

ВОПРОС 4.5 НИР

При движении в полях $U = \frac{\alpha}{r}$ (ньютоновские поля тяготения и кулоновские электростатические поля) с любым знаком α имеется интеграл движения, специфический именно для этого поля. Легко проверить, непосредственным вычислением, что величина

$$[\mathbf{v}\mathbf{M}] + \frac{\alpha\mathbf{r}}{r} = \text{const}(1).$$

Действительно, её полная производная по времени равна

$$[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{M}] + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha\mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{r})}{r^3},$$

или, подставив $\mathbf{M} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}]$:

$$m\mathbf{r}(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}}) - m\mathbf{v}(\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}) + \frac{\alpha\mathbf{v}}{r} - \frac{\alpha\mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{r})}{r^3};$$

положив здесь согласно уравнениям движения $m\dot{\mathbf{v}} = \frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3}$, мы найдём, что это выражение обращается в нуль. Сохраняющийся вектор (1) направлен вдоль большой оси от фокуса к перигелию, а по величине равен αe , где e - эксцентриситет орбиты.