

Задача

Условие

Прямые OA , OB , OC взаимно перпендикулярны. Прямая OX составляет с ними углы φ_1 , φ_2 и φ_3 соответственно. Докажите, что $\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1$.

Решение

Пусть P_A , P_B , P_C – проекции точки X на прямые OA , OB и OC соответственно. Тогда

$$OP_A = OX \cos \varphi_1;$$

$$OP_B = OX \cos \varphi_2;$$

$$OP_C = OX \cos \varphi_3.$$

Причем из теоремы Пифагора для пространства следует, что

$$OP_A^2 + OP_B^2 + OP_C^2 = OX^2. \quad (1)$$

А значит, что

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1. \quad (2)$$

