

מעבדה 2 - תנועת אלקטרון בשדה מגנטי וחשמלי

דור קליינשטרן (204881692), גל רעיוני (305653487)

11 באפריל 2016

galra@campus.technion.ac.il, dore@campus.technion.ac.il

מטרת הניסוי

אימות מודל תאורטי להתנהגויות זרם ומתח במעגלי קבל-נגד וסליל-נגד AC, וחקירת יישום שלהם בבניית מסנן תדרים.

מהלך הניסוי

ניסוי זה מורכב מארבעה שלבים: ראשית בדקנו מהי התנגדות המחלול, והאם ניתן להזניח אותה או שמא צריך לקחת אותה בחשבון בחישובים שלנו. זה נעשה על ידי חישוב המתח נגדים שונים. לאחר מכן בנינו מעגל RC עם τ מסוים וראינו כיצד פונקציית מתח היציאה על הקבל משתנה לפי סדר הגודל של תדירות מתח הכניסה. לאחר מכן, בנינו מעגל RL עם τ מסוים ובדקנו את אותה השפעה. לבסוף בנינו מעגל RC נוסף, וחישבנו את גודל היחס בין מתח היציאה למתח הכניסה תוך כדי שינוי התדירות.

מבוא

הסתמכנו על המודל הבא:

התנהגות מתח זרם

במעגל RC: $\frac{Q}{C} + R_T I = V_0$
במעגל RL: $L \frac{dI}{dt} + R_T I = V_0$
הפתרונות, בהתאמה:

$$Q_C = CV_0 - A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (1)$$

$$I_L(t) = \pm \frac{V_0}{R_T} - B \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (2)$$

$$V_C = X_C \cdot \frac{dQ_a}{dt} = -KA \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad K - Pos. Const. \quad (3)$$

$$V_L = X_L I_a = K_1 - K_2 B \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad K - Pos. Const. \quad (4)$$

$$A = \frac{2CV_0}{e^{\pm \frac{T}{2\tau}} + 1}$$

$$B = \frac{2V_0}{R_T \left(e^{\pm \frac{T}{2\tau}} + 1\right)}$$

$$+ \text{ for } -\frac{T}{2} < t < 0$$

$$- \text{ for } 0 < t < \frac{T}{2}$$

עבור המעגלים בהתאמה:

$$\tau = R_T C$$

$$\tau = \frac{L}{R_T}$$

התנגדות פנימית

לצורך חישוב ההתנגדות הפנימית של המחולל נשתמש בקשר:

$$\frac{1}{V_R} = \frac{1}{V_0} + \frac{R_i}{V_0} \cdot \frac{1}{R} \quad (5)$$

עכבה וחסימת תדרים

העכבות של סליל וקבל הן:

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

מפל המתח במעגל קבל-נגד (איורים 4, 5):

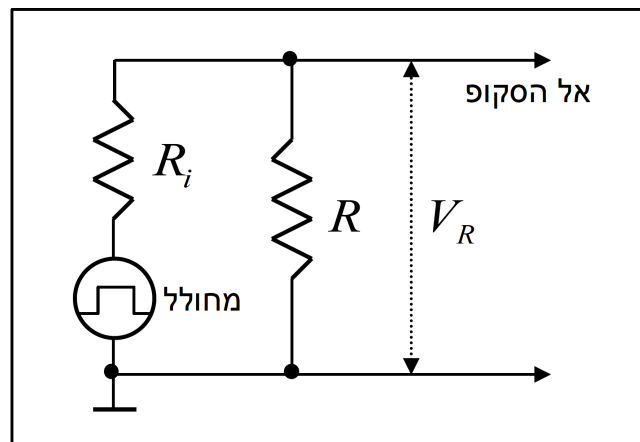
$$\begin{aligned}
V_{out,lpf} &= V_0 e^{i\omega t} - RI \left(= V_0 e^{i\omega t} \left(1 - \frac{R}{R - \frac{i}{\omega C}} \right) \right) \\
V_{out,hpf} &= RI \\
H(\omega) &= \left| \frac{V_{out}}{V_0} \right| \\
&\Downarrow \\
H(\omega)_{lpf} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0 \\
H(\omega)_{hpf} &= \frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 1
\end{aligned}$$

נתייחס לתדר חסימה האפקטיבי (עבור שני המעגלים) כ- $\omega_0 = \frac{1}{RC}$. בתדר זה מתח היציאה נחתך ביחס של $\sqrt{2}$.

מהלך הניסוי

מדידת התנגדות המחולל

בנינו את המעגל הבא:

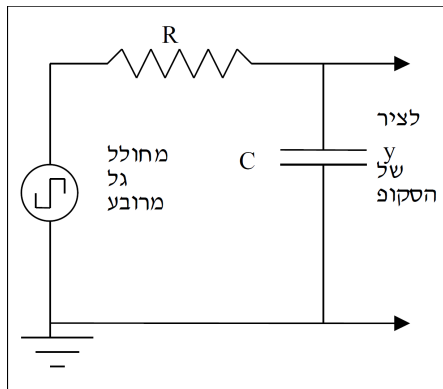


איור 1: מעגל למדידת התנגדות פנימית של מחולל

ומדדנו את מפל המתח V_R על נגדים שונים (ערכי R שונים), ועל תדירויות מחולל שונות, עם מתח $V = 1[Volt]$.

חישוב קבוע הזמן של מעגל RC והתנהגות המתח

בנינו את המעגל הבא:

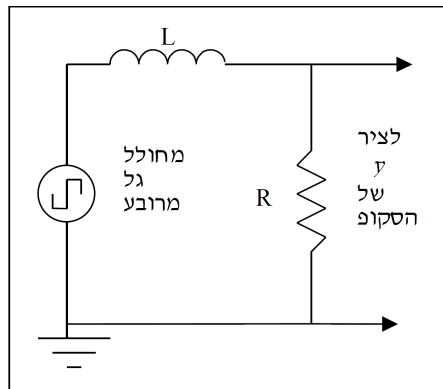


איור 2: תרשים מעגל RC

ומדדנו את ההתנגדות R לצורך הערכת τ . לאחר מכן בדקנו את התנהגות המתח (מדידה ע"פ המתואר בתרשים 2) בסביבות שונות ביחס ל- $f_0 = \frac{1}{\tau}$.

חישוב קבוע הזמן במעגל RL והתנהגות המתח

בנינו את המעגל הבא:

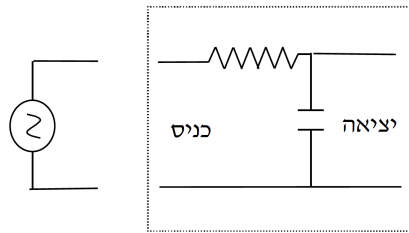


איור 3: תרשים מעגל LC

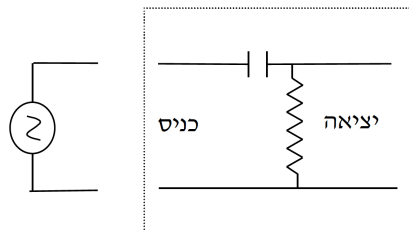
ומדדנו את ההתנגדות R לצורך הערכת τ . לאחר מכן בדקנו את התנהגות המתח (מדידה ע"פ המתואר בתרשים 2) בסביבות שונות ביחס ל- $f_0 = \frac{1}{\tau}$. f_0 שהתקבל הוא באזור $7kHz$, אולם בשל מגבלות טכניות לא עלה בידנו למדוד תדירות גבוהה ממנו, על כן מדדנו עבור $f_0 \ll f < f_0$ ו- $f \sim f_0$.

בניית מסנן תדרים ממעגל RC

תכננו לבנות את המעגלים הבא:



איור 4: תרשים מעגל LPF



איור 5: תרשים מעגל HPF

אולם הזמן עמד לנו לבניית מעגל 4 בלבד.
 בחרנו את רכיבי המעגל כך שיעביר תדרים עד 10KHz $(C = 1.0 \pm 0.2[\mu F])$
 $R = 97.6 \pm 0.1[Ohm]$, סרקנו טווחי תדרים שונים ומדדנו את מתח היציאה.

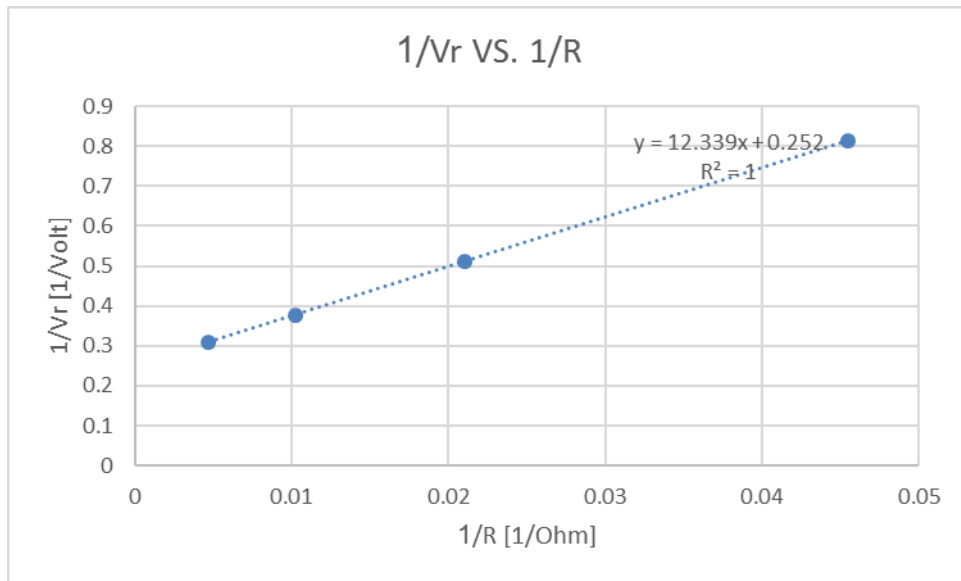
תוצאות

התנגדות המחולל

עבור תדירויות שונות, התקבלו ערכים זהים לחלוטין (תדירויות: $2[Hz]$, $3.5[Hz]$, $15[Hz]$)
 עבור נגדים שונים, באמצעות נוסחה 5 קיבלנו את הקשר הבא:

$$\frac{1}{V_R} = A + \frac{1}{R} \cdot B$$

ומהתוצאות הבאות:



איור 6: מדידות לחישוב R_i

התקבל הקשר הבא:

$$A = 0.2520 \pm 0.0009 = \frac{1}{V_0} \quad (6)$$

$$B = 12.34 \pm 0.04 \quad (7)$$

↓

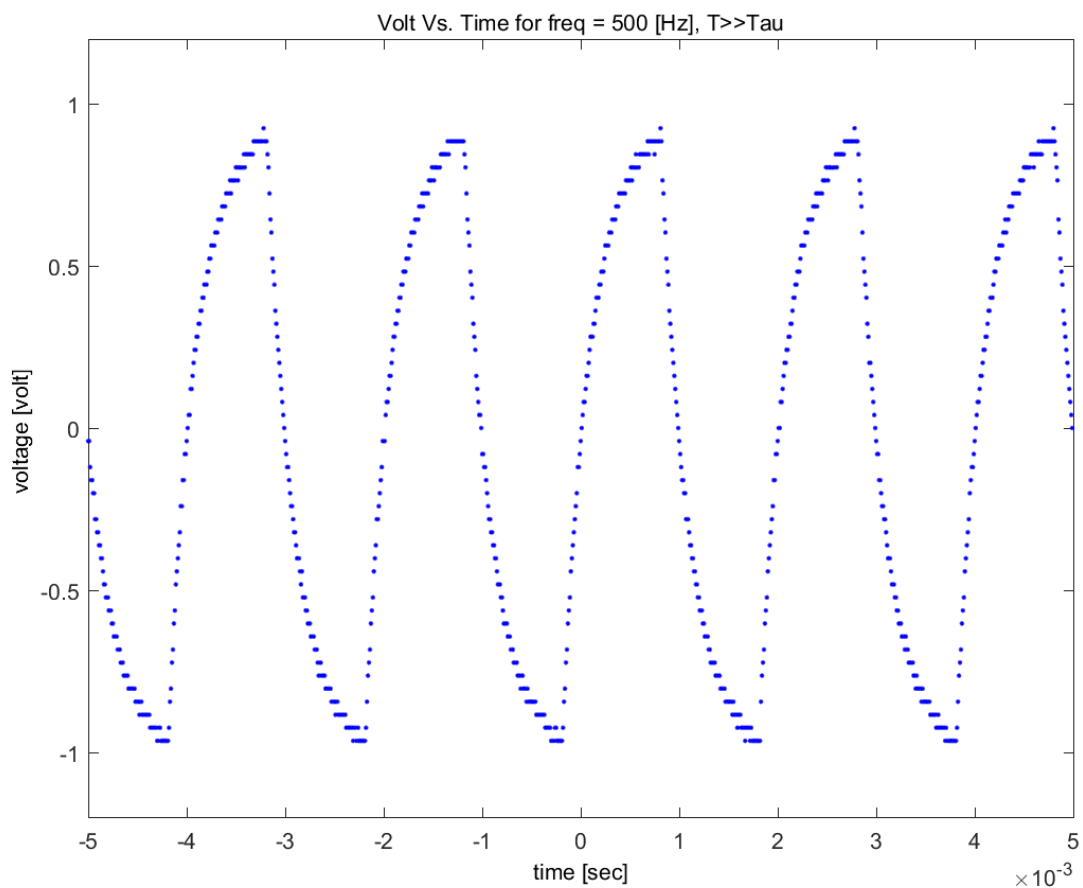
$$R_i = \frac{\frac{R_i}{V_0}}{\frac{1}{V_0}} = \frac{B}{A} = 49.0[Ohm]$$

$$\delta R_i = \sqrt{\left(\frac{\partial R_i}{\partial A} \cdot \delta A\right)^2 + \left(\frac{\partial R_i}{\partial B} \cdot \delta B\right)^2} = 0.2[Ohm]$$

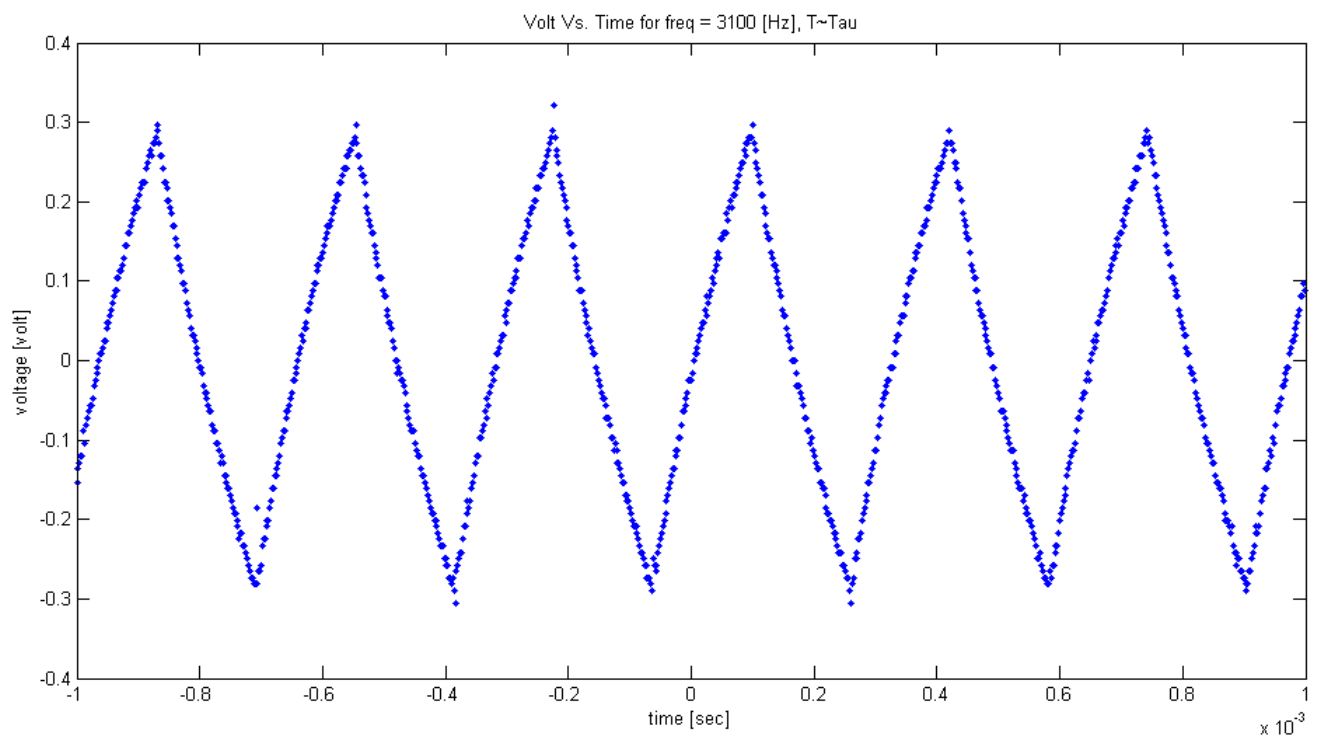
מעגל RC

התקבלו התוצאות הבאות:

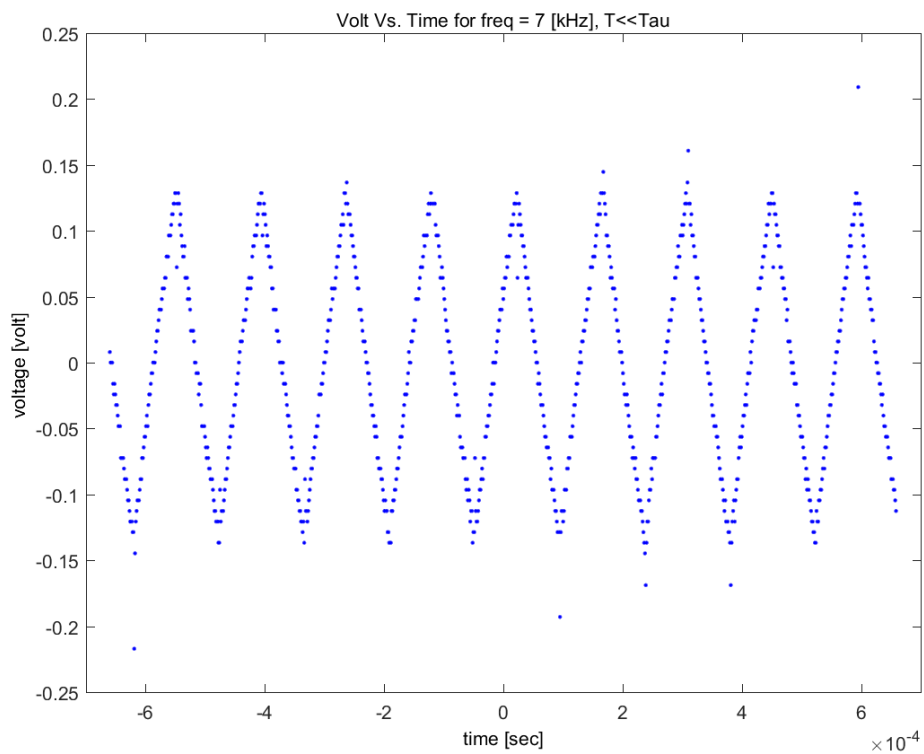
$$\begin{aligned}
\tau &= (R + R_i) \cdot C = (97.6 \pm 0.1[Ohm] + 49.0 \pm 0.2[Ohm]) \cdot (2200 \pm 440[nF]) \\
\tau &= 0.000322[sec] \\
f_0 = \frac{1}{\tau} &= 3100[Hz] \\
\delta f_0 &= \sqrt{\left(\frac{\partial(\frac{1}{\tau})}{\partial R} \cdot \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial(\frac{1}{\tau})}{\partial R_i} \cdot \delta R_i\right)^2 + \left(\frac{\partial(\frac{1}{\tau})}{\partial C} \cdot \delta C\right)^2} = 560[Hz] \\
&\Downarrow \\
f_0 &= 3100 \pm 560[Hz]
\end{aligned}$$



איור 7: שינוי המתח בזמן במעגל ה-RC, בתדר $500Hz$.



איור 8: שינוי המתח בזמן במעגל ה-RC, בתדר 3100Hz .

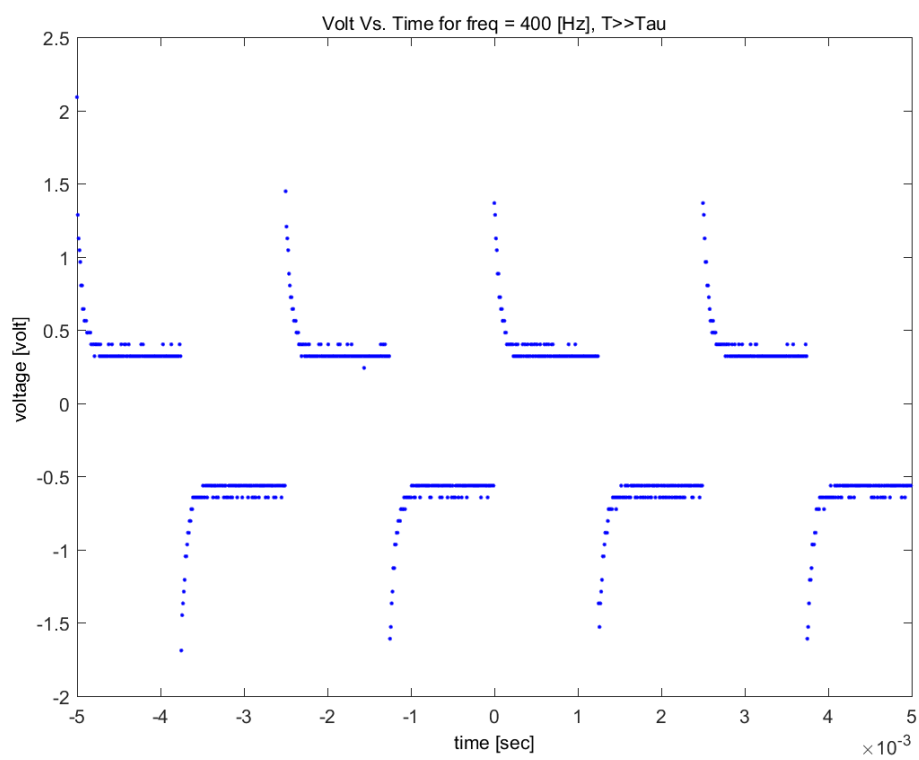


איור 9: שינוי המתח בזמן במעגל ה-RC, בתדר 7000Hz .

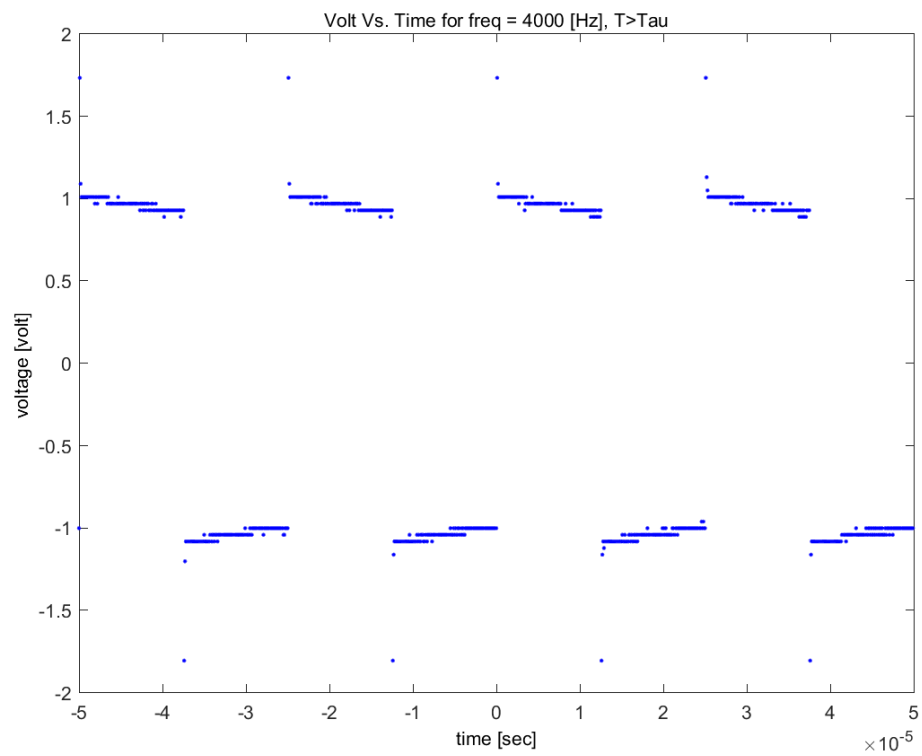
מעגל LC

התקבלו התוצאות הבאות:

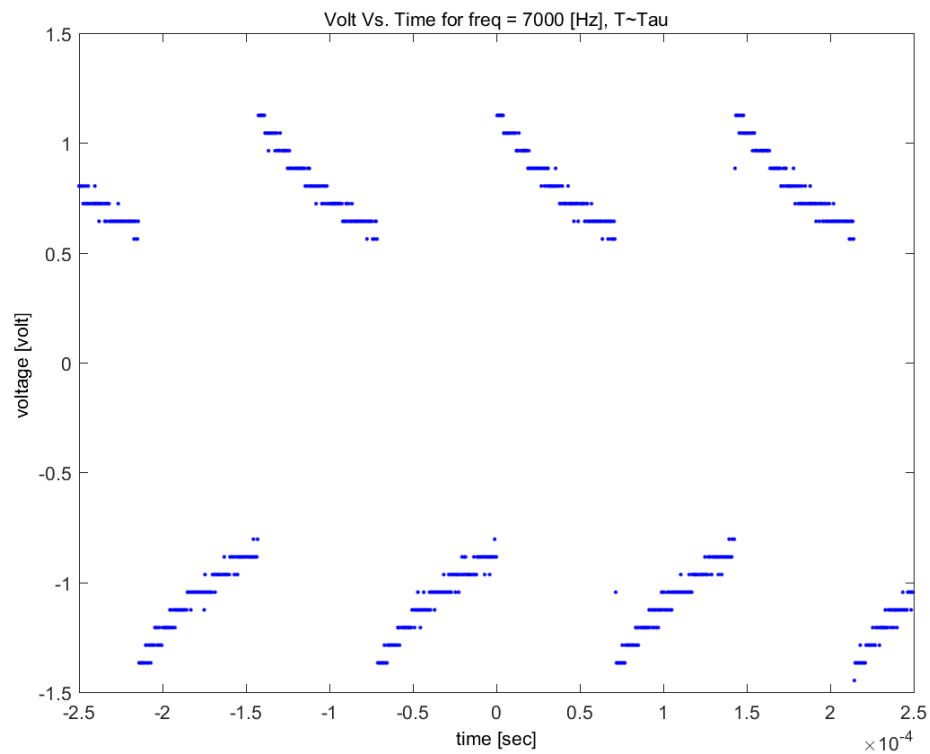
$$\begin{aligned}\tau &= \frac{L}{R + R_i} = \frac{10 \pm 1[mH]}{97.6 \pm 0.1[Ohm] + 49.0 \pm 0.2[Ohm]} \\ \tau &= 0.000141[sec] \\ f_0 = \frac{1}{\tau} &= 7000[Hz] \\ \delta f_0 &= \sqrt{\left(\frac{\partial(\frac{1}{\tau})}{\partial R} \cdot \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial(\frac{1}{\tau})}{\partial R_i} \cdot \delta R_i\right)^2 + \left(\frac{\partial(\frac{1}{\tau})}{\partial L} \cdot \delta L\right)^2} = 1.5 \times 10^3[Hz] \\ \Downarrow \\ f_0 &= (7 \pm 1.5) \times 10^3[Hz]\end{aligned}$$



איור 10: שינוי המתח בזמן במעגל ה-RL, בתדר 400Hz .



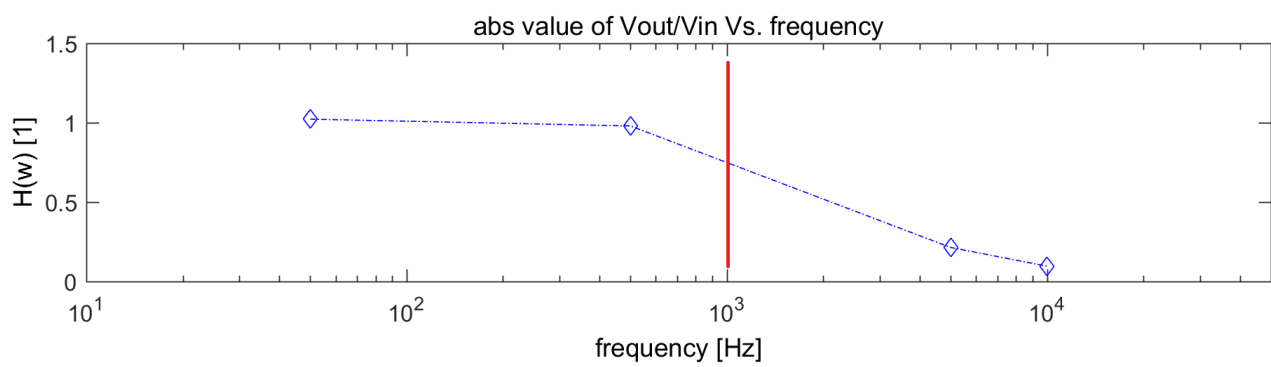
איור 11: שינוי המתח בזמן במעגל ה-RL, בתדר 4000Hz .



איור 12: שינוי המתח בזמן במעגל ה-RL, בתדר 7000Hz .

מסנן תדרים

אלו התוצאות שהתקבלו:



איור 13: $H(\omega)$ vs. f in an LPF circuit (Fig. 4)

מסקנות

חישוב התנגדות פנימית

כפי שניתן לראות ממשוואה 5 ומגרף 6, התקבל איבר חופשי השווה ל- $\frac{1}{V_0}$ (משוואה 6), ולכן על מנת לקבל את ההתנגדות הפנימית של המחולל, עלינו לחלק את השיפוע שקיבלנו (משוואה 7) במקדם החופשי. ראינו כי מפל מהתח על הנגד שלנו אינו משתנה עם התדירות (בתחום הנתון). מכאן נובע ש $R + R_i$ אינם משתנים כתלות בתדירות, R הוא קבוע, ומכך נובע שגם ההתנגדות הפנימית של המחולל הינה קבועה ואינה משתנה עם התדירות. התקבלה שגיאה קטנה (0.4% ~), ועל כן ערך זה מספק הערכה טובה למידת ההתנגדות הפנימית.

מעגל RC

ניתן לראות שעבור $T \gg \tau$ (גרף 7) רואים את הטעינה האקספוננציאלית של הקבל ואת הדעיכה שלו ואכן גרף זה תואם למה שאנו מצפים לראות ממשוואות 3, שכן ניתן לזהות בגרף תבנית מחזורית של אקספוננט עולה, מלווה באקספוננט דועך אחריו. עבור τ באותו סדר גודל של T (גרף 8), מתקבל גרף קרוב יותר ללינארי, מכיוון שאקספוננט (עולה או דועך) נראה כלינארי בסביבת 0, ואנו לא חורגים בהרבה מטווח זמן זה (עדיין ניתן להבחין בעקמומיות קלה) גם מפיתוח טיילור ניתן להבחין בהתנהגות הלינארית של האקספוננט בסביבת 0: $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \approx_{x \ll 1} 1 + x$. עבור $t \ll \tau$ מתקיים $\frac{t}{\tau} \ll 1$ ואז האקספוננט בקירוב לינארי. כאשר t מתקרב ל- τ , מתחילים להבחין בעקמומיות.

בשל מגבלות טכניות של קריאת האוסילוסקופ, לא עלה בידנו למדוד עבור $T \ll \tau$, אלא עבור $T \approx 2 \cdot \tau$ (גרף 9). אולם ניתן להבחין גם עם זמן מחזור זה בהתנהגות הלינארית-מחזורית של המתח, שכן מתקיים $\frac{t}{\tau} \ll 1$.

מעגל RL

כמוזכר, ביצענו מדידות עבור ערכים כלהלן: $T \gg \tau$, $T > \tau$, $T \sim \tau$, אולם לא ביצענו מדידה עבור $T \ll \tau$. הסיבה לכך היא מגבלות טכניות במדידת תדרים גבוהים יותר ע"י הסקופ.

ציפינו ע"פ משוואה 4 למספר חיובי שדועך אקספוננציאלית למספר חיובי קטן יותר ($0 < t < T$), ולאחריו מספר שלילי שגדל אקספוננציאלית למספר שלילי גדול יותר ($0 > t > T$). אכן, התוצאות המתקבלות הולמות את התיאוריה: מתקבלים גרפים הבנויים טלאים טלאים מצורת אקספוננט דועך. עבור $T \sim \tau$ (גרף 12), ניתן להבחין בעקמומיות המתאימה ל"אזור ההתכופות" של אקספוננט (אזור $x = 1$ עבור $\exp x$), עבור $T > \tau$ (גרף 11) כבר מתקבלת צורת ה-"ר", אך עדיין עם עקמומיות, ועבור $T \gg \tau$ (גרף 10) מתקבלת פונקציית מדרגה, בקירוב.

מסנן תדרים

כפי שניתן לראות מסומן באדום בגרף 13, המסנן אכן חותך תדרים החל מסביבת $10kHz$, בעייתי לקבוע על סמך הגרף לבדו היכן בדיוק נחתך החדר (ליחס של $\frac{1}{\sqrt{2}}$, כמתואר בפרק המבוא), בשל רזולוציית דגימה הנמוכה (4 דגימות). עם זאת, נין לראות בבירור כי עבור תדרים הגדולים מקבוע הזמן, היחס בין מתח היציאה למתח הכניסה קטן $1 \gg$, ועבור תדרים הנמוכים אנו מקבלים יחס $1 \approx$. הסיבה לתוצאות הללו היא שהקבל בתדרים נמוכים נטען ומתפרק לאט ולכן הוא נחשב כנתק מה שגורר מתח גבוה עליו. ואילו בתדרים גבוהים הוא לא מספיק להטעין או להפרק ולכן הוא נחשב שקצר, דבר שגורר מתח יציאה נמוך.