電気通信大学院試 I 専攻
2023 年度 専門科目: [必須問題]

回答作成者: Zerr

最終更新日: 2024 年 4 月 28 日

1 線形代数

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(1)

余因子展開とサラスの公式より、

$$\begin{aligned} \det A = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)(1 \cdot -3 \cdot 6) = 9 \end{aligned}$$

(2)

$p_3 \in V$ であることは、ある $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ があって

$$\boldsymbol{p}_3 = c_1\boldsymbol{p}_1 + c_2\boldsymbol{p}_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

となることを示せばいい。これは

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & -\boldsymbol{p}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

という一次方程式系の階が存在することと同値。行列 $(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, -\boldsymbol{p}_3)$ の有限回の基本変形により、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -9 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となり

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

が得られる。以上より、$p_3 \in V$ が示された。

(3)

$$A\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3\boldsymbol{p}_1$$

$$A\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1\boldsymbol{p}_2$$

$$A\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ -2 \\ -4 \\ 21 \end{pmatrix}$$

より，$\boldsymbol{p}_1$ には $\alpha_1 = 3$ が，$\boldsymbol{p}_2$ には $\alpha_2 = -1$ が条件

$$A\boldsymbol{p}_i = \alpha_i \boldsymbol{p}_i$$

を満たす実数となる．一方、$\boldsymbol{p}_3$ は $A\boldsymbol{p}_3$ をスカラー倍で表せないため α_3 は存在しない．実際、$\mathbf{p_3}$ と $A\mathbf{p_3}$ の各成分の比を考えると、第二成分（-1）と第四成分（-21）で一致しない。

(4)

(3) より、$\alpha = -1$ である。これを固有値にもつ固有ベクトルを求める。有限回の基本変形で

$$A - \alpha I = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で得られるから、$(A - \alpha I)(x, y, z, w)^\top = \mathbf{0}$ なる方程式の解は以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{7}{3}w \\ y = \dfrac{1}{2}z \\ z = s \quad (s \in \mathbb{R}, s \neq 0) \\ w = t \quad (t \in \mathbb{R}, t \neq 0) \end{cases}$$

これより，A の $\alpha = -1$ に関する固有ベクトルで、一次独立なものとして $(0, 1, 2, 0)$、$(7, 0, 0, -3)$ が取れるため，求める固有空間の基底として

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

がとれる。

(5)

A^n があるからといって，直ぐに A^n の対角化に取り掛かると固有ベクトルの数が 1 つ足りずに詰む為注意 (1 敗)

(2) より，$\boldsymbol{p}_3 = -5\boldsymbol{p}_1 + +2\boldsymbol{p}_2$ が成り立つため

$$
\begin{aligned}
A^n\boldsymbol{p}_3 &= -5A^n\boldsymbol{p}_1 + 2A^n\boldsymbol{p}_2 \\
&= -5\alpha_1^n p_1 + 2\alpha_2^n p_2 \\
&= -5\cdot(3)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2\cdot(-1)^n \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -5\cdot(3)^n + 14\cdot(-1)^n \\ 2\cdot(-1)^n \\ 4\cdot(-1)^n \\ 5\cdot(3)^n - 6\cdot(-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる．

2 微分積分

(1)

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2 + y^2 \\
g(x,y) &= (x-y-1)^2 + (2x+y-2)^2 + 19
\end{aligned}
$$

(i)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial x} = 2(x-y-1) + 2(2x+y-2)\cdot 2 = 10x + 2y - 10 \\
&\frac{\partial g}{\partial y} = 2(x-y-1)\cdot(-1) + 2(2x+y-2) = 2x + 4x - 2 \\
&\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = 2 \\
&\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 4
\end{aligned}
$$

となるため，接平面は

$$
z - g(1,1) = 2(x-1) + 4(y-1)
$$

となる。整理して、

$$
h(x,y) = 2x + 4y + 15
$$

(ii)

曲面 $z=f(x,y)$ と平面 P の共通部分 F は以下の等式を満たす $(x,y,f(x,y))=(x,y,h(x,y))$ の集まりであるので

$$\begin{aligned} & x^2+y^2=2x+4y+15 \\ \Leftrightarrow & x^2+y^2-2x-4x-15=0 \\ \Leftrightarrow & \ (x-1)^2+(y-2)^2=20 \end{aligned} \tag{1}$$

F の最大となる z 座標は (1) の条件下での $h(x,y)$ の最大値である．

（$l:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto(x-1)^2+(y-2)^2-20$ とすると (1) は連続関数である．$\{0\}$ は $\mathbb{R}$ の閉集合なので，その逆像 $f^{-1}(\{0\})$ は $\mathbb{R}^2$ の閉集合である．(1) は有界でもあるため，(1) は有界閉集合となる.）

ユークリッド空間では「有界閉集合である $\Leftrightarrow$ コンパクト集合である」から，F はコンパクト集合であるため最大値と最小値を持つ．なのでラグランジュの未定乗数法を用いて (1) 上で最大となる点の候補を求める．まず，ラグランジュ関数 L は次のようになる．

$$L(x,y,\lambda)=2x+4y+15+\lambda\left\{(x-1)^2+(y-2)^2-20\right\}$$

各変数で偏微分を行い，この関数の極値点を求める．

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2+2\lambda(x-1)=0 \\ &\Leftrightarrow x-1=-\frac{1}{\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 4+2\lambda(y-2)=0 \\ &\Leftrightarrow y-2=-\frac{2}{\lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= (x-1)^2+(y-2)^2-20=0 \\ &\Leftrightarrow (-\frac{1}{\lambda})^2+(-\frac{2}{\lambda})^2-20=0 \\ &\Leftrightarrow 20\lambda^2=5 \\ &\Leftrightarrow \lambda=\pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\lambda=\pm\frac{1}{2}$ より，解の候補は $(x,y)=(1\pm2,2\pm4)$ (複号同順) である．$h(3,6)=45>h(-1,-2)=5$ より，z 座標が最大となる点は $(3,6,45)$ である．

(2)

(i)

$$
\begin{aligned}
I &= \int\int_D e^{y^2}dxdy, \quad D = \left\{(x,y)|y^3 \leqq x \leqq y, 0 \leqq y \leqq 1\right\} \\
&= \int_0^1 \int_{y^3}^{y} e^{y^2}dxdy \\
&= \int_0^1 ye^{y^2}dy - \int_0^1 y^2\left(ye^{y^2}\right)dy \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 - \left[y^2\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 + \int_0^1 2y\cdot\frac{1}{2}e^{y^2}dy \\
&= -\frac{1}{2} + \int_0^1 ye^{y^2}dy = \left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-2)
\end{aligned}
$$

(ii)

$$
J = \int\int_E \frac{x}{x^2+y^2}dxdy, \quad D = \left\{(x,y)|1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2x, y \geqq 0\right\}
$$

$x = rcos\theta, y = rsin\theta$とおくと，$D$ は

$D' = \{(x,y)|1 \leqq r \leqq 2cos\theta, 0 \leqq \theta \leqq \pi\}$ に全単射で移る．このとき

$$
\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} = cos\theta & \frac{\partial x}{\partial \theta} = -rsin\theta \\ \frac{\partial y}{\partial r} = sin\theta & \frac{\partial y}{\partial \theta} = rcos\theta \end{vmatrix} = r(sin^2\theta + cos^2\theta) = r
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \int_1^{2cos\theta} \frac{1}{r}cos\theta\cdot rdrd\theta \\
&= \int_0^\pi [rcos\theta]_1^{2cos\theta} d\theta \\
&= \int_0^\pi 2cos^2\theta - cos\theta d\theta \\
&= \int_0^\pi 2\left(\frac{cos2\theta+1}{2}\right) - cos\theta d\theta \\
&= \left[\frac{1}{2}sin2\theta + \theta - sin\theta\right]_0^\pi \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
L_n &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{nj+nk+n^2} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{j}{n}+\frac{k}{n}+1} \\
L &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{j}{n}+\frac{k}{n}+1} \\
&= \int_0^1\int_0^1\frac{1}{x+y+1}dxdy \\
&= \int_0^1 \left[\log|x+y+1|\right]_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \log|y+2|-\log|y+1|\,dy \\
&\quad y+2=u, dy=du,\quad y+1=v, dy=dv \\
&= \int_2^3 \log|u|\,du-\int_1^2\log|v|\,dv \\
&= \left[u\log|u|+u\right]_2^3-\left[v\log|v|+v\right]_1^2 \\
&= 3\log 3+3-(2\log 2+2)-(2\log 2+2)+1 \\
&= 3\log 3-4\log 2
\end{aligned}
$$