

Задача

Условие

Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – куб. Докажите, что диагональ $A_1 C$ и плоскость ABD_1 взаимно перпендикулярны.

Решение

Если сделать поворот относительно оси $A_1 C$ на $\pi/3$, то картина переходит сама в себя. Это значит, что $AB_1 D_1$ – правильный треугольник. Как следствие точка H (пересечение AC с $AB_1 D_1$) переходит сама в себя. А в правильном треугольнике при ненулевом повороте (на $2\pi n$) в себя переходит только его центр. А значит, что H – центр основания правильного тетраэдра $A_1 AB_1 D$. Из этого следует, что H – проекция его вершины, что равносильно $A_1 C \perp ABD_1$.

