

Задача

Условие

Прямые OA , OB , OC взаимно перпендикулярны. Проведена прямая OX . Установите зависимость между углами, которые (OX) образует со своими проекциями на плоскости AOB , BOC , AOC .

Решение

Пусть эти углы α_1 , α_2 и α_3 . Узнаем проекции OX на плоскости:

$$OP_{AB} = OX \cos \alpha_1;$$

$$OP_{BC} = OX \cos \alpha_2;$$

$$OP_{AC} = OX \cos \alpha_3.$$

Из теорем Пифагора для плоскостей:

$$OP_{AB}^2 = OP_A^2 + OP_B^2;$$

$$OP_{BC}^2 = OP_B^2 + OP_C^2;$$

$$OP_{AC}^2 = OP_A^2 + OP_C^2.$$

Значит, $OP_{AB}^2 + OP_{AB}^2 + OP_{AB}^2 = 2(OP_A^2 + OP_B^2 + OP_C^2) = 2OX^2$. Если сократить на OX^2 , то получим

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 2 \quad (1)$$

