2. Fie următoarea linie dintr-o imagine digitală pe nivele de gri:

$$\mathbf{u} = [100 \quad 110 \quad 120 \quad 128 \quad 64 \quad 64 \quad 64 \quad 64].$$

Dorim să codăm această linie de imagine (mai puţin primul pixel, u(0)=100) folosind modulaţia delta, având la dispoziţie un cuantizor pe 1 bit cu nivelele de cuantizare: {-15;15} şi funcţia de transfer:

$$\dot{e} = \begin{cases} -15, \text{daca } e < 0 \\ 15, \text{daca } e \geq 0 \end{cases}.$$

Se consideră reprezentarea valorilor de codat prin şirul de luminanţe {u(1),u(2),...,u(7)} = {110,120,..., 64}. Dacă valoarea decodată reconstruită a primului eşantion, $\dot{u}(0) = 85$, calculaţi:

a) şirul erorilor de predicţie {e(n)}, n=1,2,...,7;

b) şirul erorilor de predicţie cuantizate $\left\{\dot{e}(n)\right\}$, n=1,2,...,7;

c) linia din imagine reconstruită la decodor.

Rezolvare:

Modulaţia delta este cea mai simplă tehnică de codare DPCM, care presupune existenţa unui predictor de 1 tact şi a unui cuantizor de 1 bit.

Pentru a putea determina şirul erorilor de predicţie, al erorilor de predicţie cuantizate şi linia din imagine reconstruită la decodor, este nevoie să cunoaştem şi să urmăm paşii (ecuaţiile) algoritmului de codare şi apoi, de decodare folosiţi în modulaţia delta.

Ecuaţiile codorului prin modulaţie delta a unui şir de eşantioane (în cazul nostru, şirul este format din luminanţele liniei) sunt:

1. Predicţia valorii eşantionului următor:

$$\overline{\dot{u}(n)} = \dot{u}(n-1), \text{ n=1,2,...,7,}$$

unde prin $\overline{\dot{u}(n)}$ notăm valoarea prezisă a eşantionului n, iar prin $\dot{u}(n-1)$ – valoarea decodată (reconstruită la decodor) a eşantionului n-1.

2. Calculul erorii de predicţie:

$$e(n) = u(n) - \overline{\dot{u}(n)}, \text{ n=1,2,...,7}$$

3. Cuantizarea erorii de predicţie în vederea transmisiei sale:

$$\dot{e}(n)=\begin{cases}-15, \text{daca } e(n)<0\\ 15, \text{daca } e(n)\geq 0\end{cases}, \text{ n=1,2,...,7.}$$

Ecuaţia decodorului prin modulaţie delta a şirului de eşantioane (în cazul nostru, şirului format din luminanţele liniei) sunt:

1. Predicţia valorii eşantionului care trebuie reconstruit, pe baza eşantioanelor reconstruite anterioare:

   $$\overline{\dot{u}(n)}=\dot{u}(n-1), \text{ n=1,2,...,7,}$$

   cu aceleaşi notaţii de la pasul 1 al codorului.

2. Calculul valorii decodate (reconstruite) a eşantionului n, prin însumarea predicţiei sale cu valoarea erorii de predicţie cuantizate (singura disponibilă la decodor, deoarece valoarea dinainte de cuantizare nu este cunoscută decât la codor; ca urmare ceea ce se obţine este doar o aproximare a lui u(n) original):

   $$\dot{u}(n)=\overline{\dot{u}(n)}+\dot{e}(n), \text{ n=1,2,...,7.}$$

În enunţul problemei, se dă valoarea decodată (reconstruită) a primei luminanţe a liniei (eşantionului n=0); această valoare ne va permite să prezicem a doua luminanţă a liniei (eşantionul u(1)) şi să determinăm şi eroarea de predicţie pentru acest eşantion, e(1). Celelalte valori vor rezulta urmând paşii de codare şi decodare de mai sus, în conformitate cu calculele următoare:

1) Pentru n=1:
   - la codare:
     - prezicem $\overline{\dot{u}(1)}=\dot{u}(0)=85$;
     - calculăm eroarea de predicţie: $e(1)=u(1)-\overline{\dot{u}(1)}=110-85=25$;
     - cuantizăm eroarea de predicţie: e(1)>0 => $\dot{e}(1)=15$.
   - la decodare:
     - prezicem $\overline{\dot{u}(1)}=\dot{u}(0)=85$;
     - reconstruim $\dot{u}(1)=\overline{\dot{u}(1)}+\dot{e}(1)=85+15=100$.

2) Pentru n=2:
   - la codare:
     - prezicem $\overline{\dot{u}(2)}=\dot{u}(1)=100$;
     - calculăm eroarea de predicţie: $e(2)=u(2)-\overline{\dot{u}(2)}=120-100=20$;

        - cuantizăm eroarea de predicţie: e(2)>0 => $\dot{e}(2) = 15$.
    - la decodare:
        - prezicem $\overline{\dot{u}(2)} = \dot{u}(1) = 100$;
        - reconstruim $\dot{u}(2) = \overline{\dot{u}(2)} + \dot{e}(2) = 100 + 15 = 115$.

3) Pentru n=3:
    - la codare:
        - prezicem $\overline{\dot{u}(3)} = \dot{u}(2) = 115$;
        - calculăm eroarea de predicţie: $e(3) = u(3) - \overline{\dot{u}(3)} = 128 - 115 = 13$;
        - cuantizăm eroarea de predicţie: e(3)>0 => $\dot{e}(3) = 15$.
    - la decodare:
        - prezicem $\overline{\dot{u}(3)} = \dot{u}(2) = 115$;
        - reconstruim $\dot{u}(3) = \overline{\dot{u}(3)} + \dot{e}(3) = 115 + 15 = 130$.

4) Pentru n=4:
    - la codare:
        - prezicem $\overline{\dot{u}(4)} = \dot{u}(3) = 130$;
        - calculăm eroarea de predicţie:

          $e(4) = u(4) - \overline{\dot{u}(4)} = 64 - 130 = -66$;
        - cuantizăm eroarea de predicţie: e(4)<0 => $\dot{e}(4) = -15$.
    - la decodare:
        - prezicem $\overline{\dot{u}(4)} = \dot{u}(3) = 130$;
        - reconstruim $\dot{u}(4) = \overline{\dot{u}(4)} + \dot{e}(4) = 130 - 15 = 115$.

5) Pentru n=5:
    - la codare:
        - prezicem $\overline{\dot{u}(5)} = \dot{u}(4) = 115$;
        - calculăm eroarea de predicţie: $e(5) = u(5) - \overline{\dot{u}(5)} = 64 - 115 = -51$;
        - cuantizăm eroarea de predicţie: e(5)<0 => $\dot{e}(5) = -15$.

- la decodare:
    - prezicem $\overline{\dot{u}(5)} = \dot{u}(4) = 115$;
    - reconstruim $\dot{u}(5) = \overline{\dot{u}(5)} + \dot{e}(5) = 115 - 15 = 100$.

6) Pentru n=6:
- la codare:
    - prezicem $\overline{\dot{u}(6)} = \dot{u}(5) = 100$;
    - calculăm eroarea de predicţie: $e(6) = u(6) - \overline{\dot{u}(6)} = 64 - 100 = -36$;
    - cuantizăm eroarea de predicţie: e(6)<0 => $\dot{e}(6) = -15$.
- la decodare:
    - prezicem $\overline{\dot{u}(6)} = \dot{u}(5) = 100$;
    - reconstruim $\dot{u}(6) = \overline{\dot{u}(6)} + \dot{e}(6) = 100 - 15 = 85$.

7) Pentru n=7:
- la codare:
    - prezicem $\overline{\dot{u}(7)} = \dot{u}(6) = 85$;
    - calculăm eroarea de predicţie: $e(7) = u(7) - \overline{\dot{u}(7)} = 64 - 85 = -21$;
    - cuantizăm eroarea de predicţie: e(7)<0 => $\dot{e}(7) = -15$.
- la decodare:
    - prezicem $\overline{\dot{u}(7)} = \dot{u}(6) = 85$;
    - reconstruim $\dot{u}(7) = \overline{\dot{u}(7)} + \dot{e}(7) = 85 - 15 = 70$.

Ca şi rezultat al calculelor, avem disponibile direct rezultatele cerute prin enunţul problemei:

a) şirul erorilor de predicţie {e(n)}, n=1,2,...,7:

e(1)=25; e(2)=20; e(3)=13; e(4)=-66; e(5)=-51; e(6)=-36; e(7)=-21

=> şirul {25, 20, 13, -66, -51, -36, -21}.

b) şirul erorilor de predicţie cuantizate $\left\{ \dot{e}(n) \right\}$, n=1,2,...,7:

$\dot{e}(1) = 15$; $\dot{e}(2) = 15$; $\dot{e}(3) = 15$; $\dot{e}(4) = -15$; $\dot{e}(5) = -15$; $\dot{e}(6) = -15$; $\dot{e}(7) = -15$.

=> şirul {15, 15, 15, -15 -15, -15, -15}.

c) linia din imagine reconstruită la decodor:

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}(0) & \dot{u}(1) & \dot{u}(2) & \dot{u}(3) & \dot{u}(4) & \dot{u}(5) & \dot{u}(6) & \dot{u}(7) \end{bmatrix}.$$

Înlocuind cu valorile refăcute la decodor ale eşantioanelor, obţinem:

$$\dot{\mathbf{u}} = [85 \quad 100 \quad 115 \quad 130 \quad 115 \quad 100 \quad 85 \quad 70].$$

Observăm că linia refăcută la decodor diferă faţă de cea din imaginea originală (ale cărei luminanţe erau: $\mathbf{u} = [100 \quad 110 \quad 120 \quad 128 \quad 64 \quad 64 \quad 64 \quad 64]$.). În principal, erorile se datorează cuantizorului de 1 bit specific modulaţiei delta, care face imposibilă urmărirea variaţiilor mari în semnal, cum este în principal scăderea bruscă a luminanţei de la 128 la 64. Soluţia pentru reducerea erorii ar reprezenta-o o codare DPCM 1-D cu mai mulţi biţi pentru cuantizarea erorii.