

電通大 2023 年度 専門科目：[選択問題]

解答作成者：glitter

最終更新日：2024 年 4 月 27 日

概要

第 7 問の「数値計算」では、ヤコビ法による解の収束性について出題された。問題に沿って解答していけば、特に複雑な変形等はいらない。

- 1 電気回路
- 2 電磁気学
- 3 確率統計
- 4 信号処理
- 5 アルゴリズムとデータ構造
- 6 計算機の基本原則

7 数値計算

(a)

$$N = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1/a_{nn} & & \end{bmatrix} = \underline{D^{-1}}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i}/a_{11} & \cdots & a_{1n}/a_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}/a_{ii} & \cdots & 0 & \cdots & a_{in}/a_{ii} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}/a_{nn} & \cdots & a_{ni}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/a_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1/a_{nn} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \underline{-D^{-1}(L+U)}$$

(b) (a) より, $N = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, $M = -\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = -\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $N \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix}$ で,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= -\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)} + \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= -\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21/8 \\ 21/8 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^{(3)} &= -\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21/8 \\ 21/8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99/32 \\ 51/16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d)

$$\|A\mathbf{x}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = \|A\| \|\mathbf{x}\|$$

(e) (a) の途中式より

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| < \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{|a_{ii}|} |a_{ii}| = 1$$

(f) $g(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + N\mathbf{b}$ とすると, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$ (条件 (i)). $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ について,

$$\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| = \|(M\mathbf{x} + N\mathbf{b}) - (M\mathbf{y} + N\mathbf{b})\| = \|M(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \leq \|M\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \text{ ((d) より)}$$

で, (e) より $0 \leq \|M\| < 1$ であるから条件 (ii), (iii) も成り立つ. よって, 定理の条件を満たすため, ヤコビ法によって $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \Leftrightarrow M\mathbf{x} + N\mathbf{b} = \mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解に収束する.

8 離散数学とオートマトン