電通大 2023 年度 専門科目：[選択問題]

解答作成者：glitter

最終更新日：2024 年 4 月 25 日

概要

1 電気回路

2 電磁気学

3 確率統計

4 信号処理

5 アルゴリズムとデータ構造

6 計算機の基本原理

7 数値計算

(a)

$$N = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_{nn} \end{bmatrix} = \underline{D^{-1}}$$

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i}/a_{11} & \cdots & a_{1n}/a_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}/a_{ii} & \cdots & 0 & \cdots & a_{in}/a_{ii} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}/a_{nn} & \cdots & a_{ni}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \underline{-D^{-1}(L+U)} \end{aligned}$$

(b) (a) より，$N = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$，$M = -\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \underline{-\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}}$

(c) $N\begin{bmatrix} 15 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix}$ で，

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= -\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} x^{(0)} + \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} \\ x^{(2)} &= -\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21/8 \\ 21/8 \end{bmatrix} \\ x^{(3)} &= -\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21/8 \\ 21/8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99/32 \\ 51/16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d)

$$\|Ax\| = \max_{i\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}x_j| \le \max_{i\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1\le k\le n} |x_k| = \|A\|\|x\|$$

(e) (a) の途中式より

$$\|M\| = \max_{1\le 1\le n} \sum_{j=1, j\ne i}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| = \max_{1\le i\le n} \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1, j\ne i} |a_{ij}| < \max_{1\le i\le n} \frac{1}{|a_{ii}|}|a_i i| = 1$$

(f) $g(x) = Mx + Nb$ とすると，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$g(x) \in R^n$（条件 (i)）．$x, y \in \mathbb{R}^n$ について，

$$\|g(x) - g(y)\| = \|(Mx + Nb) - (My + Nb)\| = \|M(x-y)\| \le \|M\|\|x-y\| \text{ ((d) より)}$$

で，(e) より $0 \le \|M\| < 1$ であるから条件 (ii)，(iii) も成り立つ．よって，定理の条件を満たすため，ヤコビ法によって $g(x) = x \Leftrightarrow Mx + Nb = x \Leftrightarrow Ax = b$ の解に収束する．

8　離散数学とオートマトン