北京大学

高等代数 (II) 课程作业 — 本次免交

教师: 李文威

讲解日期: 2025 年 5 月 8 日

- ⋆ $\boxed{\text{本次作业免交}}$
- ⋆ 对于群 G 的任意子集 S, 以 $\langle S\rangle$ 代表由 S 生成的子群.
- ⋆ 符号 $\mathrm{GL}(n,F)$ 代表域 F 上的 $n\times n$ 可逆矩阵群, $\mathrm{SL}(n,F)$ 代表行列式为 1 的矩阵构成的子群.

---

1. 说明 $\mathbb{Q}$ 作为加法群无法分解为两个非零子群的直积.

提示 设 $\mathbb{Q}$ 分解为 $A\times B$. 论证 A 和 B 不只是加法群, 还赋有 $\mathbb{Q}$-向量空间结构, 而 $\mathbb{Q}$ 作为 $\mathbb{Q}$-向量空间分解为 A 和 B 的直和.

2. 设 H 和 K 为群 G 的子群. 易见在 G 上有 $H\times K$ 的以下左作用:

$$(h,k)g := hgk^{-1}, \quad h\in H,\ k\in K,\ g\in G;$$

其轨道形如 $HgK := \{hgk : h\in H,\ k\in K\}$, 称为 (H,K) 在 G 中的双陪集.

(i) 将左陪集和右陪集解释为双陪集的特例.

(ii) 选定 $g\in G$. 说明 HgK 可以写成 $(H : gKg^{-1}\cap H)$ 个 (理解为集合的基数) 左 K-陪集的无交并. **提示** 考虑 H 在 G/K 上的左乘作用, 对之描述 $gK\in G/K$ 的稳定化子群.

(iii) 说明 HgK 也可以写成 $(K : g^{-1}Hg\cap K)$ 个右 H-陪集的无交并.

3. 如果群 G 的子群 H 对于所有自同构 $\varphi : G \xrightarrow{\sim} G$ 都满足 $\varphi(H)=H$, 则称之为特征子群.

(i) 证明特征子群总是正规子群, 特征子群的特征子群仍是特征子群.

(ii) 说明 G 的中心 Z_G 是特征子群, 而且群 G 的导出子群

$$G_{\mathrm{der}} := \left\langle aba^{-1}b^{-1} : a,b\in G\right\rangle$$

也是特征子群.

(iii) 证明 $\mathrm{GL}(n,F)_{\mathrm{der}} = \mathrm{SL}(n,F)$, 其中 F 是包含至少 3 个元素的域.

提示 对于 $n=2$ 的情形, 观察到

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (a-1)x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. 群 G 的交换化定义为 $G_{\mathrm{ab}} := G/G_{\mathrm{der}}$.

(i) 说明 G_{ab} 交换, 而且对于任何交换群 A 和同态 $f: G \to A$, 存在唯一的同态 $\overline{f}: G_{\mathrm{ab}} \to A$ 使得 f 分解为 $G \xrightarrow{\text{商}} G_{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\overline{f}} A$ 的合成.

(ii) 就 S_3, Q_8, D_{2n} 和 $\mathrm{GL}(n,F)$ 这几个例子确定其交换化, 其中 F 是任意域.

(iii) 对于群 $G = \mathrm{GL}(n,F)$, 其中 F 是含至少三个元素的域, 试将商同态 $G \to G_{\mathrm{ab}}$ 等同于行列式.

5. 设群 G 作用在集合 X 上, $|X| \geq 2$. 若对所有 $(x,y),(x',y') \in X^2$, 其中 $x \neq y$ 而 $x' \neq y'$, 皆存在 $g \in G$ 使得 $gx = x'$ 而 $gy = y'$, 则称作用为双传递的. 以下设 G 双传递地作用于 X, 并且记 $H_x := \mathrm{Stab}_G(x)$.

(i) 证明 H_x 对所有 $x \in X$ 都是 G 的极大真子群: 换言之, 包含 H_x 的子群只有 G 和 H_x 本身. **提示** 对所有 $g \in G \smallsetminus H_x$ 皆有 $G = H_x \cup H_x g H_x$.

(ii) 说明任何正规子群 $N \lhd G$ 在 X 上的作用或者平凡, 或者传递.

提示 取定 $y \neq y'$. 若存在 x 和 n 使得 $nx \neq x$, 则取 g 使得 $gx = y$ 而 $g(nx) = y'$, 按此得 $gng^{-1}y = y'$.

(iii) (岩泽健吉) 假设 G 作用忠实, $G = G_{\mathrm{der}}$, 而且存在 x 使得 H_x 有正规交换子群 U, 而 U 在 G 中的所有共轭生成 G. 证明 G 为单群.

提示 取定 $N \lhd G$ 和 x, 讨论 $NH_x = H_x$ 和 $NH_x = G$ 两种情形. 若 $NH_x = H_x$ (亦即 $N \subset H_x$) 则 N 作用必平凡. 若 $NH_x = G$ 则从 $NU \lhd NH_x = G$ 可见 $NU = G$, 由此推导 G/N 交换.

6. ($\mathrm{PSL}(2,F)$ 的单性, $|F| \geq 4$) 设 F 为域, 记 Z 为 $\mathrm{SL}(n,F)$ 的中心. 按照以下步骤证明 $n=2$ 而 $|F| \geq 4$ 时 $\mathrm{PSL}(2,F) := \mathrm{SL}(2,F)/Z$ 为单群.

(i) 说明 $|F| \geq 4$ 时 $\mathrm{SL}(2,F) = \mathrm{SL}(2,F)_{\mathrm{der}}$. **提示** 将先前证明 $\mathrm{GL}(2,F)_{\mathrm{der}} = \mathrm{SL}(2,F)$ 时取的 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 改为 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$.

(ii) 让 $\mathrm{PSL}(2,F)$ 以显然方式作用在 $\mathbb{P}^1(F) := \{F^2 \text{ 的 } 1 \text{ 维子空间}\}$ 上. 记 $(x,y) \in F^2 \smallsetminus \{\mathbf{0}\}$ 生成的子空间为 $(x:y)$. 说明这是双传递作用, 然后写下 $(1:0)$ 的稳定化子群 H.

(iii) 代入岩泽健吉的判准, 推导 $|F| \geq 4$ 时 $\mathrm{PSL}(2, F)$ 为单群.

提示 取 H 的子群 $U := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) Z \right\}$.

7. ($\mathrm{PSL}(n, F)$ 的单性, $n \geq 3$) 承上题, 设 F 为任意域. 按以下步骤证明 $n \geq 3$ 时 $\mathrm{PSL}(n, F) := \mathrm{SL}(n, F)/Z$ 为单群.

(i) 说明 $\mathrm{SL}(n, F) = \mathrm{SL}(n, F)_{\mathrm{der}}$. **提示** 以 $n = 3$ 为例, 计算 $ghg^{-1}h^{-1}$, 其中

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) 让 $\mathrm{PSL}(n, F)$ 以显然方式作用在 $\mathbb{P}^{n-1}(F) := \{F^n$ 的 1 维子空间$\}$ 上. 说明这是双传递作用, 然后写下 $(1 : 0 : \ldots : 0)$ 对应的稳定化子群 H.

(iii) 代入岩泽健吉的判准, 推导 $\mathrm{PSL}(n, F)$ 单.

提示 取 H 的子群

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1_{1\times 1} & * \\ 0 & 1_{(n-1)\times(n-1)} \end{pmatrix} Z \right\}.$$

提醒: 本次作业免交, 由助教在习题课进行讲解.