

# Задача

## Условие

Прямые  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  взаимно перпендикулярны. Проведена прямая  $OX$ . Установите зависимость между углами, которые  $(OX)$  образует со своими проекциями на плоскости  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $AOC$ .

## Решение

Пусть эти углы  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и  $\alpha_3$ . Узнаем проекции  $OX$  на плоскости:

$$OP_{AB} = OX \cos \alpha_1;$$

$$OP_{BC} = OX \cos \alpha_2;$$

$$OP_{AC} = OX \cos \alpha_3.$$

Из теорем Пифагора для плоскостей:

$$OP_{AB}^2 = OP_A^2 + OP_B^2;$$

$$OP_{BC}^2 = OP_B^2 + OP_C^2;$$

$$OP_{AC}^2 = OP_A^2 + OP_C^2.$$

Значит,  $OP_{AB}^2 + OP_{AB}^2 + OP_{AB}^2 = 2(OP_A^2 + OP_B^2 + OP_C^2) = 2OX^2$ . Если сократить на  $OX^2$ , то получим

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 2 \quad (1)$$

