

## מעבדה 4 - מדידת עכבה של מעגל RC מקבילי ומעגל RL טורי

דור קליינשטרן (204881692), גל רעיוני (305653487)

3 במאי 2016

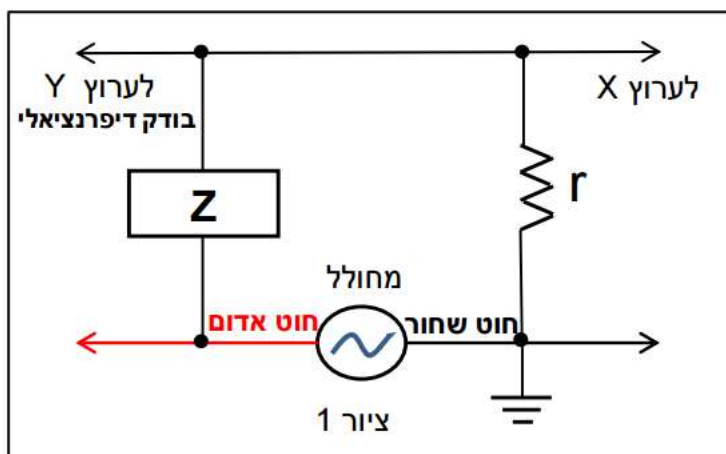
galra@campus.technion.ac.il, dore@campus.technion.ac.il

### מטרת הניסוי

בניסוי זה חישבנו את העכבה (הן גודלה והן זווית ההסחה) של המעגלים הבאים: מעגל RC בחיבור מקבילי ומעגל LC בחיבור טורי. את החישוב ביצענו על ידי מדידה של ערכי חיתוך עם צירים וערכים מקסימליים בגרף  $V_Z$  vs.  $V_{supplier}$  (המתח על המעגל כנגד המתח מהספק), ושימוש בתלות התיאורטית שלהם בערכי  $\varphi$ ,  $|Z|$ . מערכים אלו והתלות שלהם במאפייני המעגל ( $R, C$  או  $R, L$ ) שיערכנו את ערכי  $L$  ו- $R$ , ובדקנו התאמה למדידה ישירה של ערכים אלו, כמבחן להתאמת התיאוריה למציאות.

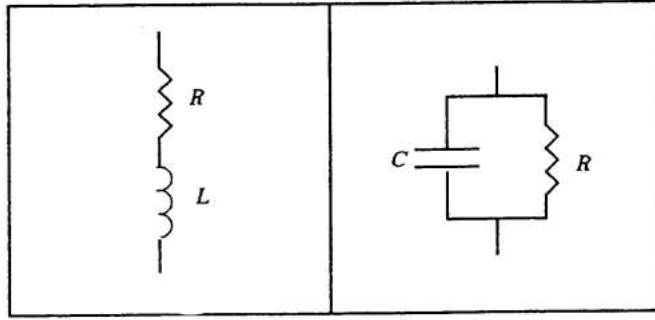
### מבוא

בניסוי זה עבדנו עם המערכת הבאה:



איור 1: תיאור מערכת הניסוי

כאשר כמעגל העכבה ( $Z$ ) עבדנו עם שני המעגלים הבאים:



איור 2: תיאור המערכת של העכבות  $Z$  של איור 1

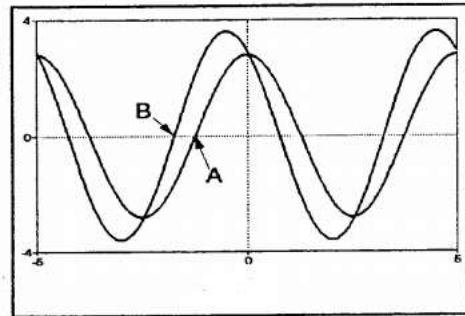
ניתן לראות שבמעגל הימני, החיבור הינו במקביל, ואילו בשמאלי הוא טורי. הדבר ישפיע על העכבה ועל זווית ההסחה כפי שנראה בהמשך.

עבור כל אחת מהעכבות נגדיר  $V_x = \Re(Z)I$  ו  $V_y = \Im(Z)I$  (החלק הממשי והמדומה של העכבה). זהו חישוב המתח של כל רכיב לפי הגדרת העכבה, ולכן אם נזרים זרם של  $I = I_0 \cos(\omega t)$  מתקבל כי:

$$V_x = rI_0 \cos(\omega t) \quad (1)$$

$$V_y = |Z| I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

כפי שניתן לראות, שתי הפונקציות הן פונקציות  $\cos$  אך עם משרעות שונות, ועם זווית הסחה שונה. הדבר אומר כי אם נסתכל על הגרפים של תלות המתח בזמן של שני הרכיבים זה ליד זה, נראה שנקודות המקסימום הן שונות, וכי אחד מהגרפים מוזז. כלומר הם לא מתאפסים ביחד ולא מקבלים מקסימום ביחד, כמו שניתן לראות באיור הבא:



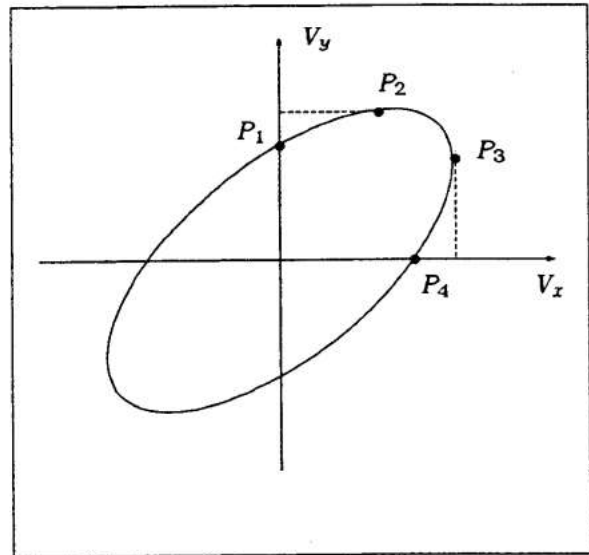
איור 3:  $V_y, V_x$  כתלות בזמן

נקודות  $A, B$  שתי הפונקציות מתאפסות, אך הן אינן מתאפסות במקביל, משמע יש את זווית ההסחה  $\varphi$  ביניהן (במקרה שלנו הפונקציה עם הנק'  $B$  היא של  $V_y$  והשניה של  $V_x$  כיוון ש  $\varphi$  חיובי). ובנוסף ניתן לראות שגרף אחד מקבל מקסימום גדול מהשני, כלומר המשרעות שונות.

ממשוואות 8 ו-9 ניתן לראות כי הן המשוואות הפרמטריות של אליפסה במישור  $V_x - V_y$  ולכן הצורה שתתקבל ממדידת מתח אחד כלתות בשני (לדוגמה, באוסצילוסקופ) היא אליפסה, המקיימת את התכונות המוצגות באיור הבא:

טבלה 1.

ערך של $\omega t$	נקודה	$V_x$	$V_y$
$-\pi/2$	$P_1$	0	$ Z  I_0 \sin \phi$
$-\phi$	$P_2$	$r I_0 \cos \phi$	$ Z  I_0$
0	$P_3$	$r I_0$	$ Z  I_0 \cos \phi$
$\pi/2 - \phi$	$P_4$	$r I_0 \sin \phi$	0



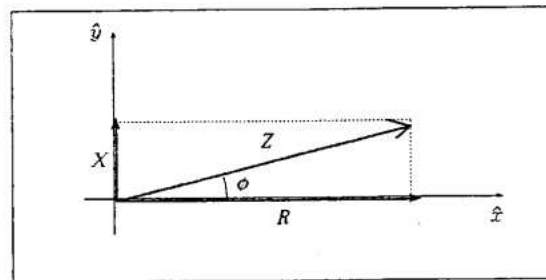
איור 4:  $V_x$  כתלות ב  $V_y$  ותיאור נקודות חשובות

מן הטבלה שבאיור ניתן לראות שמנת ערכים של נקודות שונות, מאפשרת לחשב מאפייני מערכת שונים, דוגמת:

$$|Z| = r \frac{V_y(P_2)}{V_x(P_3)} = r \frac{V_y(P_1)}{V_x(P_4)} \quad (3)$$

$$\sin \phi = \frac{V_y(P_1)}{V_y(P_2)} = \frac{V_x(P_4)}{V_x(P_3)} \quad (4)$$

נרצה להראות את הביטוי ל- $\tan(\phi)$ , כאשר  $\phi$  הינה זווית ההסחה, כלומר הזווית שבין החלק הממשי לעכבה, כפי שמוצג כאן:



איור 5: זווית ההסחה של העכבה

הואיל ו- $\Re(Z) = R$  מתקיים:

$$\tan(\phi) = \frac{X}{R} \quad (5)$$

נחשב את הביטוי 5 עבור המעגל  $RC$  במקביל, המוצג בצד הימני של איור 2:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{R} + \frac{1}{-iX_C} \rightarrow Z = \frac{-iRX_C}{-iX_C + R} \\ Z &= \frac{-iR^2X_C + RX_C^2}{X_C^2 + R^2} \rightarrow \tan(\varphi) = -\frac{\frac{R^2X_C}{const}}{\frac{RX_C^2}{const}} = -\frac{R}{X_C} = -\omega RC \end{aligned} \quad (6)$$

כאשר,  $X_C = \frac{1}{\omega C}$ . לכן  $\frac{1}{i\omega C} = -iX_C$ . בדומה, מוצאים את הביטוי ל  $\tan(\varphi)$  עבור המעגל  $RL$  הטורי, המוצג באיור 2. מתקבל:

$$Z = R + iX_L = R + i\omega L \rightarrow \tan(\varphi) = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R} \quad (7)$$

כאשר  $X_L = \omega L$ . ובסך הכל מתקבל כי עבור מעגל  $RC$  במקביל מתקיים:

$$\tan(\varphi) = -\omega RC \quad (8)$$

ועבור מעגל  $RL$  טורי מתקיים:

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R} \quad (9)$$

ממשוואה 6 מתקבל:

$$\begin{aligned} |Z|^2 &= \frac{1}{(X_C^2 + R^2)^2} (R^4X_C^2 + R^2X_C^4) = \frac{R^2X_C^2}{X_C^2 + R^2} \\ \frac{1}{|Z|^2} &= \frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2} = \frac{1}{R^2} + (\omega C)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

וממשוואה 7 מתקבל:

$$|Z|^2 = R^2 + (\omega L)^2 \quad (11)$$

את המדידות בניסוי ביצענו באמצעות אוסצילוסקופ, וגשש דיפרנציאלי. את מדידת ערוץ  $Y$  (תרשים 1) לא ניתן להאריק ישירות מבלי לקצר את המעגל, ועל כן נדרש גשש דיפרנציאלי. למדידת ערכי התנגדות, קיבול והשראה, נעשה שימוש במולטימטר.

המדידות בוצעו במעגל  $RL$  בתדרים גבוהים מתדר החסימה, ובמעגל  $RC$  בתדרים נמוכים מתדר החסימה, על מנת למנוע את עיוות התוצאות בשל סינון האותות במעגלים אלו.

חישובי שגיאות נעשו ע"פ שגיאת התוצאה מהתאמה לינארית (עבור שגיאה סטטיסטית), וע"פ הנוסחה הבאה עבור שגיאה נגררת:

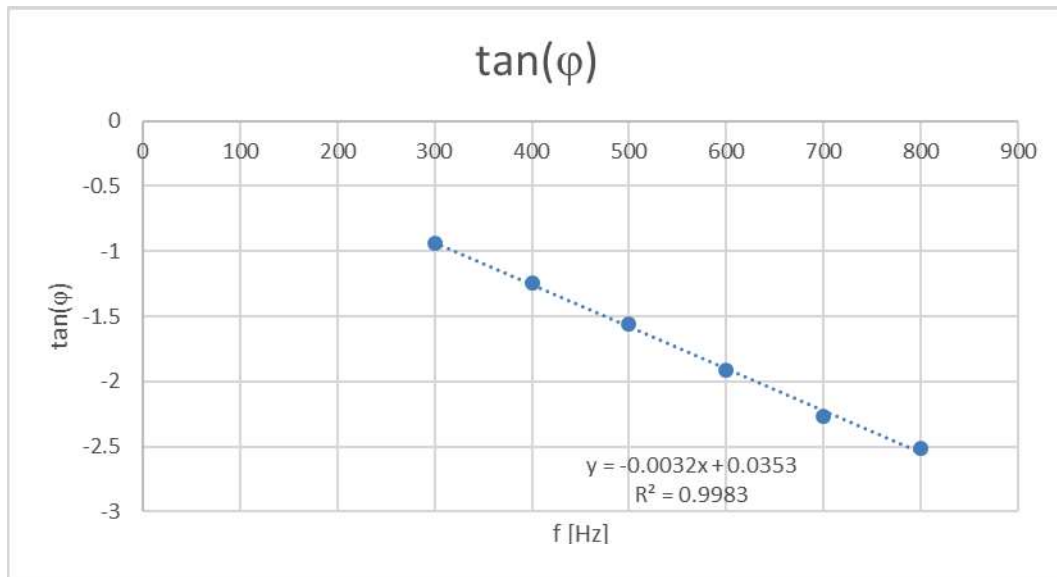
$$\delta Y(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial Y}{\partial X_i} \delta X_i \right)^2} \quad (12)$$

השוואה בין גדלים נעשית בשיטת  $\eta$ :

$$\eta = \frac{|X_1 - X_2|}{\sqrt{\delta X_1^2 + \delta X_2^2}} \quad (13)$$

## תוצאות

להלן מוצגים הגרפים שהתקבלו מהערכת הביטויים ל- $\tan \varphi$  ול- $\frac{1}{|Z|^2}$  ממדידת נקודות  $P1 - P4$  עבור תדירויות שונות במערכת  $Z = Z_{RC}$ , בהתאם למשוואות 8, 10. לאחר כל גרף מוצגת טבלה עם תוצאות התאמה לינארית לגרף. גרף היחס בין זווית ההסחה לתדירות:

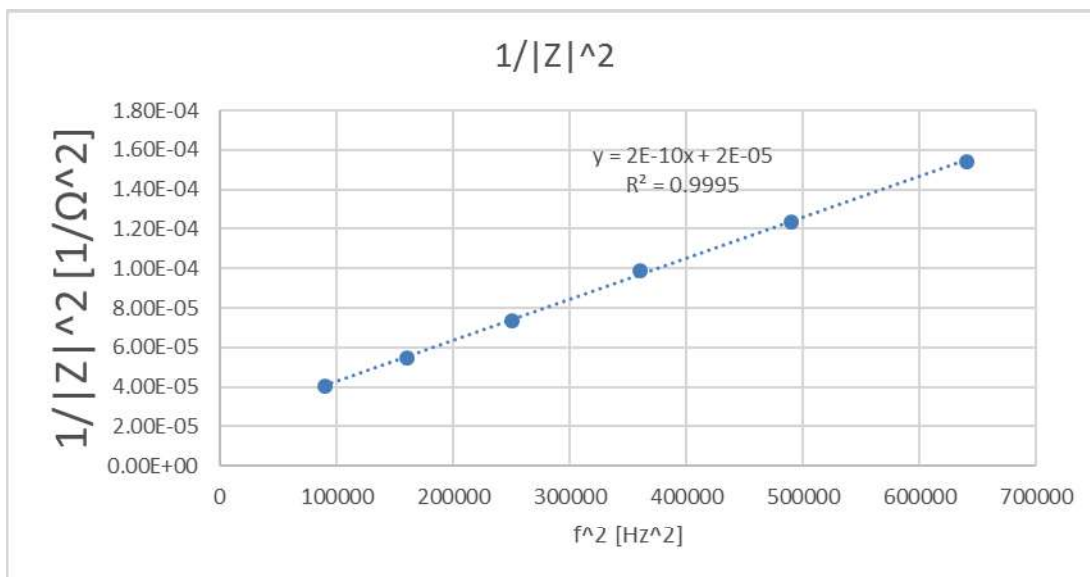


איור 6:  $\tan \varphi$  כנגד  $f$  במערכת  $Z = Z_{RC}$

	Coeff	Inter.
Val	-0.00323	0.04
Err	7E-04	0.04

טבלה 1: תוצאות התאמה לינארית לגרף 6

גרף היחס בין גודל העכבה לתדירות:

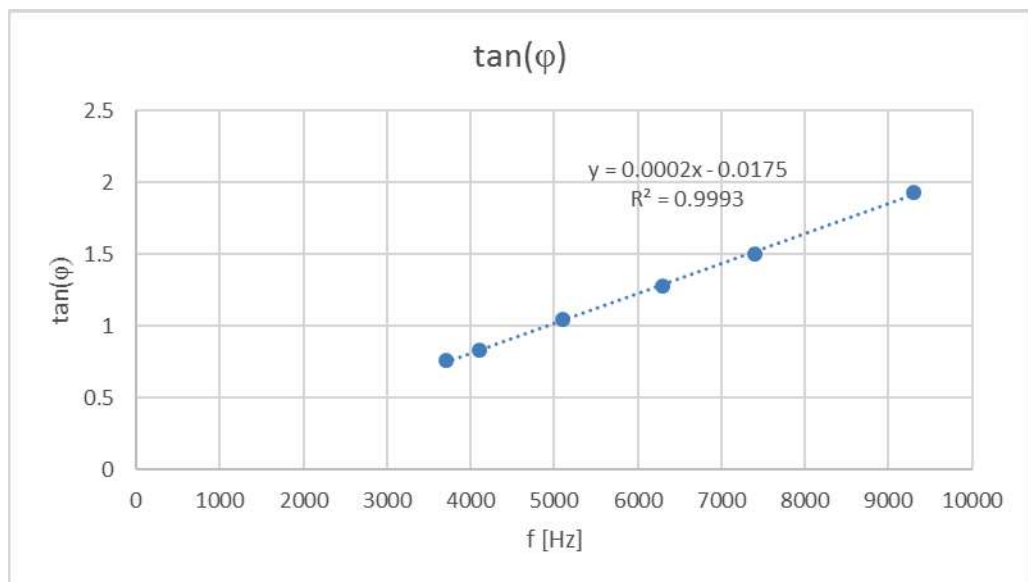


איור 7:  $|Z|^2$  כנגד  $f^2$  במערכת  $Z = Z_{RC}$

	Coeff	Inter.
Val	2.07E-10	2.22E-05
Err	2E-12	9E-07

טבלה 2: תוצאות התאמה לינארית לגרף 7

להלן מוצגים הגרפים שהתקבלו מהערכת הביטויים ל- $\tan \varphi$  ול- $|Z|^2$  ממדידת נקודות  $P1 - P4$  עבור תדירויות שונות במערכת  $Z = Z_{RL}$ , בהתאם למשוואות 8, 11 לאחר כל גרף מוצגת טבלה עם תוצאות התאמה לינארית לגרף. גרף היחס בין זווית ההסחה לתדירות:

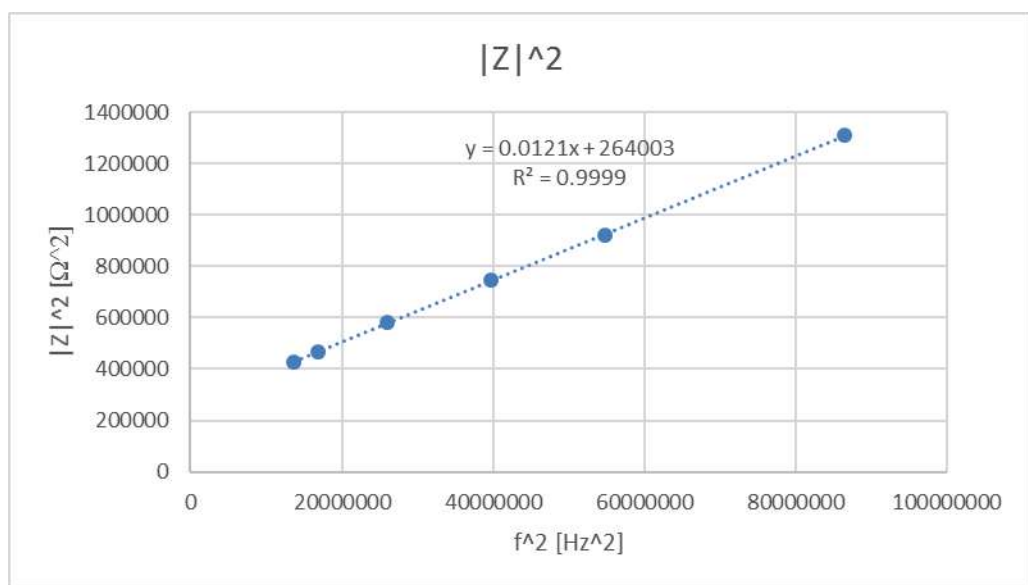


איור 8:  $\tan \varphi$  כנגד  $f$  במערכת  $Z = Z_{RL}$

	Coeff	Inter.
Val	0.00020781	-0.02
Err	3E-06	0.02

טבלה 3: תוצאות התאמה לינארית לגרף 8

גרף היחס בין גודל העכבה לתדירות:



איור 9:  $|Z|^2$  כנגד  $f^2$  במערכת  $Z = Z_{RL}$

	Coeff	Inter.
Val	0.01209	264003
Err	5E-05	2509

טבלה 4: תוצאות התאמה לינארית לגרף 9

מדידה ישירה של הסליל, הקבל והנגד סיפקה את התוצאות הבאות:

$$L_{meas} = 9.0 \times 10^{-3} \pm 4 \times 10^{-4} [mH] \quad (14)$$

$$C_{meas} = 2.00 \times 10^{-6} \pm 2 \times 10^{-8} [mF] \quad (15)$$

$$R_{meas} = 220 \pm 0.5 [\Omega] \quad (16)$$

## דיון בתוצאות והשוואה לתאוריה

בדיון שלהלן נתייחס לערך המקדם הנידון בכל נקודה (Coeff) כ- $a$ .  
ממשוואה 8 והנתונים בטבלה 1 מקבלים, תוך שימוש במשוואה 12 לחישוב השגיאה, בהתייחסות לשגיאה הסטטיסטית  $\delta a_{c,z}$ :

$$C_{tan} = \frac{a_{c,tan}}{2\pi R} = 2.34 \times 10^{-6} \pm 5 \times 10^{-7} \quad (17)$$

וממשוואה 10 וטבלה 2 מקבלים, תוך שימוש במשוואה 12 לחישוב השגיאה, בהתייחסות לשגיאה הסטטיסטית  $\delta a_{c,z}$  ול- $\delta R$ :

$$C_z = \frac{\sqrt{a_{c,z}}}{2\pi} = 2.3 \times 10^{-6} \pm 2.5 \times 10^{-7} \quad (18)$$

ממשוואה 9 והנתונים בטבלה 3 מקבלים, תוך שימוש במשוואה 12 לחישוב השגיאה, בהתייחסות לשגיאה הסטטיסטית  $\delta a_{c,z}$  ול- $\delta R$ :

$$L_{tan} = \frac{R \cdot a_{L,tan}}{2\pi} = 7.3 \times 10^{-3} \pm 1 \times 10^{-4} \quad (19)$$

וממשוואה 11 וטבלה 4 מקבלים, בהתייחסות לשגיאה הסטטיסטית  $\delta a_{c,z}$ :

$$L_z = \frac{\sqrt{a_{L,z}}}{2\pi} = 1.7 \times 10^{-2} \pm 1 \times 10^{-3} \quad (20)$$

מהשוואה בין  $C_z$ ,  $C_{tan}$  ו- $C_{meas}$  מתקבל:

$$\eta_{C,z,tan} = 0.16$$

$$\eta_{C,z,meas} = 1.20$$

$$\eta_{C,tan,meas} = 0.68$$



מהשוואה בין  $L_z$ ,  $L_{tan}$  ו- $L_{meas}$  מתקבל:

$$\begin{aligned}\eta_{L,z,tan} &= 9.05 \\ \eta_{L,z,meas} &= 7.43 \\ \eta_{L,tan,meas} &= 2.67\end{aligned}$$

דומה כי ישנה הבדל של פקטור 2 בתוצאת החישוב של  $L_z$  ביחס לערכו כפי שמתקבל ממדידה ישירה, ומחישוב  $L_{tan}$ . אולם, פרט לכך, התוצאות הולמות יפה את התיאוריה, ומתקבלים ערכי  $\eta$  קטנים מ-3. חלקם אף קטנים מאוד מ-3, מה שמעלה שאלה לגבי דיוק המדידה וגודל השגיאה המתקבל. אכן, עבור ערכי C, מתקבלת שגיאה של קרוב ל-20%.

השגיאה המשמעותית בחישובים שלעיל היא השגיאה הסטטיסטית מההתאמה הליניארית לגרפים. אולם גם היא, בתורה, נגזרת מפיזור הנקודות  $P_1 - P_4$  (איור 4). נוכל לשפר את דיוק המדידה, ובכך, ככל הנראה, להקטין את השגיאה הסטטיסטית שנוצרת, ע"י שמירת נתוני קריאת האוסצילוסקופ למחשב, וניתוח נק' החיתוך בקוד, שכן הרזולוציה האפשרית בהערכתן הידנית על צג הסקופ מספקת רמת דיוק נמוכה מרמת דיוק המדידה של הסקופ. בנוסף, ניתן להקטין את השפעת הפלקטואציות בקריאת הערכים של הסקופ ע"י שמירת נתונים ממס' מדידות לכל תדירות, חישוב נק'  $P_1 - P_2$  לכל סט נתונים, ולקחת הממוצע המדידות של כל נקודה כערך הנקודה.

## מסקנות

בניסוי זה רצינו למדוד את העכבה (גודל ופאזה) של מכלול RC מקבלי ומכלול RL טורי. ראינו כי בעזרת מדידת העכבה יכולנו לחשב את הקיבול של הקבל (במכלול RC) ואת ההשראות של הסליל (במכלול RL). התוצאות המתקבלות הולמות יפה את התיאוריה, אולם יש צורך לחזור על המדידות ברמת דיוק גבוהה יותר, כמוצע בסעיף הקודם, על מנת לשערך התאמה זו באופן מהימן יותר, שלא בהסתמך על שגיאה של כ-20%. עם זאת, התוצאות הנוכחיות מאששות את המודל התיאורטי באשר לעכבת המעגלים, ע"י התאמת גדלים הנגזרים ממנה לגדלים שנמדדו.

הערך היחיד שאינו תואם את התיאוריה, ואינו קונסיסנטי אף עם אותו ערך תיאורטי, כאשר הוא נגזר ממשוואה אחרת, הוא  $L_z$ . נראה כי התקבל ערך גדול פי 2 מהערך האמיתי, וזה שחושב כ- $L_{tan}$ , אך לא עלה בידנו לאתר את מקור הטעות הנ"ל.