電通大 2023 年度 専門科目：[選択問題]

解答作成者：glitter

最終更新日：2024 年 4 月 28 日

概要

第 7 問の「数値計算」では、ヤコビ法による解の収束性について出題された。問題に沿って解答していけば、特に複雑な変形等は必要ない。

1 電気回路

2 電磁気学

3 確率統計

4 信号処理

5 アルゴリズムとデータ構造

6 計算機の基本原理

7　数値計算

(a)

$$N = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_{nn} \end{bmatrix} = \underline{D^{-1}}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & -a_{1i}/a_{11} & \cdots & -a_{1n}/a_{11} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{i1}/a_{ii} & \cdots & 0 & \cdots & -a_{in}/a_{ii} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & \cdots & -a_{ni}/a_{nn} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1/a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \underline{-D^{-1}(L+U)}$$

(b) (a) より，$N = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$, $M = -\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \underline{-\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}}$

(c) $N \begin{bmatrix} 15 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix}$ で，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= -\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)} + \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= -\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21/8 \\ 21/8 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}^{(3)} &= -\begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21/8 \\ 21/8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15/4 \\ 9/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99/32 \\ 51/16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d)

$$\|A\mathbf{x}\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} x_j| \le \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \max_{1 \le k \le n} |x_k| = \|A\| \|\mathbf{x}\|$$

(e) (a) の途中式より

$$\|M\| = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1, j \ne i}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \max_{1 \le i \le n} \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j=1, j \ne i} |a_{ij}| < \max_{1 \le i \le n} \frac{1}{|a_{ii}|} |a_{ii}| = 1$$

(f) $g(\mathbf{x}) = M\mathbf{x} + N\mathbf{b}$ とすると，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して，$g(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$（条件 (i)）．$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ について，

$$\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})\| = \|(M\mathbf{x} + N\mathbf{b}) - (M\mathbf{y} + N\mathbf{b})\| = \|M(\mathbf{x} - \mathbf{y})\| \le \|M\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \text{ ((d) より)}$$

で，(e) より $0 \le \|M\| < 1$ であるから条件 (ii)，(iii) も成り立つ．よって，定理の条件を満たすため，ヤコビ法によって $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \Leftrightarrow M\mathbf{x} + N\mathbf{b} = \mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の解に収束する．

8　離散数学とオートマトン