北京大学

高等代数 (II) 课程作业

教师: 李文威

缴交日期: 2025 年 4 月 24 日

⋆ $\boxed{\text{任选五题}}$

⋆ $\mathfrak{S}_n$ 代表 $\{1, \ldots, n\}$ 上的置换群, $\mathrm{GL}(n, F)$ 代表 $n \times n$ 可逆矩阵群.

---

1. 设 a, b 属于群 G.

(i) 证明若 ab 是有限阶元素, 则 ba 亦然, 而且两者同阶.

(ii) 举例说明当 a, b 都有限阶时, ab 未必有限阶.

2. 将对称群 $\mathfrak{S}_n$ 嵌入为 $\mathrm{GL}(n, F)$ 的子群, 其中 F 是任意域. **提示** 考虑置换矩阵.

3. 说明 $\mathfrak{S}_n$ 由 $(1\ 2)$ 和 $(1\ 2\ \cdots\ n)$ 生成.

4. 设群 $G \neq \{1\}$. 说明 G 没有非平凡真子群的必要条件是 G 同构于素数阶循环群.

5. 设 p 为素数. 证明阶数为 p^2 的有限群都是交换的.

6. 记群 G 的中心为 Z_G. 证明若 G/Z_G 是循环群, 则 G 交换.

7. 照例记四元数环为 $\mathbb{H}$. 考虑 $\mathbb{H}^\times$ 的子群 $Q_8 := \{\pm 1, \pm \mathrm{i}, \pm \mathrm{j}, \pm \mathrm{k}\}$ (共 8 个元素).

(i) 证明 Q_8 的所有子群皆正规, Q_8 非交换.

(ii) 记 Q_8 的中心为 Z. 证明 Q_8/Z 同构于 $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

(iii) 写下 Q_8 中的所有共轭类 (共五个).

8. 若 G 是有限群, p 是素数, $p^e \mid |G|$ 而 $p^{e+1} \nmid |G|$. 满足 $|P| = p^e$ 的子群 $P \subset G$ 称为 G 的 Sylow p-子群.

现在考虑有 $q := p^n$ 个元素的有限域 F, 其中 p 是素数而 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ (事实上, 有限域的元素个数总是素数幂). 设 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. 记 $U \subset \mathrm{GL}(m, F)$ 为对角线全为 1 的上三角矩阵所成子群. 证明 U 是 $\mathrm{GL}(m, F)$ 的 Sylow p-子群.

提醒: 作业请于习题课缴交给助教, 或和助教约定其它缴交时间和方式.