3.3

Уравнения движения и лагранжиан электромагнитного поля.

Свойства поля характеризуются 4-потенциалом A_i в кажоый точке пространства-времени. Он определен с точностью до $\frac{\delta f}{\delta x^i}$, где f – произвольная функйия от координат и времени. Привычные нам величины – векторы электрического и магнитных полей выражаются через тензор электромагнитного поля:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix},$$

где тензор электромагнитного поля определяется через 4-потенциал, как:

$$\mathrm{F}_{\mu\nu} = \frac{\delta A_\nu}{\delta x^\mu} - \frac{\delta A_\mu}{\delta x^\nu}.$$

Лагранжиан электромагнитного поля равен:

$$L_{em} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{c} j_\mu A_\mu.$$

Уравнения движения электромагнитного поля (которые, кстати, выводятся из Лагранжиана) известны под названием "уравнения Максвелла и представляют из себя систему из 4 уравнений, описывающих эволюцию электромагнитного поля со временем (в си):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \end{cases}$$