Конспект лекций по курсу «Электродинамика»

Галимзянов Т.Р.

СОДЕРЖАНИЕ

К содержанию

К содержанию

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. "Курс теоретической физики. Том II. Электродинамика", 1988.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. "Курс теоретической физики. Том VIII. Электродинамика сплошных сред", 1982.
3. Дж. Кронин, Д. Гринберг, В. Телегди, "Сборник задач по физике с решениями", 1975.
4. Мешков И.Н., Чириков Б.В. Электромагнитное поле. Часть 2. "Электромагнитные волны и оптика", 1987.

Дополнительная литература (не использованная в конспекте):

1. Джексон Дж. "Классическая электродинамика".
2. Френкель Я.И. "Электродинамика".

ЛЕКЦИЯ 1

Источники:

Ландау, т. 2, §2-5.

Специальная теория относительности.

Для описания процессов, происходящих в природе, необходимо иметь, как говорят, систему отсчета. Под системой отсчета понимают систему координат, служащую для указания положения частиц в пространстве, вместе со связанными с этой системой часами, служащими для указания времени.

Существуют системы отсчета, в которых свободное движение тел, т. е. движение тел, не находящихся под действием внешних сил, происходит с постоянной скоростью. Такие системы отсчета носят название **инерциальных**. Если две системы отсчета движутся друг относительно друга равномерно и прямолинейно и если одна из них инерциальная, то очевидно, что и другая тоже является инерциальной (всякое свободное движение и в этой системе будет прямолинейным и равномерным).

Опыт показывает, что справедлив так называемый **принцип относительности. Согласно этому принципу все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета.** Другими словами, уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы к другой. Это значит, что уравнение, описывающее некоторый закон природы, будучи выражено через координаты и время в различных инерциальных системах отсчета, имеет один и тот же вид.

Взаимодействие материальных частиц описывается в обычной механике посредством потенциальной энергии взаимодействия, являющейся функцией от координат взаимодействующих частиц. Легко видеть, что этот способ описания взаимодействий включает в себя предположение о **мгновенности распространения взаимодействий**. Действительно, силы, действующие на каждую из частиц со стороны остальных частиц, в каждый момент зависят, при таком описании, только от положения частиц в этот же момент времени. Изменение положения какой-либо из взаимодействующих частиц отражается на остальных частицах в тот же момент.

Опыт, однако, показывает, что **мгновенных взаимодействий в природе не существует.** Поэтому и механика, исходящая из представления о мгновенности распространения взаимодействий, заключает в себе некоторую неточность. В действительности, если с одним из взаимодействующих тел происходит какое-нибудь изменение, то на другом теле это отразится лишь по истечении некоторого промежутка времени. Только после этого промежутка времени со вторым телом начнут происходить процессы, вызванные данным изменением. Например, если солнце исчезнет, то земля будет двигаться по орбите ещё минут 8, и только потом полетит по касательной. Разделив расстояние между обоими телами

К содержанию

на этот промежуток времени, мы найдем «скорость распространения взаимодействий». Заметим, что эту скорость можно было бы, собственно говоря, называть **максимальной скоростью распространения взаимодействий**. Она определяет лишь тот промежуток времени, после которого изменение, происходящее с одним телом, начинает проявляться на другом. Очевидно, что наличие максимальной скорости распространения взаимодействий означает в то же время, что в природе вообще невозможно движение тел со скоростью, большей этой. Действительно, если бы такое движение могло происходить, то посредством него можно было бы осуществить взаимодействие со скоростью, превышающей наибольшую возможную скорость распространения взаимодействий.

Из принципа относительности вытекает, в частности, что **скорость распространения взаимодействий одинакова во всех инерциальных системах отсчета**. Например, свет, испущенный движущимся фонарём имеет ту же скорость, что и испущенный неподвижным, т.е. не зависит от системы отсчёта – движется ли наблюдатель с фонарём или покоится. Таким образом, скорость распространения взаимодействий является универсальной постоянной. Эта постоянная скорость одновременно является, как будет показано в дальнейшем, скоростью распространения света в пустоте; поэтому ее называют скоростью света.

Объединение принципа относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий называется **принципом относительности Эйнштейна** (он был сформулирован А. Эйнштейном в 1905 г.) в отличие от принципа относительности Галилея, исходящего из бесконечной скорости распространения взаимодействий.

Механика, основанная на эйнштейновском принципе относительности (мы будем обычно называть его просто принципом относительности), называется релятивистской. В предельном случае, когда скорости движущихся тел малы по сравнению со скоростью света, можно пренебречь влиянием конечности скорости распространения взаимодействий на движение. Тогда релятивистская механика переходит в обычную механику, основанную на предположении о мгновенности распространения взаимодействий; эту механику называют ньютоновской или классической. Предельный переход от релятивистской механики к классической может быть формально произведен как переход к пределу $c \to \infty$ в формулах релятивистской механики.

Уже в классической механике **пространство относительно**, т.е. пространственные соотношения между различными событиями зависят от того, в какой системе отсчета они описываются. **Утверждение, что два РАЗНОВРЕМЕННЫХ события происходят в одном и том же месте пространства или, вообще, на определенном расстоянии друг от друга, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится.**

Напротив, **время является в классической механике абсолютным**; другими словами, свойства времени считаются не зависящими от системы отсчета — **время одно для всех систем отсчета**. **Это значит, что если какие-нибудь два явления происходят одновременно для какого-нибудь наблюдателя, то они являются одновременными и для всякого другого.** Вообще, промежуток времени между двумя данными событиями должен быть одинаков во всех системах отсчета.

Легко, однако, убедиться в том, что **понятие абсолютного времени находится в глубоком противоречии с эйнштейновским принципом относительности**. Для этого достаточно уже вспомнить, что в классической механике, основанной на понятии об абсолютном времени, имеет место общеизвестный закон сложения скоростей, согласно которому скорость сложного движения равна просто сумме (векторной) скоростей, составляющих это движение. Этот закон, будучи универсальным, должен был бы быть применим и к распространению взаимодействий. Отсюда следовало бы, что скорость этого распространения должна быть различной в различных инерциальных системах отсчета, в противоречии с принципом относительности. Опыт, однако, вполне подтверждает в этом отношении принцип относительности. Измерения, произведенные впервые **Майкельсоном** (в 1881 г.), обнаружили полную независимость скорости света от направления его распространения; между тем, согласно классической механике, скорость света в направлении движения Земли должна была бы быть отличной от скорости в противоположном направлении.

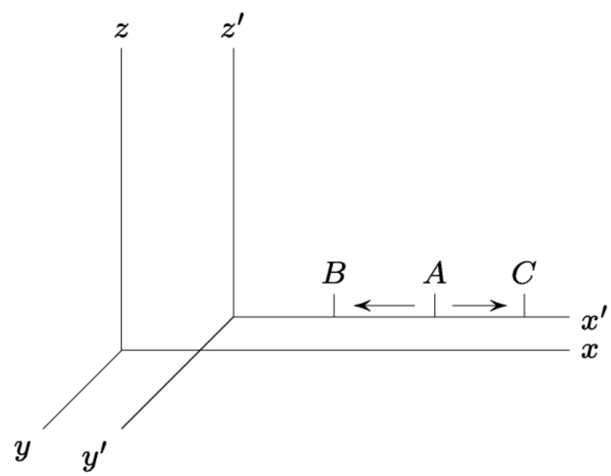


Рисунок 1.

Время течет по-разному в разных системах отсчета. Утверждение, что между двумя данными событиями прошел определенный промежуток времени, приобретает смысл только тогда, когда указано, к какой системе отсчета это утверждение относится. В частности, события, одновременные в некоторой системе отсчета, будут не одновременными в другой системе.

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета *K* и *K*` с осями координат соответственно *xyz* и *x*`*y*`*z*` причем система *K*` движется относительно *K* вправо вдоль осей *x* и *x*` (рис. 1). Пусть из некоторой точки *A* на оси *x*` отправляются сигналы в двух взаимно противоположных направлениях. Поскольку скорость распространения сигнала в системе *K*` как и во всякой инерциальной системе, равна (в обоих направлениях) *c*, то сигналы достигнут равноудаленных от *A* точек *B* и *C* в один и тот же момент времени (в системе *K*`). Легко, однако, видеть, что те же самые два события (приход сигнала в *B* и *C*) будут отнюдь не одновременными для наблюдателя в системе *К*. Действительно, скорость сигналов относительно системы *К*, согласно принципу относительности, равна тому же *с*, и поскольку точка *В* движется (относительно систем *К*) навстречу посланному в нее сигналу, а точка *С* — по направлению от сигнала (посланному из *А* в *С*), то в системе *К* сигнал придет в точку *В* раньше, чем в точку *С*.

Невозможность мгновенной передачи взаимодействия приводит к невозможности существования абсолютно твёрдых тел.

Следствие из отсутствия абсолютно твёрдых тел: из сказанного вытекают определенные выводы, относящиеся к рассмотрению элементарных частиц, т. е. частиц, для которых мы считаем, что их механическое состояние полностью описывается заданием трех координат и трех компонент скорости движения как целого. Очевидно, что если бы элементарная частица обладала конечными размерами, т. е. была бы протяженной, то она не могла бы деформироваться, так как понятие деформации связано с возможностью независимого движения отдельных частей тела. Но, как мы только что видели, теория относительности показывает невозможность существования абсолютно твердых тел.

Таким образом, в классической (неквантовой) релятивистской механике частицам, которые мы рассматриваем как элементарные, нельзя приписывать конечных размеров. Другими словами, в пределах классической теории элементарные частицы должны рассматриваться как точечных).

Таким образом, принцип относительности приводит к результату, что время не является абсолютным. Принцип относительности Эйнштейна вносит фундаментальные изменения в основные физические понятия. Заимствованные нами из повседневного опыта представления о пространстве и времени оказываются лишь приближенными, связанными с тем, что в повседневной жизни нам приходится иметь дело только со скоростями, очень малыми по сравнению со скоростью света.

Итого структура доказательства относительности времени такая:

1. Наблюдение, что мгновенных взаимодействий не существует. Значит есть некоторая максимальная скорость передачи взаимодействия. Эксперимент показывает, что это скорость – скорость света.
2. Максимальная скорость передачи взаимодействия (= скорость света) не зависит от системы отсчёта. Иначе, например, можно было бы передать сигнал быстрее максимальной скорости, испустив его из движущегося источника.
3. Из мысленного эксперимента посыла сигнала в две противоположные стороны видно, что одновременные события в одной системе отсчёта могут быть не одновременными в другой.
4. Невозможность мгновенной передачи взаимодействия приводит к невозможности существования абсолютно твёрдых тел.

Интервал.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться понятием события. Событие определяется местом, где оно произошло, и временем, когда оно

К содержанию

произошло. Таким образом, событие, происходящее с некоторой материальной частицей, определяется тремя координатами этой частицы и моментом времени, когда происходит событие. Часто полезно из соображений наглядности пользоваться воображаемым четырехмерным пространством, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изображается точкой. Эти точки называются мировыми точками. Всякой частице соответствует некоторая линия **(мировая линия)** в этом четырехмерном пространстве. Точки этой линии определяют координаты частицы во все моменты времени. Равномерно и прямолинейно движущейся материальной частице соответствует прямая мировая линия.

Выразим теперь принцип инвариантности скорости света математически. Для этого рассмотрим две системы отсчета *K* и *K*\` движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью. Координатные оси выберем при этом таким образом, чтобы оси $x$ и $x$\` совпадали, а оси y и z были параллельны осям y\` и $z$\`, время в системах *K* и *K*\` обозначим через $t$ и $t$\`.

Пусть первое событие состоит в том, что отправляется сигнал, распространяющийся со скоростью света, из точки, имеющей координаты x_1, y_1, z_1 в системе *K* в момент времени t_1 в этой же системе. Будем наблюдать из системы *K* распространение этого сигнала. Пусть второе событие состоит в том, что сигнал приходит в точку x_2, y_2, z_2 в момент времени t_2. Сигнал распространяется со скоростью c; пройденное им расстояние равно поэтому $c*(t_2 - t_1)$. С другой стороны, это же расстояние равно

$$[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}.$$

Таким образом, мы можем написать следующую зависимость между координатами обоих событий в системе *K*:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0. \quad (1.1)$$

Те же два события, т. е. распространение сигнала, можно наблюдать из системы *K*\`. Пусть координаты первого события в системе *K*\`: x_1\`, $y_1$\`, z_1\`, $t_1$\` а второго: x_2\`, $y_2$\`, z_2\`, $t_2$\`. Поскольку скорость света в системах *K* и *K*\` одинакова, то, аналогично (2.1), имеем

$$(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2 - c^2(t_2' - t_1')^2 = 0. \quad (1.2)$$

Если x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2 — координаты каких-либо двух событий, то величина

$$s_{12} = [c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2]^{1/2} \quad (1.3)$$

называется **интервалом** между этими двумя событиями.

Таким образом, из инвариантности скорости света следует, что если интервал между двумя событиями равен нулю в одной системе отсчета, то он равен нулю и во всякой другой системе. Вообще он сохраняется при переходе от одной системы координат в другую. Интервал между событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчета, т. е. является инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой. Эта инвариантность и является математическим выражением постоянства скорости света.

$$ds = ds`$$

Отсюда выводится собственное время.

Предположим, что мы наблюдаем из некоторой инерциальной системы отсчета произвольным образом движущиеся относительно нас часы. В каждый отдельный момент времени это движение можно рассматривать как равномерное. Поэтому в каждый момент времени можно ввести неподвижно связанную с движущимися часами систему координат, которая (вместе с часами) будет являться тоже инерциальной системой отсчета.

В течение бесконечно малого промежутка времени dt (по неподвижным, т. е. связанным с нами, часам) движущиеся часы проходят расстояние

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Какой промежуток времени dt' покажут при этом движущиеся часы? В системе координат, связанной с движущимися часами, последние покоятся, т. е. $dx' = dy' = dz' = 0$. В силу инвариантности интервала

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2$$

Откуда

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2dt^2}}$$

Но

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2$$

где v есть скорость движущихся часов; поэтому

$$dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Интегрируя это выражение, можно найти промежуток времени, показываемый движущимися часами, если по неподвижным часам пройдет время $t_2 - t_1$.

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Удобной иллюстрацией являются часы в двуижущемся автобусе, а события – (1) часовая стрелка на 1 и (2) часовая стрелка на 2. Видно, что в автобусе пройдёт час, а если смотреть с земли – больше.

К содержанию

Парадокс близнецов не работает, т.к. время медленнее в той системе, что движется, т.к. тебе либо крутиться надо – неинерциальная система отсчёта, либо несколько часов в одной из них.

Преобразование Лоренца.

Рассмотрим инерциальную систему отсчёта *K*`, которая равномерно движется относительно другой инерциальной системы отсчёта *K*. В классической механике *t* = *t*`. Выбирая ось *x* вдоль движения, получим (преобразования Галлилея):

$$x = x' + Vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'.$$

В релятивистской механике, без вывода преобразования Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + (V/c^2)x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Отсюда Лоренцово сокращение

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Правая часть – покоящаяся линейка

Про преобразования Лоренца. Если бы расстояние было евклидово, то поворот на конечный угол должен был сохранять расстояние $x^2 + y^2$, и матрица поворота состояла из тригонометрических функций. Но у нас пространство Миньковского, и сохраняется интервал $x^2 - c^2t^2$, поэтому вместо тригонометрических функций – гиперболические.

Иллюстрация:
Рассмотрим движущийся поезд, и попытаемся «на ходу» измерить его длину. Для этого заранее установим в первом и последнем вагонах автоматические приборы, которые в определенный момент оставили бы на земле какие-то метки. Приборы отрегулируем так, чтобы они срабатывали одновременно с точки зрения сидящего в поезде наблюдателя.

Пусть поезд движется с какой-то определенной скоростью. Когда он проходит мимо нас, сидящий в нем наблюдатель нажимает кнопку, срабатывают приборы, и на земле появляются две отметки. Спрашивается, как по ним установить длину поезда?

Для едущего в поезде наблюдателя приборы сработали одновременно; поэтому расстояние между метками в точности равно длине поезда. Неподвижный же наблюдатель рассуждает иначе. Для него сработал сначала задний прибор, а потом — передний (см. начало первого раздела). За это время поезд успел несколько продвинуться. Поэтому расстояние между метками должно быть больше длины поезда.

Преобразование скоростей

К содержанию

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}.$$

4-вектор

Совокупность координат события (ct, x, y, z) можно рассматривать как компоненты четырехмерного радиус-вектора (или, как мы будем говорить для краткости, 4-радиус-вектора) в четырехмерном пространстве. Его компоненты мы будем обозначать через x^i, где индекс i пробегает значения 0, 1, 2, 3, причем

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

Квадрат «длины» 4-радиус-вектора дается выражением

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

Он не меняется при любых поворотах четырехмерной системы координат, которыми являются, в частности, преобразования Лоренца.

Вообще четырехмерным вектором (4-вектором) A^i называется совокупность четырех величин A^0, A^1, A^2, A^3, которые при преобразованиях четырехмерной системы координат преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора x^i. При преобразовании Лоренца

$$A^0 = \frac{A'^0 + (V/c)A'^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A^1 = \frac{A'^1 + (V/c)A'^0}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3$$

Квадрат величины всякого 4-вектора определяется аналогично квадрату 4-радиус-вектора:

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2.$$

К содержанию

ЛЕКЦИЯ 2

Источники:

Ландау, т. 2, §8, 16-18.

Принцип наименьшего действия.

При исследовании движения материальных частиц мы будем исходить из принципа наименьшего действия. Действие не должно зависеть от выбора той или иной инерциальной системы отсчета, т. е. оно должно быть инвариантом относительно преобразований Лоренца. Отсюда следует, что интеграл действия должен быть взят от скаляра. Далее, ясно, что под интегралом должны стоять дифференциалы в первой степени. Однако единственный такой скаляр, который можно построить для свободной материальной частицы, есть интервал ds или αds, где α — некоторая постоянная. Итак, действие для свободной частицы должно иметь вид:

$$S = -\alpha \int_a^b ds$$

где интеграл берется вдоль мировой линии между двумя заданными событиями a и b — нахождением частицы в начальном и конечном местах в определенные моменты времени t_1 и t_2, т. е. между заданными мировыми точками; α есть некоторая постоянная, характеризующая данную частицу.

Действие можно представить в виде интеграла по времени:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\,dt$$

Коэффициент L при dt называется, как известно, функцией Лагранжа для данной механической системы. С помощью (1.4) находим:

$$S = -\int_{t_1}^{t_2} \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt,$$

где v — скорость материальной частицы. Функция Лагранжа для частицы есть, следовательно,

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Из предельного случая $c \to \infty$ видно, что

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

Постоянные члены в функции Лагранжа не отражаются на уравнениях движения и могут быть опущены. Опустив в L постоянную αc и сравнив с классическим выражением $L = mv^2/2$, найдем, что $\alpha = mc$. Таким образом, действие для свободной материальной точки равно:

$$S = -mc \int_a^b ds \tag{1.6}$$

а функция Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Поле

Взаимодействие частиц друг с другом можно описывать с помощью понятия силового поля. Вместо того чтобы говорить о том, что одна частица действует на другую, можно сказать, что частица создает вокруг себя поле; на всякую другую частицу, находящуюся в этом поле, действует некоторая сила. В классической механике поле является лишь некоторым способом описания физического явления — взаимодействия частиц. В теории относительности благодаря конечности скорости распространения взаимодействий положение вещей существенным образом меняется. Силы, действующие в данный момент на частицу, не определяются их расположением в этот момент. Изменение положения одной из частиц отражается на других частицах лишь спустя некоторый промежуток времени. Это значит, что поле само по себе становится физической реальностью. **Мы не можем говорить о непосредственном взаимодействии частиц, находящихся на расстоянии друг от друга. Взаимодействие может происходить в каждый момент лишь между соседними точками пространства (близкодействие). Поэтому мы должны говорить о взаимодействии одной частицы с полем и о последующем взаимодействии поля с другой частицей.**

4-потенциал поля. Действие системы зарядов в ЭМ поле.

Действие для частицы, движущейся в заданном электромагнитном поле, складывается из двух частей: из действия (1.6) свободной частицы и из члена, описывающего взаимодействие частицы с полем. Последний должен содержать как величины, характеризующие частицу, так и величины, характеризующие поле.

Оказывается, что свойства частицы в отношении ее взаимодействия с электромагнитным полем определяются всего одним параметром — так называемым зарядом частицы e, который может быть, как положительной, так и отрицательной (или равной нулю) величиной. Свойства же поля характеризуются 4-вектором A (чтобы отличать 4-вектор от 3-мерного, 4-вектор не выделяется жирным шрифтом и над ним не ставится стрелка), так называемым 4-потенциалом, компоненты которого являются функциями координат и времени. Эти величины входят в действие в виде члена записанном в лоренц-инвариантном виде:

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A_i dx^i,$$

где функции A_i берутся в точках мировой линии частицы. Множитель $1/c$ введен здесь для удобства. Таким образом, действие для заряда в электромагнитном поле имеет вид:

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds-\frac{e}{c}A_i dx^i\right)$$

В СИ нет 1/с перед зарядом!

Три пространственные компоненты 4-вектора A_i образуют трехмерный вектор **A**, называемый векторным потенциалом поля. Временную же компоненту называют скалярным потенциалом, обозначим ее как $A^0 = \phi$. Таким образом:

$$A^i=(\varphi,\mathbf{A})\ \text{(СГС)}$$

В СИ

$$A^i=\left(\frac{\phi}{c},\mathbf{A}\right)\text{(СИ)}$$

Поэтому интеграл действия можно написать в виде:

$$S=\int_a^b\left(-mc\,ds+\frac{e}{c}\mathbf{A}\,d\mathbf{r}-e\varphi\,dt\right)$$

или, вводя скорость частицы $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ и переходя к интегрированию по времени, в виде

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\left(-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi\right)dt.$$

(записать кинетическую часть в классическом, не релятивистском, виде!)
Подынтегральное выражение есть функция Лагранжа для заряда в электромагнитном поле:

$$L=-mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v}-e\varphi.$$

Производная $dL/d\mathbf{v}$ есть обобщенный импульс частицы; обозначим его буквой **P**. Производя дифференцирование, находим

$$\mathbf{P}=\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+\frac{e}{c}\mathbf{A}=\mathbf{p}+\frac{e}{c}\mathbf{A}$$

В СИ нет 1/с перед зарядом!
Здесь мы обозначили буквой **p** обычный импульс частицы, который мы и будем называть просто импульсом. Из функции Лагранжа можно найти функцию Гамильтона частицы в поле по известной общей формуле:

[К содержанию](#)

$$\mathscr{H} = \mathbf{v}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L.$$

В нерелятивистском случае получим:

$$H = \frac{mv^2}{2} + e\phi$$

ВАЖНО! В энергию не входит вектор-потенциал. Только электрический!

Через обобщённый импульс гамильтониан выглядит так:

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi.$$

Это ВАЖНО потом, для квантовой механики!

Уравнения Максвелла.

Напомнить, что в СИ

$$A^i = \left(\frac{\phi}{c}, \mathbf{A}\right)(\text{СИ})$$

Функция Лагранжа для заряда в электромагнитном поле (записать в нерелятивистском виде):

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\varphi.$$

В СИ нет 1/с перед зарядом!

Заряд, находящийся в поле, не только подвергается воздействию со стороны поля, но в свою очередь сам влияет на поле, изменяя его. Однако если заряд *e* не велик, то его действием на поле можно пренебречь. В этом случае, рассматривая движение в заданном поле, можно считать, что само поле не зависит ни от координат, ни от скорости заряда.

Итак, нам надо найти уравнения движения заряда в заданном электромагнитном поле. Эти уравнения получаются варьированием действия, т. е. даются уравнениями Лагранжа.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$$

Обобщённый импульс часть мы знаем (можно ещё раз вывести):

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{e}{c}\mathbf{A} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}.$$

В СИ нет 1/с перед зарядом!

Теперь градиент:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \equiv \nabla L = \frac{e}{c}\operatorname{grad}\mathbf{A}\mathbf{v} - e\operatorname{grad}\varphi.$$

Эта формула была доказана на семинаре:

$$\operatorname{grad}\mathbf{ab} = (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} + [\mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}] + [\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b}],$$

К содержанию

Дефференциирование по **r** производится при постоянном **v** (частная производная).

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}] - e\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Получаем уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) = \frac{e}{c}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}] - e\,\mathrm{grad}\,\varphi.$$

В СИ нет 1/с перед зарядом!

Но полный дифференциал $(d\mathbf{A}/dt)\cdot dt$ складывается из двух частей: из изменения $(\partial\mathbf{A}/\partial t)\cdot dt$ векторного потенциала со временем в данной точке пространства и из изменения при переходе от одной точки пространства к другой на расстояние dr. Эта вторая часть равна $(dr\ v)\mathbf{A}$:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{A}.$$

Пояснить градиент по направлению.

В итоге получаем:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - e\,\mathrm{grad}\,\varphi + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}].$$

Это и есть **уравнение движения частицы в электромагнитном поле**. Слева стоит производная от импульса частицы по времени. Следовательно, выражение в правой части) есть сила (напомнить про уравнение ньютона в нормальной форме), действующая на заряд в электромагнитном поле. Эта сила состоит из двух частей. **Первая часть** не зависит от скорости частицы. **Вторая часть** зависит от этой скорости: пропорциональна величине скорости и перпендикулярна к ней **(не совершает работы!)**. Силу первого рода, отнесенную к заряду, равному единице, называют напряженностью электрического поля **E**. Итак, по определению:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\varphi.$$

В СИ нет 1/с!

Множитель при скорости, точнее при **v**/c, в силе второго рода, действующей на единичный заряд, называют напряженностью магнитного поля, обозначим ее через **H**. Итак, по определению,

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}.\ \text{(СГС)}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\ \text{(СИ)}$$

Если в электромагнитном поле **E** ≠ 0, а **H** = 0, то говорят об электрическом поле, если же **E** = 0, **H** ≠ 0, то поле называют магнитным. В общем случае электромагнитное поле является наложением полей электрического и магнитного. Отметим, что **E** представляет собой полярный, а **H** — аксиальный вектор **(рассказать!)**.

Аксиальный вектор или псевдовектор — величина, компоненты которой преобразуются как вектор при поворотах системы координат, но меняющие свой знак противоположно

К содержанию

тому, как ведут себя компоненты вектора при любой инверсии (обращении знака) координат. Аналог псевдоскаляра.

Индукция магнитного поля — псевдовектор, так как порождается псевдовекторной операцией, например в законе Био — Савара $\mathbf{B} \sim [\mathbf{j}, \mathbf{r}]$, *но сама эта величина (псевдовектор) определена в принципе с точностью до условного множителя, который может быть выбран +1 или −1. Однако реально наблюдаемая величина — ускорение заряда под действием магнитного поля — при своём вычислении содержит ещё одну псевдовекторную операцию* $\mathbf{F} \sim [\mathbf{B}, \mathbf{v}]$ *в выражении для силы Лоренца, дающую ещё один условный множитель ±1, равный первому, в ответе же произвол пропадает, так как произведение ±1·(±1) даёт просто 1.*

Уравнения движения заряда в электромагнитном поле можно теперь написать в виде:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{vH}].$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{vB}] \quad \text{(СИ)}$$

Выведем еще уравнение, определяющее изменение кинетической энергии частицы со временем. Легко убедиться, что:

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt} = \mathbf{v}\frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

подставляя $d\mathbf{p}/dt$ и замечая, что $[\mathbf{vH}]\mathbf{v} = 0$, имеем

$$\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt} = e\mathbf{Ev}.$$

Изменение кинетической энергии со временем есть работа, произведенная полем над частицей (в единицу времени). Видно, что эта **работа равна произведению скорости заряда на силу, с которой действует на него электрическое поле**. Подчеркнем, что работу над зарядом производит только электрическое поле; **магнитное поле не производит работы над движущимся в нем зарядом**. Последнее связано с тем, что сила, с которой магнитное поле действует на частицу, всегда перпендикулярна к ее скорости.

Уравнения механики инвариантны по отношению к перемене знака у времени, т. е. по отношению к замене будущего прошедшим. Другими словами, в механике оба направления времени эквивалентны. Это значит, что если согласно уравнениям механики возможно какое-нибудь движение, то возможно и обратное движение, при котором система проходит те же состояния в обратном порядке. Легко видеть, что то же самое имеет место и в электромагнитном поле в теории относительности. При этом, однако, вместе с заменой t на — t надо изменить знак магнитного поля. Действительно, легко видеть, что уравнения движения не меняются, если произвести замену.

$$t \to -t, \quad \mathbf{E} \to \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \to -\mathbf{H}.$$

К содержанию

Отсюда следует, что скалярный потенциал не меняется, а векторный меняет знак:

$$\varphi \to \varphi, \quad \mathbf{A} \to -\mathbf{A}.$$

Таким образом, если в электромагнитном поле возможно некоторое движение, то возможно и обратное движение в поле с обратным направлением **H**.

Вообще, все массы и заряды, а также остальные константы, не связанные со слабым взаимодействием, тоже обладают симметрией при обращении времени.

Формулы классической механики, классической электродинамики, квантовой механики (! Осторожно!), теории относительности не меняются при обращении времени. Термодинамика, где действует второе начало термодинамики (закон неубывания энтропии), несимметрична относительно обращения времени, хотя на уровне механических законов, описывающих движение частиц термодинамической системы, время обратимо. Это связано с большей вероятностью пребывания термодинамической системы в макросостоянии, которое реализуется б***о***льшим числом (равновероятных) микросостояний.

В микромире *T*-симметрия нарушается в слабых взаимодействиях. Более строго – любая разумная теория поля должна быть CPT-инвариантна.

Если уравнение, описывающее физическую систему, не инвариантно относительно обращения времени, то физическая система необратима. Например, протекание тока по проводнику описывается законом Ома = σ**E**. В этом случае имеем **j** = –**j**, **E** = –**E**. Из-за рассеяния джоулева тепла система необратима.

Калибровочная инвариантность

Рассмотрим теперь вопрос о том, насколько однозначно определены потенциалы поля. При этом следует учесть, что поле характеризуется тем действием, которое оно оказывает на движение находящихся в нем зарядов. Но в уравнения движения входят не потенциалы, а напряженности поля **E** и **H**. Поэтому два поля физически тождественны, если они характеризуются одними и теми же векторами **E** и **H**. Если заданы потенциалы **A** и ϕ, то этим вполне однозначно определены **E** и **H**, а значит и поле. Однако одному и тому же полю могут соответствовать различные потенциалы. Чтобы убедиться в этом, прибавим к каждой компоненте потенциала **A** величину $-df/dx^k$, где f — произвольная функция от координат и времени. Тогда потенциал A_k переходит в

$$A'_k = A_k - \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

При такой замене в интеграле действия появится дополнительный член, представляющий собой полный дифференциал:

К содержанию

$$\frac{e}{c}\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k = d\left(\frac{e}{c}f\right)$$

ВНИМАНИЕ! Оператор 4-градиента $\frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$

В действие же входит интеграл

$$-\frac{e}{c}\int_a^b A_i dx^i,$$

Тогда всё проинтегрируется, и останется постоянная, не влияющая на уравнения движения. В явном виде координат так:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \mathrm{grad}\, f, \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}$$

Показать! (**ДЗ**) Легко **убедиться** в том, что электрическое и магнитное поля действительно не изменяются при подстановке.

Потенциалы определены поэтому не однозначно — векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной функции и скалярный — с точностью до производной по времени от той же функции.

В частности, к векторному потенциалу можно прибавить любой постоянный вектор, а к скалярному потенциалу — любую постоянную. Это видно и непосредственно из того, что в определение **E** и **H** входят только производные от **A** и ϕ, и потому прибавление к последним постоянных не влияет на напряженности поля.

Физический смысл имеют лишь те величины, которые инвариантны по отношению к преобразованию потенциалов; поэтому все уравнения должны быть инвариантны по отношению к этому преобразованию. Эту инвариантность называют калибровочной или градиентной (по-немецки ее называют Eich-invarianz, по-английски — gauge invariance).

Описанная неоднозначность потенциалов дает всегда возможность выбрать их так, чтобы они удовлетворяли одному произвольному дополнительному условию, — одному, так как мы можем произвольно выбрать одну функцию f. В частности, всегда можно выбрать потенциалы поля так, чтобы скалярный потенциал ϕ был равен нулю. Сделать же векторный потенциал равным нулю, вообще говоря, невозможно, так как условие $\mathbf{A} = 0$ представляет собой три дополнительных условия (для трех компонент A).

Самые распространённые калибровки:

1. Кулоновская калибровка $\mathrm{div}(\mathbf{A}) = 0$

К содержанию

Эта калибровка применяется для рассмотрения нерелятивистских магнитостатических задач. В этой калиборовке потенциал связан с плотностью заряда привычным образом:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\mathbf{r}',t)}{R}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}'$$

2. Калибровка Лоренца:

$$\operatorname{div}(\mathbf{A})+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0\quad(\text{СГС})$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A})+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0\quad(\text{СИ})$$

Эквивалентно:

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0$$

Эта калибровка применяется для рассмотрения динамических задач. В калибровке Лоренца удобно записываются волновые уравнения:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\nabla^2\varphi=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathbf{A}=\mu_0\mathbf{J}$$

В 4-мерном виде:

$$\partial_\mu\partial^\mu A^\nu=\mu_0 j^\nu$$

К содержанию

ЛЕКЦИЯ 3

Источники:

Ландау, т. 2, §19-21, 26, 23

Постоянное электрическое поле

Постоянным электромагнитным полем мы называем поле, не зависящее от времени. Очевидно, что потенциалы постоянного поля можно выбрать так, чтобы они были функциями только от координат, но не от времени. Постоянное магнитное поле по-прежнему равно **H** = **rot**(**A**). Постоянное же электрическое поле

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Таким образом, постоянное электрическое поле определяется только скалярным потенциалом, а магнитное — векторным потенциалом.

В постоянном поле к скалярному потенциалу можно прибавить, не изменяя поля, лишь произвольную постоянную (не зависящую ни от координат, ни от времени). Обычно на ϕ накладывают еще дополнительное условие, требуя, чтобы он имел определенное значение в определенной точке пространства; чаще всего выбирают ϕ так, чтобы он был равен нулю на бесконечности. Тогда и упомянутая произвольная постоянная становится определенной, и скалярный потенциал постоянного поля становится однозначным. Напротив, векторный потенциал по-прежнему не однозначен даже для постоянного электромагнитного поля; к нему можно прибавить градиент любой функции координат **(ротор градиента равен нулю!)**.

Однородное поле

Если напряженность поля во всех точках пространства одинакова, то поле называют однородным. Скалярный потенциал однородного электрического поля может быть выражен через напряженность поля согласно равенству

$$\varphi = -\mathbf{E}\mathbf{r}.$$

Действительно, при **E** = const имеем $\operatorname{grad}\left(\mathbf{E}\mathbf{r}\right) = \left(\mathbf{E}\nabla\right)\mathbf{r} = \mathbf{E}$. (<u>**ДЗ**</u>)

Векторный же потенциал однородного магнитного поля выражается через напряженность этого поля **H** в виде:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H}\mathbf{r}].$$

(<u>**ДЗ**</u>) Действительно, при **H** = const находим с помощью известного соотношения $\left[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]\right] = \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$.

К содержанию

- В случае суммирования по общему

$$\sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

- В случае двух общих индексов i,

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$$

$$\operatorname{rot}\,[\mathbf{Hr}] = \mathbf{H}\,\operatorname{div}\mathbf{r} - (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{r} - 2\mathbf{H}$$

(вывести)

Векторный потенциал однородного магнитного поля можно выбрать и иначе, например, в виде

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0$$

Движение в электрическом поле

Движение в поле постоянной силы.

Движение в магнитном поле.

(<u>**ДЗ**</u>) Решение в лоб – расписать матрицу векторного произведения, свести к системе уравнений и т.д.

<u>Решение элегантное.</u>

Запишем уравнение движения:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

Перепишем его через скорость:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{e}{c}[\mathbf{vH}]$$

в компонентах:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \qquad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0 \qquad (21.2)$$

где

$$\omega = \frac{eH}{mc} \qquad \textbf{(СГС)}$$

$$\omega = \frac{eB}{m} \qquad \textbf{(СИ)}$$

Умножим второе из уравнений (21.2) на i и сложим с первым:

$$\frac{d}{dt}(v_x + iv_y) = -i\omega(v_x + iv_y),$$

откуда

[К содержанию](#)

$$v_x + iv_y = ae^{-i\omega t},$$

где a — комплексная постоянная. Ее можно написать в виде $a = v_{0t}e^{-i\alpha}$, где v_{0t} и α вещественны. Тогда

$$v_x + iv_y = v_{0t}e^{-i(\omega t+\alpha)} \qquad (21.4)$$

и, отделяя действительную и мнимую части, находим

$$v_x = v_{0t}\cos(\omega t + \alpha), \quad v_y = -v_{0t}\sin(\omega t + \alpha). \qquad (21.4)$$

Постоянные v_{0t} и α определяются начальными условиями, α есть начальная фаза; что же касается v_{0t}, то из (21.4) видно, что

$$v_{0t} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

т. е. v_{0t} есть скорость частицы в плоскости xy, остающаяся при движении постоянной.

Из (21.4) находим, интегрируя еще раз:

$$x = x_0 + r\sin(\omega t + \alpha), \quad y = y_0 + r\cos(\omega t + \alpha), \qquad (21.5)$$

где

$$r = \frac{v_{0t}}{\omega} = \frac{v_{0t}\mathscr{E}}{ecH} = \frac{cp_t}{eH} \qquad (21.6)$$

(p_t — проекция импульса на плоскость xy). Из третьего уравнения (21.2) находим: $v_z = v_{0z}$ и

$$z = z_0 + v_{0z}t. \qquad (21.7)$$

Видно, что заряд движется в однородном магнитном поле по винтовой линии с осью вдоль магнитного поля и с радиусом r. Скорость частицы при этом постоянна по величине. В частном случае, когда v_{0z} = 0, т. е. заряд не имеет скорости вдоль поля, он движется по окружности в плоскости, перпендикулярной к полю. Величина ω, как видно из формул, есть циклическая частота (**циклотронная частота**) вращения частицы в плоскости, перпендикулярной к полю:

$$\omega = \frac{eH}{mc} \qquad \textbf{(СГС)}$$

$$\omega = \frac{eB}{m} \qquad \textbf{(СИ)}$$

В скрещенных полях на семинаре

Первая пара уравнений Максвелла

Из выражений

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\phi$$

легко получить уравнения, содержащие только **E** и **H**. Для этого определим rot(**E**):

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{A} - \operatorname{rot}\operatorname{grad}\phi$$

Но ротор всякого градиента равен нулю; следовательно,

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{26.1}$$

Взяв дивергенцию от обеих частей уравнения $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$ и помня, что дивергенция всякого ротора равна нулю, находим

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \tag{26.2}$$

т.е. по сути это следствие определения ЭМ полей. Уравнения (26.1), (26.2) составляют первую пару уравнений Максвелла. Заметим, что эти два уравнения еще не определяют вполне свойства поля. Это видно уже из того, что они определяют изменение магнитного поля со временем (производную $\partial\mathbf{H}/\partial t$), но не определяют производной $\partial\mathbf{E}/\partial t$.

Уравнения (26.1), (26.2) можно написать в интегральной форме. Согласно теореме Гаусса:

$$\int div(\mathbf{H})\,dV = \oint \mathbf{H}d\mathbf{S}$$

где интеграл справа берется по всей замкнутой поверхности, охватывающей объем, по которому взят интеграл слева. На основании (26.2) имеем

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{S} = 0$$

Интеграл от вектора по некоторой поверхности называется потоком вектора через эту поверхность. Таким образом, поток магнитного поля через всякую замкнутую поверхность равен нулю.

Согласно теореме Стокса

$$\int \mathbf{rot}(\mathbf{E})\,d\mathbf{S} = \oint \mathbf{E}d\mathbf{l}$$

где интеграл справа берется по замкнутому контуру, огибающему поверхность, по которой интегрируется слева. Из (26.1) находим, интегрируя обе части по некоторой поверхности:

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}d\mathbf{S}$$

Интеграл вектора по замкнутому контуру называется циркуляцией этого вектора по контуру. Циркуляцию электрического поля называют также электродвижущей силой в данном контуре. Таким образом, электродвижущая сила в некотором контуре равна взятой с обратным знаком производной по времени от потока магнитного поля через поверхность, ограничиваемую этим контуром.

СИ:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

К содержанию

Тензор электромагнитного поля

Ранее мы вывели уравнения движения заряда в поле, исходя из функции Лагранжа, написанной в трехмерном виде. Выведем теперь те же уравнения непосредственно из действия, написанного в четырехмерных обозначениях. Проварьируем действие частицы в поле:

$$\delta S = \delta \int_a^b \left(-mc\,ds - \frac{e}{c}A_i dx^i\right) = 0.$$

Замечая, что $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$, находим (пределы интегрирования a и b мы будем ниже для краткости опускать):

$$\delta S = -\int \left(mc\frac{dx_i\,d\delta x^i}{ds} + \frac{e}{c}A_i\,d\delta x^i + \frac{e}{c}\delta A_i\,dx^i\right) = 0.$$

В первом члене введем 4-скорость $u_i = \dfrac{dx_i}{ds}$. Где 4-скорость:

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}\right).$$

Это легко показать, вспоминая, что по определению интервала $ds = c\,dt\sqrt{1-v^2/c^2}$. Обратите внимание на размерность 4-скорости – она безразмерна!

Первые два члена в подынтегральном выражении проинтегрируем по частям. Получим:

$$\int \left(mc\,du_i\,\delta x^i + \frac{e}{c}\delta x^i dA_i - \frac{e}{c}\delta A_i\,dx^i\right) - \left(mcu_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i = 0.$$

Второй член этого равенства равен нулю, так как интеграл варьируется при заданных значениях координат на пределах. Далее (варьируем же траекторию, а не поле! Поэтому изменения поля связаны лишь с изменениями трвектории),

$$\delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k, \quad dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^k$$

и поэтому

$$\int \left(mc\,du_i\,\delta x^i + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^i dx^k - \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial x^k}dx^i \delta x^k\right) = 0.$$

Напишем в первом члене $du_i = \dfrac{du_i}{ds}ds$, во втором и третьем $dx^i = u^i ds$. Кроме того, в третьем члене поменяем местами индексы i и k.

$$\int \left[mc\frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k\right]\delta x^i ds = 0.$$

Ввиду произвольности δx^i отсюда следует, что подынтегральное выражение равно нулю:

$$mc\frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)u^k = 0$$

К содержанию

Введем обозначение

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$$

Этот антисимметричный тензор называется тензором электромагнитного поля. Тогда полученное уравнение напишется в виде:

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k$$

Можно вывести связь магнитного поля и тензора:

ВНИМАНИЕ! Оператор 4-градиента $\frac{\partial}{\partial x^k} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right)$

Т.е. для i, k = 1,2,3: $F_{ik} = -\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)$

$$H_i = \mathrm{rot}\left(\mathbf{A}\right)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}\right) = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F_{jk}$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{mli}\varepsilon_{ijk}F_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{iml}\varepsilon_{ijk}F_{jk} = \frac{1}{2}\left(\delta_{jm}\delta_{kl}F_{jk} - \delta_{jl}\delta_{km}F_{jk}\right) = \frac{1}{2}\left(\delta_{jm}\delta_{kl}F_{jk} + \delta_{kl}\delta_{jm}F_{jk}\right) = F_{ml}$$

$$F_{ml} = -\varepsilon_{mli}H_i$$

И электрического:

$$F_{i0} = \left(\frac{\partial A_0}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_0}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \frac{1}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t} = -E_i$$

i – строки.

$$F_{ik} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}, F^{ik} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{bmatrix}.$$

В СИ стоят E/c, вместо H – B

Переходя к трехмерным обозначениям, легко убедиться в том, что три пространственные компоненты (i = 1, 2, 3) уравнения (3.4) тождественны с векторным уравнением движения (17.5), а временная компонента (i = 0) — с уравнением работы (17.7) $\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v}$. Последнее есть следствие уравнения движения.

В пределе малых скоростей $\frac{du^i}{ds}$ запишется в виде:

$$\frac{du^i}{ds} = \left(\frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})}{c^3}, \frac{\mathbf{a}}{c^2}\right)$$

К содержанию

Тогда для уравнение движения для пространственных компонент принимает вид:

$$m \cdot \frac{\mathbf{a}_i}{c} = -e \cdot \frac{1}{c^2} \varepsilon_{ikj} H_j v_k + \frac{e}{c} \cdot E_i$$

$$m\mathbf{a}_i = \frac{e}{c} \cdot [\mathbf{vH}]_i + e \cdot \mathbf{E}_i$$

Для нулевой компоненты:

$$m \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v})}{c^2} = \frac{e}{c^2} E_k v_k = \frac{e}{c^2} (\mathbf{Ev})$$

$$m(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}(E_{кин})$$

$$\frac{d}{dt}(E_{кин}) = e(\mathbf{Ev})$$

ЛЕКЦИЯ 4

Источники:

Ландау, т. 2, §28, 30, 31.

4-ток

Кратко про дельта-функцию.

[1]) δ-функция определяется следующим образом: $\delta(x) = 0$ при всех не равных нулю значениях x; при $x = 0$ $\delta(0) = \infty$, причем так, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1. \qquad (1)$$

Из этого определения вытекают следующие свойства: если $f(x)$ — любая непрерывная функция, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a); \qquad (2)$$

в частности,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0) \qquad (3)$$

(пределы интегрирования, разумеется, не обязательно должны быть $\pm\infty$; областью интегрирования может быть любая область, заключающая ту точку, в которой δ-функция не исчезает). Смысл следующих равенств заключается в том, что их левая и правая части дают одинаковые результаты, если их применять в качестве множителей под знаком интегрирования:

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x).$$

Последнее равенство является частным случаем более общего соотношения

$$\delta[\varphi(x)] = \sum_i \frac{1}{|\varphi'(a_i)|}\delta(x-a_i),$$

где $\phi(x)$ — однозначная функция (обратная ей функция не обязана быть однозначной), а a_i — корни уравнения $\phi(x) = 0$.

Подобно тому как $\delta(\mathrm{x})$ определена для одной переменной x, можно ввести трехмерную δ-функцию $\delta(\mathbf{r})$, равную нулю везде, кроме начала трехмерной системы координат, и интеграл которой по всему пространству равен 1. Такую функцию можно, конечно, представить как произведение $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$.

Пойдём обобщать дальше. Рассмотрим ток. Превратим его в 4-вектор. Вместо того чтобы рассматривать заряды как точечные, в целях математического удобства часто рассматривают заряд как распределенный в пространстве непрерывным образом. Тогда можно ввести плотность заряда ρ так, что ρdV есть заряд, находящийся в объеме dV, ρ есть, вообще говоря, функция от координат и времени. Интеграл от ρ по некоторому объему есть заряд, находящийся в этом объеме. При этом надо помнить, что в действительности заряды являются точечными, так что плотность ρ равна нулю везде, кроме тех точек, где находятся точечные заряды, а интеграл ρdV должен быть равен сумме тех зарядов, которые находятся в данном объеме. Поэтому ρ можно написать с помощью δ-функций.

$$\rho = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

Заряд частицы есть, по самому своему определению, величина инвариантная, т. е. не зависящая от выбора системы отсчета. Напротив, плотность ρ не есть инвариант, — инвариантом является лишь произведение ρdV.

Умножим обе части равенства $de = \rho dV$ на dx^i:

$$de\, dx^i = \rho\, dV\, dx^i = \rho\, dV\, dt \frac{dx^i}{dt}$$

Обозначим часть выражения в правой части следующим образом:

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt}$$

Эта величина называется **4-вектором плотности тока**. По копонентам можно записать 4-ток следующим образом:

$$j^i = (c\rho, \mathbf{j})$$

где $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$.

Вклад в действие записывается так:

$$-\frac{1}{c} \int \rho A_i dx^i dV,$$

заменив сумму по зарядам интегралом по всему объему. Переписав его как

$$-\frac{1}{c} \int \rho \frac{dx^i}{dt} A_i\, dV\, dt,$$

мы видим, что этот член равен

$$-\frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega.$$

где $d\Omega$ – элемент 4-объёма.

Изменение со временем заряда, находящегося в некотором объеме, дается производной

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho\, dV.$$

С другой стороны, изменение за единицу времени определяется количеством заряда, выходящего за это время из данного объема наружу, или, наоборот, входящего внутрь его. Количество заряда, проходящего за единицу времени через элемент $d\mathbf{S}$ поверхности, ограничивающей наш объем, равно $\rho \mathbf{v} d\mathbf{S}$, где $\mathbf{v}$ есть скорость заряда в той точке пространства, где находится элемент $d\mathbf{S}$. Вектор $d\mathbf{S}$ направлен, как это всегда принимается, по внешней нормали к поверхности, т. е. по нормали, направленной наружу от рассматриваемого объема. Поэтому $\rho \mathbf{v} d\mathbf{S}$ положительно, если заряд выходит из нашего объема, и отрицательно, если заряд входит в него. Полное количество заряда, выходящего в единицу времени из данного объема, есть, следовательно, $\rho\mathbf{v}d\mathbf{S}$, где интеграл распространен по всей замкнутой поверхности, ограничивающей этот объем.

Из сравнения обоих полученных выражений находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\oint \rho\mathbf{v}d\mathbf{S} \tag{29.1}$$

Справа поставлен знак минус, так как левая часть положительна, если полный заряд в данном объеме увеличивается. Уравнение (29.1), выражающее собой закон сохранения заряда, есть так называемое уравнение непрерывности, написанное в интегральном виде. Замечая, что $\rho\mathbf{v}$ есть плотность тока, можно переписать (29.1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho dV = -\oint \mathbf{j}d\mathbf{S}$$

Напишем это же уравнение в дифференциальном виде. Применив к правой части (29.2) теорему Гаусса

$$\oint \mathbf{j}d\mathbf{S} = \int div(\mathbf{j})\,dV$$

находим

$$\int \left(\operatorname{div}\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right) dV = 0$$

Поскольку это равенство должно иметь место при интегрировании по любому объему, то подынтегральное выражение должно быть равно нулю:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Это и есть уравнение непрерывности в дифференциальном виде.
В 4-мерном виде уравнение непрерывности запишется в виде:

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

Действие чистого поля. Вторая пара уравнений.

Нами было записано действие частицы в ЭМ поле. Тут пренебрегается полем, создаваемым самой частицей. Надо дополнить действие. Использовать поля нельзя, т.к. будет нарушаться калибровочная инвариантность. Остаются только производные. Причём в квадрате, т.к. линейные просто проинтегрируются. **Более высокие степени приведут к нелинейности = нет суперпозиции.** Оказывается, что удобно пользоваться такой комбинацией:

Из неё можно создать два скаляра

$$F_{ik}F^{ik} = \text{inv},$$

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \text{inv},$$

Отметим, что псевдоскаляр $e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = \mathrm{inv}$, может быть представлен в виде 4-дивергенции:

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = 4\frac{\partial}{\partial x^i}\left(e^{iklm}A_k\frac{\partial}{\partial x^l}A_m\right),$$

Поэтому он не вносит вклада в действие.

Можно показать, что $F_{ik}F^{ik} = 2*(-E^2 + H^2)$

Действие запишется в виде:

$$S_f = -\frac{1}{16\pi c}\int F_{ik}F^{ik}d\Omega, \quad d\Omega = c\,dt\,dx\,dy\,dz.$$

$$L_f = -\frac{1}{4\mu_0}F_{ik}F^{ik} \text{ (СИ)}$$

В трехмерном виде

$$S_f = \frac{1}{8\pi}\iint (E^2 - H^2)dV\,dt. \qquad (27.5)$$

Другими словами, функция Лагранжа электромагнитного поля

$$L_f = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - H^2)\,dV. \qquad (27.6)$$

Проварьируем действие:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left[\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}F^{ik}\delta F_{ik}\right]d\Omega = 0$$

(при варьировании во втором члене учтено, что $F^{ik}\delta F_{ik} \equiv$ $\equiv F_{ik}\delta F^{ik}$. Подставляя

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k},$$

имеем

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^i\delta A_i + \frac{1}{8\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_k - \frac{1}{8\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right\}d\Omega.$$

Во втором члене меняем местами индексы i и k, по которым производится суммирование, и, кроме того, заменяем F_{ki} на $-F_{ik}$. Тогда мы получим:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^i\delta A_i - \frac{1}{4\pi}F^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right\}d\Omega.$$

Второй из этих интегралов берем по частям, т. е. применяем теорему Гаусса:

$$\delta S = -\frac{1}{c}\int\left\{\frac{1}{c}j^i + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right\}\delta A_i\,d\Omega - \frac{1}{4\pi c}\int F^{ik}\delta A_i\,dS_k.$$

Второй интеграл – ноль из-за того, что вариация по границе – ноль, и фиг с ней.

Пояснение про многомерный аналог взятия интеграла по частям:

Во-первых, заметим, что (легко даказать, пользуясь индексными обозначениями):

К содержанию

$$div\left(u\vec{a}\right) = u \cdot div\left(\vec{a}\right) + \mathrm{grad}\left(u\right) \cdot \vec{a}$$

Проинтегрируем обе части по объёму:

$$\int div\left(u\vec{a}\right) dV = \int u \cdot div\left(\vec{a}\right) dV + \int \mathrm{grad}\left(u\right) \cdot \vec{a} dV$$

Левую часть можно свести к интегралу по поверхности, ограничивающей объём:

$$\oint u\vec{a} \cdot d\vec{S} = \int u \cdot div\left(\vec{a}\right) dV + \int \mathrm{grad}\left(u\right) \cdot \vec{a} dV$$

В итоге получаем:

$$\int \mathrm{grad}\left(u\right) \cdot \vec{a} dV = \oint u\vec{a} \cdot d\vec{S} - \int u \cdot div\left(\vec{a}\right) dV$$

Приравниваем нулю вариацию действия.
В итоге:

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^i.$$

Можно выразить через **E**, **H**: $F_{ik} = -\varepsilon_{ikm} H_m$ и $F_{i0} = -E_i$.

Для i = 1, 2, 3 получаем:

$$-\varepsilon_{ikm} \frac{\partial H_m}{\partial x^k} - \frac{\partial E_i}{\partial x^0} = -\frac{4\pi}{c} j^i$$

Вспоминая выражение для ротора: $\left(\mathbf{rot}\left(\mathbf{H}\right)\right)_i = \varepsilon_{ikm} \frac{\partial H_m}{\partial x^k}$, получим (со знаками что-то не то в ходе вывода):

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{H}\right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (30.3)$$

Для i = 0 получаем:

$$-\frac{\partial E_k}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^0$$

Вспоминая выражение для ротора: $\mathrm{div}\left(\mathbf{E}\right) = \frac{\partial E_k}{\partial x^k}, k = 1, 2, 3,\quad j^0 = c\rho$ получим:

$$\mathrm{div}\left(\mathbf{E}\right) = 4\pi\rho \qquad (30.4)$$

Уравнения (30.3), (30.4) и составляют искомую вторую пару Максвелла. Вместе с первой парой, они вполне определяют электромагнитное поле и являются основными уравнениями теории этих полей — *электродинамики*.

К содержанию

Напишем эти уравнения в интегральной форме. Интегрируя (30.4) по некоторому объему и применяя теорему Гаусса

$$\int \operatorname{div}\mathbf{E}\,dV = \oint \mathbf{E}\,d\mathbf{f},$$

находим

$$\oint \mathbf{E}\,d\mathbf{f} = 4\pi \int \rho\,dV. \qquad (30.5)$$

Таким образом, поток электрического поля через замкнутую поверхность равен полному заряду, находящемуся в объеме, ограниченном этой поверхностью, умноженному на 4π.

Интегрируя (30.3) по некоторой незамкнутой поверхности и применяя теорему Стокса

$$\int \operatorname{rot}\mathbf{H}\,d\mathbf{f} = \oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l},$$

находим

$$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{E}\,d\mathbf{f} + \frac{4\pi}{c}\int \mathbf{j}\,d\mathbf{f}. \qquad (30.6)$$

Величину

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (30.7)$$

называют *током смещения*. Из (30.6), написанного в виде

$$\oint \mathbf{H}\,d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}\int \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) d\mathbf{f}, \qquad (30.8)$$

видно, что циркуляция магнитного поля по некоторому контуру равна помноженной на $4\pi/c$ сумме токов истинного и смещения, протекающих сквозь поверхность, ограничиваемую этим контуром.

Резюмируем:

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

СГС

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = 4\pi\rho$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}) = 0$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

СИ

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{H}) = 0$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \mathbf{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{E}) = -\mu_0\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

2 и 4 уравнения – следствие определения напряжённостей электрического и магнитного полей. 1 и 3 уравнения определяют динамику полей в присутствие стационарных и движущихся зарядов.

Уравнения Максвелла в интегральной форме

К содержанию

Закон Гаусса	$\oint\limits_{\mathbf{s}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q$	$\oint\limits_{\mathbf{s}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s} = Q$
Закон Гаусса для магнитного поля	$\oint\limits_{\mathbf{s}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0$	$\oint\limits_{\mathbf{s}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0$
Закон индукции Фарадея	$\oint\limits_{\mathbf{l}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbf{s}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$	$\oint\limits_{\mathbf{l}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbf{s}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$
Теорема о циркуляции магнитного поля	$\oint\limits_{\mathbf{l}} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}I + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbf{s}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}$	$\oint\limits_{\mathbf{l}} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d}{dt}\int\limits_{\mathbf{s}} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{s}$

Запишем уравнения в дифференциальной форме через потенциалы. Для этого напомним определения напряжённости полей:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{rot}(\mathbf{A})$$

Подставим эти выражения во вторую пару уравнений Максвелла.

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}) = 4\pi\rho$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{H}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Получим:

$$\mathrm{div}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi\right) = 4\pi\rho$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{A})) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi\right)$$

Упростим, вспоминая тождество $\mathbf{rot}(\mathbf{rot}(\mathbf{A})) = \mathbf{grad}(\mathbf{div}(\mathbf{A})) - \Delta\mathbf{A}$:

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}(\mathbf{A}) - \Delta\phi = 4\pi\rho$$

$$\nabla\left(\mathbf{div}(\mathbf{A}) + \frac{\partial\phi}{\partial t}\right) - \Delta\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

Также воспользуемся калибровкой Лоренца $\mathrm{div}(\mathbf{A}) + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\Delta\phi=4\pi\rho$$
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\Delta\mathbf{A}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

Введём оператор Д'Аламбера: $\Box=\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, и вспомним выражение для 4-тока: $j=\left(c\rho,\mathbf{j}\right)$. Тогда уравнения Максвелла запишутся в следующем компактном виде (со знаками что-то не то в ходе вывода):

$$\Box A=\frac{4\pi}{c}j$$

Где A и j – 4-потенциал и 4-ток.

К содержанию

ЛЕКЦИЯ 5

Источники:

Ландау, т. 2, §31, 36, 37.

Плотность и поток энергии

§ 31. Плотность и поток энергии

Умножим обе части уравнения (30.3) на $\mathbf{E}$, а обе части уравнения (26.1) на $\mathbf{H}$ и сложим полученные уравнения почленно:

$$\frac{1}{c}\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c}\mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE} - (\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\operatorname{rot}\mathbf{H}).$$

Пользуясь известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{div}[\mathbf{ab}] = \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b},$$

переписываем это соотношение в виде

$$\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}(E^2 + H^2) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{jE} - \operatorname{div}[\mathbf{EH}],$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\mathbf{jE} - \operatorname{div}\mathbf{S}. \qquad (31.1)$$

Вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}] \qquad (31.2)$$

называют *вектором Пойнтинга.*

Проинтегрируем (31.1) по некоторому объему и применим ко второму члену справа теорему Гаусса. Мы получим тогда:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\,dV = -\int \mathbf{jE}\,dV - \oint \mathbf{S}\,d\mathbf{f}.$$

Если интегрирование производится по всему пространству, то интеграл по поверхности исчезает (поле на бесконечности равно нулю). Далее, мы можем написать интеграл $\mathbf{jE}dV$ в виде суммы $e\mathbf{vE}$ по всем зарядам, находящимся в поле, и подставить согласно (17.7)

$$e\mathbf{vE} = \frac{d}{dt}\mathscr{E}_{\text{кин}}.$$

Тогда (31.3) переходит в

$$\frac{d}{dt}\left\{\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\,dV + \sum \mathscr{E}_{\text{кин}}\right\} = 0$$

Таким образом, для замкнутой системы, состоящей из электромагнитного поля вместе с находящимися в нем частицами, сохраняется величина, стоящая в написанном уравнении в скобках. Второй член в этом выражении есть кинетическая энергия (вместе с энергией покоя всех частиц; см. примеч. на с. 76); первый же член есть, следовательно, энергия самого электромагнитного поля. Величину

К содержанию

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi} \qquad \text{(СГС)}$$

Забегая вперёд, дадим выражение для плотности энергии поля в веществе:

$$W = \frac{\mathbf{ED} + \mathbf{HB}}{8\pi} \qquad \text{(СГС)}$$

$$W = \frac{\mathbf{ED} + \mathbf{HB}}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu\mu_0 \mathbf{H}^2}{2} \qquad \text{(СИ)}$$

мы можем поэтому назвать плотностью энергии электромагнитного поля; это есть энергия единицы объема поля. При интегрировании по некоторому конечному объему поверхностный интеграл в (31.3), вообще говоря, не исчезает, так что мы можем написать это уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\, dV + \sum \mathscr{E}_{\text{кин}}\right\} = -\oint \mathbf{S}\, d\mathbf{f}$$

где теперь во втором члене в скобках суммирование производится только по частицам, находящимся в рассматриваемом объеме. Слева стоит изменение полной энергии поля и частиц в единицу времени. Поэтому интеграл $\mathbf{S}d\mathbf{f}$ надо рассматривать как поток энергии поля через поверхность, ограничивающую данный объем, так что вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ есть плотность этого потока – количество энергии поля, протекающее в единицу времени через единицу поверхности.

Закон Кулона

Для постоянного электрического (*электростатического*) поля уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho, \tag{36.1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \tag{36.2}$$

Электрическое поле $\mathbf{E}$ выражается через один только скалярный потенциал соотношением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{36.3}$$

Подставляя (36.3) в (36.1), находим уравнение, которому удовлетворяет потенциал постоянного электрического поля:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho. \tag{36.4}$$

Это уравнение носит название *уравнения Пуассона*. В пустоте, т. е. при $\rho = 0$, потенциал удовлетворяет *уравнению Лапласа*

$$\Delta\varphi = 0. \tag{36.5}$$

Определим теперь поле, создаваемое точечным зарядом. Из соображений симметрии ясно, что оно будет направлено в каждой точке по радиус-вектору, проведенному из точки, в которой находится заряд e. Из тех же соображений ясно, что абсолютная величина $\mathbf{E}$ поля будет зависеть только от расстояния R до заряда. Для нахождения этой абсолютной величины применим уравнение (36.1) в интегральной форме (30.5). Поток электрического поля через шаровую поверхность с радиусом R, проведенную вокруг заряда e, равен $4\pi R^2 E$; этот поток должен быть равен $4\pi e$. Отсюда находим:

$$E = \frac{e}{R^2}$$

В векторном виде:

$$E = \frac{e\mathbf{R}}{R^3}$$

Таким образом, поле, создаваемое точечным зарядом, обратно пропорционально квадрату расстояния от этого заряда. Это — так называемый закон Кулона. Потенциал этого поля

$$\varphi = \frac{e}{R}$$

Если мы имеем систему зарядов, то создаваемое ею поле, согласно принципу суперпозиции, равно сумме полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности. В частности, потенциал такого поля равен

$$\varphi = \sum_a \frac{e_a}{R_a}$$

где R_a — расстояние от заряда e_a до точки, в которой мы ищем потенциал. Если ввести плотность заряда r, то эта формула приобретает вид

$$\varphi = \int \frac{\rho}{R}\, dV,$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} dV$$

где R — расстояние от элемента объема dV до данной точки («точки наблюдения») поля.

Отметим здесь математическое соотношение, получающееся при подстановке в (36.4) значений ρ и ϕ для точечного заряда, т. е. $\rho = e\delta(\mathbf{R})$ и $\phi = \dfrac{e}{R}$. Мы находим тогда:

$$\Delta \frac{1}{R} = -4\pi\delta(\mathbf{R})$$

(Проверить. На ДЗ)

В СИ в выражениях для потенциала стоит $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

Энергия системы зарядов

Определим энергию системы зарядов. При этом будем исходить из представления об энергии поля, т. е. из выражения (31.5) для плотности энергии. Именно, энергия системы зарядов должна быть равна:

$$U = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dV \qquad \text{(СГС)}$$

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV \qquad \text{(СИ)}$$

где E есть поле, создаваемое этими зарядами, а интеграл берется по всему пространству. Подставляя сюда $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}(\phi)$, можно преобразовать U следующим образом:

$$U = -\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\,\mathrm{grad}\,\varphi\, dV = -\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{div}(\mathbf{E}\varphi)\, dV + \frac{1}{8\pi}\int \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}\, dV.$$

Первый из этих интегралов, согласно теореме Гаусса, равен интегралу от $\mathbf{E}\phi$ по поверхности, ограничивающей объем интегрирования; но поскольку интегрирование производится по всему пространству, а на бесконечности поле равно нулю, то этот интеграл исчезает. Подставляя во второй интеграл $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 4\pi\rho$, находим следующее выражение для энергии системы зарядов:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\, dV.$$

Для системы точечных зарядов e_a можно вместо интеграла написать сумму по зарядам:

$$U = \frac{1}{2}\sum e_a\varphi_a$$

где ϕ_a — потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке, где находится заряд e_a.

Потенциалы равны

$$\varphi'_a = \sum_{b(\neq a)} \frac{e_b}{R_{ab}}$$

Энергию можно записать так:

$$U' = \frac{1}{2}\sum_{a\neq b} \frac{e_a e_b}{R_{ab}}$$

В частности, энергия взаимодействия двух зарядов:

$$U' = \frac{e_1 e_2}{R_{12}}$$ (в СИ стоит коэффициент $1/(4\pi\varepsilon_0) = 10^9$)

$\varepsilon_0 = 10^7/(4\pi c^2)$ Ф/m, $\mu_0 = 4\pi{*}10^{-7}$ Гн/м = Н/А^2.

Если применить полученную формулу к одной элементарной заряженной частице (скажем, электрону) и полю, производимому им самим, мы придем к выводу, что частица должна обладать «собственной» потенциальной энергией, равной $e\phi/2$, где (ϕ —потенциал производимого зарядом поля в месте, где он сам находится. Но мы знаем, что в теории относительности всякую элементарную частицу надо рассматривать как точечную. Потенциал же $\phi = e/R$ ее поля в точке $R = 0$ обращается в бесконечность. Таким образом, согласно электродинамике электрон должен был бы обладать бесконечной «собственной» энергией, а следовательно, и бесконечной массой. Физическая бессмысленность этого результата показывает, что уже основные принципы самой электродинамики приводят к тому, что ее применимость должна быть ограничена определенными пределами. Заметим, что ввиду бесконечности получающихся из электродинамики «собственной» энергии и массы в рамках самой классической электродинамики нельзя поставить вопрос о том, является ли вся масса электрона электромагнитной (т. е. связанной с электромагнитной собственной энергией частицы.

Поскольку возникновение не имеющей физического смысла бесконечной «собственной» энергии элементарной частицы связано с тем, что такую частицу надо рассматривать как точечную, мы можем заключить, что электродинамика как логически замкнутая физическая теория становится внутренне-противоречивой при переходе к достаточно малым расстояниям. Можно поставить вопрос о том, каков порядок величины этих расстояний. На этот вопрос можно ответить, заметив, что для собственной электромагнитной энергии электрона надо было бы получить значение порядка величины энергии покоя mc^2. Если, с другой стороны, рассматривать электрон, как обладающий некоторыми размерами R_0, то его собственная потенциальная энергия была бы порядка e^2/R_0 Из требования, чтобы обе эти величины были одного порядка, $e^2/R_0 \sim \mathrm{mc}^2$, находим

$$R_0 \sim \frac{e^2}{mc^2} \text{ (в СИ } R_0 \sim \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\text{)}$$

Эти размеры (их называют «радиусом» электрона $\sim 2.8*10^{-15}$ м.) определяют границы применимости электродинамики к электрону, следующие уже из ее собственных основных принципов. Надо, однако, иметь в виду, что в действительности пределы применимости излагаемой здесь классической электродинамики лежат еще гораздо выше вследствие квантовых явлений). Квантовые эффекты становятся существенными при расстояниях порядка $\hbar/(mc)$ – комптоновская длина волны, отношение этих расстояний к R_0 порядка $\hbar c/\mathrm{e}^2 \sim 137$ (в СИ $4\pi\varepsilon_0\hbar\mathrm{c}/\mathrm{e}^2$).

К содержанию

ЛЕКЦИЯ 6

Источники:

Ландау, т. 2, §40-42.

Дипольный момент

Рассмотрим поле, создаваемое системой зарядов на расстояниях, больших по сравнению с размерами системы. Введем систему координат с началом где-нибудь внутри системы зарядов. Радиус-векторы отдельных зарядов пусть будут r_a. Потенциал поля, создаваемого всеми зарядами в точке с радиус-вектором R_0, равен:

$$\varphi = \sum \frac{e_a}{|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a|}$$

Исследуем это выражение для больших R_0 ($R_0 >> r_a$), т.е. считая, что система зарядов сгруппирована возле начала координат. Для этого разложим его в ряд по степеням r_a (т.е. каждое слагаемое в сумме разлагается по степени r_a в окрестности точки $r_a = 0$).

Запишем разложение в ряд Тейлора в общем виде:

$$\phi(R) = \phi(R_0) - \sum_a \left.\frac{\partial\phi}{\partial r_{a,i}}\right|_{r_a=0} r_{a,i} + \sum_a \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2\phi}{\partial r_{a,i}\partial r_{a,j}}\right|_{r_a=0} r_{a,i} r_{a,j} =$$

$$= \phi(R_0) - \sum_a \left(\nabla_a \phi(R_0 - \vec{r}_a)\right)\vec{r}_a + \sum_a \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2\phi}{\partial r_{a,i}\partial r_{a,j}}\right|_{r_a=0} r_{a,i} r_{a,j}$$

Для кулоновского потенциала запишем первые два слагаемых:

$$\phi(r) = \sum_a \frac{e_a}{R_0} - \left.\left(\nabla \frac{1}{|R_0 - r_a|}\right)\right|_{r_a=0} r_a$$

$$\nabla \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{1}{\sqrt{r_i r_i}} = -\frac{r_i}{2(r_i r_i)^{3/2}} = -\frac{\vec{r}}{2|\vec{r}|^3}$$

Итого, получим:

$$\phi(r) = \sum_a \frac{e_a}{|r|} + \frac{\vec{r}}{|r|^3} \sum_a e_a \vec{r}_a = \frac{Q}{|r|} + \frac{(\vec{r}\vec{d})}{|r|^3}$$

d – дипольный момент, $r = R_0$ – вектор из точки наблюдения в центр системы зарядов. Если полный заряд равен нулю, то дипольный момент не зависит от точки отсчёта. Показать. Если полный заряд – не ноль, то полная зависимость тоже простая – $Q*R$.

$$\mathbf{d}' = \sum e_a \mathbf{r}'_a = \sum e_a \mathbf{r}_a + \mathbf{a} \sum e_a = \mathbf{d}.$$

Напряженность поля:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \frac{\mathbf{dR}_0}{R_0^3} = -\frac{1}{R_0^3} \operatorname{grad}(\mathbf{dR}_0) - (\mathbf{dR}_0) \operatorname{grad} \frac{1}{R_0^3}$$

К содержанию

$$\mathrm{grad}\left(\vec{d}\cdot\vec{r}\right)=\vec{d}$$

$$\mathrm{grad}\left(\frac{1}{r}\right)=\partial_i\left(\frac{1}{\left(r_ir_i\right)^{3/2}}\right)=3\frac{r_i}{\left(r_ir_i\right)^{5/2}}=-3\frac{\vec{r}}{r^5}.$$

$$E=-\frac{\vec{d}}{r^3}+3\left(\vec{d}\cdot\vec{r}\right)\frac{\vec{r}}{r^5}=\frac{3\vec{r}\left(\vec{d}\cdot\vec{r}\right)-\vec{d}\cdot r^2}{r^5}$$

Сказать, как поступать в случае непрерывного распределения!

Квадрупольный момент

Запишем ещё раз разложение потенциала.

$$\phi(r)=\phi(R_0)-\sum_a\left(\nabla_a\phi(R_0)\right)\vec{r}_a+\sum_a\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial r_{a,i}\partial r_{a,j}}\right|_{r_a=0}r_{a,i}r_{a,j}$$

Следующий член разложения:

$$\frac{1}{2}\sum ex_\alpha x_\beta\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}$$

Оператор лапласса действует на $1/R_0$ (на самом деле там дельта-функция, но домножение на r^2 убивает).

$$\Delta\frac{1}{R_0}\equiv\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}=0$$

Тогда добавка принимает вид:

$$\varphi^{(2)}=\frac{1}{2}\sum e\left(x_\alpha x_\beta-\frac{1}{3}r^2\delta_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}$$

Квадрупольный момент:

$$D_{\alpha\beta}=\sum e(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta})$$

След равен нулю $D_{\alpha\alpha}=0$.

или, произведя дифференцирование

$$\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha\partial X_\beta}\frac{1}{R_0}=\frac{3X_\alpha X_\beta}{R_0^5}-\frac{\delta_{\alpha\beta}}{R_0^3}$$

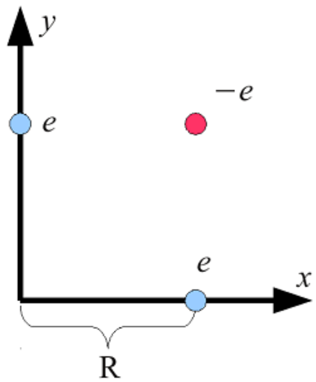
и учитывая, что $\delta_{\alpha\beta}D_{\alpha\beta}=D_{\alpha\alpha}=0$,

$$\varphi^{(2)}=\frac{D_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta}{2R_0^3}.$$

Если дипольный момент электронейтральной системы зарядов равен нулю, то разложение φ начинается с $\varphi^{(2)}$. Примером такой системы является система из двух диполей с противоположными направлениями дипольных моментов, находящихся на бесконечно малом расстоянии друг от друга. Учет высших членов разложения дает потенциал поля мультиполей любого порядка.

К содержанию

Для примера:
Найти квадрупольный момент такой системы (считайте, что в начале координат находится заряд –e).



Энергия системы зарядов во внешнем поле

Потенциальная энергия системы зарядов во внешнем поле ϕ.

$$W = \sum_i e_i \varphi_i(\vec{r}_i),$$

Выберем снова систему координат с началом внутри системы зарядов; r_a — радиус-вектор заряда e_a в этих координатах. Предположим, что внешнее поле слабо меняется на протяжении системы зарядов, т. е. является по отношению к этой системе квазиоднородным. Тогда мы можем разложить энергию U в ряд по степеням r_a:

$$\phi(r) = \phi(R_0) + (\nabla\phi)\cdot r_a$$

Тогда

$$W = \sum_i e_i \left(\phi(R_0) + (\nabla\phi)\cdot r_a\right) = \phi(R_0)\sum_i e_i + (\nabla\phi)\sum_i e_i r_a = \phi(R_0)Q - Ed$$

Можно записать и следующий порядок:

$$W^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{i,\alpha,\beta} e_i x_\alpha x_\beta \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\sum_i e_i\left(x_\alpha x_\beta - \frac{1}{2}r^2\delta_{\alpha\beta}\right) = \sum_{\alpha,\beta}\frac{D_{\alpha,\beta}}{6}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial X_\alpha \partial X_\beta};$$

Взаимодействие диполей можно получить, подставив выражение для напряжённости в выражение для энергии:

$$U = \frac{(\mathbf{d}_1\mathbf{d}_2)R^2 - 3(\mathbf{d}_1\mathbf{R})(\mathbf{d}_2\mathbf{R})}{R^5}$$

Здесь мы учли, что напряжённость электрического поля **E** равна:

$$\vec{E} = \frac{3\vec{R}\left(\vec{d}\cdot\vec{R}\right) - \vec{d}R_0^2}{R_0^5}$$

К содержанию

ЛЕКЦИЯ 7

Источники:

Ландау, т. 2, §43, 44.

Магнетостатика

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое зарядами, совершающими финитное движение, при котором частицы остаются все время в конечной области пространства, причем импульсы тоже остаются всегда конечными. Такое движение имеет стационарный характер, и представляет интерес рассмотреть среднее (по времени) магнитное поле **H**, создаваемое зарядами; это поле будет теперь функцией только от координат, но не от времени, т. е. будет постоянным.

В лекции 4 в калибровке Лоренца ($\mathrm{div}(\mathbf{A})+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$) мы вывели уравнение для потенциалов поля.

$$\Box A=\frac{4\pi}{c}j$$

Или в трёхмерном виде:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\Delta\phi=4\pi\rho$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\Delta\mathbf{A}=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$$

Усредним по времени эти уравнения, учитывая что среднее от производной при финитном движении тоже равно нулю:

$$\Delta\overline{\mathbf{A}}=-\frac{4\pi}{c}\overline{\mathbf{j}}$$

Это уравнение аналогично уравнению Пуассона, а решение для него мы знаем:

$$\mathbf{A}(r)=\frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(r')}{|r-r'|}dV' \quad \text{(СГС)}$$

$$\mathbf{A}(r)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{j}(r')}{|r-r'|}dV' \quad \text{(СИ)}$$

Переходя от интеграла к сумме по зарядам $\vec{j}=\rho\vec{\mathrm{v}}$, $\rho=e\delta(\vec{r}-\vec{r}_0)$, получаем

$$\mathbf{A}=\frac{1}{c}\sum_i\frac{e_i\cdot\vec{\mathrm{v}}_i}{R_i} \qquad \text{(СГС)}$$

$$\mathbf{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_i\frac{e_i\cdot\vec{\mathrm{v}}_i}{R_i} \qquad \text{(СИ)}$$

Найдём напряжённость электрического поля:

К содержанию

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}(r) = \frac{1}{c}\int \mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{j}(r')}{|r-r'|}\right)dV' \quad (\text{СГС})$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\mathbf{A}(r) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{j}(r')}{|r-r'|}\right)dV' \quad (\text{СИ})$$

Ротор действует на координату r, но не на r'. Можно показать, что

$$\mathrm{rot}\, f\mathbf{a} = f\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a} + [\mathrm{grad}\, f\cdot\mathbf{a}]$$

Но ток не зависит от r, получим отсюда:

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) = \left[\mathrm{grad}\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right), \mathbf{j}(\mathbf{r}')\right] = \left[-\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \mathbf{j}(\mathbf{r}')\right] = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\left[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), (\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right]$$

Тогда

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{\left[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), (\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV' \quad (\text{СГС})$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\left[\mathbf{j}(\mathbf{r}'), (\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV' \quad (\text{СИ})$$

Это – закон Био-Савара-Лапласса (он выводится для тока, сконцентрированного в одномерном проводнике)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_C \frac{I\left[\mathbf{dl}, (\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \quad (\text{СИ})$$

В симметричных системах бывает удобно непосредственно применять интегральную форму уравнения максвелла.

$$\oint\left(\vec{H}d\vec{l}\right) = \frac{4\pi}{c}\int\left(\vec{j}\cdot d\vec{S}\right) = \frac{4\pi}{c}I. \text{ (в СИ нет } 4\pi/c\text{)}$$

При вычислении циркуляции удобно брать контур вдоль магнитной силовой линии, тогда $\left(\vec{H}d\vec{l}\right) = \left|\vec{H}\right|\cdot\left|d\vec{l}\right|$ и интеграл для вектора превращается в интеграл для скаляров, что сильно упрощает расчеты. Поэтому интегральная форма пригодна для проводников простой и симметричной формы, для которых можно сразу определить форму силовых линий исходя из соображений симметрии. В более сложных случаях следует использовать дифференциальную форму уравнений.
Из уравнения непрерывности следует:

$$\mathrm{div}\,\vec{j} = 0\,.$$

Магнитный момент (без вывода)

По аналогии с дипольным моментом можно ввести магнитный момент:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{rv}] \quad \text{(В СИ нет } 1/c\text{)}$$

К содержанию

Тогда вектор-потенциал:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{[\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{R}_0]}{R_0^3} = \left[\nabla\frac{1}{R_0}\cdot\overline{\mathfrak{m}}\right]$$ В СИ множитель $\frac{\mu_0}{4\pi}$

Можно найти **H**:

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{n}(\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{n}) - \overline{\mathfrak{m}}}{R_0^3}$$ В СИ множитель $\frac{1}{4\pi}$

(использовать $\operatorname{rot}[\mathbf{ab}] = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$), при этом $\mathfrak{m}$ не зависит от переменной, по которой берётся ротор, т.к. в $\mathfrak{m}$ входят только координаты зарядов, также учесть что $\Delta(1/r) = 0$. Если у всех зарядов системы отношение заряда к массе одинаково, то мы можем написать:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{rv}] = \frac{e}{2mc}\sum m[\mathbf{rv}]$$

$$\mathfrak{m} = \frac{e}{2mc}\sum[\mathbf{rp}] = \frac{e}{2mc}\mathbf{M}$$

где $\mathbf{M} = \sum[\mathbf{rp}]$ есть механический момент импульса системы. Таким образом, в этом случае отношение магнитного момента к механическому постоянно и равно $e/(2mc)$.

ЛЕКЦИЯ 8

Источники:

Ландау, т. 2, §46-48.

Электромагнитные волны. Волновое уравнение

В лекции 4 в калибровке Лоренца ($\operatorname{div}(\mathbf{A})+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$) мы вывели уравнение для потенциалов поля.

$$\Box A=\frac{4\pi}{c}j$$

Запишем их в пустоте в трёхмерном виде:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\Delta\phi=0$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\Delta\mathbf{A}=0 \qquad (46.7)$$

$$\Delta\mathbf{A}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} \quad \text{(СИ)}$$

Эти уравнения могут иметь отличные от нуля решения. Это значит, что электромагнитное поле может существовать даже при отсутствии каких бы то ни было зарядов. Электромагнитные поля, существующие в пустоте при отсутствии зарядов, называют электромагнитными волнами. Мы займемся теперь исследованием свойств таких полей. Прежде всего отметим, что эти поля обязательно должны быть переменными. Действительно, в противном случае в правых частях нули, и мы приходим к случаю постоянного поля, но без токов и зарядов. Уравнение (46.7), определяет потенциал электромагнитных волн. Оно называется уравнением д'Аламбера или волновым уравнением.

[1]) Волновое уравнение иногда записывают в виде $\Box\mathbf{A}=0$, где

$$\Box=-\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x^i}=\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

есть так называемый *оператор д'Аламбера.*

Применяя к (46.7) операции rot и d/dt, убедимся в том, что напряженности **E** и **H** удовлетворяют таким же волновым уравнениям.

Решение волнового уравнения

Рассмотрим частный случай электромагнитных волн, когда поле зависит только от одной координаты, скажем x (и от времени). Такие волны называются плоскими. В этом случае уравнения поля принимают вид

К содержанию

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

где под f подразумевается любая компонента векторов **E** или **H**. Для решения этого уравнения перепишем его в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) f = 0$$

и введем новые переменные

$$\xi = t - \frac{x}{c}, \quad \eta = t + \frac{x}{c},$$

так что

$$t = \frac{1}{2}(\eta + \xi), \quad x = \frac{c}{2}(\eta - \xi).$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

и уравнение для f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Очевидно, что его решение имеет вид

$$f = f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции. Таким образом,

$$f = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

Пусть, например, $f_2 = 0$, так что $f = f_1(t - x/c)$. Выясним смысл этого решения. В каждой плоскости $x = \text{const}$ поле меняется со временем; в каждый данный момент поле различно для разных x. Очевидно, что поле имеет одинаковое значение для координат x и моментов времени t, удовлетворяющих соотношениям $t - x/c = \text{const}$, т. е.

$$x = \text{const} + ct$$

Это значит, что если в некоторый момент $t = 0$ в некоторой точке x пространства поле имело определенное значение, то через промежуток времени t то же самое значение поле имеет на расстоянии ct вдоль оси x от первоначального места. Мы можем сказать, что все значения электромагнитного поля распространяются в пространстве вдоль оси x со скоростью, равной скорости света c. Таким образом, $f_1(t - x/c)$ представляет собой плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси x. Очевидно, что $f_2(t + x/c)$ представляет собой волну, бегущую в противоположном, отрицательном направлении оси x.

Рассмотрим ещё важный случай трёхмерного радиально-симметричного распространения, волны. Волновое уравнения можно записать в сферических координатах:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

Для решения этого уравнения сделаем подстановку $\phi = \chi(R,\ t)/R$. Тогда для χ мы получим

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial R^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}=0$$

Но это есть уравнение плоских волн, решение которого имеет вид:

$$\chi=f_1\left(t-\frac{R}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{R}{c}\right)$$

Т.е. решения волнового уравнения в сферически симметричном случае имеет вид схожий с плоской волной:

$$\phi(r,t)=\frac{f_1\left(t-\frac{R}{c}\right)+f_2\left(t+\frac{R}{c}\right)}{R}$$

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в положительном направлении оси x; в такой волне все величины, в частности и **A**, являются функциями только от $t — x/c$. Вспомним, что

$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\quad \mathbf{H}=\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

$$\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\quad \mu_0\mathbf{H}=\mathrm{rot}(\mathbf{A})\quad \text{(СИ)}$$

Очевидно, что $\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\mathbf{A}'$, где штрих обозначает дифференцирование по $t – x/c$. С магнитным полем:

$$\mathbf{H}=[\nabla\mathbf{A}]=\left[\nabla\left(t-\frac{x}{c}\right)\cdot\mathbf{A}'\right]=-\frac{1}{c}[\mathbf{n}\mathbf{A}'],$$

$$\mathbf{H}=-\frac{1}{\mu_0 c}[\mathbf{n}\mathbf{A}']\quad \text{(СИ)}$$

$$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

где **n** – единичный вектор вдоль направления распространения волны. Тут всё просто. Производную от **A** можно только по одной переменной взять, по остальным переменным вместо производной ноль можно поставить. С другой стороны, из-за того, что **A** зависит только от одной переменной, можно по правилам взятия производной перекинуть производную на наблу.

$$\mathbf{H}=[\mathbf{n}\mathbf{E}]\quad \text{(СИ)}$$

Мы видим, что электрическое и магнитное поля **E** и **H** плоской волны направлены перпендикулярно к направлению распространения волны. На этом основании электромагнитные волны называют поперечными. Из прошлого равенства видно, что электрическое и магнитное поля плоской волны перпендикулярны друг к другу и одинаковы по абсолютной величине.

Поток энергии в плоской волне

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}]=\frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}[\mathbf{n}\mathbf{E}]]$$

К содержанию

$$\mathbf{S}=[\mathbf{EH}]=\frac{1}{\mu_0 c}[\mathbf{E}[\mathbf{nE}]] \quad (\text{СИ})$$

и поскольку **En** = 0, то

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi}E^2\mathbf{n}=\frac{c}{4\pi}H^2\mathbf{n}.$$

$$\mathbf{S}=\frac{E^2}{\mu_0 c}\mathbf{n}=\frac{H^2}{\varepsilon_0 c}\mathbf{n} \quad (\text{СИ})$$

$$W=\frac{\varepsilon_0 E^2+\mu_0 H^2}{2}, \quad c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad (\text{СИ})$$

Таким образом, поток энергии направлен вдоль направления распространения волны. Поскольку $W = (E^2 + H^2)/8\pi = E^2/4\pi$ есть плотность энергии волны, то можно написать:

$$\mathbf{S}=cW\mathbf{n}$$

Монохроматическая волна

Важный частный случай электромагнитных волн представляют волны, в которых поле является простой периодической функцией времени. Такая волна называется монохроматической. Все величины (потенциалы, компоненты полей) в монохроматической волне зависят от времени посредством множителя вида $\cos(\omega t + \alpha)$, где ω — циклическая частота (или просто **частота) волны**. В волновом уравнении вторая производная от поля по времени равна теперь $\partial^2 f/\partial t^2 = -\omega^2 f$ так что распределение поля по пространству определяется в монохроматической волне уравнением

$$\Delta f+\frac{\omega^2}{c^2}f=0.$$

В плоской волне (распространяющейся вдоль оси x) поле является функцией только от $t — x/c$. Поэтому если плоская волна монохроматична, то ее поле является простой периодической функцией от $t — x/c$. Векторный потенциал такой волны удобнее всего написать в виде вещественной части комплексного выражения:

$$\mathbf{A}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{-i\omega(t-x/c)}\right\}$$

Здесь $\mathbf{A}_0$ — некоторый постоянный комплексный вектор. Очевидно, что и напряженности **E** и **H** в такой волне будут иметь аналогичный вид с той же частотой ω. Величина $\lambda=\dfrac{2\pi c}{\omega}$ называется **длиной волны**; это есть период изменения поля по координате x в заданный момент времени t. Вектор $\mathbf{k}=\dfrac{\omega}{c}\mathbf{n}$. (где **n** — единичный вектор в направлении распространения волны) называется **волновым вектором**. С его помощью можно представить решение в виде:

$$\mathbf{A}=\mathrm{Re}\left\{\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\},$$

не зависящем от выбора осей координат. Величину, стоящую с множителем i в показателе, называют **фазой волны**.

До тех пор, пока мы производим над величинами лишь линейные операции, можно опускать знак взятия вещественной части и оперировать с комплексными величинами как таковыми. Так, подставив

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}$$

в

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\mathbf{A}', \quad \mathbf{H} = [\nabla\mathbf{A}] = \left[\nabla\left(t - \frac{x}{c}\right)\cdot\mathbf{A}'\right] = -\frac{1}{c}[\mathbf{nA}']$$

получим связь между напряженностями и векторным потенциалом плоской монохроматической волны в виде:

$$\mathbf{E} = ik\mathbf{A}, \quad \mathbf{H} = i[\mathbf{kA}]$$

Поляризация.

Рассмотрим подробнее вопрос о направлении поля монохроматической волны. Будем для определенности говорить об электрическом поле

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}\right\}$$

(все сказанное ниже относится, разумеется, в той же мере и к магнитному полю). $\mathbf{E}_0$ есть некоторый комплексный вектор. Его квадрат $\mathbf{E}_0^2$ есть некоторое, вообще говоря, тоже комплексное число. Введём вектор **b, такой**, что $\mathbf{E}_0 = \mathbf{b}e^{-i\alpha}$ имеет вещественный квадрат $\mathbf{b}^2 = |\mathbf{E}_0|^2$, где 2α — аргумент $\mathbf{E}_0^2$ (т. е. $\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0|e^{-2i*\alpha}$). С таким определением напишем:

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{b}e^{i(\mathbf{kr}-\omega t-\alpha)}\right\}$$

Представим **b** в виде: $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + i\,\mathbf{b}_2$, где $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ —два вещественных вектора. Поскольку квадрат $\mathbf{b}^2 = \mathbf{b}_1^2 + \mathbf{b}_2^2 + 2i\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ должен быть вещественной величиной, то $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2 = 0$. т. е. векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ взаимно перпендикулярны. Выберем направление $\mathbf{b}_1$ в качестве оси y (ось x —по направлению распространения волны). Тогда имеем:

$$E_y = b_1\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha), \quad E_z = \pm b_2\sin(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$$

Из этого равенства следует, что:

$$\frac{E_y^2}{b_1^2} + \frac{E_z^2}{b_2^2} = 1$$

Мы видим, таким образом, что в каждой точке пространства вектор электрического поля вращается в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, причем его конец описывает эллипс (нарисовать единичную окружность, там это очевидно). Такая волна называется **эллиптически поляризованной**. Вращение происходит в направлении по или против направления винта, ввинчиваемого вдоль оси ж, соответственно при знаке плюс или минус.

Если $b_1 = b_2$, то эллипс превращается в круг, т.е. вектор **E** вращается, оставаясь постоянным по величине. В этом случае говорят, что волна поляризована по кругу (**<u>круговая поляризация</u>**). Выбор направлений осей y и z при этом становится, очевидно, произвольным. Отметим, что в такой волне отношение y- и z-составляющих комплексной амплитуды E_0 равно:

$$\frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \pm i$$

Соответственно для вращения по и против направления винта (**<u>правая и левая поляризации</u>**).

Наконец, если b_1 или b_2 равно нулю, то поле волны направлено везде и всегда параллельно (или антипараллельно) одному и тому же направлению. Волну называют в этом случае **<u>линейно поляризованной</u>** или **<u>поляризованной в плоскости</u>**. **Эллиптически поляризованную волну можно рассматривать, очевидно, как наложение двух линейно поляризованных волн. И наоборот, если наложить две эллептически поляризованные волны, вращающиеся в разные стороны (например разные знаки у синуса в E_z), можно получить линейно поляризованную.**

Вернемся к определению волнового вектора и введем четырехмерный волновой вектор:

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)$$

Используя закон преобразования волнового 4-вектора, легко рассмотреть так называемый эффект Доплера — изменение частоты волны ω, испускаемой источником, движущимся по отношению к наблюдателю, по сравнению с «собственной» частотой ω_0 того же источника в системе отсчета (K_0), в которой он покоится. Пусть V — скорость источника, т.е. скорость системы отсчета K_0 относительно K. Согласно общим формулам преобразования 4-векторов имеем:

$$k^{(0)0} = \frac{k^0 - (V/c)k^1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

(скорость системы K относительно K_0 есть $-V$). Подставив сюда $k^0 = \omega/c$, $k^1 = k\cos\alpha = \frac{\omega}{c}\cos\alpha$, где α — угол (в системе K) между направлением испускания волны и направлением движения источника, и выражая ω через ω_0, получим

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - (V/c)\cos\alpha}$$

Это и есть искомая формула. При $V \ll c$ она дает, если угол α не слишком близок к $\pi/2$:

$$\omega \approx \omega_0\left(1 + \frac{V}{c}\cos\alpha\right). \qquad (48.17)$$

При $\alpha = \pi/2$ имеем

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \approx \omega_0\left(1 - \frac{V^2}{2c^2}\right); \qquad (48.18)$$

в этом случае относительное изменение частоты пропорционально квадрату отношения V/c.

ЛЕКЦИЯ 9

Источники:

Ландау, т. 2, §49, 62, 63.

Запаздывающие потенциалы.

Решим уравнения поля в динамике. Самый простой, нестрогий, вариант – вспомнить, что скорость распространения поля – скорость света. Поэтому метод решения уравнения Пуассона применим с точностью до задержки времени на R/c, где R – расстояние до точки наблюдения. Более строгий вывод ниже.

Уравнения поля в присутствии зарядов принимают следующий вид:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j},$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho.$$

(В СИ отсутствует $4\pi/c$).

Решение этих неоднородных линейных уравнений может быть представлено, как известно, в виде суммы решения этих же уравнений без правой части и частного интеграла уравнений с правой частью. Для нахождения этого частного интеграла разделим все пространство на бесконечно малые участки и определим поле, создаваемое зарядом, находящимся в одном из таких элементов объема. Вследствие линейности уравнений истинное поле будет равно сумме полей, создаваемых всеми такими элементами.

Заряд de в заданном элементе объема является, вообще говоря, функцией от времени. Если выбрать начало координат в рассматриваемом элементе объема, то плотность заряда $\rho = de(t)\delta(\mathbf{R})$, где $\mathbf{R}$ — расстояние от начала координат. Таким образом, нам надо решить уравнение

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\, de(t)\delta(\mathbf{R})$$

Везде кроме начала координат правая часть равна нулю, и мы имеем волновое уравнение. Но система у нас сферически симметричная, поэтому перепишем его в этих координатах:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial \varphi}{\partial R}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Этот случай мы рассматривали выше. Напомним решение. Для решения этого уравнения сделаем подстановку $\phi = \chi(R, t)/R$. Тогда для χ мы получим

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

Но это есть уравнение плоских волн, решение которого имеет вид:

$$\chi = f_1\left(t - \frac{R}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{R}{c}\right)$$

К содержанию

Обычно выбирают первую функцию. Тогда потенциал принимает вид:

$$\varphi = \frac{\chi(t - R/c)}{R}$$

Функция χ в этом равенстве пока произвольна; выберем ее теперь так, чтобы получить верное значение для потенциала также и в начале координат. Иначе говоря, мы должны подобрать χ так, чтобы в начале координат удовлетворялось уравнение Лапласса. Это легко сделать, заметив, что при $R \to 0$ сам потенциал стремится к бесконечности, а потому его производные по координатам растут быстрее, чем производные по времени. Следовательно, при $R \to 0$ можно пренебречь членом $d\phi/dt$ по сравнению с Δf. Тогда оно переходит в известное уже нам уравнение пуассона, приводящее к закону Кулона. Таким образом, вблизи начала координат формула должна переходить в закон Кулона, откуда следует, что $\chi(t) = de(t)$, т.е.

$$\varphi = \frac{de(t - R/c)}{R}$$

(В СИ добавится множитель $1/(4\pi\varepsilon_0)$)
Можно проинтегрировать:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \int \frac{\rho\left(r', t - \frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|} dV' + \phi_0$$

То же можно для векторного потенциала написать:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}\left(r', t - \frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|} dV' + \mathbf{A}_0,$$

где величины ϕ_0, $\mathbf{A}_0$ — решения волнового уравнения без правой части.

Эти выражения называются **запаздывающими потенциалами**. В случае неподвижных или стационарного движения зарядов всё переходит в старые формулы.

Величины ϕ_0, $\mathbf{A}_0$ определяются так, чтобы удовлетворять условиям задачи. Обычно задаются условия на больших расстояниях от системы зарядов в течение всего времени. А именно, задается падающее на систему внешнее излучение. Соответственно этому условию, поле, возникающее в результате взаимодействия этого излучения с системой, может отличаться от внешнего поля только излучением, исходящим от системы. Такое исходящее от системы излучение на больших расстояниях должно иметь вид волны, распространяющейся по направлению от системы, т.е. в направлении возрастающих R. Но этому условию удовлетворяют именно запаздывающие потенциалы. Таким образом, последние представляют собой поле, исходящее от системы, а ϕ_0 и $\mathbf{A}_0$ надо отождествить с внешним полем, действующим на систему.

Потенциалы Лиенара—Вихерта

Запишем решение для запаздывающего потенциала:

К содержанию

$$\phi(r,t)=\int\frac{\rho\left(r',t-\frac{|r-r'|}{c}\right)}{|r-r'|}dV'$$

Перепишем его в следующем виде:

$$\phi(r,t)=\int\frac{\rho(r',t')}{|r-r'|}\delta\left(t-\frac{|r-r'|}{c}-t'\right)dV'dt'$$

Рассмотрим одиночный заряд:

$$\phi(r,t)=\int\frac{e\cdot\delta(r'-r_e(t'))}{|r-r'|}\delta\left(t-\frac{|r-r'|}{c}-t'\right)dV'dt'=\int\frac{e}{|r-r_e(t')|}\delta\left(t-\frac{|r-r_e(t')|}{c}-t'\right)dt'$$

Дельта-функция срабатывает в момент времени t', когда был испущен сигнал от частицы, двигающейся по траектории $r_e(t')$, пришедший в точку наблюдения r в момент времени t. Т.к. движение быстрее скорости света невозможно, решение уравнения под дельта-функцией одно — в точку наблюдения не может прийти сигнал из двух разных времён. Ведь, если частица движется в сторону от точки наблюдения, то позднее испущенный сигнал придёт точно позже, а если в сторону, то он тоже придёт позже, т.к. частица движется медленнее скорости света. Другими словами, нельзя обогнать сигнал, испущенный ранее.

Функция Дирака от функции выражается следующим образом:

$$\delta\Big(\phi(t)\Big)=\sum_i\frac{\delta(t-t_i)}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|_{t=t_i}},$$

где t_i – корни уравнения $\varphi(t) = 0$. Таким образом для вычисления интеграла необходимо найти решение уравнения:

$$\phi(t')=t'-t+\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')|=0$$

Обозначим корень уравнения (8) через ξ. То есть при $t' = \xi$, $\varphi(\xi) = 0$:

$$\xi=t-\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(\xi)|$$

Теперь найдём производную:

$$\frac{\partial\phi(t')}{\partial t'}=1+\frac{\partial}{\partial t'}\left\{\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')|\right\}=1+\frac{\partial}{\partial t'}\left\{\frac{1}{c}\sqrt{r^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_e(t')+r_e^2(t')}\right\}=$$

$$=1-\frac{\mathbf{v}_e(t')}{c}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')|}=1-\frac{1}{c}\mathbf{v}_e(t')\cdot\mathbf{n}=\frac{1}{R}\left(R-\frac{1}{c}\mathbf{v}(t')\cdot\mathbf{R}\right),$$

где $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t_0))/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_e(t_0)| = \mathbf{R}/R$ – единичный вектор, а $\mathbf{v}_e(t')$ – скорость движения частицы. <u>Тут видно, что эта производная больше нуля, т.к. скорость всегда меньше скорости света, даже если она направлена по **R**.</u>

Выражение для потенциала можно представить в виде:

$$\varphi(\mathbf{r},t)=\int\frac{e}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_e(t')|}\,\frac{\delta(t'-\xi)}{|1-\frac{1}{c}\mathbf{v}_e(t')\cdot\mathbf{n}(t')|}\,dt'=\frac{e}{R(\xi)-\frac{1}{c}\mathbf{v}(\xi)\cdot\mathbf{R}(\xi)}.$$

Второе равенстно использовало факт, что под модулем число больше нуля. Аналогично и векторный потенциал получим:

$$\varphi = \frac{e}{(R - \mathbf{vR}/c)}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{v}}{c(R - \mathbf{vR}/c)}, \tag{9.1}$$

где **R** и **v** берутся в момент времени ξ. (в СИ добавится множитель $1/(4\pi\varepsilon_0)$) в ϕ и $\mu_0/(4\pi)$) в **A**)

Потенциалы поля в этом виде называются **потенциалами Лиенара-Вихерта**.

Здесь стоит прояснить физический смысл формулы (9.1) $R(\xi)$ – расстояния от точки испускания сигнала в прошлом до точки приёма в настоящем. Кажется, что это всё, и тогда неясен смысл второго слагаемого в знаменателе. Для его понимания перейдём в систему отсчёта, связанную с зарядом, тогда точка наблюдения будет подвижной. Но в этом случае никакого запаздывания нет – распределение поля стационарно, а наблюдатель лишь проходит по нему. Это наблюдение противоречит формуле (9.1) без второго слагаемого в знаменателе. В этом и есть смысл этого слагаемого – согласования обоих точек зрения, из разных систем отсчёта. R/c – время, за которое сигнал проходит от источника к наблюдателю, vR/c – расстояние, на которое сместится заряд за время прохождения сигнала. Т.е. эта поправка частично компенсирует запаздывание.

Для вычисления напряженностей электрического и магнитного полей по формулам, их определяющим, надо определить производные по t'.

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$$

Надо дифференцировать ϕ и **A** по координатам x, y, z точки и моменту t наблюдения. Между тем формулы (9.1) выражают потенциалы как функции от t' и лишь через соотношение $t' + \frac{R(t')}{c} = t$ — как неявные функции от x, y, z, t. Поэтому для вычисления искомых производных надо предварительно вычислить производные от t'.

При нехватке времени вывод можно пропустить, дав только ответ

Дифференцируя соотношение $R(t') = c(t - t')$ по t, имеем

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{\mathbf{Rv}}{R}\frac{\partial t'}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right)$$

(первые три выражения относятся к левой части равнства $R(t') = c(t - t')$, последнее – к правой.)

(значение $\partial R/\partial t'$ получается дифференцированием тождества $R^2 = \mathbf{R}^2$ и подстановкой $\partial \mathbf{R}(t')/\partial t = -\mathbf{v}(t')$; знак минус здесь связан с тем, что $\mathbf{R}$ есть радиус-вектор от заряда e в точку P, а не наоборот). Отсюда

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \mathbf{vR}/Rc}. \tag{63.6}$$

К содержанию

(во второй строчке не хватает штриха в производной)
Аналогично, дифференцируя то же соотношение по координатам, найдем

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{1}{c}\operatorname{grad} R(t') = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R}{\partial t'}\operatorname{grad} t' + \frac{\mathbf{R}}{R}\right) \quad (63.7)$$

Второе равенство получается отсюда: $\frac{\partial R(t')}{\partial x} = \frac{\partial R(t')}{\partial x} + \frac{\partial R(t')}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$.

Решая уравнение (63.7) получим:

$$\operatorname{grad} t' = -\frac{\mathbf{R}}{c\left(R - \frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)}$$

С помощью этих формул не представляет труда вычислить поля **E** и **H**. Опуская промежуточные вычисления, приведем получающийся результат:

$$\mathbf{E} = e\frac{1 - v^2/c^2}{\left(R - \frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right) + \frac{e}{c^2\left(R - \frac{\mathbf{Rv}}{c}\right)^3}\left[\mathbf{R}\left[\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{v}}{c}R\right)\dot{\mathbf{v}}\right]\right], \quad (63.8)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{R}[\mathbf{RE}]. \quad (63.9)$$

Здесь $\dot{\mathbf{v}} = \partial\mathbf{v}/\partial t'$. все величины в правых частях равенств берутся в момент t'. Интересно отметить, что магнитное поле оказывается везде перпендикулярным к электрическому. При $\mathbf{v} = 0$ **E** направлено вдоль **R**, стало быть магнитного поля нет, т.к. $[\mathbf{R},\mathbf{R}] = 0$.

Электрическое поле состоит из двух частей различного характера. Первый член зависит только от скорости частицы (но не от ее ускорения) и на больших расстояниях меняется как $1/R^2$. Второй член зависит от ускорения, а при больших R меняется как $1/R$. Мы увидим ниже, что этот последний член связан с излучаемыми частицей электромагнитными волнами. Что касается первого члена, то, будучи независимым от ускорения, он должен соответствовать полю, создаваемому равномерно движущимся зарядом.

К содержанию

ЛЕКЦИЯ 10

Источники:

Ландау, т. 2, §66, 67, 71, 75.

Поле системы движущихся зарядов. Дипольное излучение.

Рассмотрим поле, создаваемое системой движущихся зарядов на расстояниях, больш***и***х по сравнению с ее собственными размерами. Выберем начало координат O где-либо внутри системы зарядов. Радиус-вектор из O в точку наблюдения поля P обозначим через R_0, а единичный вектор в этом направлении через $\mathbf{n}$. Радиус-вектор элемента заряда $de = \rho dV$ пусть будет $\mathbf{r}$, а радиус-вектор от de в точку P обозначим как $\mathbf{R}$; очевидно, что $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$. На больших расстояниях от системы $R_0 >> r$ и приближенно имеем $R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}| = R_0 - \mathbf{nr}$.

Подставим это выражение в формулы для запаздывающих потенциалов. В знаменателе подынтегральных выражений можно пренебречь $\mathbf{rn}$ по сравнению с R_0. В аргументе же $t - R/c$ этого пренебрежения, вообще говоря, сделать нельзя; возможность такого пренебрежения определяется здесь не относительной величиной R_0/c и $\mathbf{rn}/c$, а тем, насколько меняются сами ρ и $\mathbf{j}$ за время $\mathbf{rn}/c$. Учитывая, что при интегрировании R_0 является постоянной и потому может быть вынесено за знак интеграла, находим для потенциалов поля на большом расстоянии от системы зарядов следующие выражения:

$$\varphi = \frac{1}{R_0}\int \rho_{t-R_0/c+\mathbf{rn}/c}\,dV,$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t-R_0/c+\mathbf{rn}/c}\,dV.$$

Временем $\mathbf{rn}/c$ в подынтегральных выражениях запаздывающих потенциалов можно пренебречь, если за это время распределение зарядов мало меняется. Легко найти условия осуществления этого требования. Пусть T означает порядок величины времени, в течение которого распределение зарядов в системе меняется заметным образом. Излучение этой системы будет, очевидно, обладать периодом порядка T (т. е. частотой порядка $1/T$). Обозначим далее буквой a порядок величины размеров системы. Тогда время $\mathbf{rn}/c \sim a/c$. Для того чтобы за это время распределение зарядов в системе не успело значительно измениться, необходимо, чтобы $a/c << T$. Но cT есть не что иное, как длина волны λ излучения. Таким образом, условие $a << cT$ можно написать в виде

$$a << \lambda$$

т. е. размеры системы должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны.

К содержанию

Это условие можно написать еще и в другом виде, заметив, что $T \sim a/v$, так что $\lambda \sim ca/v$, если v есть порядок величины скорости зарядов. Из $a << \lambda$ находим тогда

$$v << c$$

т. е. скорости зарядов должны быть малы по сравнению со скоростью света. Таким образом, на достаточно больших расстояниях от системы поле в малых участках пространства можно рассматривать как плоскую волну. **Для этого надо, чтобы расстояния были велики не только по сравнению с размерами системы, но и по сравнению с длиной излучаемых системой электромагнитных волн.** Об этой области поля говорят, как о **волновой зоне** излучения. **Заметьте, что постоянное поле эквивалентно длине волны, стремящейся к бесконечности, а значит, волновая зона для него недостижима.**

Раз на таких расстояниях поле можно рассматривать как плоскую волну, для определения напряжённости полей достаточно вычислить только векторный потенциал. В данном приближении он имеет вид:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}dV,$$

(в СИ множитель перед интегралом $\frac{\mu_0}{4\pi R_0}$), где время $t' = t - R_0/c$ не зависит от переменных интегрирования. Подставляя $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, переписываем равенство в виде:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\left(\sum e\mathbf{v}\right)$$

где суммирование производится по всем зарядам системы; все величины в правых частях равенств берутся в момент времени t', для краткости мы будем опускать индекс t'. Но

$$\sum e\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r} = \dot{\mathbf{d}},$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент системы. Таким образом,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\dot{\mathbf{d}} \quad \textbf{(СГС)}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi R_0}\dot{\mathbf{d}} \quad \textbf{(СИ)}$$

Напомним связь векторного потенциала с полями, полученную в прошлых лекциях:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}], \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c}[[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 c}\left[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}\right] \quad \textbf{(СИ)}$$

(Формула $\mathbf{E} = -\frac{\dot{\mathbf{A}}}{c}$ здесь неприменима, так как потенциалы ϕ, $\mathbf{A}$ не удовлетворяют тем дополнительным калибровочным условиям, которые были наложены на них при выводе этого уравнения). С помощью этих формул находим, что магнитное поле равно:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2R_0}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]; \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c^2R_0}[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]. \tag{10.1}$$

К содержанию

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi R_0 c}\left[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}\right] \quad \textbf{(СИ)}$$

(размерность **H** в СИ [A/m])

Излучаемые системой электромагнитные волны уносят с собой определенную энергию. Поток энергии дается вектором Пойнтинга, равным в плоской волне

$$\mathbf{S} = c\frac{H^2}{4\pi}\mathbf{n} = c\frac{E^2}{4\pi}\mathbf{n}$$

Интенсивность dI излучения в элемент телесного угла do определяют как количество энергии, протекающей в единицу времени через элемент $df = R_0^2 do$ шаровой поверхности с центром в начале координат и с радиусом R_0. Это количество равно плотности потока энергии S, помноженной на df, т. е.

$$dI = c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2 do \quad \textbf{(СГС)} \tag{10.2}$$

$$dI = c\mu_0 H^2 R_0^2 do \quad \textbf{(СИ)},$$

Таким образом, при движении зарядов в системе в окружающем пространстве возникает нестационарное электромагнитное поле (**излучение**). Система неравномерно движущихся зарядов называется **излучателем**.

В рассматриваемом приближении излучение, вызванное движущимся зарядом определяется второй производной от дипольного момента системы (уравнение 10.1). Такое излучение называется **дипольным**.

Поскольку $\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r}$, то $\ddot{\mathbf{d}} = \sum e\dot{\mathbf{v}}$. Таким образом, заряды могут излучать, только если они движутся с ускорением. Равномерно движущиеся заряды не излучают. Это следует, впрочем, и непосредственно из принципа относительности, так как равномерно движущийся заряд можно рассматривать в такой инерциальной системе, где он покоится, а покоящиеся заряды не излучают.

Подставляя выражения для полей (10.1), в интенсивность (10.2) получим:

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 do = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\, do \quad \textbf{(СГС)}$$

$$dI = \frac{\mu_0\left|\ddot{\mathbf{d}}\right|^2}{(4\pi)^2 c}\sin(\theta)^2 do \quad \textbf{(СИ)}$$

где θ — угол между векторами **d** и **n**. Это есть количество энергии, излучаемой системой в единицу времени в элемент телесного угла do отметим, что угловое распределение излучения дается множителем $\sin^2(\theta)$. **В основном диполь рассеивает в плоскости, перпендикулярной ускорению.** Подставив do = $2\pi*\sin(\theta)d\theta$ и интегрируя по $d\theta$ от 0 до π, получим полное излучение:

К содержанию

$$I = \frac{2\left|\ddot{\mathbf{d}}\right|^2}{3c^3} \quad \textbf{(СГС)}, \quad I = \frac{\mu_0\left|\ddot{\mathbf{d}}\right|^2}{6\pi c} \quad \textbf{(СИ)}$$

Если имеется всего один движущийся во внешнем поле заряд, то $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$ и $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — ускорение заряда. Таким образом, полное излучение движущегося заряда:

$$I = \frac{2e^2\omega^2}{3c^3}$$

Отметим, что замкнутая система, состоящая из частиц, у которых отношения зарядов к массам одинаковы, не может излучать дипольно. Действительно, для такой системы дипольный момент

$$\mathbf{d} = \sum e\mathbf{r} = \sum \frac{e}{m} m\mathbf{r} = \mathrm{const} \sum m\mathbf{r},$$

где const есть одинаковое для всех частиц отношение заряда к массе. Но $\sum m\mathbf{r} = \mathbf{R} \sum m$, где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра инерции системы (напоминаем, что все скорости $v << c$, так что применима нерелятивистская механика). Поэтому $\ddot{\mathbf{d}}$ пропорционально ускорению центра инерции, т. е. равно нулю, так как центр инерции движется равномерно. Наконец, выпишем формулы для спектрального разложения интенсивности дипольного излучения. Введём количество dE_ω энергии, излучаемой в виде волн с частотами в интервале $d\omega/2\pi$. Оно получится заменой в вектора $\ddot{\mathbf{d}}$ его компонентой Фурье $\ddot{\mathbf{d}}_\omega$ и одновременным умножением 2:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4}{3c^3}|\ddot{\mathbf{d}}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}$$

По определению компоненты Фурье, имеем

$$\ddot{\mathbf{d}}_\omega e^{-i\omega t} = \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t}) = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t},$$

откуда $\ddot{\mathbf{d}}_\omega = -\omega^2 \mathbf{d}_\omega$. Таким образом, получаем

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{4\omega^4}{3c^3}|\mathbf{d}_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Подобные выкладки можно проделать в квадрупольном приближении и учтя магнитные диполи. Для этого придётся учесть излучение, обусловленное следующими членами разложения векторного потенциала по степеням отношения a/λ размеров системы к длине волны, по-прежнему предполагающегося малым. Хотя эти члены, вообще говоря, малы по сравнению с дипольным, они существенны в тех случаях, когда дипольный момент системы равен нулю, так что дипольное излучение отсутствует. Вывод мы приводить не будем, лишь результат:

$$I = \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2 + \frac{1}{180c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{3c^2}\ddot{\mathbf{m}}^2$$

К содержанию

Торможение излучением

Запишем скалярный потенциал

$$\varphi = \int \frac{1}{R}\rho_{t-R/c}\, dV$$

Будем раскладывать потенциал в ряд по малости времени R/c, считая, что скорости зарядов малы. Можно показать, что разложение в ряд до второго порядка даёт более-менее обычные силы – нулевой порядок даёт потенциал без запаздывания; первый порядок (параграф 65) даёт изменение полного заряда со временем, поэтому равен нулю; второй – классические силы со стороны поля на заряд:

$$\varphi = \int \frac{\rho\, dV}{R} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, dV + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R\rho\, dV$$

Посмотрим, к чему приводит следующий порядок разложения. Член третьего порядка по $1/c$ равен:

$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2\rho\, dV.$$

С векторным потенциалом по-другому. В лагранжиане он и так домножается на v/c, поэтому нужно учитывать на один порядок по v/c ниже:

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV.$$

Произведем преобразование потенциалов:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f,$$

выбрав функцию f таким образом, чтобы скалярный потенциал $\varphi^{(3)}$ обратился в нуль:

$$f = -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho\, dV.$$

Тогда новый векторный потенциал будет равен

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\int R^2\rho\, dV = \\ = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}\, dV - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathbf{R}\rho\, dV.$$

Переходя здесь от интегралов к суммам по отдельным зарядам, для первого слагаемого в правой части получим выражение $-\frac{1}{c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$. Во втором слагаемом пишем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ имеют обычный смысл; тогда $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v}$, и второе слагаемое принимает вид $\frac{1}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$ Таким образом,

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$$

К содержанию

Соответствующее этому потенциалу магнитное поле равно нулю ($\mathbf{H}$ = rot($\mathbf{A}'^{(2)}$) = 0), поскольку $\mathbf{A}'^{(2)}$ не содержит явным образом координат. Электрическое же поле, $E = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}$, равно

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}} \quad \text{(СГС)}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dddot{\mathbf{d}} \quad \textbf{(СИ)}$$

Рассмотрим систему зарядов, совершающих стационарное движение и вычислим среднюю работу, производимую полем за единицу времени. На каждый заряд e действует сила $\mathbf{f} = e\mathbf{E}$, т. е.

$$\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}.$$

$$\mathbf{f} = \frac{e}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\dddot{\mathbf{d}} \quad \textbf{(СИ)}$$

Это сила **торможения излучением**. В единицу времени эта сила производит работу, равную **fv**; полная работа, совершенная над всеми зарядами, равна сумме по зарядам:

$$\sum \mathbf{fv} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\sum e\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2.$$

При усреднении по времени первый член исчезает, так что средняя работа оказывается равной:

$$\sum \overline{\mathbf{fv}} = -\frac{2}{3c^3}\overline{\ddot{\mathbf{d}}^2}.$$

Но стоящее справа выражение есть не что иное, как (взятое с обратным знаком) среднее излучение энергии системой за единицу времени. Таким образом, возникающие в третьем приближении силы описывают обратное действие излучения на заряды. Эти силы носят название **торможения излучением** или лоренцевых сил трения.

К содержанию

ЛЕКЦИЯ 11

Источники:

1. Ландау, т. 2, §78.
2. Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. Часть 2. Электромагнитные волны и оптика, §138.

Рассеяние свободными зарядами

Если на систему зарядов падает электромагнитная волна, то под ее влиянием заряды приходят в движение. Это движение в свою очередь сопровождается излучением во все стороны; происходит **рассеяние** первоначальной волны. Рассеяние удобно характеризовать отношением количества энергии, испускаемой рассеивающей системой в данном направлении в единицу времени к плотности потока энергии падающего на систему излучения. Это отношение имеет размерность площади и называется **эффективным сечением** (или просто **сечением**) **рассеяния**.

Пусть dI есть энергия, излучаемая системой в телесный угол do (в 1 с) при падении на нее волны с вектором Пойнтинга **S**. Тогда сечение рассеяния (в телесный угол do) равно

$$d\sigma = \frac{\overline{dI}}{\overline{S}}$$

(черта над буквой означает усреднение по времени). Интеграл от $d\sigma$ по всем направлениям есть полное сечение рассеяния.

> *Физический смысл сечения рассеяния можно пояснить следующим образом: предположим, что частица излучает всё подающее на неё излучение, тогда отношение излучаемой интенсивности к плотности потока – есть площадь сечения частицы, на которой этот поток захватывается. Другими словами, чем больше сечение рассеяния, там больше частица* (*сечение частицы плоскостью переперндикулярной направлению падающей волны*)

Рассмотрим рассеяние, производимое одним неподвижным свободным зарядом. Пусть на этот заряд падает плоская монохроматическая линейно поляризованная волна. Ее электрическое поле можно написать в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos\left(\mathbf{kr} - \omega t + \alpha\right).$$

Будем предполагать, что скорость, приобретаемая зарядом под действием поля падающей волны, мала по сравнению со скоростью света, что практически всегда выполняется. Тогда можно считать, что сила, действующая на заряд, равна $e\mathbf{E}$, а силой $e/c[\mathbf{vH}]$ со стороны магнитного поля можно пренебречь. В этом случае можно также пренебречь влиянием смещения заряда при его колебаниях под влиянием поля. Если заряд совершает колебания около начала координат, то можно тогда считать, что на него все время действует то поле, которое имеется в начале координат, т.е. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos(\omega t - \alpha)$.

Поскольку уравнения движения заряда гласят

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

а его дипольный момент $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$, то

$$\ddot{\mathbf{d}} = \frac{e^2}{m}\mathbf{E}.$$

Для вычисления рассеянного излучения воспользуемся формулой

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 do = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\, do,$$

для дипольного излучения (приобретаемая скорость считается малой, нерелятивистской); заметим также, что частота излучаемой зарядом (т.е. рассеянной им) волны равна, очевидно, частоте падающей волны. Подставляя найденное выражение для дипольного момента в интенсивность, находим:

$$dI = \frac{e^4}{4\pi m^2 c^3}[\mathbf{E}\mathbf{n}']^2 do,$$

где $\mathbf{n}'$ — единичный вектор в направлении рассеяния. С другой стороны, вектор Пойнтинга падающей волны равен:

$$S = \frac{c}{4\pi}E^2.$$

Отсюда находим сечение рассеяния в телесный угол do:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta\, do,$$

В **СИ** добавляется множитель $\left(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2$

где θ — угол между направлением рассеяния и направлением электрического поля **E** падающей волны. Мы видим, что сечение рассеяния свободным зарядом не зависит от частоты. Рассеяние максимально при $\theta = \pi/2$, т.е. в направлении перпендикулярном **E**, а при линейной поляризации – это плоскость, включающая направление движение волны и обратное ему. Написать, что при круговой поляризации?

Определим полное сечение σ. Для этого выберем направление **E** в качестве полярной оси; тогда $do = \sin(\theta)d\theta d\phi$ и, интегрируя по $d\theta$ от 0 до π и по $d\phi$ от 0 до 2π, находим:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2$$

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\right)^2 \quad \textbf{(СИ)}$$

(так называемая формула Томсона). Сечение рассеяния даёт возможность посчитать эффективный радиус электрона (т.н. классический радиус электрона):

К содержанию

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2}\ (\mathbf{СГС}),\ r_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\ (\mathbf{СИ})$$

Величина радиуса $r_e \sim 3\cdot 10^{-15}$ *м* .

Наличие рассеяния приводит к появлению некоторой силы, действующей на рассеивающую частицу. В этом легко убедиться из следующих соображений. Падающая на частицу волна теряет в среднем в единицу времени энергию $cW\sigma$, где W — средняя плотность энергии, а σ — полное сечение рассеяния. Поскольку импульс поля равен его энергии, деленной на скорость света, то падающая волна теряет при этом импульс, равный по величине $W\sigma$. С другой стороны, в системе отсчета, в которой заряд совершает лишь малые колебания под влиянием силы $e\mathbf{E}$, и его скорость v поэтому мала, полный поток импульса в рассеянной волне равен, с точностью до членов высшего порядка по v/c, нулю. Поэтому весь теряемый падающей волной импульс «поглощается» рассеивающей частицей. Средняя действующая на частицу сила $\mathbf{f}$ равна средней величине поглощаемого в единицу времени импульса, т.е.:

$$\overline{\mathbf{f}} = \sigma\overline{W}\mathbf{n}$$

($\mathbf{n}$ —единичный вектор в направлении распространения падающей волны). Отметим, что средняя сила оказывается величиной второго порядка по отношению к полю падающей волны, в то время как «мгновенная» сила (главная часть которой есть e**E**) — первого порядка по отношению к полю.

$$\overline{\mathbf{f}} = \frac{2e^4}{3m^2c^4}\overline{E^2\mathbf{n}} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\cdot\frac{\overline{E^2}}{4\pi}\mathbf{n},$$

$$\overline{\mathbf{f}} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\varepsilon_0\overline{E^2}}{2}\mathbf{n}\ (\mathbf{СИ})$$

Рассеяние связанными зарядами. Цвет в природе.

Из заряженных частиц, входящих в состав вещества (протонов и электронов), рассеивают электромагнитные волны практически только электроны. Электроны в атомах — связанные заряды; в качестве простейшей модели атома можно использовать осциллятор с собственной частотой ω_0. В поле линейно поляризованной падающей волны электрон совершает вынужденные колебания.

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r} = \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\mathbf{r}}.$$

Третья производная по времени приходит от силы торможения излучением !!! Заметим, что в этом уравнении кажется, что сила трения действует на разгон, однако, если итерационно (по коэффициенту перед третьей производной) решить это уравнение, можно показать, что оно действует на

торможение. Дело в том, что в осцилляторе третья производная будет всегда противонаправлена первой (скорости).
Частное решение этого уравнения (на больших временах) имеет вид:

$$x(t) = -\frac{\frac{e}{m} E_0 e^{-i\omega t}}{\omega^2 - \omega_0^2 + i\omega^3 \frac{2r_e}{3c}},$$

Подставим это в выражения для интенсивности и вектора Поинтинга:

$$dI = \frac{1}{4\pi c^3}[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]^2 do = \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta\, do,$$

$$S = \frac{c}{4\pi}E^2.$$

Получим:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \mathcal{F}(\omega, \omega_0)\, r_e^2 \sin^2\theta;\;\; \sigma = \mathcal{F}(\omega, \omega_0)\,\sigma_T;$$

$$F = \frac{\omega^4}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \frac{4}{9}\left(\frac{r_e}{c}\right)^2 \omega^6}$$

$$r_e = \frac{e^2}{mc^2}\ \textbf{(СГС)},\;\; r_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{mc^2}\ \textbf{(СИ)}$$

В ответе можно выделить три случая:

(1й случай верен при слабом затухании, когда $\dddot{r} \approx -\omega_0 \dot{r}$)

1. Область высоких частот $\omega \gg \omega_0$. Функцию F можно представить в виде:

   $$F = \frac{1}{1 + \frac{4}{9}\left(\frac{r_e}{\lambda}\right)^2} \approx 1;\quad \sigma \approx \sigma_T$$

   $$\lambda = c/\omega$$

   Здесь мы пренебрегли слагаемым r_e/λ по нескольким причинам. Во-первых если $r_e > \lambda$, мы не можем работать в волновой зоне и выражение для силы торможения неверно. Во вторых, например, для электронов r_e ~ $3 \cdot 10^{-15}\,м$, а этот масштаб определяет предел применимости ЭД вообще. Более того, гамма-излучение имеет длину волны $\sim 10^{-12}\,м$, т.е. r_e/λ не мало для электронов только при длинах волн в 1000 раз меньше гаммы-изучения.
2. Резонансное рассеяние $\omega \approx \omega_0$

$$F = \frac{1}{\frac{4}{9}\left(\frac{r_e}{c}\right)^2 \omega^2} = \frac{9}{4}\left(\frac{\lambda_0}{r_e}\right)^2 \gg 1$$

$$\sigma = 6\pi\lambda_0^2 \gg \sigma_T$$

3. Область низких частот

$$F \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4; \quad \sigma \approx \sigma_T \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 \ll \sigma_T$$

Случай 1 особого интереса не представляет – старое рассеяние.
Случай 2 – резонансное рассеяние остветственно за **возникновение цвета в природе** – в этом случае вещество из белого спектра рассеивает в большей части ту частоту, которая является резонансной для вещества – эта частота и определяет его цвет.
Случай 3. Такую частотную зависимость сечения рассеяния в видимой области впервые установил Рэлей. В работах по теории рассеяния света он нашел объяснение закономерностей, волновавших физиков с незапамятных времен: почему небо голубое, а заря красная?

Лучи Солнца рассеиваются в каждой точке атмосферы — и больше рассеивается коротковолновый свет. Глаз видит все рассеиваемые волны — от красного (длинноволнового), до фиолетового (коротковолнового). На фиолетовом коротковолновом краю оптического спектра идёт нарастание. Поэтому интегральная картинка воспринимается глазом как голубой цвет, отодвинутая от фиолетового края, но тяготеющая именно к этой стороне спектра. Также надо учесть меньшую чувствительности глаза к фиолетовому цвету и большую к синему, который раздражает не только чувствительные к синему цвету колбочки в сетчатке, но и чувствительные к красным и зеленым лучам).

На закате же вблизи Солнца наблюдаются иные явления. Если в точке неба, вдалеке от Солнца наблюдатель видит всё тот же голубой/фиолетовый цвет, то вблизи с Солнцем — красный. Дело в том, что в любой точке неба вдалеке от Солнца, наблюдатель по прежнему видит рассеянный, то есть коротковолновый (интегральный голубой) свет. А на малых углах рассеяния, где больше прямых лучей Солнца, до наблюдателя гораздо больше доходит длинноволновый, то есть красный цвет. Это объясняется тем, что по сравнению с положением Солнца в кульминации, свет проходит в несколько раз большую толщу атмосферы и от фиолетового света не остаётся практически ничего — он рассеивается многократно в другие стороны. И интегральная картинка смещается к красному краю спектра.

При пасмурной погоде большая часть прямого солнечного света до земли не доходит. То, что доходит, преломляют водяные капли/кристаллы льда, взвешенные в воздухе. Капель много, и каждая имеет свою форму и, следовательно, искажает по-своему. То есть облака рассеивают свет от неба, и в результате до земли доходит белый свет. Если облака имеют большие размеры, то часть света поглощается, и получается серый цвет неба. Излучение при рассеянии не очень меняется по спектральному составу: капли в облаках крупнее длины волны, поэтому весь видимый спектр (от красного до фиолетового) рассеивается примерно одинаково. По интенсивности излучение меняется (оценочно) от 1/6 интенсивности прямого солнечного света для относительно тонких облаков до 1/1000 для наиболее толстых грозовых облаков. **В случае облаков природа рассеяния другая – не на заряженных чатицах, а на каплях воды.**

ЛЕКЦИЯ 12

Источники:

Ландау, т. 8, §1, 6, 7, 29.

Макроскопическая электродинамика в веществе

Предмет макроскопической электродинамики составляет изучение электромагнитных полей в пространстве, заполненном **веществом**. Этот раздел электродинамики оперирует физическими величинами, усредненными по «физически бесконечно малым» элементам объема, не интересуясь микроскопическими колебаниями этих величин, связанными с молекулярным строением вещества. Так, вместо истинного «микроскопического» значения напряженности электрического поля мы будем рассматривать ее усредненное значение, обозначив его как:

$$\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{E}.$$

Вид уравнений макроскопической электродинамики и смысл входящих в них величин существенно зависят от физической природы материальной среды, а также от характера изменения поля со временем. Поэтому представляется рациональным производить вывод и исследование этих уравнений для каждой категории физических объектов в отдельности.

В отношении электрических свойств тела можно разделить на две категории — проводники и диэлектрики, причем первые отличаются от вторых тем, что всякое электрическое поле вызывает в них движение зарядов — электрический ток. Коротко рассказать про **диэлектрики и проводники.** В диэлектриках тоже есть заряды, но они связаны, в отличие от проводников.

Вначале мы рассмотрим проводники. Из основного свойства проводников, прежде всего, следует, что в электростатическом случае напряженность электрического поля внутри них должна быть равной нулю. Действительно, отличная от нуля напряженность **E** привела бы к возникновению тока; между тем распространение тока в проводнике связано с диссипацией энергии и потому не может само по себе (без внешних источников энергии) поддерживаться в стационарном состоянии.

Тем самым задача электростатики проводников сводится к определению электрического поля в пустоте, вне проводников, и к определению распределения зарядов по поверхности проводников. Определим условия, накладываемые на величины поля на границе проводника с вакуумом.

Уравнения максвелла верны везде, поэтому просто запишем уравнения максвелла в интегральном виде.

К содержанию

Закон Гаусса	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = 4\pi Q$	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = Q$
Закон Гаусса для магнитного поля	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0$
Закон индукции Фарадея	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$
Теорема о циркуляции магнитного поля	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c}I + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{d}{dt}\int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$

Из теоремы Гаусса будет следовать скачок нормальных компонент (но в металле поля нет, поэтому просто нормальная компонента равна плотности заряда):

$$E_n = 4\pi\sigma$$

А из закона Фарадея получаем, что тангенциальная составляющая равна нулю (опять, внутри проводника поля нет). Про магнитное поле поговорим позже – т.к. идеальный электрический проводник – не идеальный магнитный проводник (~сверхпроводник), и там надо учитывать намагниченность, о которой поговорим позже.
Например, так:

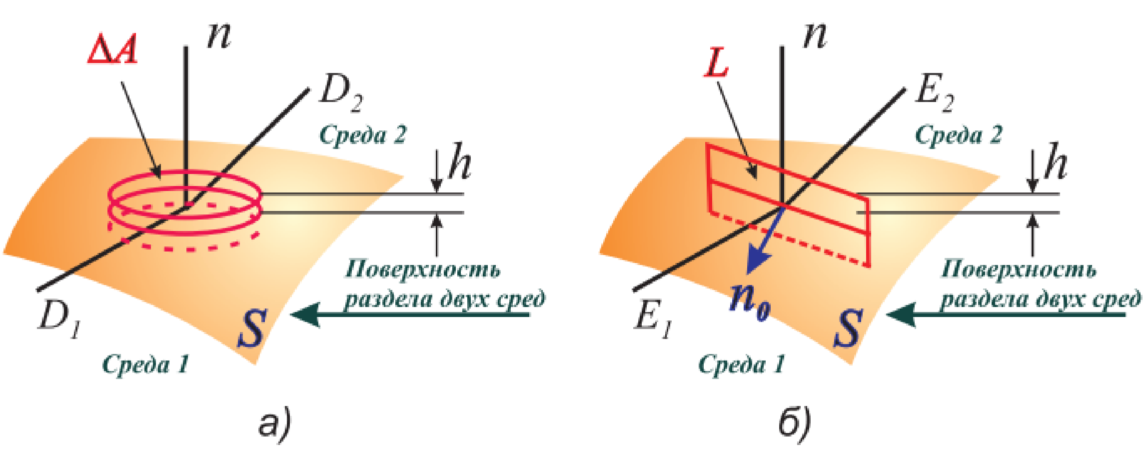


Рисунок 1.

На рис. 1а приведена схема для вывода граничных условий для нормальных компонент вектора **D** в точке поверхности раздела сред. Здесь $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$ — значения электрической индукции в средах 1 и 2 соответственно, ΔA — малая площадка на поверхности раздела сред, содержащая исследуемую точку. На этой площадке построим цилиндр с основаниями, параллельными границе раздела и лежащими в средах 1 и 2 соответственно. Высота цилиндра равна h. На рис. 1б приведена схема для вывода граничных условий для тангенциальных компонент вектора напряженности электрического поля **E**. Здесь $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ – значения вектора напряженности электрического поля в средах 1 и 2 соответственно, L – малый контур, со сторонами, лежащими в средах 1 и 2. Применим теорему Гаусса для цилиндра, изображенного на рис. 1а. Интеграл в теореме Гаусса представим в виде суммы трех интегралов (по двум основаниям цилиндра и по боковой стороне цилиндра). Заряд q, охваченный поверхностью цилиндра, вычислим по формуле $q = \sigma \cdot \Delta A$, где σ – плотность свободных зарядов на поверхности раздела. Воспользуемся теоремой о среднем и устремим h к нулю, стягивая одновременно площадку ΔA к исследуемой точке поверхности раздела. В результате из теоремы Гаусса следует

$$\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1\right) = \sigma$$

где **n** – единичный вектор нормали к поверхности раздела. Если применить закон Фарадея, к замкнутому контуру на рис 2б и устремить короткие стороны к нулю («толщина» слоя стремиться к нулю), то получим:

$$\left(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\right) d\mathbf{l} = 0$$

Можно преобразовать это выражение к следующему виду:

$$\left[\left(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1\right) \times \mathbf{n}\right] = 0$$

Перейдем теперь к изучению постоянного электрического поля в диэлектриках. Основное свойство диэлектриков заключается в невозможности протекания в них постоянного тока. Поэтому, в отличие от проводников, напряженность постоянного электрического поля в диэлектриках отнюдь не должна быть равной нулю, и мы должны получить уравнения, которыми это поле описывается. Одно из них получается путем усреднения одного из уравнений Максвелла и по-прежнему гласит (магнитное поле пока не рассматриваем):

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \qquad (12.1)$$

Второе же получается усреднением уравнения $\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi\rho$:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \text{ (в СИ } \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 \text{)}$$

Предположим, что внутрь вещества диэлектрика не внесено извне никаких посторонних зарядов; это есть наиболее обычный и важный случай. Тогда полный заряд во всем объеме диэлектрика остается равным нулю и после внесения его в электрическое поле:

$$\int \bar{\rho}\, dV = 0.$$

Это интегральное соотношение, которое должно выполняться для тела любой формы, означает, что средняя плотность зарядов может быть написана в виде дивергенции некоторого вектора, который принято обозначать как —**P**:

$$\bar{\rho} = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \qquad (12.2)$$

причем вне тела $\mathbf{P} = 0$. Действительно, интегрируя по объему, ограниченному поверхностью, охватывающей тело и проходящей везде вне его, получим

$$\int \bar{\rho}\, dV = -\int \operatorname{div} \mathbf{P}\, dV = -\oint \mathbf{P}\, d\mathbf{f} = 0.$$

К содержанию

Величина P называется вектором **диэлектрической поляризации** (или просто **поляризации**) тела; диэлектрик, в котором **P** отлично от нуля, называют поляризованным. Для выяснения физического смысла самой величины **P** рассмотрим полный дипольный момент всех внутренних зарядов в диэлектрике; в отличие от полного заряда, эта величина не должна быть равной нулю. По определению дипольного момента это есть интеграл:

$$\int \mathbf{r}\bar{\rho}\, dV$$

Подставив ρ в виде $-\mathrm{div}(\mathbf{P})$ и снова интегрируя по объему, выходящему за пределы тела, получим:

$$\int \mathbf{r}\bar{\rho}\, dV = -\int \mathbf{r}\,\mathrm{div}\,\mathbf{P}\, dV = -\oint \mathbf{r}\,(d\mathbf{f}\,\mathbf{P}) + \int (\mathbf{P}\nabla)\,\mathbf{r}\, dV.$$

Здесь использовалось обобщённое правило взятия по частям (см. лекцию 5, с. 26). Интеграл по поверхности исчезает, а во втором имеем $(\mathbf{P}\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{P}$, так что

$$\int \mathbf{r}\bar{\rho}\, dV = \int \mathbf{P}\, dV.$$

Таким образом, вектор поляризации представляет собой **дипольный момент** единицы объема диэлектрика. Подставив выражение для плотности в уравнение Максвелла получим, получим второе уравнение электростатического поля в виде:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0 \tag{12.6}$$

где введена новая величина **D**, определяемая как

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$ (в СИ $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$)

и называемая электрической индукцией. Уравнение для **D** было получено путем усреднения плотности зарядов, входящих в состав диэлектрика. Если же в диэлектрик внесены извне посторонние по отношению к его веществу заряды (мы будем называть их **сторонними**), то к правой части уравнения должна быть добавлена их плотность:

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ст}}$$

На поверхности раздела двух различных диэлектриков должны выполняться определенные граничные условия. Одно из этих условий является следствием уравнения rot(**E**) = 0. Если поверхность раздела однородна по своим физическим свойствам), то это условие требует непрерывности тангенциальной составляющей напряженности поля:

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}$$

Второе же условие следует из уравнения div(**D**) = 0 и требует непрерывности нормальной к поверхности составляющей индукции:

$$D_{n1} = D_{n2}.$$

На границе между диэлектриком и проводником $\mathbf{E}_t = 0$, а условие для нормальной компоненты получается из (12.6):

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad D_n = 4\pi\sigma_{\text{ст}},$$

где $\sigma_{\text{ст}}$—плотность зарядов на поверхности проводника

К содержанию

Диэлектрическая проницаемость

Для того чтобы уравнения (12.1) и (12.6) составляли полную систему уравнений, определяющих электростатическое поле, к ним надо еще присоединить соотношение, связывающее индукцию **D** и напряженность поля **E**. В огромном большинстве случаев эту зависимость можно считать линейной. Она соответствует первым членам разложения **D** по степеням **E** и связана с малостью внешних электрических полей по сравнению с внутренними молекулярными полями. Линейная зависимость **D** от **E** приобретает особенно простой вид в важнейшем случае изотропных диэлектриков. Очевидно, что в изотропном диэлектрике векторы **D** и **E** должны иметь одинаковое направление. Поэтому их линейная зависимость сводится к простой пропорциональности:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \text{ (в СИ } \mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}\text{)}$$

Коэффициент ε называется **диэлектрической проницаемостью** вещества и является функцией его термодинамического состояния. *Заметим, что ε входит под знак дивергенции в уравнении (12.6), и в случае неоднородной среды его нельзя оттуда выносить.* Вместе с индукцией пропорциональна полю также и поляризация:

$$\mathbf{P} = \kappa\mathbf{E} \equiv \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\mathbf{E} \quad \text{(СГС)}$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\kappa\mathbf{E} \equiv \varepsilon_0\left(\varepsilon-1\right)\mathbf{E} \quad \text{(СИ)}$$

Величина κ называется **коэффициентом поляризуемости** вещества (или его **диэлектрической восприимчивостью**). Можно показать, что диэлектрическая проницаемость всегда больше единицы (кроме исключительных случаев); поляризуемость, соответственно, всегда положительна. Поляризуемость разреженной среды (газ) можно считать пропорциональной ее плотности.

Граничные условия на поверхности раздела двух изотропных диэлектриков принимают вид

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}, \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}.$$

Таким образом, нормальная составляющая напряженности поля испытывает скачок, меняясь обратно пропорционально диэлектрическим проницаемостям соответствующих сред.

Решение задачи о поле системы заряженных частиц в пустоте переходит в решение той же задачи в диэлектрической среде путем формальной замены потенциалов и зарядов: либо $\phi \to \varepsilon\phi, e \to e$, либо $\phi \to \phi, e \to e/\varepsilon$. При заданных зарядах потенциал и напряженность поля убывают в ε раз по сравнению с их значениями для поля в пустоте; это ослабление поля может быть наглядно истолковано как результат частичной экранировки заряда проводника поверхностными зарядами прилегающего к нему поляризованного диэлектрика. Если же поддерживаются постоянными потенциалы проводников, то поле остается неизменным, но увеличиваются в ε раз заряды (Отсюда следует, в частности, что при заполнении конденсатора диэлектриком, его емкость увеличивается в ε раз.).

Наконец, отметим, что в электростатике можно формально рассматривать проводник (незаряженный) как тело с бесконечной диэлектрической проницаемостью — в том смысле, что влияние, оказываемое им на внешнее электрическое поле, такое же, какое оказывал бы диэлектрик (той же формы) с $\varepsilon \to \infty$. Действительно, в силу конечности граничного условия для индукции **D** она должна оставаться конечной внутри тела и при $\varepsilon \to \infty$; но это означает, что в таком поле будет **E** = 0, в соответствии со свойствами проводника.

Постоянное магнитное поле в веществе

Постоянное магнитное поле в материальных средах описывается двумя уравнениями Максвелла, которые получаются путем усреднения микроскопических уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}. \tag{13.1}$$

Среднюю напряжённость магнитного поля принято называть магнитной индукцией и обозначать посредством

$$\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{B}.$$

Поэтому результат усреднения первого из уравнений (13,1) напишется как

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \tag{13.3}$$

Во втором же уравнении производная по времени при усреднении исчезает, поскольку среднее поле предполагается постоянным, так что имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}. \tag{13.4}$$

Среднее значение микроскопической плотности тока, вообще говоря, отлично от нуля как в проводниках, так и в диэлектриках. Разница между этими двумя категориями тел заключается лишь в том, что в диэлектриках всегда

$$\int \overline{\rho\mathbf{v}}\, d\mathbf{f} = 0, \tag{13.5}$$

где интеграл берется по полной площади любого поперечного сечения тела; в проводниках же этот интеграл может быть отличным от нуля. Предположим сначала, что в теле (если оно является проводником) отсутствует полный ток, т. е. справедливо соотношение (13,5).

Равенство нулю интеграла (13.5) по любому сечению тела означает, что вектор $\rho\mathbf{v}$ может быть написан в виде ротора некоторого другого вектора, который принято обозначать как c**M**:

$$\overline{\rho\mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M},$$

причем величина $\overline{\rho\mathbf{v}}$ отлична от нуля только внутри тела (ср. аналогичные рассуждения для электрического поля). Действительно, интегрируя по поверхности, ограниченной контуром, охватывающим тело и проходящим везде вне его, получим:

$$\int \overline{\rho\mathbf{v}}\, d\mathbf{f} = c\int \operatorname{rot} \mathbf{M}\, d\mathbf{f} = c\oint \mathbf{M}\, d\mathbf{l} = 0.$$

Вектор **M** называют намагниченностью тела. Вводя его в уравнение (13.4), получим

К содержанию

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0 \tag{13.7}$$

где вектор **H** связан с магнитной индукцией **B** соотношением

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M},$$ (В СИ: $\mathbf{B} = \mu_0*(\mathbf{H} + \mathbf{M})$)

аналогичным соотношению между электрической индукцией **D** и напряженностью **E**.

ВАЖНО! Хотя вектор **H**, по аналогии с **E**, называют обычно напряженностью магнитного поля, следует помнить, что в действительности истинное среднее значение напряженности есть **B**, а не **H**. Силовыми характеристиками полей являются именно **E** и **B** (**F = qE +** $q[\mathbf{vB}]$)!

Для выяснения физического смысла величины **M** рассмотрим полный магнитный момент, создаваемый всеми движущимися внутри тела заряженными частицами. По определению магнитного момента, это есть интеграл.

$$\frac{1}{2c}\int\left[\mathbf{r}\cdot\overline{\rho\mathbf{v}}\right]dV = \frac{1}{2}\int[\mathbf{r}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M}]\,dV.$$

Поскольку вне тела $\rho\mathbf{v} = 0$, то интеграл можно брать по любому объему, выходящему за пределы тела. Преобразуем интеграл следующим образом:

$$\int[\mathbf{r}[\nabla\mathbf{M}]]\,dV = \oint[\mathbf{r}[d\mathbf{f}\,\mathbf{M}]] - \int[[\mathbf{M}\nabla]\mathbf{r}]\,dV.$$

Интеграл по поверхности, проходящей вне тела, обращается в нуль. Во втором же члене имеем

$$[[\mathbf{M}\nabla]\mathbf{r}] = -\mathbf{M}\,\mathrm{div}\,\mathbf{r} + \mathbf{M} = -2\mathbf{M}.$$

Таким образом, получаем в результате

$$\frac{1}{2c}\int[\mathbf{r}\cdot\overline{\rho\mathbf{v}}]\,dV = \int\mathbf{M}\,dV.$$

Мы видим, что вектор намагниченности представляет собой магнитный момент единицы объема тела.

К уравнениям (13.3) и (13.7) должно быть присоединено отношение, связывающее между собой величины **H** и **B**; лишь после этого система уравнений станет полной. В неферромагнитных телах, в не слишком сильных магнитных полях, **B** и **H** связаны друг с другом линейным соотношением. У изотропных тел линейная связь сводится к простой пропорциональности

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

Коэффициент μ называется **магнитной проницаемостью**, а коэффициент пропорциональности.

$$\chi = \frac{\mu - 1}{4\pi}$$ (в СИ нет 4π)

в соотношении $\mathbf{M} = \mu\mathbf{H}$—**магнитной восприимчивостью**.

В противоположность диэлектрической проницаемости ε, которая у всех тел превышает 1, магнитная проницаемость может быть как больше, так и меньше единицы, Можно только утверждать, что всегда $\mu > 0$ (за исключением особых случаев). Соответственно магнитная восприимчивость μ может быть как положительной, так и отрицательной.

К содержанию

Другое отличие — количественное — состоит в том, что магнитная восприимчивость огромного большинства тел очень мала по сравнению с их диэлектрической восприимчивостью. Это отличие связано с тем, что намагничение вещества (не ферромагнитного) является релятивистским эффектом второго порядка по v/c (v—электронные скорости в атомах). В анизотропных телах, кристаллах, простая пропорциональность заменяется линейными соотношениями

$$B_i = \mu_{ik} H_k.$$

Тензор магнитной проницаемости μ_{ik} симметричен.

Из уравнений div(**B**) = 0, rot(**H**) = 0 следует, что на границе двух различных сред должны выполняться условия

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}.$$

Эта система уравнений и граничных условий к ним формально совпадает с системой уравнений, определяющих электростатическое поле в диэлектриках в отсутствие свободных зарядов, отличаясь от них лишь заменой **E** и **D** соответственно на **H** и **B**.

Если в проводнике течет отличный от нуля полный ток, то средняя плотность тока в нем может быть представлена в виде суммы

$$\overline{\rho \mathbf{v}} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \mathbf{j}.$$

Первый член, связанный с намагниченностью среды, не дает вклада в полный ток, так что полный перенос заряда через поперечное сечение тела определяется интегралом $\int \mathbf{j}\, d\mathbf{f}$ только от второго члена. Величину **j** называют **плотностью тока проводимости** (аналог – сторонние заряды в диэлектрике). Уравнения Максвелла в среде немного модифицируются:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

ЛЕКЦИЯ 13

Источники:

1. Ландау, т. 8, §75, 86, 91.
2. Дж.Кронин, Д.Гринберг, В.Телегди «Сборник задач по физике с решениями». Задача 3.22.

Уравнения для переменного тока в веществе

Для статических полей мы получили уравнения. Теперь для переменных и сформулируем уравнения, справедливые для таких частот, при которых связь между **D** и **E** и между **B** и **H** остается еще такой же, как в постоянных полях. Если, как это обычно бывает, эта связь сводится к простой пропорциональности, то указанное условие означает, что можно полагать.

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

со статическими значениями ε и μ.

Эти соотношения нарушаются (или, как говорят, появляется дисперсия ε и μ при частотах, сравнимых с собственными частотами тех молекулярных или электронных колебаний, с которыми связано появление электрической или магнитной поляризации вещества. Порядок величины этих частот зависит от рода вещества и меняется в очень широких пределах. Он может быть также совершенно различным для электрических и магнитных явлений (Так, в алмазе электрическая поляризация имеет электронное происхождение и дисперсия ε начинается лишь в ультрафиолетовой области спектра. В такой полярной жидкости же, как вода, поляризация связана с ориентацией молекул с жесткими дипольными моментами и дисперсия ε наступает при частотах $\omega \sim 10^{11}$, т.е. в сантиметровом диапазоне длин волн. Еще раньше может начаться дисперсия μ в ферромагнитных веществах).

Уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

получаются непосредственно путем замены **e** и **h** в точных микроскопических уравнениях Максвелла их усредненными значениями **E** и **B**. Поэтому эти уравнения ни при каких условиях не нуждаются в изменении. Что касается уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \tag{13.8}$$

то оно получается путем усреднения точного микроскопического уравнения $\operatorname{div}(\mathbf{e}) = 4\pi\rho$, причем используется лишь то обстоятельство, что полный заряд тела равен нулю. Очевидно, что этот вывод ни в какой степени не зависит от предполагавшейся стационарности поля, и потому уравнение (13.8) сохраняет свой вид и в переменных полях.

К содержанию

Еще одно уравнение должно быть получено путем усреднения точного уравнения

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}.$$

Непосредственное усреднение дает

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}.$$

Однако при зависящем от времени макроскопическом поле установление связи среднего значения $\rho\mathbf{v}$ с ранее введенными величинами довольно затруднительно. Проще произвести требуемое усреднение не непосредственно, а следующим более формальным путем.

Предположим временно, что в диэлектрик введены посторонние по отношению к его веществу заряды с объемной плотностью $\rho_{\text{ст}}$. При своем движении эти заряды создают «сторонний» ток $\mathbf{j}_{\text{ст}}$, а сохранение этих зарядов выражается уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho_{\text{ст}}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j}_{\text{ст}} = 0.$$

Вместо уравнения (13.8) будем иметь

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ст}}$$

Продифференцировав это равенство по времени и воспользовавшись уравнением непрерывности, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\mathbf{D} = 4\pi\frac{\partial \rho_{\text{ст}}}{\partial t} = -4\pi\,\mathrm{div}\,\mathbf{j}_{\text{ст}}$$

или

$$\mathrm{div}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}_{\text{ст}}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что вектор, стоящий под знаком div, может быть представлен в виде ротора некоторого другого вектора, который обозначим как с**H**; тогда

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ст}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{13.9}$$

Вне тела это уравнение должно совпадать с точным уравнением Максвелла для поля в пустоте, соответственно чему вектор **H** совпадает с напряженностью магнитного поля. Внутри же тела в статическом случае ток $\mathbf{j}_{\text{ст}}$ связан с магнитным полем уравнением

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ст}},$$

где **H**—величина, введенная ранее и определенным образом связанная со средней напряженностью **B**. Отсюда следует, что в пределе стремящейся к нулю частоты вектор **H** в уравнении (13.9) совпадает со статической величиной **H**(**B**), а предполагаемая нами здесь «медленность» изменения поля означает, что и для этих переменных полей сохраняется та же зависимость **H**(**B**). Таким образом, **H** становится вполне определенной величиной, и, опуская вспомогательную величину $\mathbf{j}_{\text{ст}}$, мы приходим окончательно к уравнению

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$$

К содержанию

Величину $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ называют **током смещения**. В СИ: $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$. Рассказать про ток смещения – типа как ток в конденсаторе при переменном напряжении.
Итого, в однородной среде с постоянными ε и μ, без токов и зарядов уравнения Максвелла принимают вид:

$$\operatorname{div}\mathbf{E}=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H}=0,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Исключая из этих уравнений обычным образом **E** (или **H**), получим

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

и поскольку $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{H}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{H}) - \Delta\mathbf{H} = -\Delta\mathbf{H}$, то мы приходим к волновому уравнению

$$\Delta\mathbf{H}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}=0.$$

Отсюда видно, что скорость распространения электромагнитных волн в однородной диэлектрической среде есть

$$\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Подставив в это уравнение плоскую монохроматическую волну, получим:

$$k^2-\varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}=0$$

т.е.

$$k=n\frac{\omega}{c}$$

Т.е. в среде волновой вектор увеличивается – длина волны уменьшается.
Для полей получаются такие уравнения:

$$\omega\mu\mathbf{H}=c[\mathbf{kE}], \quad \omega\varepsilon\mathbf{E}=-c[\mathbf{kH}].$$

Здесь видно, что **H**, **k** и **E** составляют так называемую **правую тройку** векторов. Совместим начала векторов в одной точке. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов **a**, **b**, **c** в трёхмерном пространстве называется правой, если с конца вектора **c** кратчайший поворот от вектора **a** к вектору **b** виден наблюдателю против часовой стрелки. И наоборот, если кратчайший поворот виден по часовой стрелке, то тройка называется левой.

В случае, если надо описать диссипативную среду вводят мнимую часть показателя преломления

$$k=\sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\omega}{c}=(n+i\varkappa)\,\frac{\omega}{c}.$$

Величину n называют **показателем преломления**, а $\varkappa$ — **коэффициентом поглощения** среды; последний определяет скорость затухания волны по мере ее распространения.

Отражение и преломление волн

Рассмотрим отражение и преломление монохроматической плоской электромагнитной волны на плоской границе раздела между однородными средами. Падение происходит из прозрачной среды (среда 1); для второй же среды предположения о прозрачности пока делать не будем. Будем отмечать величины, относящиеся к падающей и отраженной волнам, соответственно индексами 0 и 1, а к преломленной волне — индексом 2 (рис. 46). Направление нормали к плоскости раздела выберем в качестве оси z (с положительным направлением в глубь среды 2).

Ввиду полной однородности в плоскости xy, зависимость решения уравнений поля от этих координат во всем пространстве должна быть одинаковой. Это значит, что компоненты k_x, k_y волнового вектора для всех трех волн одинаковы. Отсюда следует прежде всего, что направления распространения всех волн лежат в одной плоскости; выберем ее в качестве плоскости xz. Другими словами узлы функции везде должны совпадать, а это можно сделать только если длины волн одинаковые.

Таким образом:

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x} \tag{13.10}$$

С другой стороны при переходе из одной среды в другую изменяется модуль волнового вектора: $k = n\dfrac{\omega}{c}$. То есть:

$$|k_0| = |k_1| \tag{13.11}$$

$$|k_2| = \frac{n_2}{n_1}|k_0|$$

Синус угла, определяющего направление движения волны есть просто отношение k_x/k.

$$\sin(\theta) = \frac{k_x}{|k|}$$

Используя (13.10) – (13.11) мы получим:

$$\sin(\theta_0) = \frac{k_{0x}}{|k_0|}; \quad \sin(\theta_1) = \frac{k_{0x}}{|k_0|}; \quad \sin(\theta_2) = \frac{n_1 k_{0x}}{n_2|k_0|}$$

Итого:

$$\theta_1 = \theta_0; \quad \frac{\sin(\theta_2)}{\sin(\theta_0)} = \frac{n_1}{n_2}$$

Таким образом, мы получили законы геометрической оптики.

Если выписать условия сшивки напряжённостей электрических и магнитных полей, то можно получить коэффициент отражения:

$$R = \frac{(n_2/n_1 - 1)^2}{(n_2/n_1 + 1)^2}.$$

Уточнить про среды с отрицательным n и как это выводится!

К содержанию

Распространение волны в волноводе

Рассмотрим теперь распространение волны в волноводе прямоугольного сечения – в пространстве, ограниченном идеальным проводником. Пространство ограничено прямоугольником $x \in [0, a]$; $y \in [0, b]$. Опять рассмотрим поперечную плоскую волну:

$$E_z = 0, \quad E_x = E_1(x, y)e^{ik_0 z - i\omega t}, \quad E_y = E_2(x, y)e^{ik_0 z - i\omega t}$$

Подставим в волновое уравнение искомый вид волны.

$$\Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)E_i - \left(k_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_i = 0$$

Применим метод разделения переменных. Представим решение в виде произведения функций разных координат:

$$E_i = E_{i,x}(x)E_{i,y}(y)$$

Можно показать, что для каждой функции должно выполняться своё уравнение. Например:

$$\frac{\partial^2 E_{i,x}}{\partial x^2} - \left(k_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)E_{i,x} = 0 .$$

Общее решение будем искать, очевидно в виде гармонических функций:

$$E_i = E_{0i}\sin\left(k_x x + \alpha_{i,x}\right)\sin\left(k_y y + \alpha_{i,y}\right)$$

Уравнение накладывает следующее условие на k_x, k_y:

$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_0^2$$

Теперь воспользуемся граничными условиями – тангенциальные компоненты полей должны быть равны нулю:

$$E_1(x, 0) = 0; \quad E_1(x, b) = 0$$

$$E_2(0, y) = 0; \quad E_2(a, y) = 0$$

Из первых уравнений получаем решения:

$$E_1 = E_{01}\sin\left(k_x x + \alpha_1\right)\sin\left(k_y y\right)$$

$$E_2 = E_{02}\sin\left(k_x x\right)\sin\left(k_y y + \alpha_2\right)$$

Из вторых уравнений получаем дополнительные ограничения на k_x:

$$k_x = \frac{\pi n}{a}; \quad k_y = \frac{\pi m}{b}$$

Кроме того, если воспользоваться условием div(**E**) = 0, можно получить, что α_1, $\alpha_2 = \pi/2$. Окончательно:

$$E_1 = E_{01}\cos\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\sin\left(\frac{\pi m}{b}y\right)$$

$$E_2 = E_{02}\sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi m}{b}y\right)$$

$$k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)$$

Во-первых видно, что n, m должны быть больше нуля, иначе поля нет. Раз так, то видно, что не всякие частоты могу распространяться в волноводе, а только те, что больше некоторой граничной:

$$\omega > \omega_0 = \pi c\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$$

(Сказать про фазовую и групповую скорости). Вывод и подробнее про групповую скорость – во введении в квантовую механику.

$= c\pi/a$. Для фазовой и групповой скоростей имеем следующие выражения:

$$v_ф = \frac{\omega}{k} = c\left[1 + \frac{\pi^2}{k^2}\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b}\right)\right]^{1/2},$$

$$v_г = \frac{d\omega}{dk} = c\left[1 + \frac{\pi^2}{k^2}\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)\right]^{-1/2}.$$

Аналогичный результат получается и для поперечной магнитной моды ($H_z = 0$), однако граничная частота в этом случае выше. Легко заметить также, что $v_ф v_г = c^2$.

Вообще все возможные в таком волноводе электромагнитные волны можно разбить на два типа: в одном из них $H_z = 0$, а в другом $E_z = 0$. Волны первого типа, с чисто поперечным магнитным полем, называют волнами **электрического типа или E-волнами**. Волны же с чисто поперечным электрическим полем называют **волнами магнитного типа или H-волнами**.

Можно использовать более общий подход из ЛЛ8.

ЛЕКЦИЯ 14.

Метаматериалы. Отрицательное преломление. (Приглашённый лектор, Башарин)

Статья Веселаго 1967 г.

К содержанию

НЕ ВОШЛО В ЛЕКЦИИ.

Магнитный момент

Рассмотрим среднее магнитное поле, создаваемое системой стационарно движущихся зарядов на больших расстояниях от этой системы.

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\sum\overline{\frac{e\mathbf{v}_a}{\left|\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}_a\right|}}$$

разложим это выражение по степеням r_a:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\sum e\overline{\mathbf{v}}_a - \frac{1}{c}\sum\overline{e\mathbf{v}_a\left(\mathbf{r}\nabla\frac{1}{R_0}\right)}$$

В первом члене можно написать:

$$\mathbf{A} = \sum e\overline{\mathbf{v}}_a = \overline{\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}}$$

Но среднее значение производной от меняющейся в конечном интервале величины равно нулю. Таким образом, для A остаётся выражение:

$$\overline{\mathbf{A}} = -\frac{1}{c}\sum\overline{e\mathbf{v}\left(\mathbf{r}\nabla\frac{1}{R_0}\right)} = \frac{1}{cR_0^3}\sum\overline{e\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)}$$

Можно переписать выражение в следующем виде:

$$\sum e(\mathbf{R}_0\mathbf{r})\mathbf{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) + \frac{1}{2}\sum e[\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0) - \mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)]$$

Среднее значение от первого слагаемого = 0.

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2cR_0^3}\sum e[\overline{\mathbf{v}(\mathbf{r}\mathbf{R}_0)} - \overline{\mathbf{r}(\mathbf{v}\mathbf{R}_0)}]$$

Но тут бац минус цаб:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2cR_0^3}\sum e\left[\mathbf{R}_0\left[\mathbf{vr}\right]\right] \quad \text{(СГС)};\quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{8\pi R_0^3}\sum e\left[\mathbf{R}_0\left[\mathbf{vr}\right]\right] \quad \text{(СИ)}$$

Введём магнитный момент

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{rv}]$$ (В СИ нет 1/c)

Тогда вектор-потенциал:

$$\overline{\mathbf{A}} = \frac{[\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{R}_0]}{R_0^3} = \left[\nabla\frac{1}{R_0}\cdot\overline{\mathfrak{m}}\right]$$ В СИ множитель $\frac{\mu_0}{4\pi}$

Можно найти **H**:

$$\overline{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{n}(\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{n}) - \overline{\mathfrak{m}}}{R_0^3}$$ В СИ множитель $\frac{1}{4\pi}$

(использовать $\operatorname{rot}[\mathbf{ab}] = (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$), при этом $\mathfrak{m}$ не зависит от переменной, по которой берётся ротор, т.к. в $\mathfrak{m}$ входят только координаты зарядов, также учеть что $\Delta(1/r)=0$. Если у всех зарядов системы отношение заряда к массе одинаково, то мы можем написать:

$$\mathfrak{m} = \frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{rv}] = \frac{e}{2mc}\sum m[\mathbf{rv}]$$

$$\mathfrak{m} = \frac{e}{2mc}\sum[\mathbf{rp}] = \frac{e}{2mc}\mathbf{M}$$

где $\mathbf{M} = \sum[\mathbf{rp}]$ есть механический момент импульса системы. Таким образом, в этом случае отношение магнитного момента к механическому постоянно и равно $e/(2mc)$.

Фурье-разложение

В лекциях дальше это не используется. Может и не надо

Всякую волну можно подвергнуть так называемому спектральному разложению, т. е. представить в виде наложения монохроматических волн с различными частотами. Эти разложения имеют различный характер в зависимости от характера зависимости поля от времени.

К одной категории относятся случаи, когда разложение содержит частоты, образующие дискретный ряд значений. Простейший случай такого рода возникает при разложении чисто периодического (хотя и не монохроматического) поля. Это есть разложение в обычный ряд Фурье; оно содержит частоты, являющиеся целыми кратными «основной» частоты $\omega_0 = 2\pi/T$, где T — период поля. Напишем его в виде:

$$f = \sum_{n=\infty}^{\infty} f_n e^{-i\omega_0 n\cdot t}$$

f – какая-либо из величин, описывающих поле. Величины f_n определяются по самой функции f интегралами

$$f_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i\omega_0 n\cdot t} dt$$

Ввиду вещественности функции f очевидно, что

$$f_n^* = f_{-n}$$

Легко показать ортогональность экспонент

Среднее квадрата – сумма квадратов амплитуд:

$$\overline{f^2} = \sum_{n=\infty}^{\infty} |f_n|^2 = f_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2$$

Всё то же делается для непрерывного фурье-разложения:

К содержанию

$$f(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$$

$$f_\omega=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt$$

$$f_{-\omega}=f_\omega^*$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^2dt=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|f_\omega\right|^2\frac{d\omega}{2\pi}=2\int\limits_{0}^{\infty}\left|f_\omega\right|^2\frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega$$

Общее решение однородного волнового уравнения в любой заданный момент времени представляет собой суперпозицию плоских волн (волновой пакет):

$$f(\vec{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(A_k e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}+B_k e^{-i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}\right)dk$$

где под $f(\vec{r},t)$ подразумевается скалярно-векторный потенциал.

Д/з – найти преобразование фурье функций $e^{-\frac{t^2}{a^2}}$, $\frac{1}{t^2+\Omega^2}$.

Магнитно-дипольное излучения

Можно пропустить вывод, только дав основные ответы

Рассмотрим теперь излучение, обусловленное следующими членами разложения векторного потенциала по степеням отношения a/λ размеров системы к длине волны, по-прежнему предполагающегося малым. Хотя эти члены, вообще говоря, малы по сравнению с первым (дипольным), они существенны в тех случаях, когда дипольный момент системы равен нулю, так что дипольное излучение вообще отсутствует.

Разлагая

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'+\mathbf{rn}/c}\,dV$$

(В СИ вместо $1/c$ стоит $\mu_0/4\pi$)

подынтегральное выражение по степеням $\mathbf{rn}/c$ и сохраняя теперь два первых члена, находим

$$\mathbf{A}=\frac{1}{cR_0}\int \mathbf{j}_{t'}\,dV+\frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t'}\int (\mathbf{rn})\mathbf{j}_{t'}\,dV.$$

К содержанию

Подставляя сюда $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ и переходя к точечным зарядам, получим:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{cR_0}\sum e\mathbf{v} + \frac{1}{c^2R_0}\frac{\partial}{\partial t}\sum e\mathbf{v}(\mathbf{rn}).$$

Здесь и ниже (как и в § 67) мы для краткости опускаем индекс t' у всех величин в правой части равенства. Во втором слагаемом пишем:

$$\mathbf{v}(\mathbf{rn}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2}\mathbf{v}(\mathbf{nr}) - \frac{1}{2}\mathbf{r}(\mathbf{nv}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{2}[[\mathbf{rv}]\mathbf{n}]$$

Мы находим тогда для $\mathbf{A}$ выражение

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{2c^2R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum e\mathbf{r}(\mathbf{nr}) + \frac{1}{cR_0}[\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}],$$

где $\mathbf{d}$ —дипольный момент системы, а $\mathbf{m} = \frac{1}{2c}\sum e[\mathbf{rv}]$ (В СИ $\mathbf{m} = \frac{1}{2}\sum e[\mathbf{rv}]$) — ее магнитный момент. Квадрупольный момент не будем рассматривать. Для дальнейшего преобразования заметим, что к $\mathbf{A}$ можно прибавить, не изменяя поля, любой вектор, пропорциональный $\mathbf{n}$, — в силу формул F6.3) E и H при этом не изменятся. Поэтому вместо прошлого равенства с тем же правом можно написать:

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{\mathbf{d}}}{cR_0} + \frac{1}{6c^2R_0}\ddot{\mathbf{D}} + \frac{1}{cR_0}[\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]$$

Зная A, мы можем теперь определить поля $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ с помощью общих формул:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c}[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}], \quad \mathbf{E} = \frac{1}{c}[[\dot{\mathbf{A}}\mathbf{n}]\mathbf{n}].$$

Получим:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c^2R_0}\left\{[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}] + \frac{1}{6c}[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}] + [[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]\mathbf{n}]\right\},$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2R_0}\left\{[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]\mathbf{n}] + \frac{1}{6c}[[\dddot{\mathbf{D}}\mathbf{n}]\mathbf{n}] + [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{m}}]\right\}.$$

Последнее слагаемое в магнитном поле можно раскрыть по бац минус цаб:

$$\left[[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}],\mathbf{n}\right] = -\left[\mathbf{n},[\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}]\right] = -\ddot{\mathbf{m}}(\mathbf{nn}) + \mathbf{n}(\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}) = \mathbf{n}(\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}) - \ddot{\mathbf{m}}$$

Здесь было использовано, что $\mathbf{n}^2 = 1$.

Рассмотрим вклад только магнитного диполя. Для этого подставим поля в интенсивность $dI = c\frac{H^2}{4\pi}R_0^2 do$.

С квадратом $[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]$ мы разобрались в прошлом разделе. Квадруполь обсуждать не будем. Квадрат последнего слагаемого:

$$\left(\mathbf{n}(\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}) - \ddot{\mathbf{m}}\right)^2 = \mathbf{n}^2(\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n})^2 + \ddot{\mathbf{m}}^2 - 2\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}(\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}) = \ddot{\mathbf{m}}^2 - (\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n})^2$$

К содержанию

Произведения типа $\left(\mathbf{n}\left[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}\right]\right)=0$ по определению смешанного произведения. Произведения типа $\left(\ddot{\mathbf{m}}\left[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}\right]\right)$ занулится после усреднения по всем направлениям **n**, т.к. линейно по этому вектору. Остаётся усреднить полученный квадрат по направлениям **n**. Первое слагаемое останется таким, как было, т.к. не зависи от **n**. Для усреднения второго слагаемого воспользуется следующим соображением: тензор $\overline{n_\alpha n_\beta}$, будучи симметричным, может выражаться только через единичный тензор $\delta_{\alpha\beta}$. Учитывая также, что его след равен 1, имеем: $\overline{n_\alpha n_\beta}=\frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}$. Тогда усреднение

$$\overline{\left(\ddot{\mathbf{m}}\mathbf{n}\right)^2}=\overline{\left(\ddot{m}_\alpha n_\alpha\right)^2}=\overline{\ddot{m}_\alpha n_\alpha \ddot{m}_\beta n_\beta}=\ddot{m}_\alpha \ddot{m}_\beta \overline{n_\alpha n_\beta}=\ddot{m}_\alpha \ddot{m}_\beta \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta}=\frac{1}{3}\ddot{m}_\alpha \ddot{m}_\alpha=\frac{1}{3}\ddot{\mathbf{m}}^2$$

В итоге мы получим:

$$I=\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}^2+\frac{1}{180c^5}\dddot{D}_{\alpha\beta}^2+\frac{2}{3c^2}\ddot{\mathbf{m}}^2$$

Фазовая и групповая скорости

В случае монохромотической волны $e^{ikx-i\omega t}$ условие постоянства фазы записывается как $ikx-i\omega t=i\cdot const$. Или: $x=\frac{\omega}{k}t+const$, что представляет собой уравнение равномерного прямолинейного движения со скоростью ω/k. Таким образом, мы видим что точка с постоянной фазой передвигается со скоростью:

$$v_\phi=\frac{\omega}{k},$$

Скорость $v_\text{ф}$ называется **фазовой скоростью**.
Теперь рассмотрим волновой пакет.

$$\psi(r,t)=\int A(k')e^{i\left(k'r-\omega' t\right)}dk'.$$

Обозначим буквами A и α модуль и фазу амплитуды $A\left(k'\right)$ соответственно.

По предположению A обладает заметной величиной только в некоторой области, окружающей k. Следует выяснить в какой мере и при каких условиях «движение» волнового пакета может быть сопоставлено движению классической частицы. Ради простоты рассмотрим вначале волновой пакет в одном измерении

$$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}A\left(k'\right)e^{i\left(k'x-\omega' t\right)}dk'.$$

Положим $\varphi = k' x - \omega' t + \alpha$, тогда $\psi(x,t)$ есть интеграл от произведения функции *A*, имеющей резкий максимум в области *D* шириной Δk, окружающей точку $k' = k$, и осциллирующей функцией $e^{i\varphi}$. Если осцилляции функции $e^{i\varphi}$ в области *D* достаточно многочисленны, то вклады различных частот аннулируют друг друга, так что величина ψ оказывается крайне малой.

Наибольшие абсолютные значения ψ получаются в том случае, когда фаза остается почти постоянной в области *D*, то есть $d\varphi/dk \approx 0$ (производная берется по k', когда $k' = k$).

Найдём производную:

$$\frac{d\varphi}{dk} = x - t\frac{d\omega}{dk} + \frac{d\alpha}{dk},$$

Таким образом, «центр волнового пакета», определён условием $d\varphi/dk = 0$, то есть

$$x = t\frac{d\omega}{dk} - \frac{d\alpha}{dk}.$$

Эта точка равномерно движется со скоростью

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk},$$

v_g – **групповая скорость.**

Групповая скорость переносит информацию и не может быть больше скорости света. В тоже время фазовая скорость информации не переносит, и она может превышать скорость света. Вообще, эти скорости связаны уравнением:

$$v_\phi v_g = c^2.$$

[К содержанию]