Задача

Условие

Угол между двумя зеркалами равен φ. Луч всета падает на одно из них так, что он образует с ним угол φ_1. Отразившись в зеркалах два раза, он образует с другим зеркалом угол φ_2. Можно ли узнать, какой угол состовляют падающий и отраженный лучи?

Векторное Решение

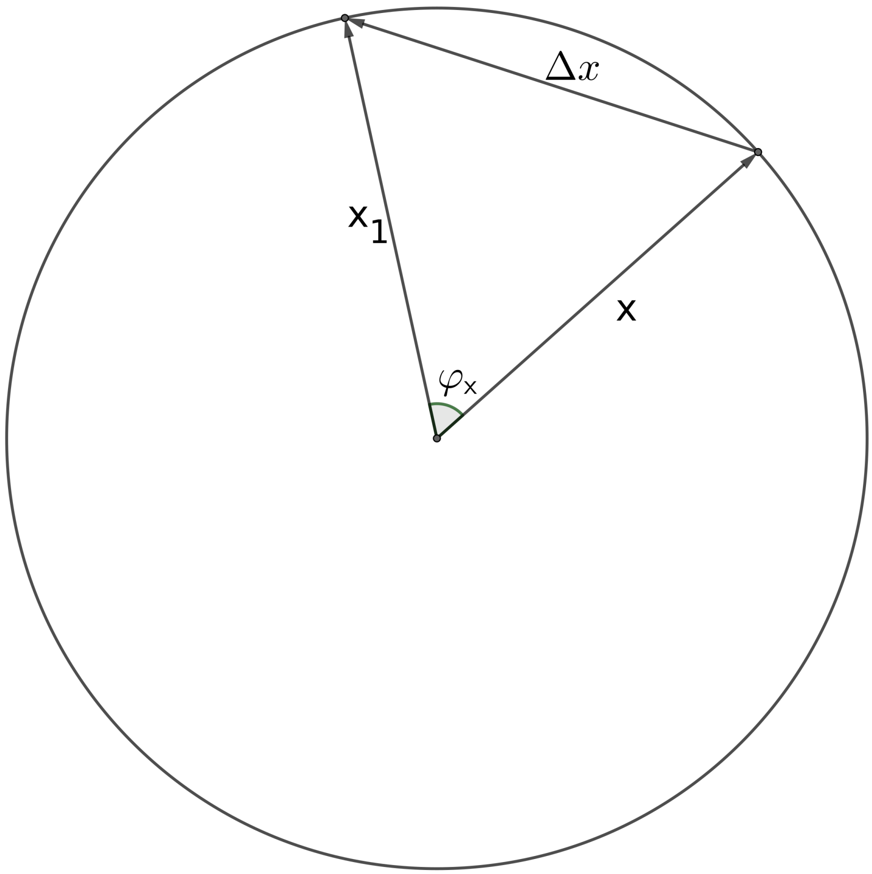
Пусть e_1 и e_2 – векторы нормалей двух зеркал, а x – единичный вектор, сонаправленный с падающим лучом. Введем оператор R_i над векторами.

$$R_i r = r - 2e_i(re_i)$$

Если луч с сонаправленным единичным вектором r падает на плоскость i, то он отражается с новым сонаправленным вектором $R_i r$, поскольку (re_i) – перпендикулярная зеркалу составляющая r, которая должна изменить знак. Теперь найдем Луч, отразившийся от двух зеркал с сонаправленным вектором x_1.

$$x_1 = R_2(R_1x) = (R_1x) - 2e_i((R_1x)e_i) = (x - 2e_i(xe_i)) - 2e_i((x - 2e_i(xe_i))e_i) =$$
$$x - (2e_1x)e_1 + (4(e_1e_2)(xe_1) - 2(e_2x))e_2$$

Нам надо найти угол между x и x_1. Заметим, что по построению $|x| = |x_1| = 1$.



Тогда, если $\Delta x = x_1 - x$, то $2sin(\varphi_x/2) = |\Delta x|/|x| = |\Delta x|$,
где φ_x – угол между лучами.

Теперь выразим все скалярные величины через известные углы.

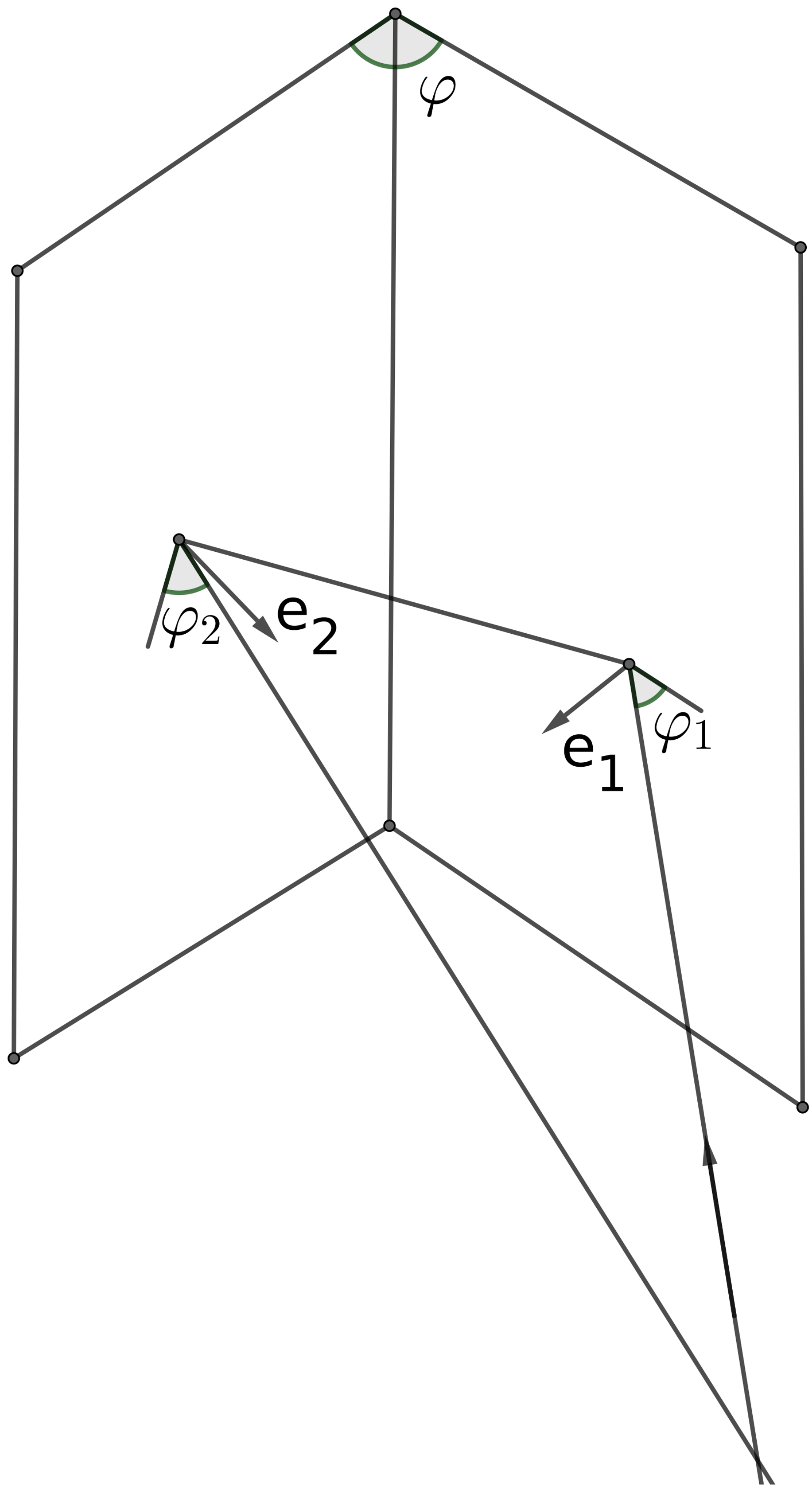
$xe_1 = sin(\varphi_1)$
$x_1e_2 = sin(\varphi_2)$
$e_1e_2 = cos(\varphi)$
$\Delta x = (4(e_1e_2)(xe_1) - 2(e_2x))e_2 - (2xe_1)e_1 = (4cos(\varphi)sin(\varphi_1) - 2e_2x)e_2 - 2sin(\varphi_1)e_1$
$sin(\varphi_2) = x_1e_2 = 4cos(\varphi)sin(\varphi_1) - 2e_2x + e_2x = 4cos(\varphi)sin(\varphi_1) - e_2x$
$\Delta x = (2sin(\varphi_2) - 4cos(\varphi)sin(\varphi_1))e_2 - 2sin(\varphi_1)e_1$

Осталось только найти модуль Δx.

$$(\Delta x/2)^2 = 8cos^2(\varphi)sin^2(\varphi_1) - 6cos(\varphi)sin(\varphi_1)sin(\varphi_2) + sin^2(\varphi_1) + sin^2(\varphi_2)$$

То есть,

$$\varphi_x = 2asin(\sqrt{8cos^2(\varphi)sin^2(\varphi_1) - 6cos(\varphi)sin(\varphi_1)sin(\varphi_2) + sin^2(\varphi_1) + sin^2(\varphi_2)})$$



φ
φ_2
e_2
e_1
φ_1