Lab 11. Recunoaşterea obiectelor din imagini digitale monobiect, fără extragerea şi selecția trăsăturilor, folosind clasificatoare masini cu vectori suport (SVM) binare

Clasificatorul SVM binar

Notatii matematice:

- Spatiul trasaturilor: $\mathbb{R}^F$ => F = dimensiunea spatiului trasaturilor

- Date de antrenare: $X_{trn}=\{\mathbf{x}_{t,1}, \mathbf{x}_{t,2}, \ldots, \mathbf{x}_{t,Ntrn}\}$; etichetele datelor de antrenare: $Y_{trn}=\{y_{t,1}, y_{t,2}, \ldots, y_{t,Ntrn}\}$, $y_{t,i}=+1$ sau -1.

- SVM = clasificator binar capabil sa separe datele in 2 clase:

a) clasa exemplelor pozitive, etichetate cu +1, pentru o problema de clasificare data (ex.: clasa imaginilor faciale)

b) clasa exemplelor negative, etichetate cu -1, pentru problema de clasificare data = orice alt tip de date decat cele pozitive (ex.: orice alta imagine decat o imagine faciala)

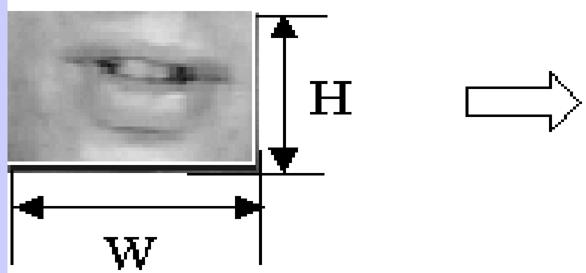
=> SVM clasifica datele in “exemple pozitive” si “exemple negative” ⇔ intr-o clasa *C* si o clasa *non-C*.

Principiul de separare a datelor in cele 2 clase in clasificatorul SVM binar:

*separarea datelor de catre un **hiperplan separator optimal** $\mathcal{H}$, care separa exemplele din cele doua clase fara eroare si cu **margine maxima** = cu distanta maxima de la cel mai apropiat exemplu pozitiv la $\mathcal{H}$ si de la cel mai apropiat exemplu negativ la $\mathcal{H}$.*

Principiul recunoasterii obiectelor cu SVM binare

1. Descrierea obiectelor intr-un spatiu al trasaturilor:



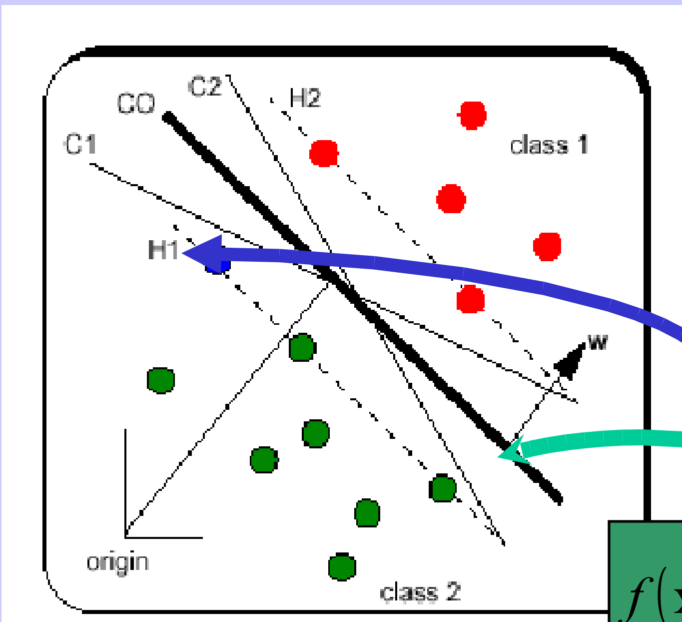
$$X = \begin{bmatrix} g(1,1) \\ g(2,1) \\ . \\ . \\ . \\ g(W-1,H) \\ g(W,H) \end{bmatrix}$$

2. Generarea fisierului de antrenare al SVM:

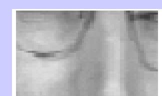
Exemple pozitive *Exemple negative*

```
+1 1:0.3686274509803921 2:0.3764705882352941 3:0.3686274509803921 4:0
139:0.2078431372549019 140:0.1686274509803921 141:0.1843137254901960
272:0.5019607843137254 273:0.4941176470588235 274:0.5019607843137254
405:0.5019607843137254 406:0.4980392156862745 407:0.4941176470588235
+1 1:0.3686274509803921 2:0.3686274509803921 3:0.3647058823529411 4:0
139:0.1960784313725490 140:0.1568627450980392 141:0.1607843137254902
272:0.5098039215686274 273:0.5019607843137254 274:0.4980392156862745
405:0.5098039215686274 406:0.5058823529411764 407:0.4980392156862745
-1 1:0.3568627450980392 2:0.3607843137254902 3:0.3725490196078431 4:0
139:0.2039215686274509 140:0.1803921568627450 141:0.2313725490196078
272:0.4980392156862745 273:0.5019607843137254 274:0.4980392156862745
405:0.5058823529411764 406:0.5058823529411764 407:0.5098039215686274
```

3. Antrenare SVM => hiperplanul separator optim:



4. Recunoasterea obiectelor necunoscute:



$$\xrightarrow{\mathbf{x}} \boxed{\text{MVS}} \xrightarrow{\mathbf{f(x)}}$$

$\mathrm{f}(\mathbf{x}) < 0 \Rightarrow$ clasa 2

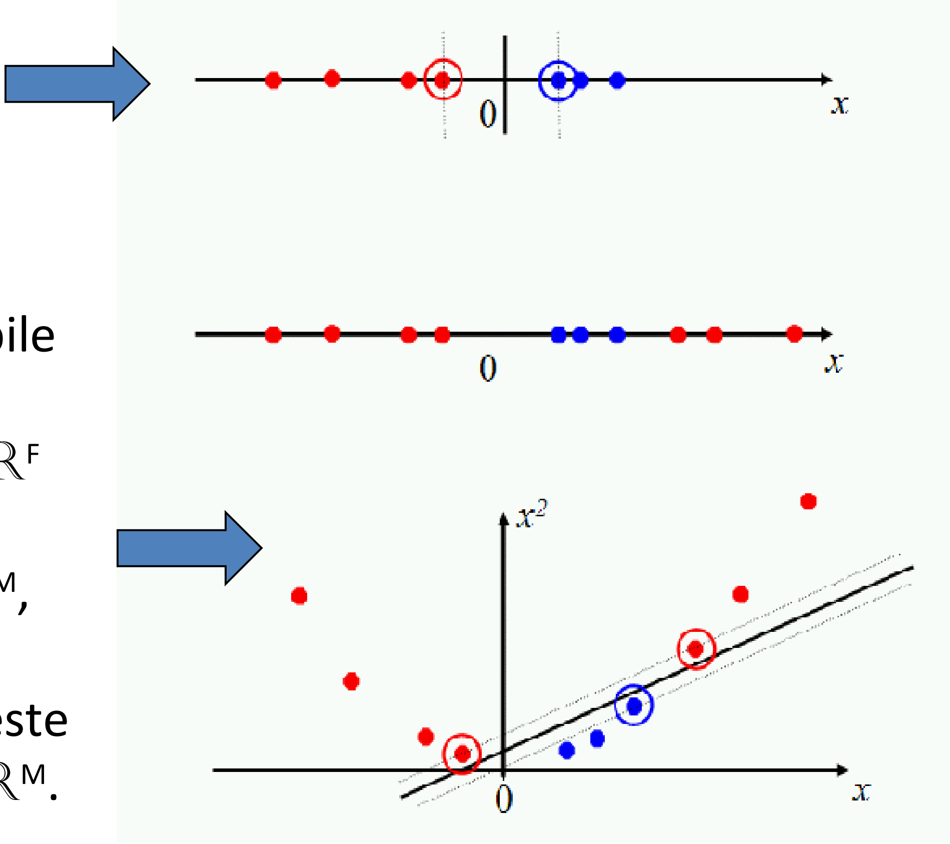
$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{L} \alpha_i y_i \cdot \mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x_i}) + b$$

Etapa de antrenare a SVM

În funcție de gradul de separabilitate al datelor de clasificat în spațiul trăsăturilor lor, putem utiliza :

- ***SVM liniare***, pt. date liniar separabile => ecuația hiperplanului separator optimal se deduce în $\mathbb{R}^F$.

- ***SVM neliniare***, pt. date neseparabile liniar în $\mathbb{R}^F$ => nu putem deduce un hiperplan care să separe datele în $\mathbb{R}^F$ =>SVM proiectează datele într-un spațiu de dimensiune mai mare, $\mathbb{R}^M$, *M*>*F*, în care datele devin liniar separabile. Hiperplanul separator este dedus în spațiul înalt dimensional $\mathbb{R}^M$.

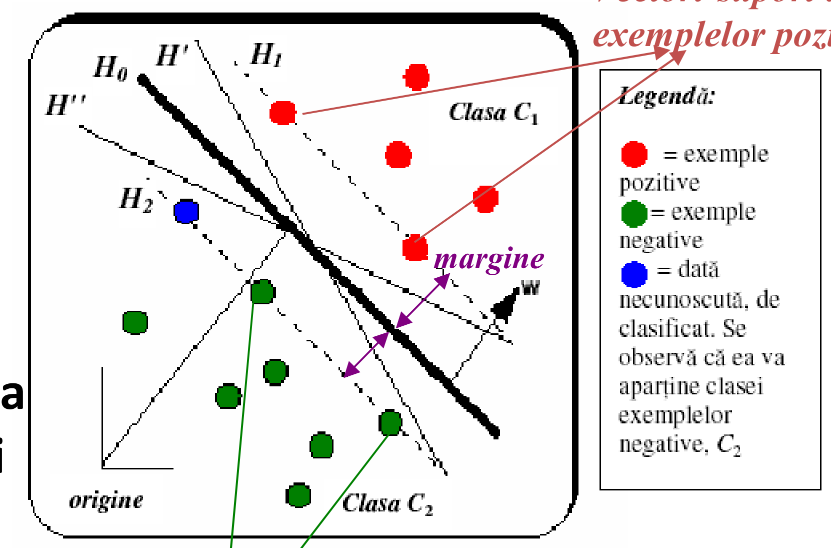


Cazul SVM liniar (1)

- Procesul de învățare al SVM = găsirea parametrilor unui hiperplan $\mathcal{H}_0$ in $\mathbb{R}^F$ care:
  - să separe perfect exemplele pozitive şi exemplele negative din X_{trn} in $\mathbb{R}^F$
  - să **maximizeze marginea** ⇔ să maximizeze distanța celui mai apropiat exemplu pozitiv şi distanța celui mai apropiat exemplu negativ la hiperplanul $\mathcal{H}_0$.

Vectori-suport din clasa exemplelor pozitive

$\mathcal{H}_0$ = hiperplanul separator optimal = “media” hiperplanelor limita definite de vectorii suport: $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$

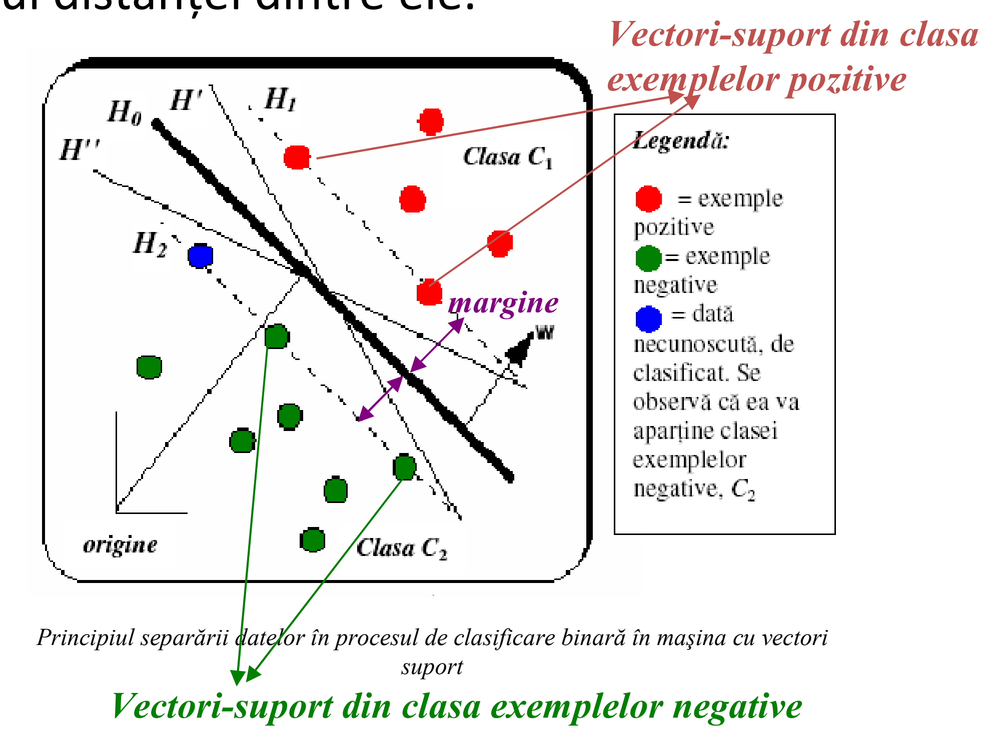


Principiul separării datelor în procesul de clasificare binară în maşina cu vectori suport

Vectori-suport din clasa exemplelor negative

Cazul SVM liniar (2)

- Este posibilă definirea mai multor hiperplane care să separe perfect datele din mulțimea de antrenare : $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}'_0$, $\mathcal{H}''_0$.
- Doar hiperplanul $\mathcal{H}_0$ dă **distanța maximă** de la cel mai apropiat exemplu pozitiv şi cel mai apropiat exemplu negativ la hiperplan => $\mathcal{H}_0$ = **hiperplan separator optimal**
- Hiperplanul separator optimal este paralel cu hiperplanele-limită $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$, fiind situat la mijlocul distanței dintre ele.



Principiul separării datelor în procesul de clasificare binară în maşina cu vectori suport

Cazul SVM liniar (3)

- $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ = hiperplanele cu proprietatea că, nici una din datele de antrenare nu cade între ele, dar există date de antrenare şi pe $\mathcal{H}_1$, şi pe $\mathcal{H}_2$.
- Datele de antrenare situate pe $\mathcal{H}_1$ si $\mathcal{H}_2$ = **vectorii suport ai SVM**.
- Vectorii support = singurele date necesare pentru definirea SVM, deoarece permit definirea univocă a $\mathcal{H}_0$:
  - Vectorii suport formați din exemple de antrenare pozitive definesc complet ecuația hiperplanului $\mathcal{H}_1$
  - Vectorii suport formați din exemple de antrenare pozitive definesc complet ecuația hiperplanului $\mathcal{H}_2$
  - Odată definite $\mathcal{H}_1$ si $\mathcal{H}_2$ prin ecuațiile lor matematice => ecuația matematică a hiperplanului separator optimal $\mathcal{H}_0$ se poate defini prin "media" ecuațiilor hiperplanelor $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$, respectiv, prin ecuația acelui hiperplan care este paralel şi cu $\mathcal{H}_1$, şi cu $\mathcal{H}_2$, şi este amplasat exact la mijlocul distanței dintre ele.
- Pentru exemplul din fig. anterioara, avem câte două exemple din fiecare clasă aflate pe hiperplanele-limită => numărul de vectori suport = 4 (2 vectori suport cu eticheta +1; 2 vectori suport cu eticheta –1).

Cazul SVM liniar (4)

- Ecuația matematică a hiperplanului $\mathcal{H}_0$ în spațiul $\mathbb{R}^F$ al datelor se exprimă ca:

$$H_0 : \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b = 0,$$

unde **w** = vectorul normal la hiperplan; *b* = termenul liber al hiperplanului.

- Suma distanțelor celui mai apropiat exemplu negativ la hiperplanul $\mathcal{H}_0$ şi a celui mai apropiat exemplu pozitiv la hiperplanul $\mathcal{H}_0$ este dată de expresia $\frac{2}{\|\mathbf{w}\|}$ şi se numeşte margine. $\|\mathbf{w}\|$ = norma Euclidiană a vectorului **w**.
- **Problema antrenării SVM** = deducerea parametrilor **w** şi *b* ai hiperplanului separator optimal $\mathcal{H}_0$ astfel încât marginea să fie maximizată, iar exemplele pozitive şi negative să respecte următoarele constrângerile ca nici unul dintre ele să nu "cadă" în interiorul marginii de separare a claselor, adică, să nu fie amplasate între hiperplanele-limită $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$:

$$\begin{cases} \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b \geq 1, & \text{pentru } y_i = +1 \\ \mathbf{w}^T \mathbf{x}_i + b \leq -1, & \text{pentru } y_i = -1 \end{cases}, \quad \forall\, i = 1,2,\ldots, N_{trn}.$$

Cazul SVM liniar (5)

- Problema de maximizare a marginii cu constrângeri de tip inecuatie se poate rezolva cu ajutorul multiplicatorilor Lagrange.
- Datele $\mathbf{x}_k$ din mulțimea de antrenare pentru care, în urma procesului de optimizare, se obțin multiplicatori Lagrange $\alpha_k = 0$ nu vor interveni în expresia matematică a funcției de decizie a clasificatorului maşină cu vectori suport.
- Celelalte date, pentru care obținem multiplicatori Lagrange nenuli, sunt importante în definirea ecuației matematice a hiperplanului $\mathcal{H}_0$, şi deci şi a funcției de decizie a clasificatorului. Aceste date de antrenare sunt exact **vectorii suport ai clasificatorului**, adică, datele din mulțimea de antrenare care definesc cele două hiperplane-limită $\mathcal{H}_1$ şi $\mathcal{H}_2$. Fie N_S = nr. vectorilor support, $N_S>0$ şi $N_S \leq N_{trn}$.
- Vectorii suport, etichetele lor, valorile multiplicatorilor lor Lagrange asociați şi valoarea termenului liber *b* al hiperplanului deduse în urma procedurii de optimizare sunt suficienți pentru a defini complet maşina cu vectori support
- Ecuația hiperplanului separator optimal $\mathcal{H}_0$ al maşinii cu vectori suport defineşte de fapt şi funcția de decizie a clasificatorului maşină cu vectori suport, în următoarea formă:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_S} \alpha_i y_i \mathbf{x}^T \mathbf{x}_i + b, \qquad \text{sau} \qquad y = f'(\mathbf{x}) = sign\left(f(\mathbf{x})\right).$$

Cazul SVM neliniar (1)

- Daca ***datele de antrenare nu sunt separabile fără eroare printr-un hiperplan în domeniul lor original*** => SVM proiectează datele din spațiul într-un spațiu Hilbert de dimensiune mai înaltă $\mathbb{R}^M$, cu *M>F*, folosind pentru proiecție o transformare neliniară Φ, $\Phi : \Re^F \to \Re^M$
- În noul spațiu, datele devin mai distanțate şi vor fi mai uşor de separat liniar => SVM construieşte în faza de antrenare hiperplanul separator optimal în noul spațiu $\mathbb{R}^M$, dat de ecuația:

$$H_0 : \mathbf{w} \cdot \Phi(\mathbf{x}) + b = 0,$$

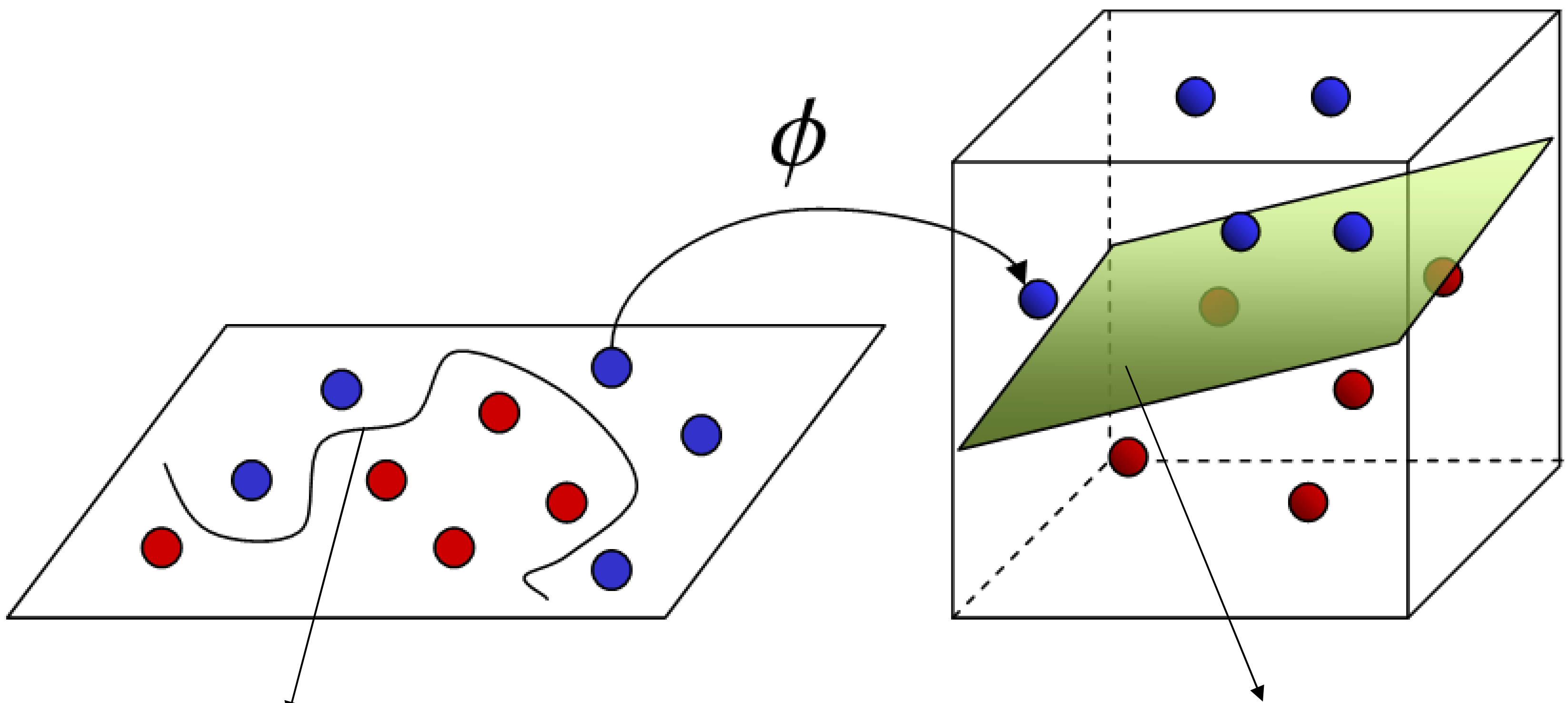
ca orice SVM liniar, dar nu in $\mathbb{R}^F$ ci in $\mathbb{R}^M$.

- Similar SVM liniar, in expresia finala a functiei de decizie f(**x**), datele intervin prin produsele lor scalare in $\mathbb{R}^M$: $\Phi(\mathbf{x}_i) \cdot \Phi(\mathbf{x}_j), \quad \forall\, i, j = 1,2,\ldots,N_{trn}$.
- În locul folosirii explicite a acestor produse şi transformării neliniare Φ, SVM folosesc funcții-kernel $K : \Re^F \times \Re^F \to \Re$, care implementeaza calculul:

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \Phi(\mathbf{x}_i) \cdot \Phi(\mathbf{x}_j), \quad \forall\, i, j = 1,2,\ldots,N_{trn}.$$

Cazul SVM neliniar (2)

Ilustrare a procesului de proiectie a datelor intr-un spatiu inalt dimensional si deducere a hiperplanului separator optimal in acest spatiu:



Proiectia hiperplanului separator optimal in $\mathbb{R}^F$; functia f(**x**)=0.

Hiperplan separator optimal in $\mathbb{R}^M$

Cazul SVM neliniar (3)

- Exemple de funcții-kernel în clasificatoarele SVM:

  – Funcția-kernel polinomială, de grad *d*, *d* – întreg pozitiv nenul:

$$K\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\right) = \left(m \cdot \mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j + n\right)^d,$$

unde: *d* = gradul polinomului; valori uzuale: 2,3,5 şi 7.

m şi *n* = parametri cu valori reale nenule, care reprezintă coeficienții expresiei polinomiale. Uzual, *m*=*n*=1.

6) Funcția-kernel exponențială (RBF)(=radial basis function):

$$K\left(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\right) = \exp\left\{-\gamma\left|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right|^2\right\},$$

unde γ reprezintă parametrul cu valori reale pozitive nenule al funcției Gaussiene.

- În urma procesului de învățare al maşinii cu vectori suport neliniare, se obține funcția de decizie (cu valori reale) a clasificatorului sub forma:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_S} \alpha_i y_i K\left(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i\right) + b,$$

Aplicatie practica

1) Se va descarca biblioteca *Matlab Support Vector Machine Toolbox* dezvoltata de catre Steve Gunn, Univ. of Southampton, de la adresa:

http://www.isis.ecs.soton.ac.uk/isystems/kernel/svm.zip

Se va dezarhiva aceasta biblioteca in directorul *Toolbox* din *Matlab*

Se va adauga (comanda Set Path) directorul acestui toolbox, cu subdirectoarele sale, la pornirea Matlab-ului

2) La linia de comanda a Matlab-ului, rulati aplicatia *uiclass*. Incarcati pe rand cele trei fisiere de date corespunzatoare problemei de clasificare a florilor de Iris. Care este diferenta intre cele 3 fisiere? Ce problema de clasificare rezolva fiecare dintre ele?

3) Analizati, pentru fiecare din cele 3 seturi de date al problemei de clasificare a florilor de Iris, performanta de clasificare a unui clasificator SVM binar liniar si a unor clasificatoare SVM binare neliniare, pentru diferite forme de functii kernel. Comentati performantele de clasificare.

4) Rulati aplicatia *ObjClassifSVM_LargeDatabase.m* si notati erorile de clasificare in setul de antrenare si in setul de test pentru problema de clasificare data. Comparati performanta de clasificare cu cea a clasificatorului LDA din lucrarea de laborator precedenta.

5) Modificati parametrii SVM astfel incat sa se minimizeze rata de eroare in setul de test (atat pentru cazul folosirii numai a luminantei, cat si a culorii) pentru problema de clasificare data.