alpha = x_0 = 1$ et

$$u(x) = 1 - (x - 1)^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Par symétrie gauche-droite, ceci n'est possible que si $R > 2$. Finalement, la solution pressentie est obtenue par symétrie autour de $x = R/2$. Evidemment, il faudrait un raisonnement plus détaillé pour montrer qu'il s'agit bien de l'unique solution optimale. Si $R < 1$, la solution prédémment construire n'est plus valable. La solution est alors en fait plus simple : elle satisfait $u < 1$, $u" = -2$ et donc tout simplement

$$u(x) = x(R - x)$$

et est alors $C^\infty$ !

6) Si on avait minimisé la fonctionnelle entièrement quadratique

$$\inf_{u \in H_0^1(]0,R[)} \int_{]0,R[} \left( |u'(x)|^2 + (u - f)^2(x) \right) dx,$$

avec $f = 1$, la solution optimale serait obtenue en résolvant le problème linéaire

$$-u" + u = 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

qu'on peut obtenir explicitement sous la forme

$$u(x) = \alpha \exp(x) + \beta \exp(-x) + 1$$

en ajustant les constantes $\alpha$ et $\beta$. On peut alors vérifier que $u$ est *strictement* majoré par 1 (c'est évident car la solution est borné par 1 et $C^\infty$). En conclusion, on voit que, dans les deux cas, la solution $u$ est une sorte d'approximation $H_0^1$ de la constante 1 (qui n'appartient pas à cet espace, car les conditions aux limites ne sont pas satisfaites), mais de natures différentes. Avec la minimisation $L^2$ on a une solution de classe $C^\infty$ alors que la minimisation $L^1$ limite la régularité $C^{1,1}$ (i.e. $C^1$ avec dérivée bornée) mais "respecte" davantage la donnée $f = 1$ puisque la solution $u$ vaut *exactement* 1 dans le sous intervalle $[1, R-1]$. Une telle propriété est très appriéciée dans certaines applications au traitement d'images !

## 3. Annexe : Corrigé du partiel

Soit $(\omega, v)$ une solution, dans $BC^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, des équations d'Euler dans le plan (qu'on a vues dans le premier cours):

$$v = v(t,x) = (\partial_2\psi, \partial_1\psi)(t, x_1, x_2)$$
$$\partial_t\omega + \nabla \cdot (\omega v) = 0, \quad -\Delta\psi = \omega.$$

On note la valeur initiale de $\omega$ par $\omega_0$ et

$$\kappa = \max\{||\omega_0||_{L^1(\mathbb{R}^2)}, ||\omega_0||_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}\}.$$

On veut obtenir des estimations sur $(\omega, v)$ qui ne dépendent que de cette constante $\kappa$.

1) En introduisant le flot $\xi_s^t$ (notations du cours), on a, comme dans le cours, immédiatement

$$\omega(t,x) = \omega_0(\xi_t^0(x))$$

et donc

$$|\omega(t,x)| \leq \kappa.$$

2) En utilisant la fonction de Green de $-\Delta$ sur $\mathbb{R}^2$, on voit qu'il existe une constante numérique $\alpha$ telle qu'en coordonnées polaires,

$$v(t,x) = \alpha \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, \cos\theta)\; \omega(t, x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta) d\theta.$$

On déduit

$$\begin{aligned} |v(t,x)| &\leq c \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \; |\omega(t, x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)| d\theta. \\ &+ c \int_1^\infty dr \int_0^{2\pi} \; r|\omega(t, x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta)| d\theta. \\ &\leq c \sup_x \; |\omega(t,x)| + c \int_{\mathbb{R}^2} |\omega(t,x)| dx \leq c\kappa. \end{aligned}$$

(On note par $c$ n'importe quelle constante numérique.)

3) Pour $\epsilon \in ]0,1]$, on introduit

$$v_\epsilon(t,x) = \alpha \int_0^\infty dr \inf(1, r^2/\epsilon^2) \int_0^{2\pi} (-\sin\theta, \cos\theta)\; \omega(t, x_1 + r\cos\theta, x_2 + r\sin\theta) d\theta.$$

On voit tout de suite que

$$|v_\epsilon(t,x) - v(t,x)| \leq c\epsilon \sup_x \; |\omega(t,x)| \leq c\epsilon\kappa.$$

Par ailleurs, on vérifie que

$$|D_x v_\epsilon(t,x)| \le c\int_0^\epsilon dr\int_0^{2\pi}\ \epsilon^{-1}|\omega(t,x_1+r\cos\theta,x_2+r\sin\theta)|d\theta$$
$$+c\int_\epsilon^1 dr\int_0^{2\pi}\ r^{-1}|\omega(t,x_1+r\cos\theta,x_2+r\sin\theta)|d\theta$$
$$+c\int_1^\infty dr\int_0^{2\pi}\ r|\omega(t,x_1+r\cos\theta,x_2+r\sin\theta)|d\theta$$
$$\le c(1+\log(1/\epsilon))\kappa = c\log(e/\epsilon)\kappa.$$

On a donc, pour tous $x, y$ dans $\mathbb{R}^2$

$$|v(t,x)-v(t,y)| \le c(|x-y|\log(e/\epsilon)+e^{-2}\epsilon)\kappa.$$

En optimisant en $\epsilon$ ou, plus simplement, en posant $\epsilon = e^2 d(x,y)$, où

$$d(x,y) = \min(e^{-2}, |x-y|),$$

on obtient

$$|v(t,x)-v(t,y)| \le c(|x-y|\log(e^{-1}/d(x,y))+d(x,y))\kappa \le c|x-y|\log(1/d(x,y))\kappa.$$

4) On a, en fixant $x$ et $y$ avec $x \neq y$ (ce qui garantit $\xi_s^t(x) \neq \xi_0^t(y)$ pour tout $t$, car $\xi_s^t$ est toujours une bijection de $\mathbb{R}^2$)

$$\frac{d}{dt}\log(|\xi_s^t(x)-\xi_s^t(y)|) = \frac{(v(t,\xi_s^t(x)-v(t,\xi_s^t(y)))\cdot(\xi_s^t(x)-\xi_s^t(y))}{|\xi_s^t(x)-\xi_s^t(y)|^2}$$
$$\le c\log\left(1/d(\xi_s^t(x),\xi_s^t(y))\right)\kappa = -c\log\left(d(\xi_s^t(x),\xi_s^t(y))\right)\kappa.$$

Donc

$$\frac{d}{dt}\log(d(\xi_s^t(x),\xi_s^t(y))) \le -c\log\left(d(\xi_s^t(x),\xi_s^t(y))\right)\kappa,$$

d'où

$$\log(d(\xi_s^t(x),\xi_s^t(y))) \le \log(d(x,y))\exp(-c\kappa|t-s|),$$

et finalement

$$d(\xi_s^t(x),\xi_s^t(y)) \le d(x,y)^{\exp(-c\kappa|t-s|)}.$$

FIMFA, DMA, Ecole Normale Supérieure, FR-75005 Paris, France
*Email address*: yann.brenier@ens.fr, thomas.gallouet@inria.fr