

מעבדה 1 - תנועת אלקטרון בשדה מגנטי וחשמלי

דור קליינשטיין (204881692), גל רעיוני (305653487)

28 במרץ 2016

galra@campus.technion.ac.il, dore@campus.technion.ac.il

28 במרץ 2016

מטרת הניסוי

אימות מודלים תיאורטיים אודות תנועת אלקטרון בשדה חשמלי והגורמים הרלוונטיים לאיפיון תנועה זו, תנועת אלקטרון בשדה מגנטי והגורמים הרלוונטיים לתנועה זו, והערכת היחס $\frac{m}{e}$ עבור האלקטרון מתוך התוצאות.

מבוא

שדה חשמלי

משוואת התנועה של אלקטרון בשדה חשמלי היא

$$\ddot{y} = \frac{eE}{m} \quad (1)$$

והפתרון שלה הוא

$$y = \frac{eEt^2}{2m} \quad (2)$$

ההעתק האנכי a של האלקטרון בעת הגעתו לקצה הלוחות הוא:

$$a = \frac{eEl^2}{2mv_z^2}$$

ומכאן שהעתקו בעת פגיעתו במסך נתון ע"י:

$$\begin{aligned} E &= \frac{V_d}{d} \\ \frac{1}{2}mv_z^2 &= eV_A \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} v_{y,f} &= \frac{eEl^2}{mv_z^2} \\ D &= a + \frac{L}{v_z}v_y = \frac{eEl(L + \frac{l}{2})}{mv_z^2} \\ D &= \frac{1}{2} \frac{l(L + \frac{1}{2}l)}{d} \cdot \frac{V_d}{V_A} \end{aligned} \quad (4)$$

$$D = \alpha \frac{V_d}{V_A} \quad (5)$$

כלומר, ההסחה תלויה במאפיינים הגיאומטריים של המערכת, וביחס המתחים בלבד. הנחות המודל: $d \ll l$ - על כן נוכל להתייחס לשדה החשמלי שבין הלוחות כאל שדה אחיד (כשל לוח אינסופי), ולהניח שהוא מתאפס מחוץ ללוחות. כמו כן, אנו מניחים כי בשפופרת ואקום מושלם, ועל כן מסלול האלקטרונים לא מופרע ע"י חלקיקי אוויר.

שדה מגנטי

תנועה ניצבת לשדה המגנטי

עבור אלקטרון הנע במהירות $\vec{v} = v_1 \hat{y}$, מתקבלת משוואת התנועה הבאה:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{v_1}{\omega}(1 - \cos \omega t) \\ y &= \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t \\ z &= 0 \\ \omega &= \frac{eB}{m} \end{aligned} \quad (6)$$

מכאן עבור $(x, y) = (a, b)$:

$$a = -\frac{v_1}{\omega} + \sqrt{\left(\frac{v_1}{\omega}\right)^2 - b^2} \approx -\frac{b^2 \omega}{2v_1} \quad (7)$$

בשילוב עם משוואה 3 (כאן $v_z = v_y$) נקבל:

$$a = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{B}{\sqrt{2V_A}} \cdot b^2 \quad (8)$$

תוצאה זאת מאפשרת לנו להעריך את הגודל $\sqrt{\frac{e}{m}}$ עבור האלקטרון, מתוך הגדלים הנמדדים.

הנחות המודל: $b^2 \ll \left(\frac{v_1}{\omega}\right)^2$ וכך אנו מצדיקים את הקירוב במשוואה 7. B קבוע לאורך המסלול (הנחה זו אינה נכונה אלא בקירוב, שכן את B אנו מחשבים/מודדים רק על ציר הסימטריה של הסליל), ומתאפס מחוץ לסליל.

תנועה במקביל לשדה המגנטי

עבור אלקטרון שנכנס לשדה המגנטי במהירות $\vec{v} = v_1 \hat{y} + v_z \hat{z}$ מתקבל:

$$\begin{aligned}x &= -\frac{v_1}{\omega}(1 - \cos \omega t) \\y &= \frac{v_1}{\omega} \sin \omega t \\z &= v_z t\end{aligned}$$

וקיבלנו תנועה הלית, כאשר ההיטל על מישור $x - y$ הינו מעגל. פיתוח קצר מביא לתוצאות הבאות:

$$\frac{x}{y} = -\tan \phi \quad (9)$$

$$\phi = \sqrt{\frac{e}{m}} \cdot \frac{LB}{2\sqrt{2V_A}} = \alpha \cdot \frac{B}{\sqrt{V_A}} \quad (10)$$

ובמערכת קואורדינטות פולרית

$$r = r_0 \frac{\sin \phi}{\phi} \quad (11)$$

$$r_0 = L \frac{v_1}{v_z} \quad (12)$$

$$\phi = r_0 \frac{\sin \phi}{\phi} \quad (13)$$

הנחות המודל: B קבוע, ומתאפס מחוץ לסליל (בדומה למודל הקודם. גם כאן ההנחה לא מדוייקת, וניתן לראות זאת אף בערכים הנמדדים).
חישוב שדה מגנטי על ציר הסימטריה של סליל חשמלי מתבצע ע"י

$$\frac{B(z)}{B_0} = \frac{F(h-z) + F(h+z)}{2(R' - R)} \quad (14)$$

$$F(x) = x \cdot \ln \frac{R' + \sqrt{R'^2 + x^2}}{R + \sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$B_0 = \mu_0 n i$$

כללי

חישובי שגיאה נעשו כלהלן:

$$df(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \delta x_i \right)^2} \quad (15)$$

השוואה בין גדלים a, b נעשתה כלהלן:

$$\eta = \frac{|a - b|}{\sqrt{\delta a^2 + \delta b^2}}$$

מהלך הניסוי

שדה חשמלי

המערכת הורכבה משני חלקים עיקריים: קתודה שמחוממת בעזרת מוליך חשמלי, ופולטת אלקטרונים במהירות הפרופ' למתח שבו הוחזק המוליך; וזוג לוחות קבל עם מטען חשמלי היוצר שדה מגנטי וגורם לסטייה של האלקטרון. המודל שלנו ניבא תלות בין ההסחה למבנה הגיאומטרי של המערכת וביחס של מתח ההסחה לבין מתח ההאצה. כדי לבדוק האם באמת ההסחה תלויה רק ביחס של המתחים ולא באחד מהם, עשינו 2 ניסויים. בראשון מתח ההסטה היה $5.987[V]$, ושינינו את מתח ההאצה ובניסוי השני מתח ההאצה היה $2151[V]$, ושינינו את מתח ההסחה ומדדנו את גודל ההסטה בכל ניסוי.

שדה מגנטי

בחלק זה הוספנו סלילים משני צידי המערכת הקודמת שתיארנו, וסליל אחד לאורך ה-tube. על מנת ליצור שדה מגנטי בתוכה. לאחר מכן בדקנו את ההסחה כשהאלטרון יוצא בניצב לשדה המגנטי (כאשר בשני הסלילים הצידיים עובר זרם) ומדדנו ההסחה עבור מתח ראשון בגודל $1083[V]$ ומתח שני של $1616[V]$. בחלקו השני של הניסוי בדקנו את ההסחה מציר איקס והסחה מציר ווי כשהאלטרון לא נכנס לשדה המגנטי ניצב אליה, אלא בזווית כלשהי. תנועה כזאת היא תנועה הלית ומדדנו אותה על ידי כך שהשארנו מתח קבוע של $1616[V]$ ושינינו את הזרם.

תוצאות

תנועת אלקטרונים בשדה חשמלי

עבור החלק של הניסוי עם V_A קבוע קיבלנו את הנתונים הבאים

R Square	0.996	
	Coefficients	Standard Error
Intercept	0.0022	0.0004
X Variable 1	3.6	0.1

ועבור החלק של הניסוי שבו V_d קבוע קיבלנו את הנתונים

R Square	0.9997	
	Coefficients	Standard Error
Intercept	-0.000117954	6.10274E-05
X Variable 1	4.165548112	0.020098494

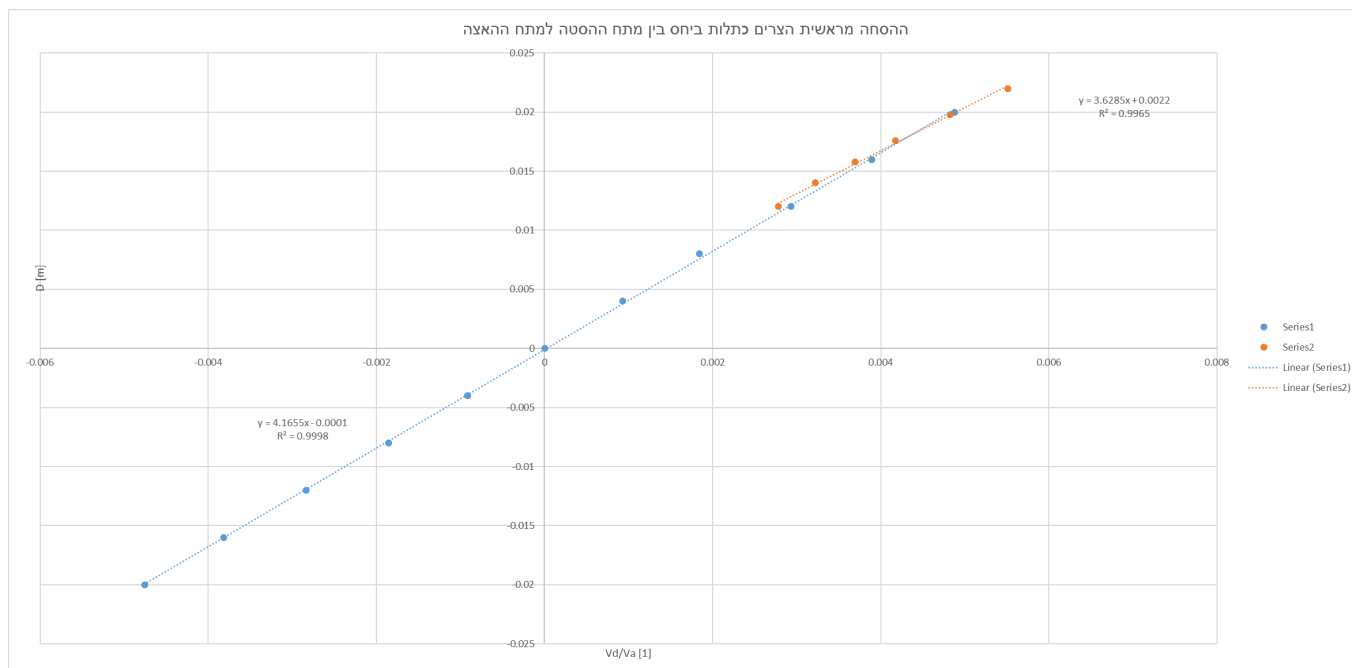
בהשוואה בין שני ערכי α המתקבלים, אני מקבלים $4.88 > 3$. η אינה תלויה במתח ההאצה V_A , כי כפי שניתן להבחין בגרף 1 יש יחס לינארי הן בניסוי שבו V_A הינו קבוע והן בניסוי שבו V_d קבוע, ובשניהם מתקבל שיפוע גרף זהה. מכך נסיק ששיפוע הגרף אינו תלוי לא באף אחד משני הפרמטרים: V_A, V_d .

בעזרת הצבה בנוסחת חישוב שגיאה נגררת: $\delta\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial\alpha}{\partial l} \cdot \delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial L} \cdot \delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial d} \cdot \delta d\right)^2}$, קיבלנו כי הערך התאורטי של α הוא 2.92 והשגיאה שלו היא 0.11. מהשוואת ערך α זה לאלו שקיבלנו מהגרף מקבלים את האטות הבאות - עבור הניסוי עם V_a קבוע קיבלנו $\eta = 16.05$ ועבור הניסוי עם V_d קבוע קיבלנו $\eta = 8.46$.

תנועת אלקטרונים בשדה מגנטי

חלק ראשון

עבור $V_A = 1083V$ קיבלנו:



איור 1: תלות הסטת האלקטרון ביחס בין מתח ההסטה למתח ההאצה

R Square	0.998	
	Coefficients	Standard Error
Intercept	-5e-05	5e-05
X Variable 1	0.284	0.004

ועבור $V_A = 1616V$ קיבלנו:

R Square	0.999	
	Coefficients	Standard Error
Intercept	-4e-05	5e-05
X Variable 1	0.289	0.003

מהשוואה בין שני השיפועים המתקבלים, מתקבל

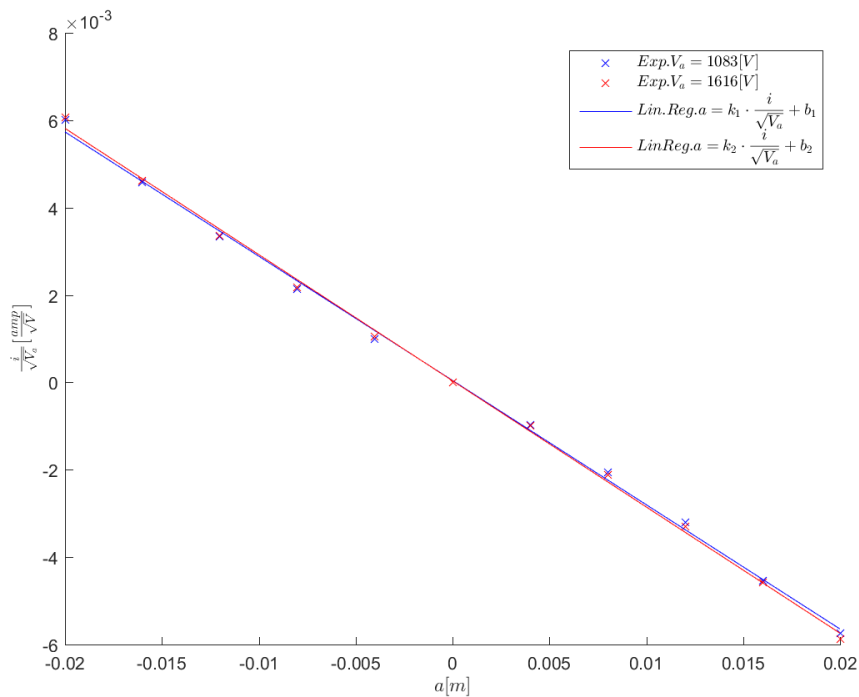
$$\eta = 0.8232 \quad (16)$$

, דהיינו תוצאות הניסוי במתחים שונים קוהרנטיות אחת עם השנייה. מהערכת הגדלים $\frac{B}{B_0} = 0.1$ (ע"פ מדידה) ו- $b = 2R$ (גודל נתון), והצבה במשוואה 8, מתקבלת ההערכה הבאה ל- $\frac{e}{m} = 4.3 \times 10^{10} \pm 0.7 \times 10^{10} \frac{C}{kg}$. מהשוואה עם הערך התיאורטי הידוע (בהנחת שגיאה 0 בערך התיאורטי):

$$\eta = 19.03 \quad (17)$$

חלק שני

לחישוב ϕ התיאורטי בגרף 4, להערכת r_0 בנוסחה 13 נעשה שימוש באחד הערכים המדודים של ϕ והצבה שלו בנוסחה הנ"ל.



איור 2: היחס הנמדד בין ההסחה a לבין $\frac{j}{\sqrt{V_A}}$ בניסוי המגנטי הראשון. הפרמטרים k_i, b_i מוצגים בטבלאות שלהלן.

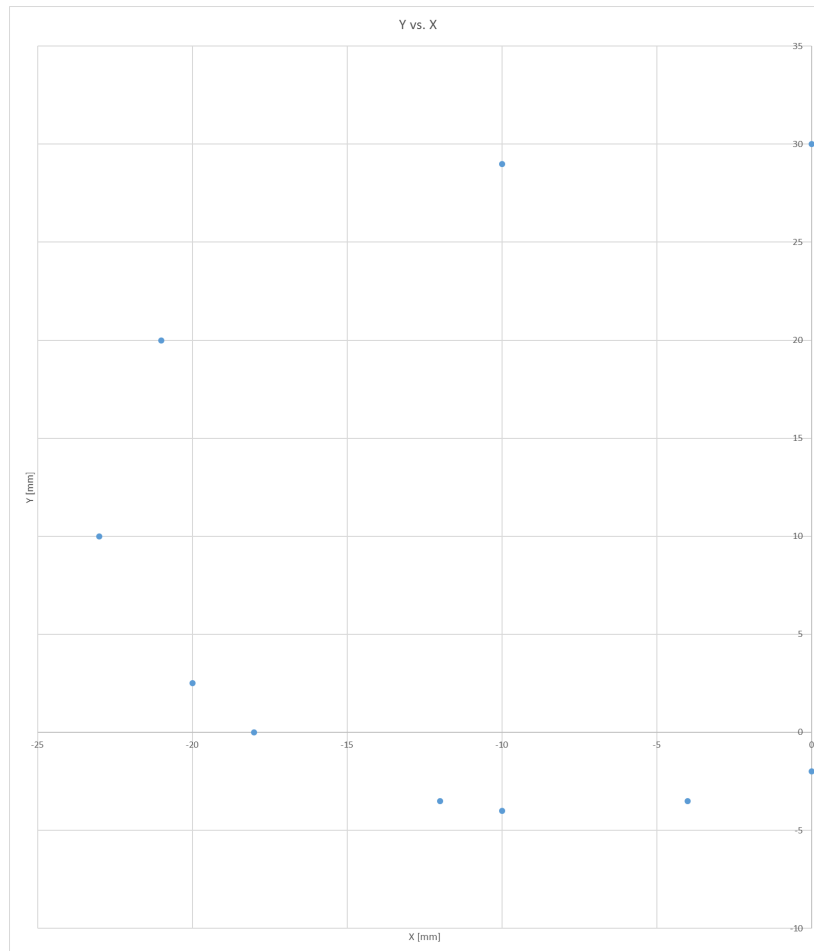
להערכת B , הואיל והוא משתנה לאורך התנועה על ציר z , חושב הערך הממוצע לאורך מסלול החלקיק ע"י הערכת האינטגרל לגרף $\frac{B(z)}{B_0}$. מכיוון שהאלקטרון נע באופן סימטרי, בקירוב, ביחס לצמרכו הסליל (מ- z עד z), ולא מאיץ לאורך המסלול, ממוצע שכזה צפוי להתאים לצרכנו (כלומר, אין צורך בממוצע משוקלל, כפי שנדרש במקרה של V_z המשתנה לאורך התנועה בשדה המגנטי). את השגיאה חישבנו ע"י הערכת השגיאה של B ממשוואות 14, 15, תוך התייחסות למשתנים h, R, R' . השגיאה ב- $\sqrt{\frac{e}{m}}$ חושבה ממשוואות 10 ו-15 ע"י בידוד $\sqrt{\frac{e}{m}}$ והתייחסות למשתנים B, L, V_A . מהשוואה לערך הידוע של $\frac{e}{m}$ מתקבל:

$$\eta = 3.52 \quad (18)$$

מסקנות

שדה חשמלי

בסדרת הניסויים של תנועת האלקטרון בשדה חשמלי קיבלנו אטות מאוד גדולות (> 3) ולכן אנו מסיקים שהשגיאות שלנו הינן שגיאות שיטתיות ולא אקראיות. נוסף על כך השגיאות בניסוי זה היו בכמה סדרי גודל קטנים מהערכים עצמם ולכן הנתונים שקיבלנו הם קרובים מאוד לערך האמיתי. אנו מאמינים כי האטות הגדולות נובעות מכך שהמודל הפשוט לא מתאים לרמת הדיוק של המכשירים, כלומר בניסוי שלנו רמת דיוק המכשירים הייתה גבוהה



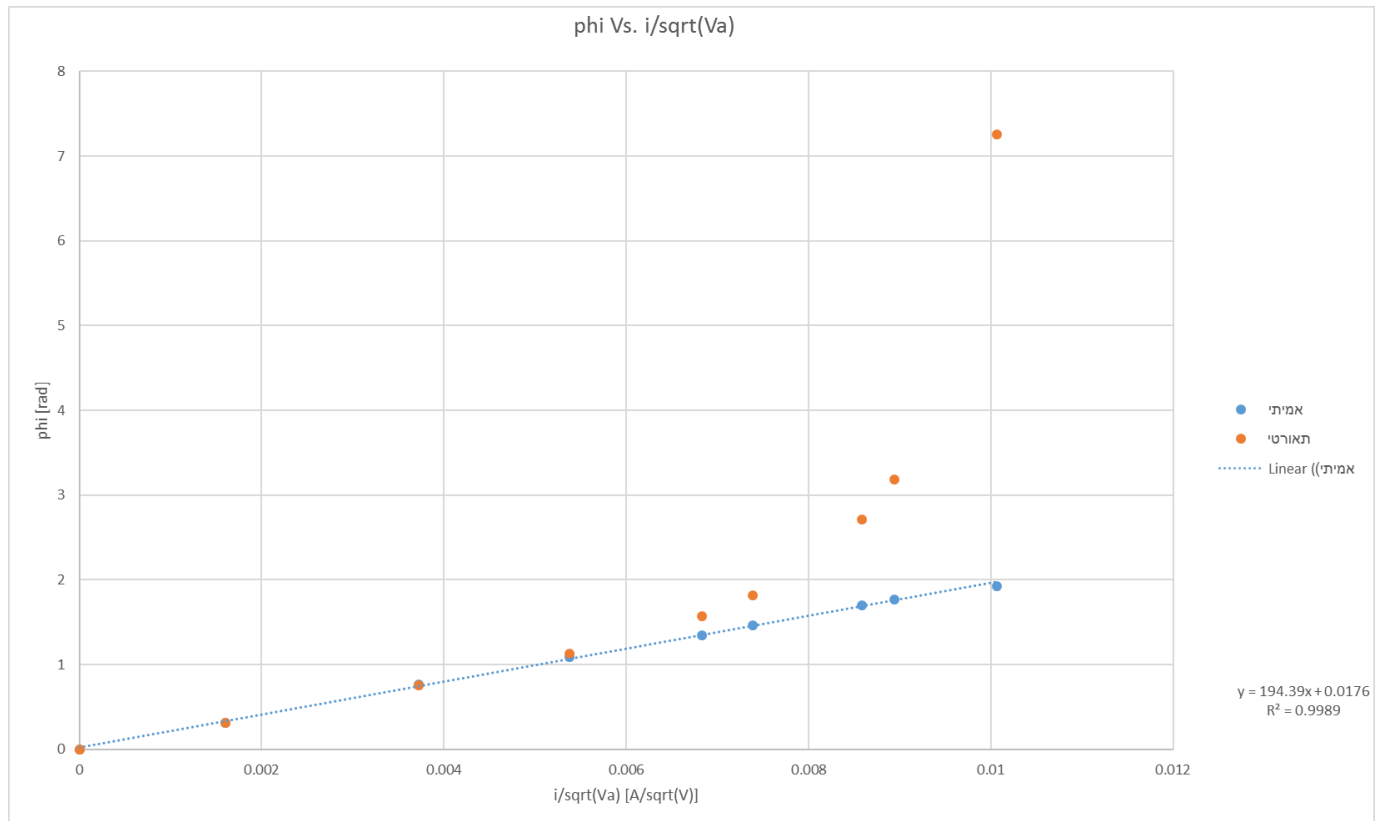
איור 3: תוצאות המדידה בניסוי המגנטי השני.

יותר מרמת הדיוק של הקירוב הפשוט, ושהזנחנו חלקים שלא היינו צריכים (פירוט להלן), ולכן קיבלנו את ההבדלים הגדולים בין הגדלים התאורטיים לבין מה שקיבלנו בפועל. נשים לב שיש קרבה יותר גדולה בין 2 הערכים שקיבלנו בפועל מאשר הקרבה של כל אחד מהם לערך התאורטי, דבר שמחזק את טענתנו.

הקירובים שעשינו במודל הפשוט הם שהתנועה של האלקטרון היא פרבולית תחת שדה קבוע, ונעשית לינארית מיד עם היציאה מהלוחות, אז השדה החשמלי מתאפס. היות שהתאמה לינארית מתקבלת ברמת דיוק טובה (R^2 קרוב מאוד ל-1), אנו מעריכים כי המודל הלינארי אכן תואם את התיאוריה, אך הקבוע שונה מעט מזה שהתקבל מההזנחות שביצענו במודל המפושט.

שדה מגנטי

כפי שניתן לראות משתי המדידות, אנו מקבלים תלות לינארית בין ההסחה ל- $\frac{i}{\sqrt{V_A}}$ והדבר עולה בקנה אחד עם המודל. ממשוואה 16 ניתן לראות שאטא קטנה מאוד (ובפרט קטנה מ 3) ולכן ניתן לראות כי K_1 אינו תלוי במתח ההאצה. אחרת היינו מקבלים ערכים שונים של K_1 היות שמתח ההאצה שונה בין המדידות.



איור 4: היחס הנמדד בין ההסחה ϕ לבין $\frac{i}{\sqrt{V_A}}$ בניסוי המגנטי השני, יחד עם הצפי התיאורי מנוסחה 13.

הערכנו את b להיות $2R$ כיוון שמיקמנו את הסלילים קרוב למסך ועל כן זהו המרחק שהאלקטרון עובר בשדה המגנטי, עד לפגיעה, בקירוב. מהשוואה מתקבל ערך שונה מהצפי הידוע בספרות (משוואה 17). בניסוי השני על אף הערכות וקירובים גסים יותר, לכאורה (דוגמת מיצוע B לאורך המסלול), התקבל ערך התואם את הערך הספרותי הרבה יותר (משוואה 18). אנו מעריכים כי התוצאות הנ"ל נובעות משתי סיבות: בניסוי הראשון (ובניסוי הראשון בלבד) ביצענו הערכה ל- b ע"י הנחה שהאלקטרון נע בשדה המגנטי רק בסוף מסלולו, ועד סופו. סיבה שנייה, היא שיייתכן שהקירוב לשדה מגנטי קבוע היא בעייתית יותר במקרה של תנועה ניצבת לשדה. בפרט כאשר בתנועה המקבילה לשדה, הוערך שדה אחיד ע"פ הערך הממוצע שפועל על האלקטרון לאורך מסלולו, ובאופן סימטרי לאורך מסלולו (עובר ממרחק z_0 לפני מרכז הסליל, עד מרחק z_0 לאחר הסליל).

בגרף 4 ניתן להבחין כי התוצאה התיאורטית הצפויה ממשוואה 13 תואמת את תוצאות המדידה בחצי הראשון של המדידות, בערך עד $\frac{\pi}{2}$. לא מצאנו הסבר מספק לתופעה זו.