收敛性与一致收敛性.

记以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 的三角级数为:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(b_k \sin kx + a_k \cos kx)$$

若该级数是一致收敛的，同乘 $\sin nx$ 积分知:

$$a_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} f(x)\cos kx\, dx \quad , \quad b_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} f(x) \sin kx\, dx \quad . \qquad (*)$$

因而想级数一致收敛，$f(x)$ 必须先在 $[-\pi,\pi]$ 可积. 称 给定 $f(x)$，按 $*$ 定义系数的三角级数为傅里叶级数. 显然依定义三角级数不必为傅里叶级数.

此后令 $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx < +\infty$. 这是 a_k、b_k 存在的充分条件.

(定理1) 若 f 绝对可积，傅氏系数 $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k| = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} |b_k| = 0$

证: 由黎曼引理.

本条件结合 Abel 判别法,

(定理2) 对 $\alpha \in [0,1]$ ，若对 $\forall x,y$. $|f(x)-f(y)| < L|x-y|^{\alpha}$. 则有对系数的估计 $a_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$

证: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi-\frac{\pi}{n}}^{\pi-\frac{\pi}{n}} f(x+\tfrac{\pi}{n}) \cos(nx+\pi)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tfrac{\pi}{n}) \cos(nx+\pi)\, dx = -\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tfrac{\pi}{n}) \cos nx\, dx$$

知 $|a_n| = \frac{1}{2}|a_n + a_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f(x+\frac{\pi}{n}))\cos nx\, dx\right|$

$$< \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x) - f(x+\tfrac{\pi}{n})\right| dx$$

$$< \frac{L}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha} dx = O(\tfrac{1}{n^\alpha})$$

(命题3) 若 $f(x)$ 可导, $f'(x)$ 绝对可积, $a_n = o(\frac{1}{n})$

证: $a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\, dx = o(\tfrac{1}{n})$$

(推论) 若 $f(x)$ m 阶可导， m 阶导数可积，则 $a_n = o(\frac{1}{n^m})$

考虑一致逼近性:

(定理4) $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数,对 $\forall \varepsilon > 0$,存在三角多项式 $T_n(x)$,使得 $\sup|f(x)-T_n(x)| < \varepsilon$

证:考虑 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆 S^1,$C^0(S^1) = \{f(x): f \in C^0(\mathbb{R}),\ f(x) = f(x+2\pi)\}$

S^1 本身在 $\mathbb{R}^2$ 中是有界闭集,因而为紧集,在它上面,每一个含1的,可区分点的子代数都稠密.

利用积化合差知三角多项式是代数.对 $\forall x_1, x_2 \in S^1$,$\sin x$ 与 $\cos x$ 二者必有一个可区分这两点.

(命题5) f 为 2π 周期的连续函数.若 $a_k(f) = b_k(f) = 0$,则 $f(x) = 0$.

证:利用 Weirstrass 定理,对 $\forall \varepsilon > 0$,存在三角多项式 $T_n(x)$,$\sup|f - T_n| < \varepsilon$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(f - T_n)\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} f \cdot T_n\, dx$$

$$\leq \varepsilon \cdot 2\pi \cdot \sup|f| + 0.$$

由于 $a_n(f) = 0$,f 与任意三角多项式的积积分后都是零.

逐点收敛性

以下令 f 绝对可积，$\int_{-\pi}^{\pi}|f|\,dx < +\infty$

傅里叶系数 $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$

$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$

逐点收敛性的分析：

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0 + b_k\sin kx_0)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx + \sum_{k=1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,(\sin kx_0\sin kx + \cos kx_0\cos kx)\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-x_0)\right]dx.$$

令 $D_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$，即有：

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,D_n(x-x_0)\,dx.$$

令 $x - x_0 = t$，$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x_0+t) + f(x_0-t))\,D_n(t)\,dt$

记 $\varphi(x_0,x) = \frac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{2}$，上式记为：

$$S_n(x_0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x_0,t)\,D_n(t)\,dt$$

(引理1) Riemann 局部化引理

对 $\forall\,\delta\in(0,\pi)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n(x_0) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\varphi(x_0,t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt\right) = 0$

证：重要的观察是 $\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{x}$ 是性质良好的解析函数.

$$\text{原式} = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\delta}\varphi(x_0,t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt + \int_{\delta}^{\pi}\varphi(x_0,t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} + \int_0^{\pi}\varphi(x_0,t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}dt\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\delta}\varphi(x_0,t)\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt + \int_{\delta}^{\pi}\frac{\varphi(x_0,t)}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt\right).$$

利用 Riemann 引理，$\varphi(x_0,t)\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right)$ 在 $[0,\delta]$ 上，与 $\frac{\varphi(x_0,t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[\delta,\pi]$ 上，均可积（有限个瑕点），因而它们乘 $\sin(n+\frac{1}{2})t$ 积分，在 $n\to\infty$ 时为零.

知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(S_n(x_0) - \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta}\varphi(x_0,t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt\right) = 0$

$f(x)$（即 $\varphi(x_0,t)$）在 x_0 处傅里叶级数的收敛性，仅取决于 x_0 邻域内的函数信息.

(引理2) 设 $\varphi \in R[0,\delta]$，$\varphi(0^+)$存在，且 $\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)-\varphi(0^+)|}{t}dt < +\infty$，则，

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\delta \varphi(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt = \varphi(0^+)\cdot\frac{\pi}{2}$$

证：由Riemann引理，$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\delta \frac{\varphi(t)-\varphi(0^+)}{t}\sin\lambda t\, dt = 0$.

同时 $\lim_{\lambda\to\infty}\varphi(0^+)\int_0^\delta \frac{\sin\lambda t}{t} = \varphi(0^+)\cdot\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}dz = \frac{\pi}{2}\cdot\varphi(0^+)$

(引理1) 提示，可以通过考察 $\int_0^\delta \varphi(x_0,t)\cdot\frac{\sin\lambda t}{t}dt$ 在 $\lambda\to\infty$ 的行为判断 x_0 处傅里叶级数收敛性.

(命题3) 若 $\exists\,\alpha\in(0,1]$，使 $|f(x_0+t)-f(x_0)| \le C|t|^\alpha$，则在 $x=x_0$ 处 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛

证：此时便有 $\int_0^\delta \frac{|\varphi(t)-\varphi(0^+)|}{t}dt < +\infty$

注意(引理2)并非要求 $\varphi(0)$ 性质，而是要求 $\varphi(0^+)$. 定义左、右广义导数：

$$\begin{cases} D_+ f(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0+0)}{h} \\ D_- f(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-0)-f(x_0-h)}{h} \end{cases}$$

(推论) $D_\pm f(x_0)$ 存在，则 $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$

(命题4) (引理2) 的推广

设 $\varphi\in R[0,\delta]$，$\varphi(0^+)$存在，且 $\varphi(t)$ 单调，则，$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\delta\varphi(t)\frac{\sin\lambda t}{t}dt = \varphi(0^+)\cdot\frac{\pi}{2}$.

证：对 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta'\in(0,\delta)$，使

$$0 \le \varphi(t)-\varphi(0^+) < \varepsilon\ ,\ \forall t\in(0,\delta)$$

下说明 $\int_0^{\delta'}(\varphi(t)-\varphi(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}dt$ 小. 设 $\sup\left|\int_0^t\frac{\sin x}{x}dx\right| = M$.

$$\left|\int_0^{\delta'}(\varphi(t)-\varphi(0+))\frac{\sin\lambda t}{t}dt\right| = |\varphi(\delta')-\varphi(0+)|\cdot\left|\int_\xi^{\delta'}\frac{\sin t}{t}dt\right| < 2M\varepsilon$$

(定理5) 若 f 在 $[-\pi,\pi]$ 逐段单调 / 逐段可导，则 $\lim_{n\to\infty}S_n(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$

一致收敛性：

显然一致收敛要求连续，反之，则不成立。反例如下：

$$Q_{mn}(x) = \frac{\sin mx}{n} + \frac{\sin(m+1)x}{n-1} + \cdots + \frac{\sin(m+n-1)x}{1} - \left(\frac{\sin(m+n+1)x}{1} + \cdots + \frac{\sin(m+2n)x}{n}\right)$$

$$= 2\cos(m+n)x + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu}$$

在式中，

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu} = \int_0^x \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu t \, dt$$

$$= \int_0^x \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\right) dt$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}x}_{|\cdot| \le \frac{\pi}{2}} + \underbrace{\int_0^x \left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{t}\right)\sin(n+\tfrac{1}{2})t\,dt}_{n\to\infty \text{ 时为零}} + \underbrace{\int_0^x \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}\,dt}_{\text{有界.}}$$

即 $\exists\, c>0$，$\left|\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x}{\nu}\right| < c$；

令 $m_k = n_k = 2^{k^3}$，$a_k = \frac{1}{k^2}$，按如下定义的连续函数，其傅里叶级数，不一致收敛于它自身

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_{m_k, n_k}(x).$$

(1) 计算傅里叶系数：

$$b_m = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} Q_{m_k n_k}(x) \cdot \frac{1}{k^2}\right) \sin mx \, dx.$$

由于 Q 有一致的界，级数一致收敛：

$$b_m = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} Q_{m_k n_k}(x) \sin mx \, dx\right) \frac{1}{k^2}$$

注意

(引理1) $\int_A^B |g(x)|\,dx < +\infty$，则 $\lim_{p\to\infty} S_p = 0$. 其中：

$$S_p = \sup\{|\int_a^b g(x)\sin px\,dx| : a.b \in [A,B]\} + \sup\{|\int_a^b g(x)\sin px\,dx| : a.b \in [A,B]\}$$

证：可以取三角多项式 $f(x)$，使 $\int_A^B |f(x)-g(x)|\,dx < \varepsilon$，因为：

(i) 有瑕点的绝对可积函数，可在积分意义下被连续函数逼近、

(ii) 连续函数，可用三角多项式一致逼近、

$$\begin{aligned}\sup\{|\int_a^b g(x)\sin px\,dx| : a.b \in [A,B]\} &\le \sup\{\int_a^b |g(x)-f(x)|\,|\sin px|\,dx\} \\ &\quad + \sup\{|\int_a^b f(x)\sin px\,dx|\} \\ &\le \varepsilon + \frac{1}{p}(B-A)\sup|f(x)|.\end{aligned}$$

对 $\forall\varepsilon$，f 是固定的，有界. 因而在 $p\to\infty$ 时任意地小，知 $\lim_{p\to\infty} S_p < \varepsilon$ 可对 $\forall\varepsilon>0$ 成立.

5.21 习题课

一. Hilbert空间的基.

寻找 极大正交组. 即 $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$.

(命题1) H中有线性无关组 $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, 则可用 Gram-Schmit 正交化得到一个正交组.

即使在H无限维情况下, 也有:

(命题2) 正交投影的存在性.

$M\le H$ 为闭子空间, 存在唯一线性映射 $P: H\to M$. 使 $\forall h\in H$, $Ph\in M$, 且 $(h-Ph)$ 与M正交.

正交补有如下的性质. 给定子集 $A\subseteq H$.

$A^\perp$ 为闭子空间, $(A^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{span}(A)}$

(命题3) $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是规范正交组, $M=\overline{\mathrm{span}\{e_i\}}$, P为H到M的正交投影. 则:

$$Ph = \sum_{i=1}^n \langle h, e_i\rangle e_i .$$

(定理4) Bessel 不等式 若 $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$,则对 $\forall h\in H$:

$$\|h\|^2 \ge \sum_{i=1}^\infty \langle h, e_i\rangle^2$$

(推论) $h\in H$, $E\subseteq H$ 为规范正交组. 则 $\langle e, h\rangle$ 非零的e至多可数个.