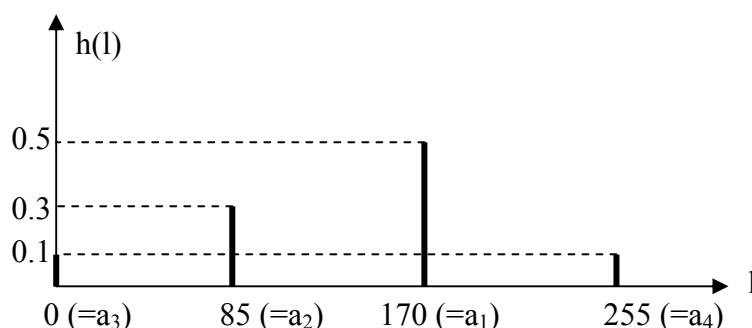


Compresia imaginilor statice

- probleme rezolvate -

1. Pentru o clasă de imagini, se aplică cuantizarea uniformă a nivelelor de gri pe 2 biți, astfel încât în orice imagine din această clasă pot fi prezente doar nivelele de gri: 0; 85; 170; 255. Probabilitățile de apariție ale celor 4 nivele de gri în imaginile din această clasă sunt date în histograma liniară normalizată a nivelelor de gri ale imaginilor din clasă din figură. Se va considera că cele 4 nivele de gri reprezintă simboluri posibile a fi emise de către o sursă S , în ordinea descrescătoare a probabilităților lor de apariție: $S=\{a_1, a_2, a_3, a_4\}=\{170, 85, 0, 255\}$. Dacă pentru un bloc de imagine $U[8 \times 4]$ din clasa menționată, prima linie din bloc este: $u(0)=[170 \ 170 \ 0 \ 0]$, să se codeze această linie ca secvență emisă de sursa S folosind codarea aritmetică.



Rezolvare:

Codarea aritmetică presupune o codare a secvenței emise de sursă printr-un singur cuvânt de cod, într-un sub-interval al intervalului probabilistic $[0;1]$. Deducerea intervalului din care se alege numărul care va coda secvența se realizează într-o procedură iterativă de mapare a simbolurilor în sub-intervale din $[0;1]$ găsite prin divizarea succesivă a sub-intervalelor folosite pentru reprezentarea simbolurilor sursei, la fiecare pas de transmisie a unui simbol.

Pasul inițial al codării presupune asignarea de intervale (sub-intervale ale lui $[0;1]$) fiecărui dintre simbolurile posibile a fi emise de sursă, în ordinea considerată pentru ele în dicționarul sursei: a_1, a_2, a_3, a_4 , astfel încât primului simbol i se alocă inițial intervalul $[0; \text{probabilitatea emisiei lui } a_1]$, celui de-al doilea simbol i se alocă inițial intervalul imediat următor, adică, $[\text{probabilitatea emisiei lui } a_1; \text{probabilitatea emisiei lui } a_1 + \text{probabilitatea emisiei lui } a_2]$, celui de-al treilea simbol i se alocă inițial intervalul următor având lățimea egală cu probabilitatea de emisie a lui a_3 , adică, $[\text{probabilitatea emisiei lui } a_1 + \text{probabilitatea emisiei lui } a_2; \text{probabilitatea emisiei lui } a_1 + \text{probabilitatea emisiei lui } a_2 + \text{probabilitatea emisiei lui } a_3]$, și în fine, celui de-al patrulea simbol i se alocă ultimul sub-interval rămas, $[\text{probabilitatea emisiei lui } a_1 + \text{probabilitatea emisiei lui } a_2 + \text{probabilitatea emisiei lui } a_3; 1]$.

Astfel, intervalele inițial alocate celor patru simboluri vor fi:

- Pentru a_1 (nivelul de gri 170): intervalul $[0;0.5]$;
- Pentru a_2 (nivelul de gri 85): intervalul $[0.5;0.5+0.3]=[0.5;0.8]$;
- Pentru a_3 (nivelul de gri 0): intervalul $[0.5+0.3;0.5+0.3+0.1]=[0.8;0.9]$;

- Pentru a_4 (nivelul de gri 255): intervalul $[0.5+0.3+0.1;1) = [0.9;1)$.

După inițializare, începe analiza secvenței de codat (secvenței emise de sursă). În cazul nostru, această secvență este vectorul $u(0) = [170 \ 170 \ 0 \ 0]$, de patru simboluri, care cu notațiile $a_1=170$, $a_2=85$, $a_3=0$ și $a_4=255$, se descrie ca secvența de simboluri emisă $[a_1 \ a_1 \ a_3 \ a_3]$, în această ordine. Atunci, la emisia simbolului a_1 , se consideră că se transmite de fapt mai departe orice număr din intervalul inițial alocat lui a_1 , adică, din $[0;0.5)$. Acest interval devine „intervalul de referință” pentru pasul următor de emisie, adică, din intervalul $[0;0.5)$, se „alocă” noi sub-intervale simbolurilor $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ale sursei, după același formalism ca la alocarea inițială, proporțional cu probabilitățile simbolurilor, ținând cont însă la alocare că valoarea minimă posibilă este limita inferioară a intervalului corespunzător primului simbol emis (în cazul nostru – 0), iar valoarea maximă posibilă este limita superioară a intervalului corespunzător primului simbol emis (în cazul nostru – 0.5).

Pentru calculul practic al intervalelor alocate simbolurilor la fiecare pas, putem nota intervalul de divizare rezultat total disponibil de la pasul anterior prin $[p_{\min}, p_{\max}) \subseteq [0;1)$, și putem spune că intervalele de alocat simbolurilor individuale sunt proporționale ca lățime cu probabilitățile de apariție ale acestor simboluri. Vom nota prin:

- $p_1=0.5$ – probabilitatea de apariție a simbolului a_1 (nivelului de gri 170);
- $p_2=0.3$ – probabilitatea de apariție a simbolului a_2 (nivelului de gri 85);
- $p_3=0.1$ – probabilitatea de apariție a simbolului a_3 (nivelului de gri 0);
- $p_4=0.1$ – probabilitatea de apariție a simbolului a_4 (nivelului de gri 255).

Atunci, lățimea fiecărui interval alocat unui simbol a_i este dată de $(p_{\max}-p_{\min}) \cdot p_i$, $i=1,2,3,4$. Observăm că în cazul inițial, $p_{\max}=1$ și $p_{\min}=0$, obținem ca și lățimi ale intervalelor alocate inițial, exact probabilitățile simbolurilor emise de sursă, iar pentru pașii următori, această ecuație ne arată doar că divizarea intervalului probabilistic curent disponibil se realizează proporțional cu probabilitățile de apariție ale simbolurilor individuale.

Intervalele alocate simbolurilor individuale sunt adiacente, iar regula de alocare este totdeauna în ordinea considerată pentru simbolurile sursei, plecând de la p_{\min} ca limită inferioară a sub-intervalului alocat lui a_1 la pasul curent, și ajungând la p_{\max} ca limită superioară a sub-intervalului alocat ultimului simbol (în cazul nostru a_4) la pasul curent. Atunci, la un pas de emisie oarecare, descris prin intervalul de divizat $[p_{\min}, p_{\max})$, avem următoarele sub-intervale pentru cele patru simboluri ale sursei:

- Pentru a_1 : intervalul $[p_{\min}; p_{\min}+(p_{\max}-p_{\min}) \cdot p_1)$;
- Pentru a_2 : intervalul $[p_{\min}+(p_{\max}-p_{\min}) \cdot p_1; p_{\min}+(p_{\max}-p_{\min}) \cdot (p_1+p_2))$;
- Pentru a_3 : intervalul $[p_{\min}+(p_{\max}-p_{\min}) \cdot (p_1+p_2); p_{\min}+(p_{\max}-p_{\min}) \cdot (p_1+p_2+p_3))$;
- Pentru a_4 : intervalul $[p_{\min}+(p_{\max}-p_{\min}) \cdot (p_1+p_2+p_3); p_{\min}+(p_{\max}-p_{\min}) \cdot (p_1+p_2+p_3+p_4))$, dar cum $p_1+p_2+p_3+p_4=1$, rezultă intervalul $[p_{\min}+(p_{\max}-p_{\min}) \cdot (p_1+p_2+p_3); p_{\max})$.

Atunci, dacă primul simbol din secvența emisă de sursă considerată este a_1 (=nivelul de gri 170), la emiterea celui de-al doilea simbol al secvenței, avem ca interval de divizare înainte de emiterea sa – intervalul $[p_{\min}, p_{\max}) = [0; 0.5)$. Sub-intervalele alocate simbolurilor a_i , $i=1,2,3,4$, la acest pas curent la care urmează să se emită al doilea simbol din secvență se calculează cu formulele de mai sus și vor fi:

- Pentru a_1 (nivelul de gri 170): intervalul $[0; 0+(0.5-0) \cdot 0.5) = [0; 0.25)$;
- Pentru a_2 (nivelul de gri 85): intervalul $[0.25; 0+(0.5-0) \cdot (0.5+0.3)) = [0.25; 0.4)$;

- Pentru a_3 (nivelul de gri 0): intervalul $[0.4; 0 + (0.5 - 0) \cdot (0.5 + 0.3 + 0.1)) = [0.4; 0.45]$;
- Pentru a_4 (nivelul de gri 255): intervalul $[0.45; (0.5 - 0) \cdot (0.5 + 0.3 + 0.1 + 0.1)) = [0.45; 0.5]$.

La acest moment de timp curent, se emite mai departe din nou simbolul a_1 , adică, se emite intervalul aferent la pasul curent lui a_1 , care conform calculelor de mai sus, este intervalul $[0; 0.25]$. Acesta devine noul interval de divizat, adică, noul interval $[p_{\min}; p_{\max}]$, din care trebuie alocate noile intervale celor patru simboluri ale sursei, folosind tot ecuațiile anterioare, dar în care înlocuim $p_{\min}=0$ și $p_{\max}=0.25$. Sub-intervalele alocate simbolurilor a_i , $i=1,2,3,4$, la acest pas curent la care urmează să se emită al treilea simbol din secvență vor fi:

- Pentru a_1 (nivelul de gri 170): intervalul $[0; 0 + (0.25 - 0) \cdot 0.5] = [0; 0.125]$;
- Pentru a_2 (nivelul de gri 85): intervalul $[0.125; 0 + (0.25 - 0) \cdot (0.5 + 0.3)) = [0.125; 0.2]$;
- Pentru a_3 (nivelul de gri 0): intervalul $[0.2; 0 + (0.25 - 0) \cdot (0.5 + 0.3 + 0.1)) = [0.2; 0.225]$;
- Pentru a_4 (nivelul de gri 255): intervalul $[0.225; 0.25]$.

Plecând de la aceste noi sub-intervale alocate, se emite în continuare al treilea simbol din secvență (a treia luminanță a liniei), adică, simbolul a_3 (a treia luminanță a liniei fiind 0). Aceasta înseamnă că selectăm ca nou sub-interval $[p_{\min}; p_{\max}]$ – sub-intervalul care a corespuns mai sus simbolului a_3 , adică, $[0.2; 0.225]$. Acesta devine noul interval de divizat, din care trebuie alocate noile intervale celor patru simboluri ale sursei, folosind ecuațiile anterioare cu $p_{\min}=0.2$ și $p_{\max}=0.225$. Sub-intervalele alocate simbolurilor a_i , $i=1,2,3,4$, la acest pas curent la care urmează să se emită al patrulea simbol din secvență vor fi:

- Pentru a_1 (nivelul de gri 170): intervalul $[0.2; 0.2 + (0.225 - 0.2) \cdot 0.5] = [0.2; 0.2125]$;
- Pentru a_2 (nivelul de gri 85): intervalul $[0.2125; 0.2 + (0.225 - 0.2) \cdot (0.5 + 0.3)) = [0.2125; 0.22]$;
- Pentru a_3 (nivelul de gri 0): intervalul $[0.22; 0.2 + (0.225 - 0.2) \cdot (0.5 + 0.3 + 0.1)) = [0.22; 0.2225]$;
- Pentru a_4 (nivelul de gri 255): intervalul $[0.2225; 0.225]$.

În fine, la ultimul pas, se emite din nou simbolul a_3 (ultima luminanță de pe linie fiind 0), ceea ce înseamnă că se emite (conform calculelor de mai sus) intervalul curent alocat lui a_3 , $[0.22; 0.2225]$. Ca urmare, **codul secvenței emise de sursă** va fi **orice număr în intervalul $[0.22; 0.2225]$** . Uzual, se alege o valoare din mijlocul intervalului (pentru o margine de zgomot cât mai bună – adică pentru insensibilitate la perturbații, astfel încât și dacă apare o perturbație asupra codului, el să rămână în același interval), și dacă este posibil, cu un număr minim de zecimale (pentru o reprezentare prin cât mai puțini biți); o valoare care satisface ambele cerințe va fi reprezentată cu 4 zecimale, iar media aritmetică a intervalului nostru este $(0.22 + 0.2225)/2 = 0.22125$, deci am putea alege 0.221 sau 0.222.

Reprezentarea grafică a algoritmului de codare aritmetică este redată în următoarea figură.

