단일 정사각 타일 기반의 26가지 테셀레이션 구현을 통한 기하-대수 통합학습 모델

경기북과학고등학교 조동기

연구의 배경 및 목적 : 중등 수학교육과정에서 테셀레이션은 기하학적 변환을 학습하기 좋은 소재이나, 실제 수업에서는 시간적 제약과 교구 제작의 번거로움으로 인해 단순 평행이동이나 회전 패턴을 반복하는 데 그치는 한계가 있었다. 이로 인해 학생들은 다양한 패턴 간의 유기적 연계성을 인지하지 못하고, 도형의 조작이 대수적 연산의 원소가 될 수 있다는 본질적인 개념을 놓치기 쉽다. 본 연구는 이러한 아쉬움을 해결하기 위해 사각형 원본을 변형하지 않고도 단 하나의 타일로 수십 가지 테셀레이션 패턴을 생성하는 효율적이고 깊이 있는 학습 모델을 제시하고자 한다.

기존 학교수업에서 자주 이용되던 에셔(M.C. Escher, 1898-1972) 타입의 테셀레이션은 특정 패턴을 만들기 위해 다각형의 변을 물리적으로 변형해야 했으므로, 한 종류의 조각으로 한 가지 패턴만 제작할 수 있었다. 하지만 본 수업 자료는 애셔 작품의 이론적 배경이 되는 하인리히 헤슈(Heinrich Heesch (1906~1995))의 28가지 테셀레이션 구조[1] 중 정사각형 기반의 9가지 패턴을 재해석하여, 사각형 내부 도안의 대칭과 회전 조작만으로 9가지 기본 패턴과 그에 따른 17가지 변형 패턴, 총 26가지를 모두 구현하는 방법을 창의적인 방법으로 제안하고 이를 통해 학생들은 조각을 새로 오려낼 필요 없이 타일의 배치와 방향 전환만으로 패턴의 차이를 즉각적으로 비교 분석할 수 있다.

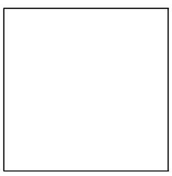
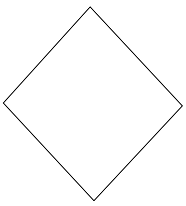
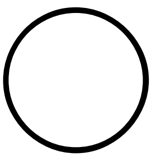
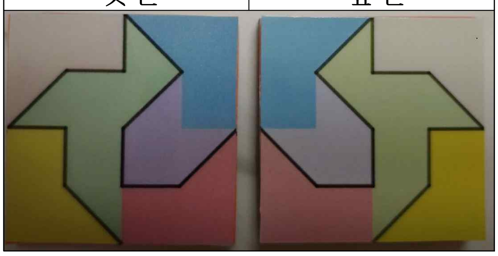
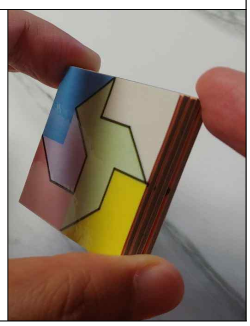
학생들은 정사각형의 모양을 보존하는 8가지 조작(회전 4가지, 대칭 4가지)을 직접 손으로 조작하며 대수학의 핵심 구조인 이면체군을 경험할수 있고, 학교수학의 수체계에서 다루는 연산의 성질 (항등원, 역원, 교환법칙 등) 뿐만 아니라, 조작의 순서에 따라 결과가 달라지는 비가환성을 직관적으로 발견할수 있다. 또한 에셔의 작품을 수학적으로 분석하고 보도블록이나 의류 패턴 등 실용적 디자인에 숨겨진 수학적 원리를 이해함으로써 수학의 심미성과 실용성을 체득하여 수학을 주제로 이야기할 수 있는 기회가 많아지길 바란다.

1. 수업소재(1차시): 정사각형의 보존 및 대칭 조작 이해

테셀레이션 패턴 생성의 기본 단위인 정사각형의 기하학적 성질을 탐구하여 4가지 회전(0, 90, 180, 270),[2] 4가지 대칭(y축, y=x직선, x축, y=-x 직선[3])에 대하여 정사각형 모양이 보존됨을 확인한다

1.1 정사각형의 모양을 그대로 보존하는 조작에 대하여 어떤 것들이 있는지 설명하게 다양한 도형에 대하야 모양이 본존되는 조작과 안되는 조작에 대하여 알아본다

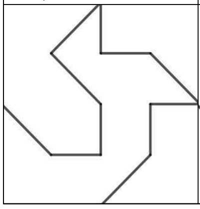
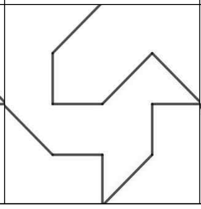
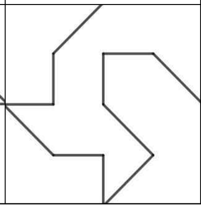
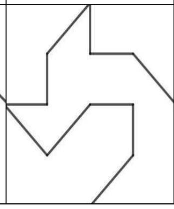
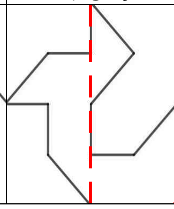
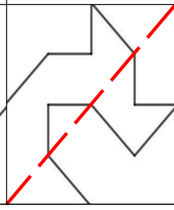
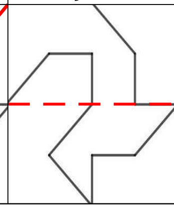
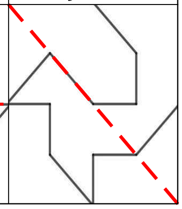
1.2 정사각형 안에 그림을 넣어 위에서 설명한 8가지 조작에 모두 보존이 안되는 그림은 어떤 것들이 있는지 찾아 본다.

1.1 수업내용			1.2 예시도안 실재 제작 도안 (두꺼운 종이판에 앞뒤 도안 붙임)	y=-x축 대칭이동 조작
위 8가지 조작에 대하여 보존되는 정사각형	45도 회전에 대하여 보존이 안되는 마름모	모든 조작에 모양이 보존되는 도형	한손의 엄지와 검지로 대각선 꼭지점을 잡은후 다른 손의 집게로 돌리면 된다. 8가지 조작에 그림(용)이 보존되지 않는다. (개발된 강아지 모델도 참고하기 바람[4])	
			뒷면 / 앞면 	

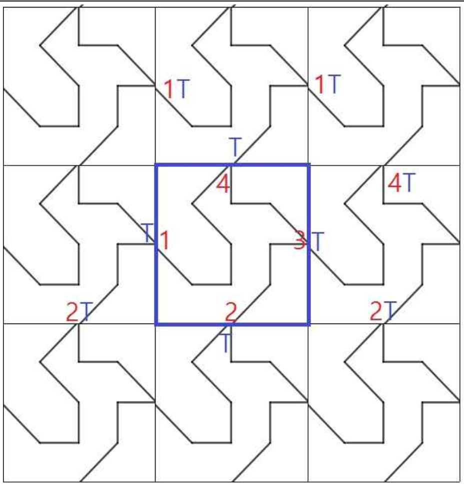
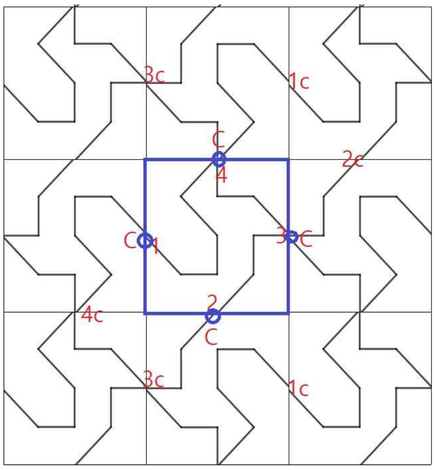
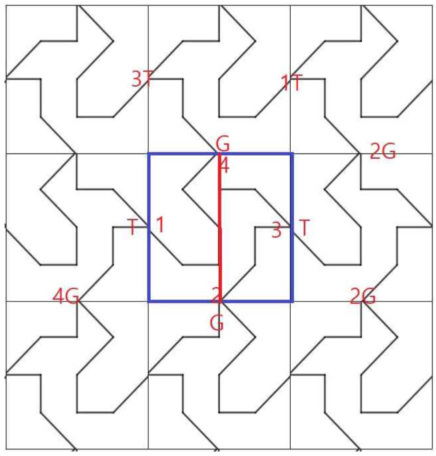
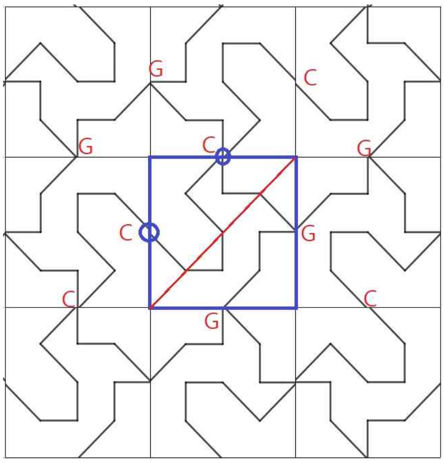
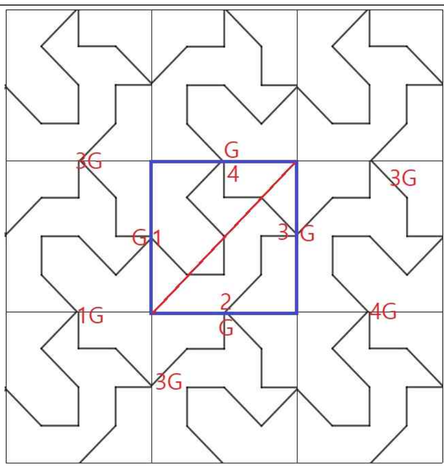
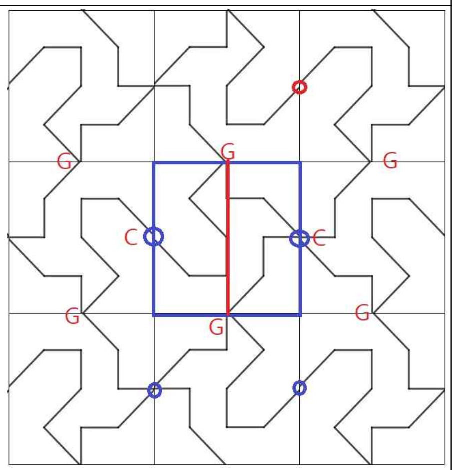
1) 부록1 표 및 사이트 참조
2) 정사각형 모양을 보존하는 조작중 회전으로 90, 180, 270도 회전을 c1, c(c2), c3 기호와 혼용하여 사용한다
3) 정사각형 모양을 보존하는 조작중 대칭으로 x축, y축, y=x직선, y=-x직선에 대한 대칭조작을 x, y, y=x, y=-x 기호와 혼용한다
4) 부록6 표 참조

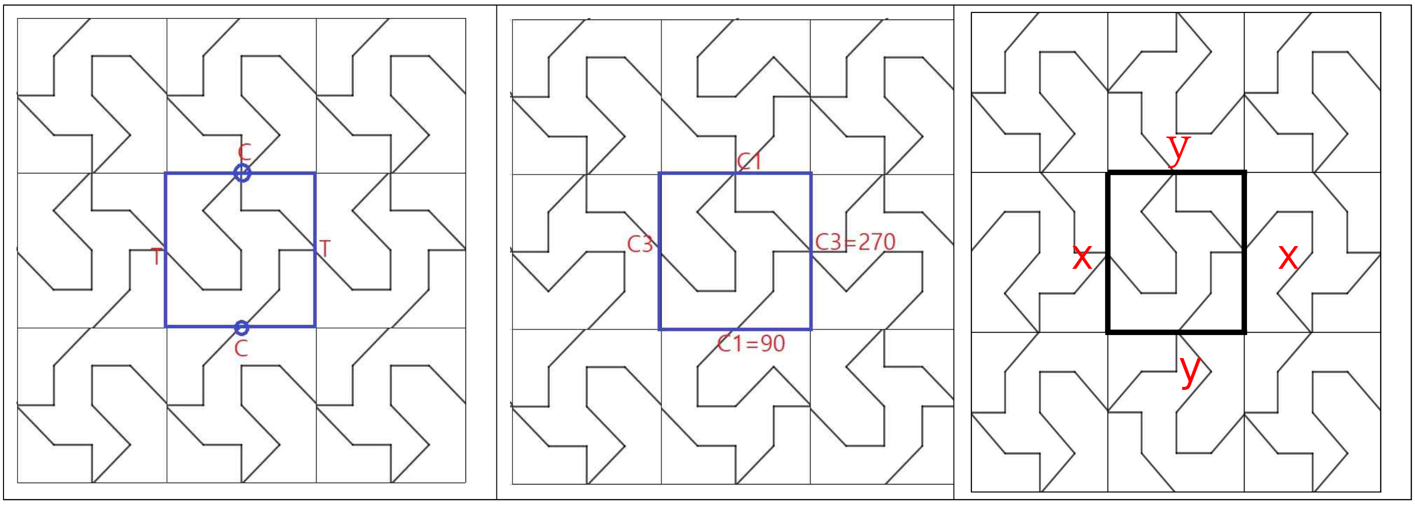
1.2 예시도안 설명

정사각형의 두꺼운 종이의 앞면에 각 변의 중점끼리 연결되도록 칠교 놀이하듯 8가지 조작에 대칭이 안되는 그림을 도안할수 있고 뒷면에는 거울 대칭인 도안을 만든다

회전 0 원본	90	180	270	**대칭 y**	x	y=x	y=-x
							

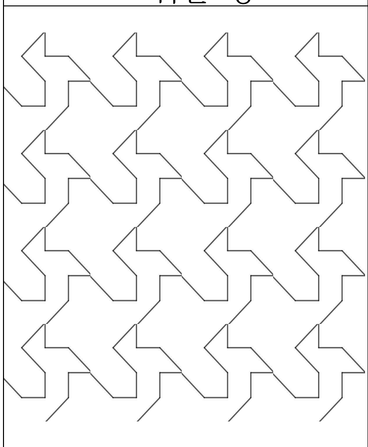
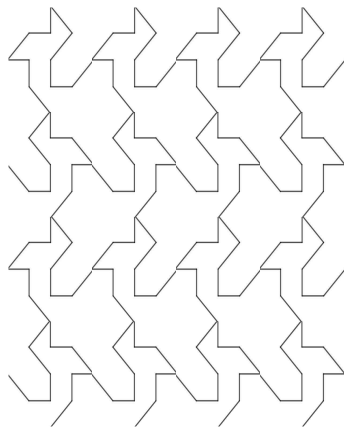
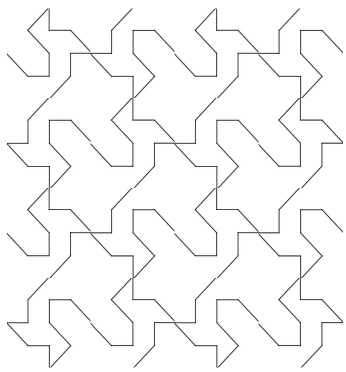
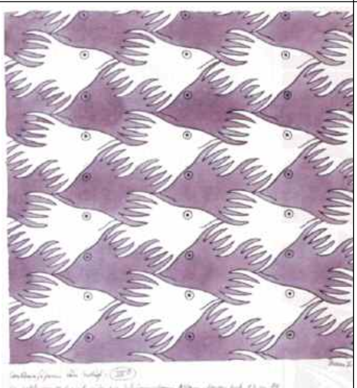
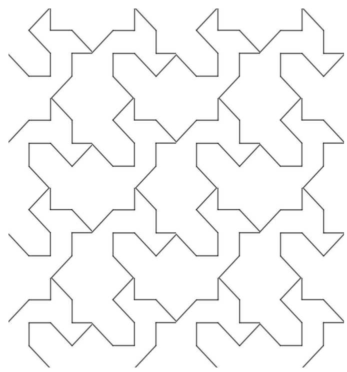
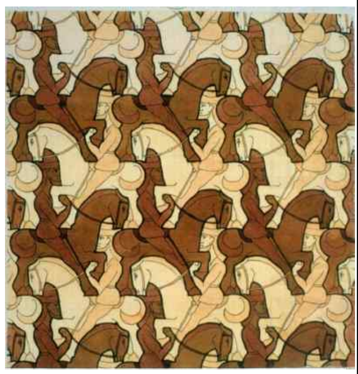
2.수업소재(2,3 차시) 각 변에 대응되는 조작(회전, 대칭)을 소개한 후 9가지 패턴을 만들어 본다.

TTTT T: 평행이동 4개의 변(1,2,3,4)를 기준으로 원본(0)을 평행이동시킨 패턴 이동된 도형에서도 같은 규칙이 적용된다.	CCCC C: 180 회전 4개의 변(1,2,3,4)에 대하여 기준(원본)을 중심으로 C=점대칭(180 회전)시킨패턴. 이동된 도형에서도 같은 규칙이 적용된다.	TGTG G: y축 대칭 1,3 변에 대하여 기준(원본)을 그대로 이동 시키고 2,4 에 대하여 G(y축) 대칭 이동시킨 패턴
		
CCGG G: y=x 대칭 4,1 변에 대하여 기준(원본)을 C(180)회전시키고 2,4 에 대하여 G(y=x) 대칭 이동시킨 패턴	GGGG G: y=x 모든변(1,2,3,4)에 대하여 기준(원본)을 중심으로 G(y=x축)대칭 이동시킨 패턴	CGCG G: y축대칭 1,3 변에 대하여 기준(원본)을 C(180)회전이동 2,4 에 대하여 G(y축) 대칭 이동시킨 패턴
		
TCTC 1,3 변에 대하여 기준(원본)을 그대로 평행이동 시키고 2,4 에 대하여 C(180) 회전 이동시킨 패턴	C3C1C3C1 C3: 270, C1: 90 1,3 변에 대하여 C3(270)회전 2,4 에 대하여 C1(90)회전 이동시킨 패턴	GxGyGxGy 1,3 변에 대하여 x축, 2,4에 대하여 y축 대칭 이동시킨 패턴



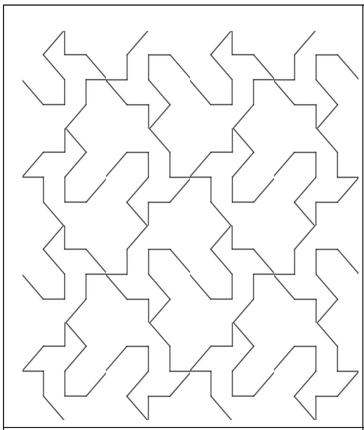
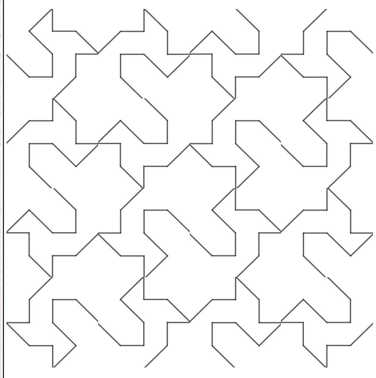
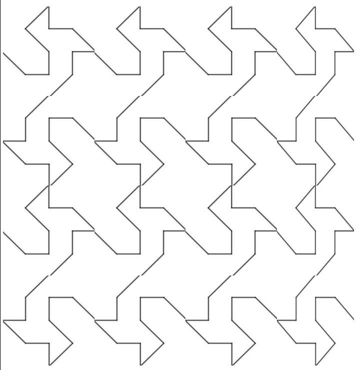
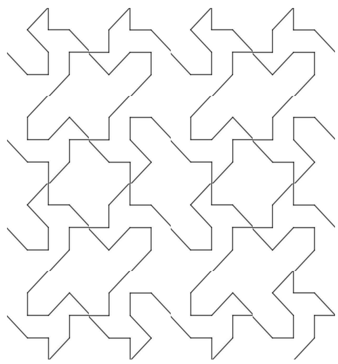
이와 같이 같은 정사각형 조각만으로 서로 다른 9가지 테셀레이션 패턴을 일관된 원리와 방법에 따라 비교해 보면서 만들 수 있다.

3. 수업소재(4차시): 미술작품(에셔타입) 과 비교하고 분석해 보기

TTTT 쉬는 용	그림1[5]	TGTG 비상하는 용	그림2
			
CCCC 나는 용	그림3	GGGG 둥둥 물놀이 용	그림4
			

CGCG 서 있는 용	그림5	CCGG 날고 있는 용	그림6

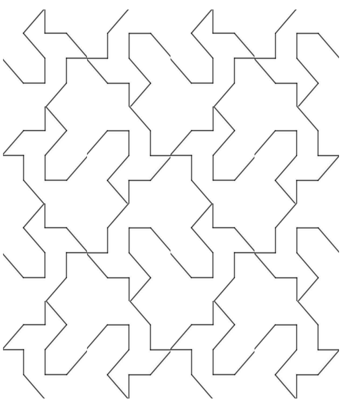
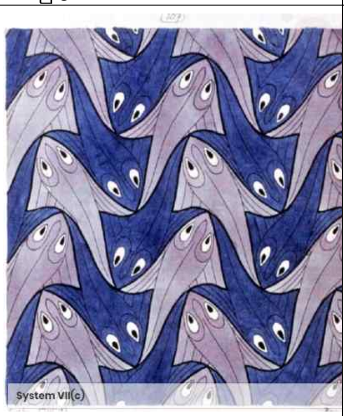
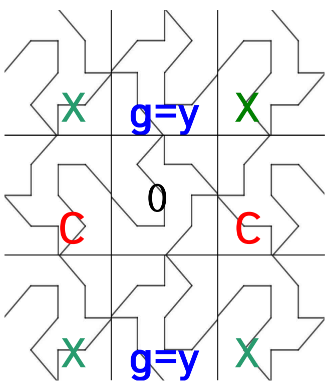
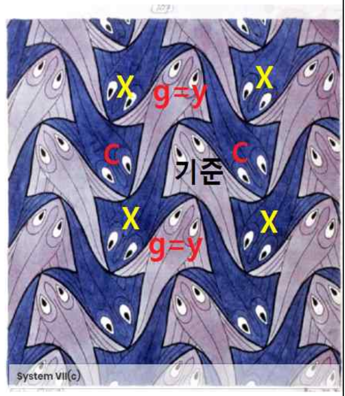
5) 부록2 그림표 참조

			
TCTC 용 벽지무늬	그림7	C3C1C3C1 용 벽지 무늬	그림8
			

다양한 에셔 그림[6]을 감상하고 같은 패턴을 더 찾아 분석하고 설명해 보면서 에셔 그림과 대응되는 패턴을 분석하여 같은 패턴끼리 묶고 그 이유를 서로 이야기 한다

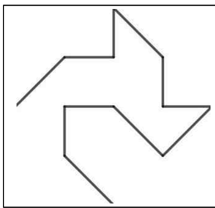
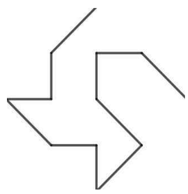
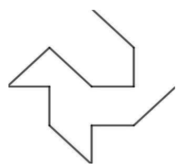
예시 해설

다음 그림은 cgcg와 같은 패턴임을 확인할수 있다(기준에 대한 대각선 방향의 x축 대칭된 모습은, 180도 회전된 것이 y축 대칭된 결과이다) 에셔 그림을 패턴별로 비교 분류하고 감상할 수 있다

CGCG 서 있는 용	그림5		
			

4. 수업소재(5차시) :조작(회전, 대칭)과 연산(대수)의 연관성 찾기

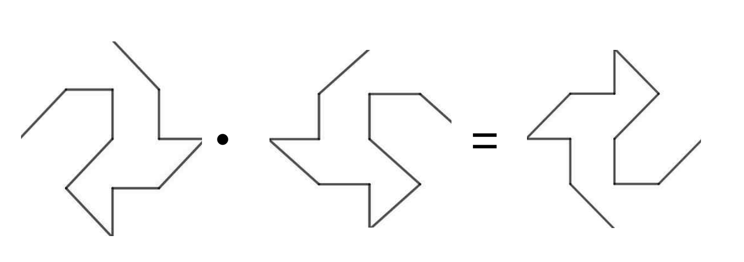
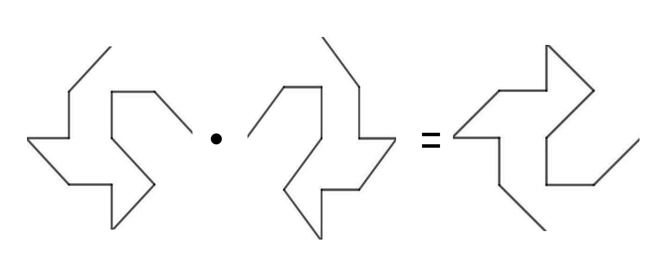
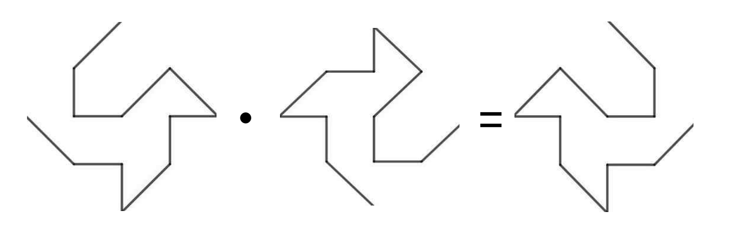
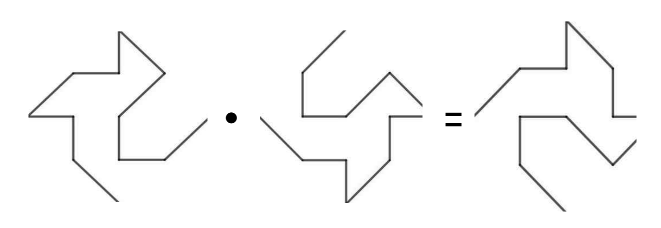
4.1 기준 원본의 y=x 대칭에 어떤 조작을 하면 180 회전이 될까?

	•	?	=		 예시답

6) 부록3 그림참조,

즉 원본을 y=x 대칭시키고 y=-x 대칭시키면 C(180도회전)이 된다.

4.2 조작의 순서에 따라 조작의 결과가 달라질수 있음을 이해한다

두 조작의 순서가 바뀌어도 같은 결과가 성립하는 예	
	
x축 대칭 후 180 회전하면 y축 대칭이 되고 이는 순서를 바꾸어도 변하지 않는다.	
두 조작의 순서가 바뀌면 결과가 바뀌는 예	
	
90도 회전후 y축 대칭시키면 y=-x 대칭 결과가 되지만 순서를 바꾸면 y=-x 대칭 결과가 된다.	

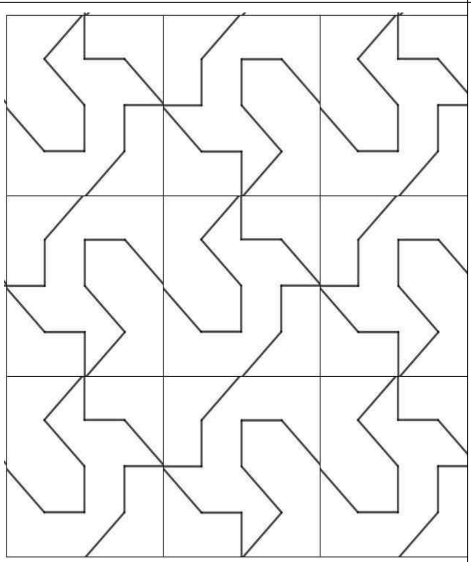
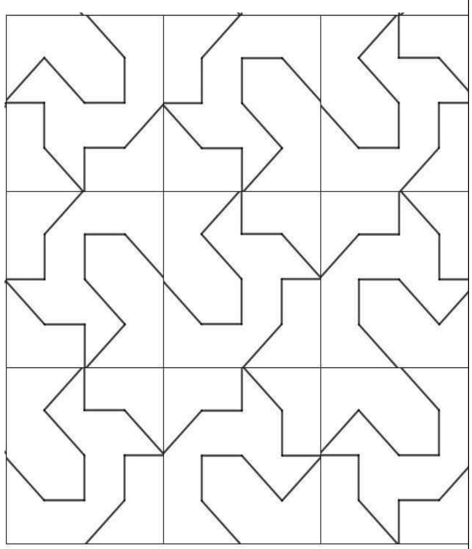
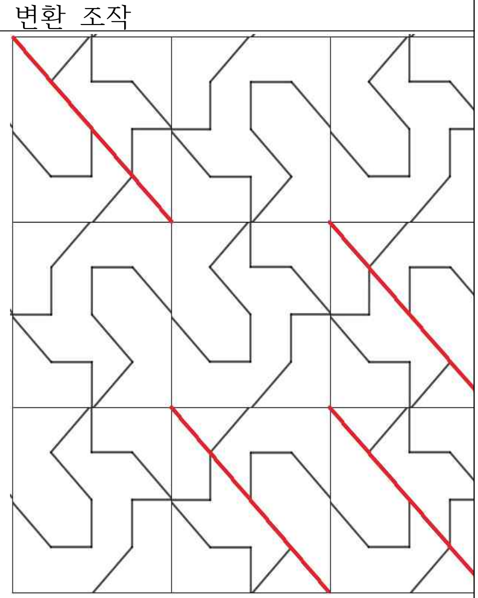
8가지 조작에 연산표[7]를 참조하여 학교 교육과정에는 벗어날 수 있지만, 수업목적과 난이도에 따라서 항등원(0도회전), 역원, 닫혀있다 등의 대수 학습 내용도 학습 가능하다.

5. 수업소재(6차시): 소업소재 2,4의 융합

5.1 패턴간의 연속적인 변형이 가능한가? 가능하다면 최소한의 조작수를 찾아 본다

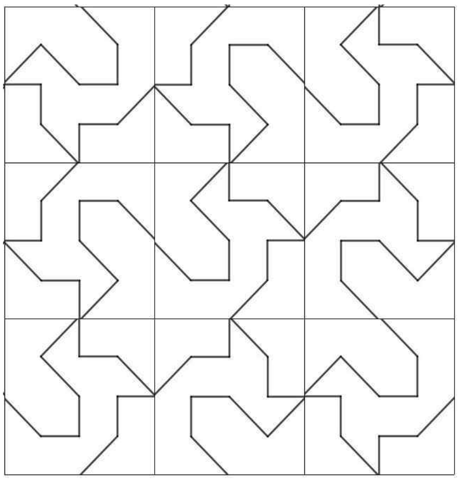
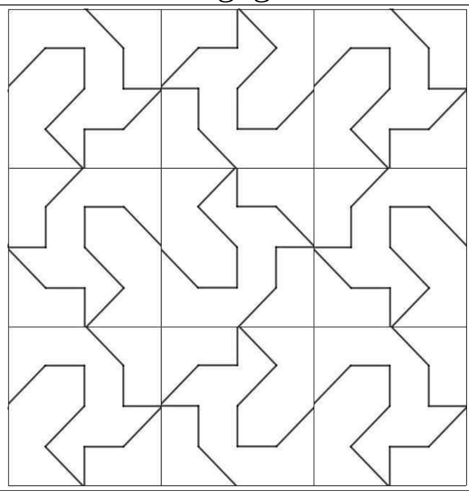
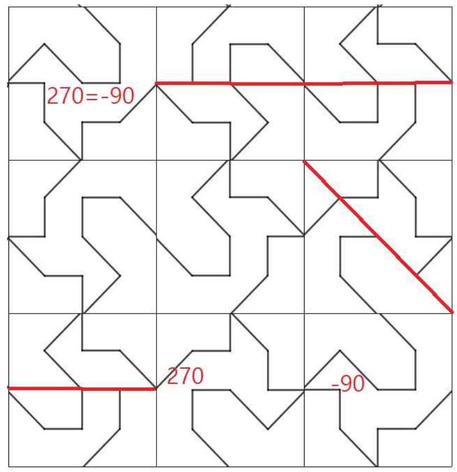
학생들의 패턴변형시 수업목적과 난이도에 따라 직관적 또는 연산표를 이용한 패턴 변환이 가능하다

패턴변환 예시1

CCCC → ccgg		
CCCC	CCGG	변환 조작
		

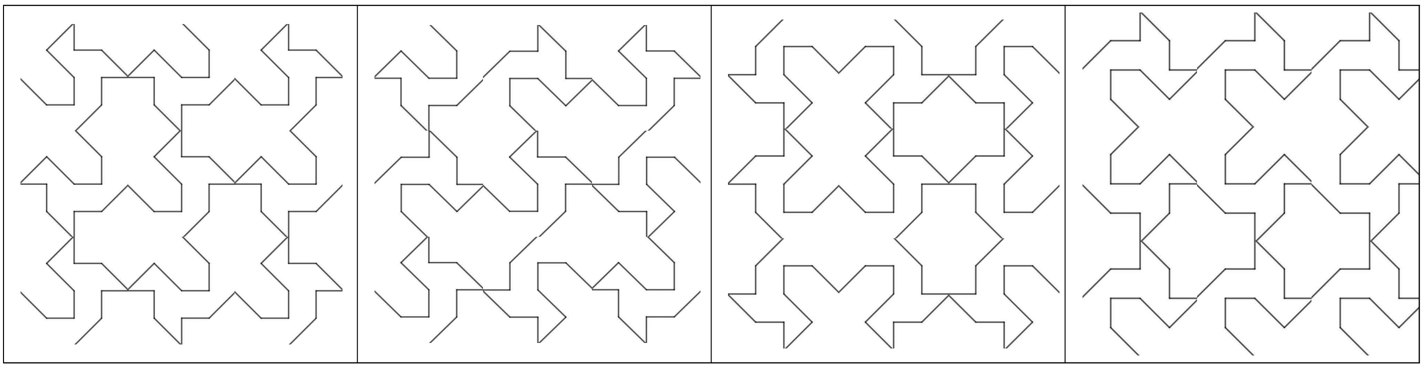
7) 부록4 표 참조

패턴변환 예시2

ccgg → cgcg		
ccgg	cgcg	변환 조작
		

6. 다양한 패턴 발견하기(7,8차시) : 수업소재 2의 발전

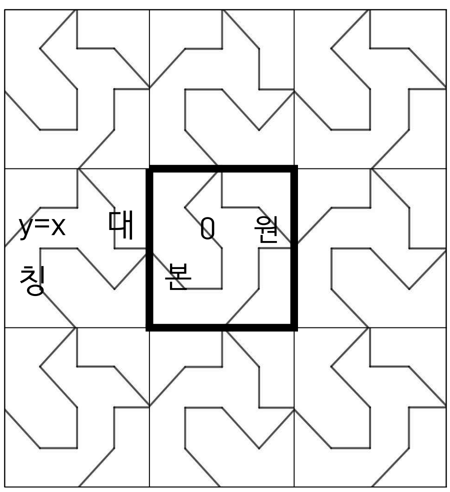
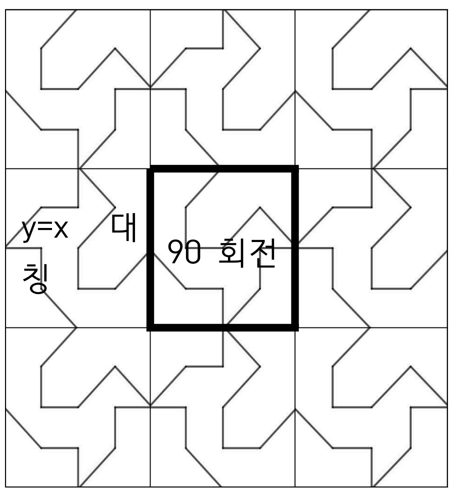
6.1 학생들에게 아내된 9가지 패턴외에 평면을 채울수 있는 다른 패턴들을 찾아 보게 한다. 아래 패턴은 위에서 소개한 것과는 다르게 용들의 모양이 다르게 보인다.



예시) GGGG의 변화

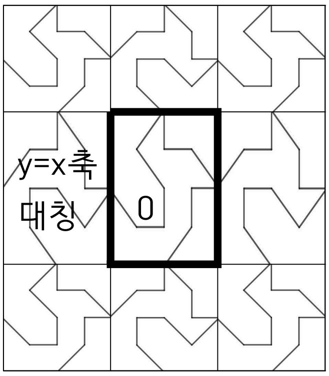
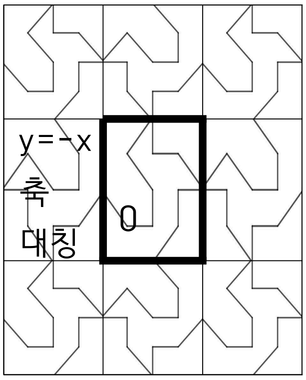
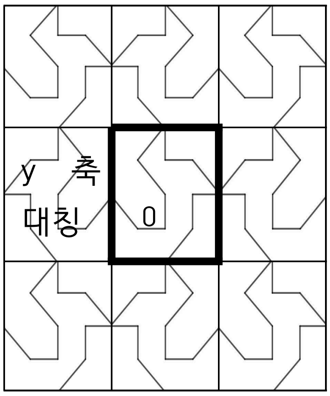
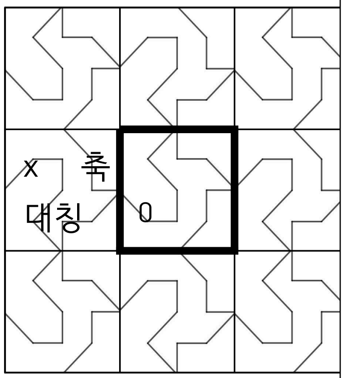
원본사각형의 변화 8가지(0, 90, 180, 270,x, y, y=x, y=-x), 대칭의 변화 4가지 (x,y,y=x, y=-x)

아래 표의 같은 gggg 패턴에서도 표의 A, B가 서로 다른 모양이 된 것을 알 수 있다.

A	B	
		A 패턴은 왼쪽의 B패턴과 다른 모양이 된 것을 알수 있다. B 패턴은 원본을 90도 회전후 각변에 y=x축 대칭을 한 것으로 기호 gggg (90 y=x)[8] 로 표기한다. gggg 경우 가운데 원본대칭 및 회전 8가지 각변 G대칭 4가지(x,y,y=x, y=-x)로 동시에 일어나는 경우가 모두 32가지 이고 모든 경우에 대한 변형을 정리하면 다음과 같다.

gggg 패턴의 모든 변화

8) 앞의 90은 원본에 대한 8가지 조작중 한가지인 90도 회전, 뒤의 y=x는 대칭 4가지중 한가지인 y=x 직선에 대한 대칭을 의미하는 기호이며 본 고에서만 이와 같이 약속한다.

0 y=x , 180 y=x, x y=-x, y y=-x, 90 y=-x , 270 y=-x, y=-x y=x, y=x y=x	0 y=-x ,90 y=x , y=x y=-x, y=-x y=-x, y y=x, x y=x,	0 y ,180 y , x y, y y 90 x, 270 x, y=x x, y=-x x,	0 x ,180 x, y x , x x 90 y, 270 y, y=x y, y=-x y,
			

8개씩 4가지 다른 모양이 나오게 된다.

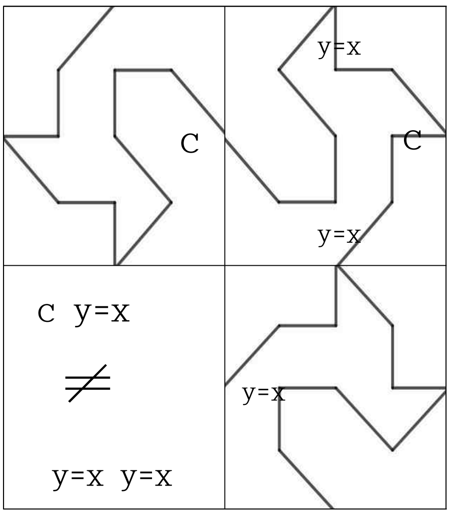
6.2 위 gggg 패턴에서 8가지씩 같은 변형 4가지 그림이 나오는 이유를 설명 하시오

예시설명 (0 y=x)과 (180 y=x) 이 같은 패턴인 이유로 G 대칭과 180도 회전은 교환이 가능하므로 (180 y=x) 은 y=x 와 180이 교환이 가능하기 때문에 (y=x 180)와 같고 이제 전체 패턴에 (-180)을 하게 되면 y=x 180 (-180) 은 결국 (0 y=x)가 되기 때문이다.

또한 (90 y=-x) 에서 90 회전 후 y=-x 축 대칭은 y=x 후 90회전 과 같으므로 (y=x 90)이 되고 이제 전체 패턴에 (-90)을 더해주면 y=x 90(-90)은 y=x 가 되며, (0 y=x), (180 y=x), (90 y=-)x, (270 y=x) 같음이 설명된다.

같은 방법으로 (x y=-x) 은 (y=x x)와 같고 전체패턴에 (-x) 하게 되면 0 y=x x(-x) 되어서 (0 y=x)와 같아진다.
또는 직관적으로 gggg 인 경우는 만들어진 하나의 패턴에 8가지(회전, 대칭)에 대하여 gggg를 유지하면서 보존 됨으로 하나의 그림에 8가지 같은 방법이 생길수 밖에는 없다.

6.3 cgcg 패턴에서 0 y=x (원본에 y=x 대칭)을 해 보았는가? 안된다면 안되는 이유는?

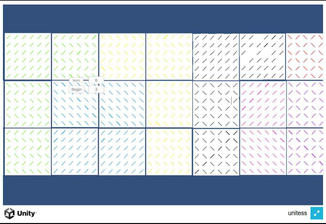
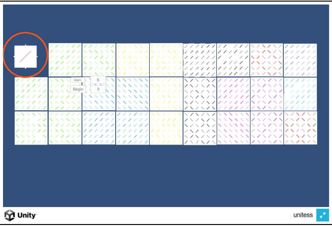
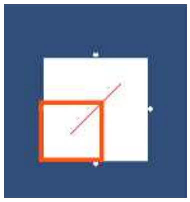
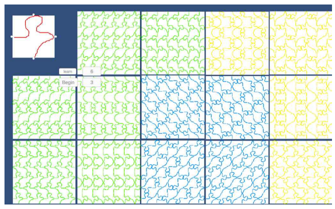
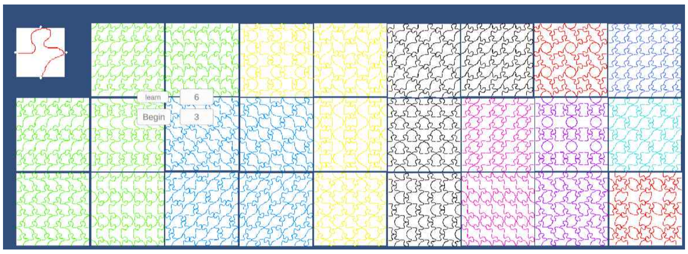
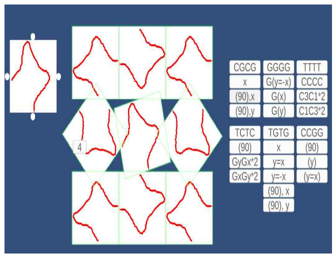
0 y=x 가 안되는 이유	
CGCG 페턴에서 G가 y=x인 경우 빈 부분에는 원본의 C(180) 한 결과의 y=x 대칭 y=x 의 y=x 대칭이 들어 와야 하는데 이 두 개가 같지 않아서 CGCG 패턴을 만들지 못한다. 연립방정식의 해가 존재하지 않는다	

나머지 패턴에 대한 변환[9]은 부록에 나머지 기본패턴에 대한 변형을 모두 볼 수 있다.

9) 부록5 표에서 찾아볼수 있다

또한 26가지 기본 및 변형패턴을 모두 살펴볼수 있는 앱을 개발하였는데. 다음 url 주소를 참조하면 된다. 간단한 사용법을 살펴보자.

https://legendary-croissant-b76a9b.netlify.app/

첫화면 9가지 패턴에 따른 변형들이 색깔별로 구분되어 있다	시작(begin)을 클릭하거나 마우스 휠이나 엄지검지로 화면크기 조정을 하여 동그라미 안의 사각형 원본이 보이게 할수 있다	원본사각형을 엄지 검지로 동시에 터치하거나 왼쪽아래를 마우스 오른쪽 클릭하면 모든 그림들이 사라저 다시 처음상태로 그림을 그릴수 있다	사각형안의 흰점(변의중점)들을 이어서 마우스 또는 손으로 비대칭 그림을 그리면 26가지 패턴이 그려진다
			
마우스 왼쪽 클릭 또는 손가락 으로 이동 하고 마우스 휠과 손가락 줌으로 확대 축소를 하면서 원하는 패턴에 위치하여 비교 관찰한다.		시작 및 학습, 6각형, 3각형대한 패턴도 살펴볼수 있다	학습(learn)클릭시 원리에 따른 패턴을 관찰할수 있다
			

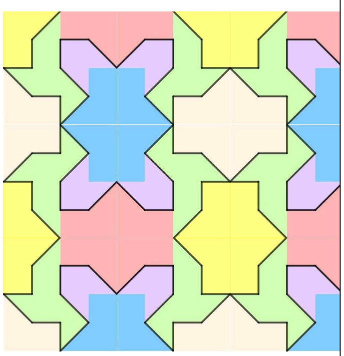
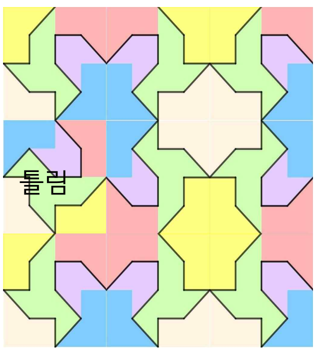
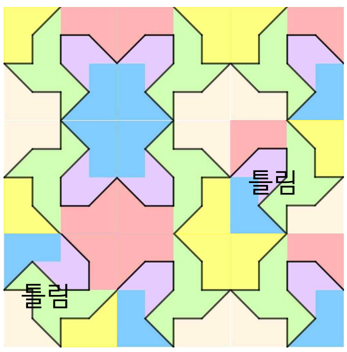
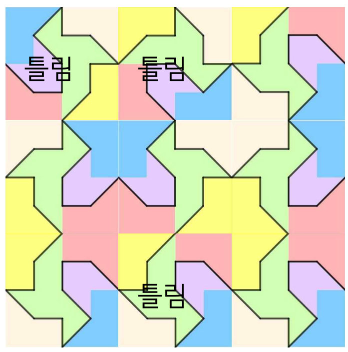
7.학습소재(9차시) : 소업소재 1,2,3,4,5,6의 융합 게임의 활용

지금까지 익힌 학습 소재의 복습과 활용으로 간단한 스피드 게임을 만들 수 있다. 난이도와 학생들의 선호에 따라 다양한 26가지 패턴의 모양을 선택할 수 있다.

7.1 게임설계

① 인원 : 1~4명
② 게임 참가자는 9장의 원본을 3*3으로 임의대로 배열한다
③ 임의대로 정리된 26장의 패턴 그림을 한 장씩 넘긴다.
④ 보여지는 패턴을 먼저 만들었다고 생각한 게임 참가자가 종을 울린다.
⑤ 종이 울린후 그때까지 각자 만든 패턴에서 패턴 그림과 같은 모양 위치 조각 수 만큼 점수를 받는다.

개임 예시

26개의 패턴중 임의의 1장	A가 종을 울렸고 1개가 틀려 8점	B 는 2개가 틀려 7점	C 는 3개가 틀려 6점
			

본 연구는 중등 수학교육과정에서 기하학적 변환을 가르치는 새로운 도구로서, 단일 정사각 타일을 활용한 테셀레이션 학습 모델이 다음의 교육적 성과로 이어지기를 기대한다

① 기존 에셔 타입의 테셀레이션이 가진 물리적 변형의 한계를 극복하고, 단 하나의 타일로 26가지의 독립적인 패턴을 구현함으로써 수업의 효율성을 극대화 할수 있고 이를 통해 학생들은 조작의 결과물을 즉각적으로 비교·분석하며 패턴 생성의 원리를 깊이 있게 탐구할 수 있다.

② 기하와 대수의 통합적 학습 가능성을 확인하고 단순히 평면을 채우는 활동을 넘어, 정사각형의 8가지 대칭 조작을 직접 수행하며 항등원, 역원, 비가환성 등 추상적인 대수 구조를 시각적·촉각적으로 체득할 수 있다.

③ 테셀레이션은 수학적 엄밀함과 예술적 창의성이 만나는 지점으로 학생들에게 수학적 심미성과 실용성의 가치를 고취시키고 에셔의 예술 작품 분석과 보도블록 및 의류 패턴 등 실생활 디자인으로의 연결을 통해, 수학이 추상적 학문에 머물지 않고 세상을 설계하는 유용한 도구임을 확신할수 있다.

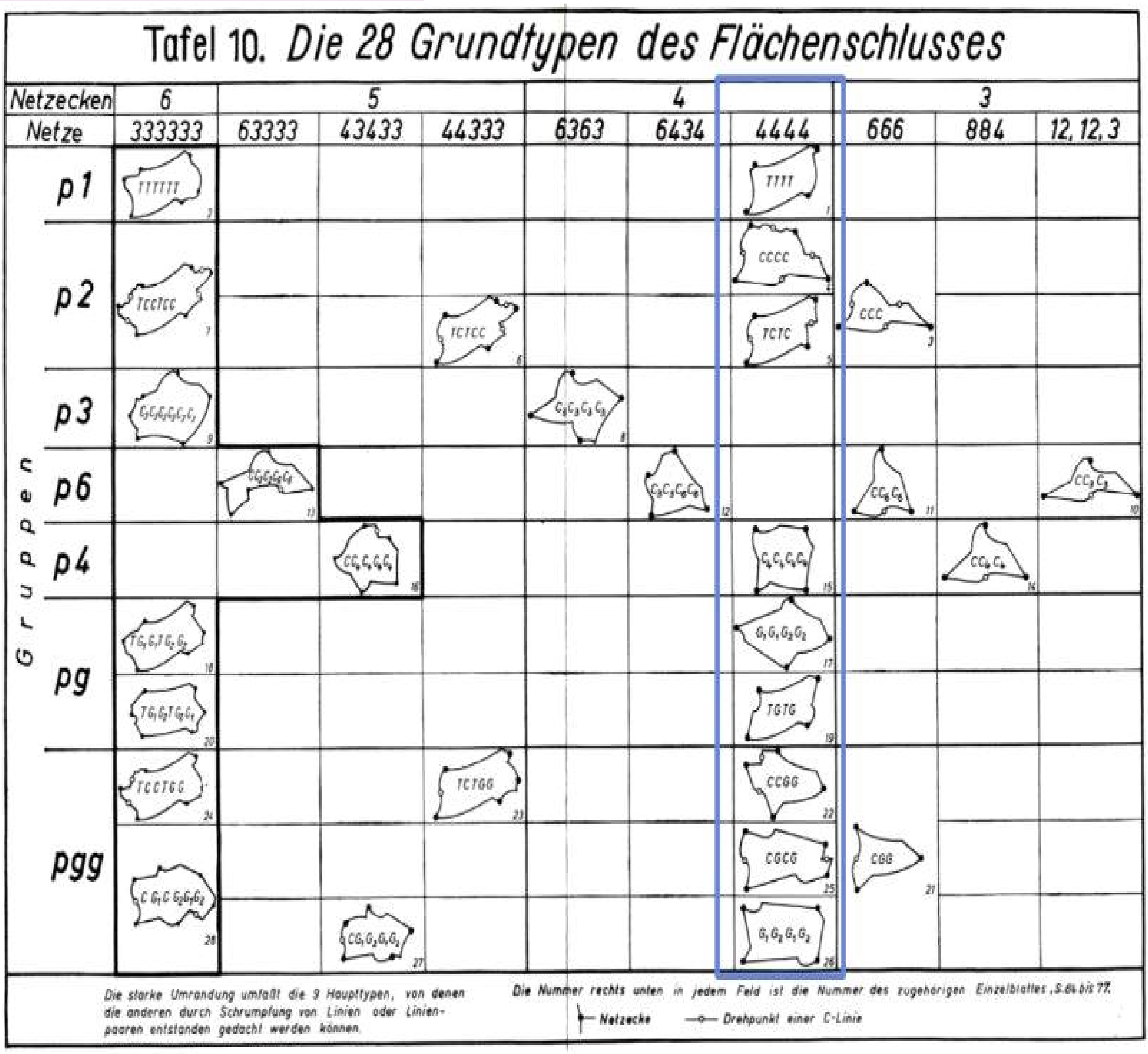
④ 본 수업의 6.2절에서 다룬 '왜 8개씩 같은 모양이 나오는가?'에 대한 의문처럼, 학생 스스로 규칙을 발견하고 이를 수학적으로 정당화하는 과정의 수업이 될 수 있다.

⑤ 본 연구에서 개발된 웹 기반 앱은 시공간의 제약 없이 패턴을 실험할 수 있는 환경을 제공하고. 이를 실물 교구 조작과 병행한다면 학생들의 기하학적 직관력을 더욱 정교하게 다듬을 수 있을 것이며 본 모델을 디자인 교과나 정보 교과(알고리즘 설계)와 연계한다면 더욱 풍부한 융합 교육의 사례를 구축할 수 있다.

부록(Appendix)

부록1

Heesch tiles (28 structures) fit seamlessly

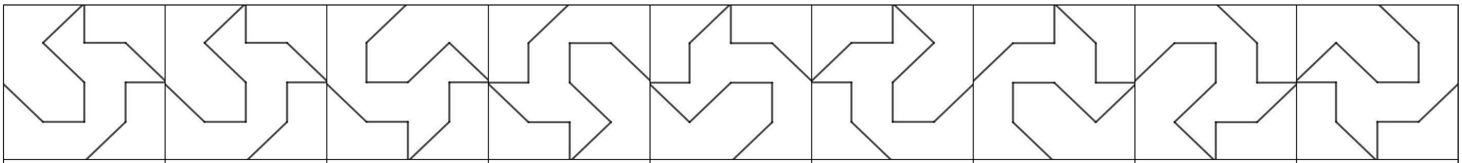
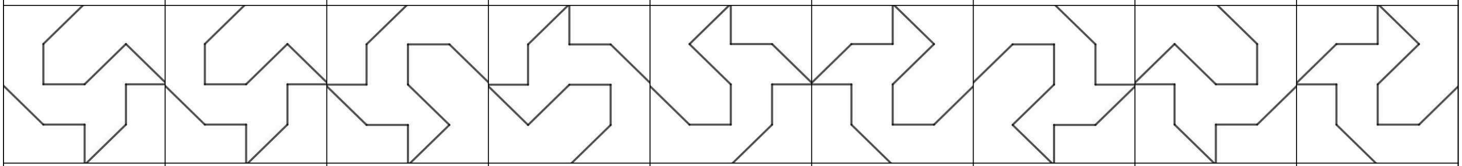
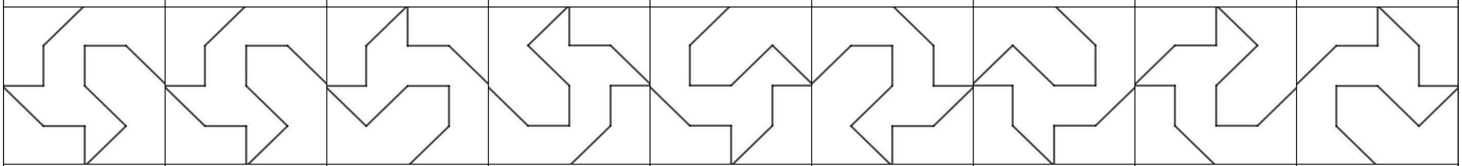
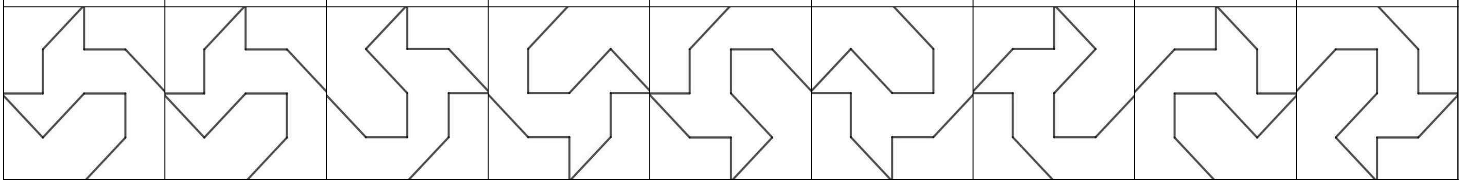
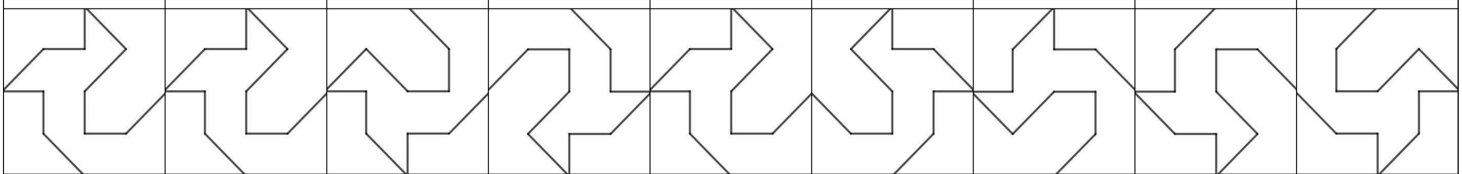
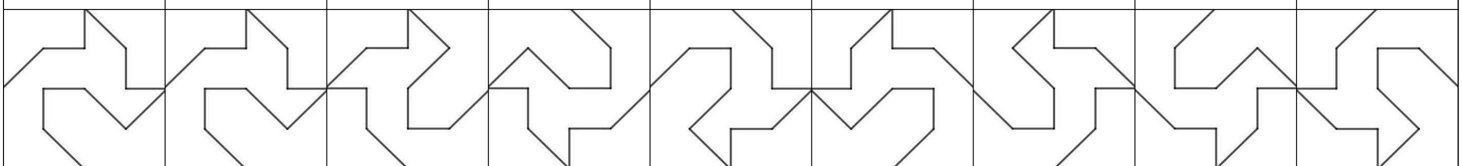
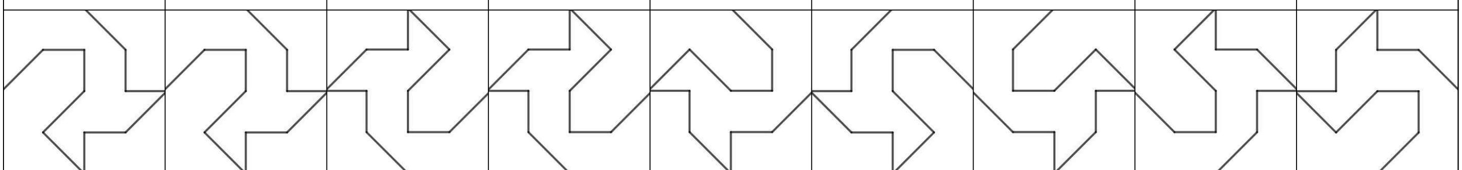
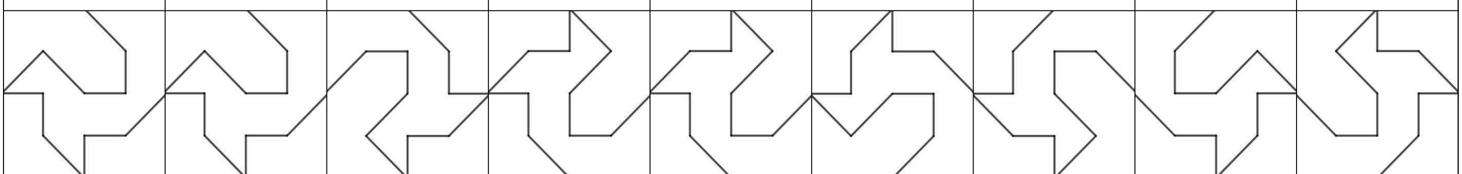


부록 2

https://mcescher.com/gallery/symmetry/#

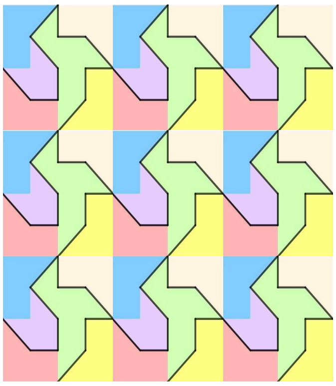
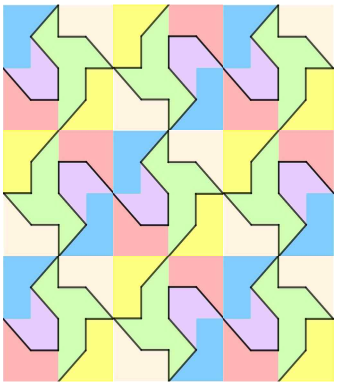
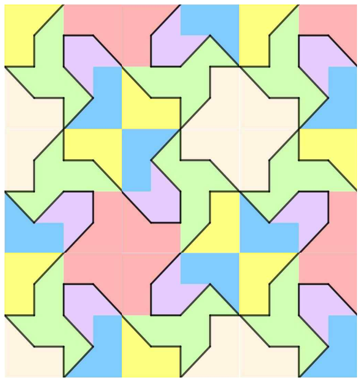
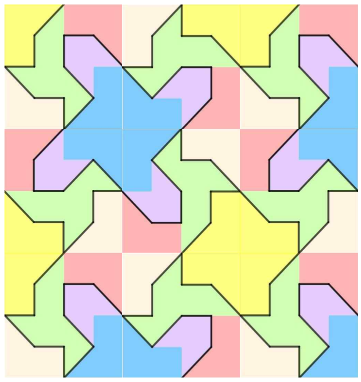
그림번호	출처
1	https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox[gallery_image_1]/104
2	https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox[gallery_image_1]/27
3	https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox[gallery_image_1]/74
4	https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox[gallery_image_1]/52
5	https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox[gallery_image_1]/87
6	https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox[gallery_image_1]/79
7	https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox[gallery_image_1]/60
8	https://mcescher.com/gallery/symmetry/#iLightbox[gallery_image_1]/84

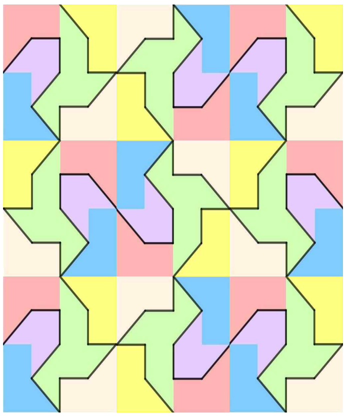
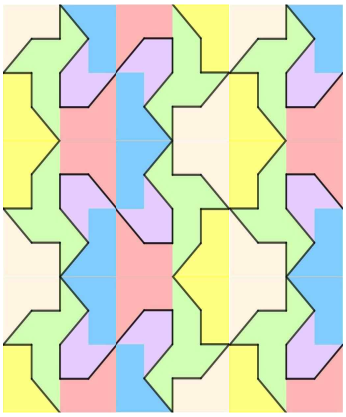
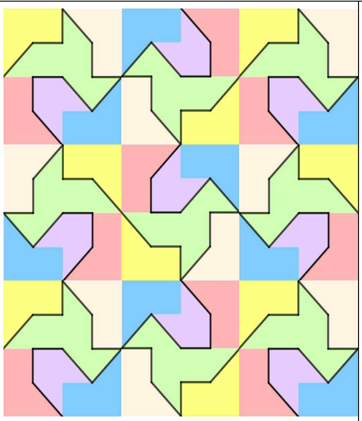
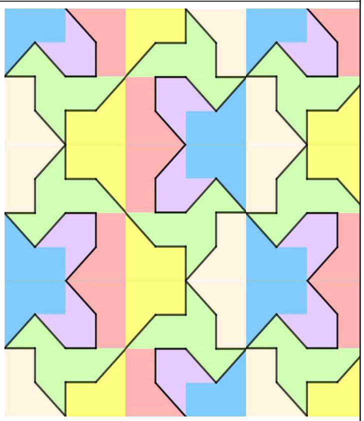
부록3

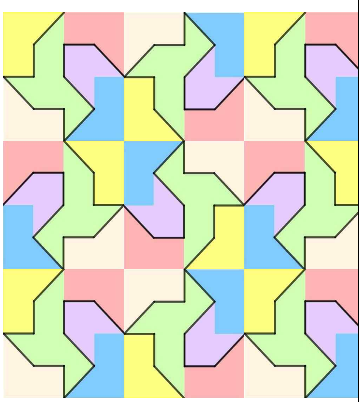
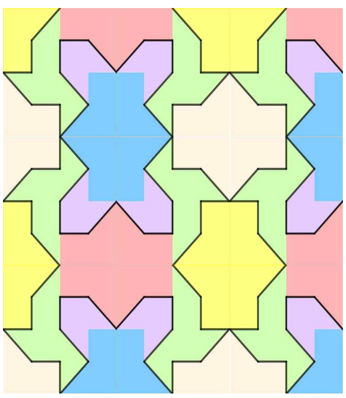
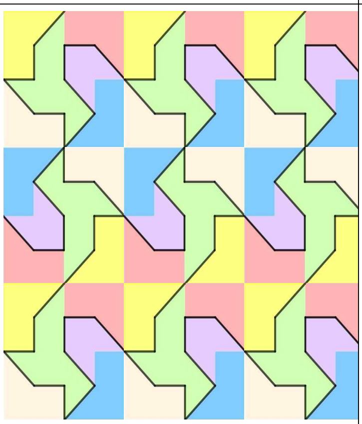
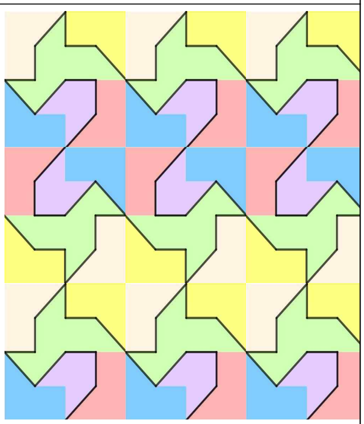
								
0	0	c1	c2	c3	y	y=x	x	y=-x
								
c1	c1	c2	c3	0	y=x	x	y=-x	y
								
c2	c2	c3	0	c1	x	y=-x	y	y=x
								
c3	c3	0	c1	c2	y=-x	y	y=x	x
								
y	y	y=-x	x	y=x	0	c3	c2	c1
								
y=x	y=x	y	y=-x	x	c3	0	c1	c2
								
x	x	y=x	y	y=-x	c2	c1	0	c3
								
y=-x	y=-x	x	y=x	y	c3	c2	c1	0

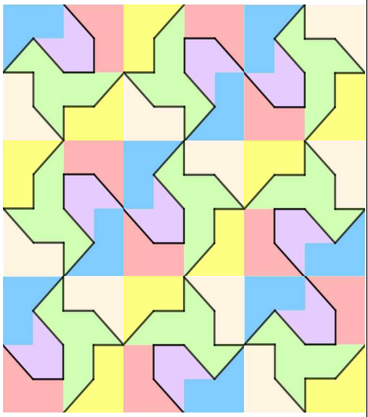
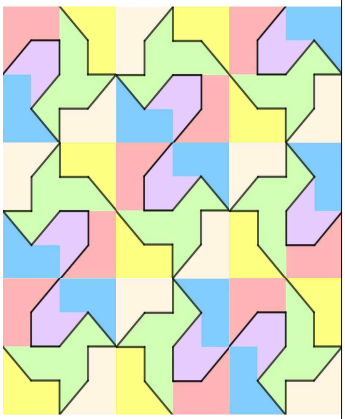
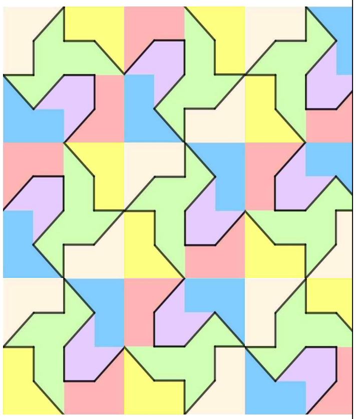
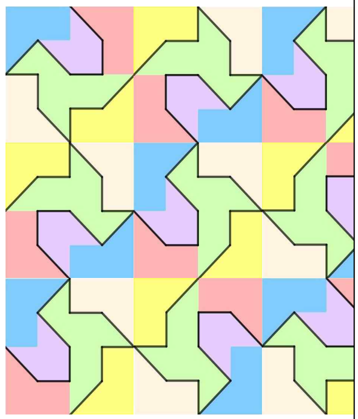
부록5

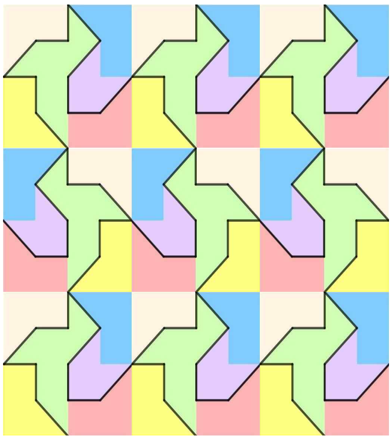
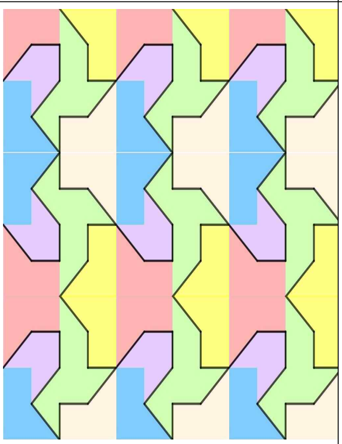
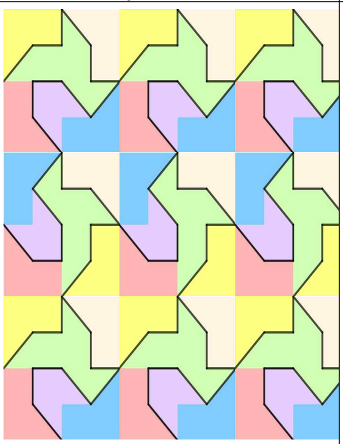
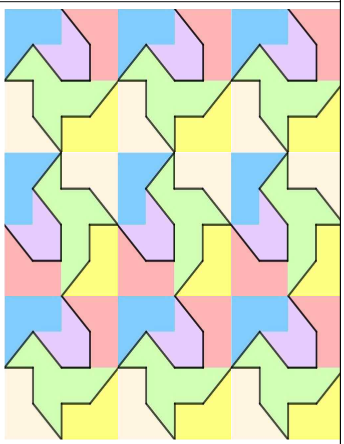
26가지 변환 패턴 표

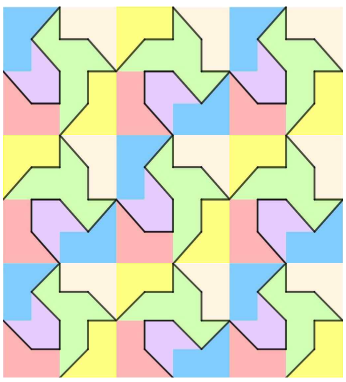
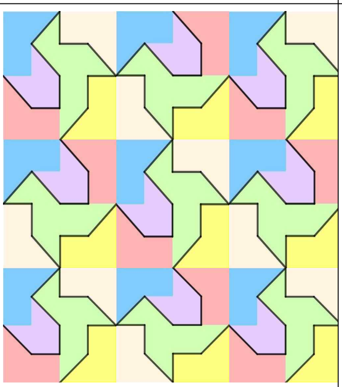
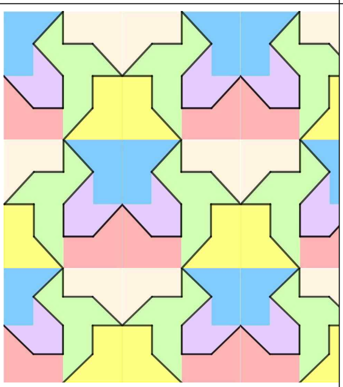
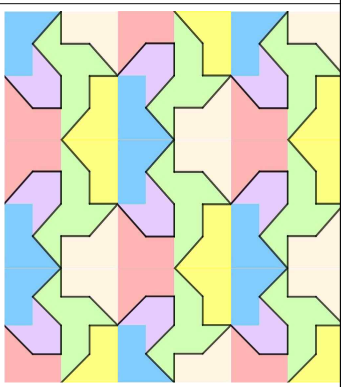
tttt	cccc	c3c1c3c1 G가 없으므로 원본변환 8가지중 4개씩 2가지가 있다.	
		0,180, y=x,y=-x	90, 270 ,y, x
			

cgcg 0 y, 180 y, x y , y y	0 x, 180 x, x x, y x	90y, 270 y, y=x y, y=-x y	90x, 270 x, y=x x, y=-x x
	0 y, 180 y, x y, y y 가 같은 이유로는 0, 180, y, x 대칭이 G(y축대칭)인 경우 CGCG 패턴을 유지하는 대칭이기 때문이다 . 그럼 GCGC 도 고려해볼만 한데 이는 원본을 90도 회전한 상태에서의 CGCG와 같다		
			

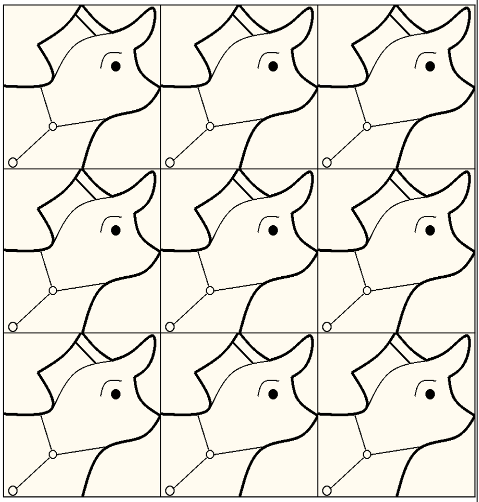
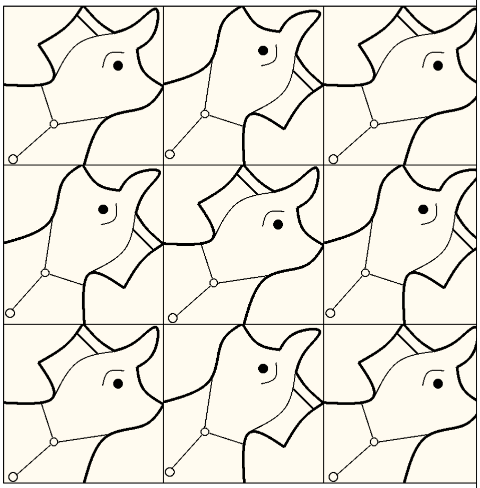
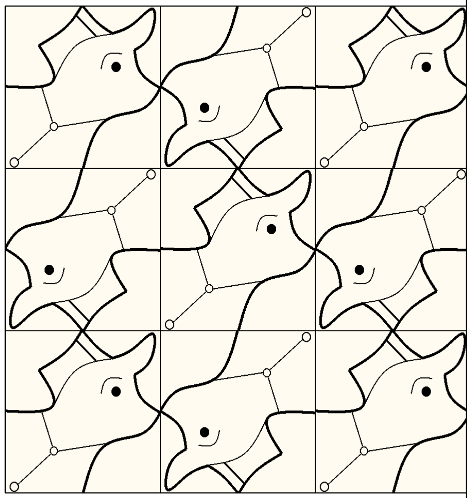
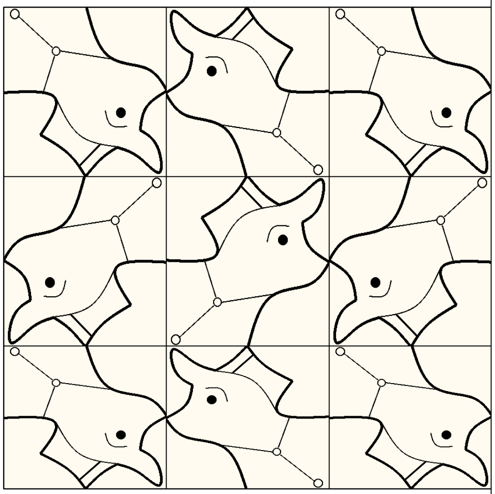
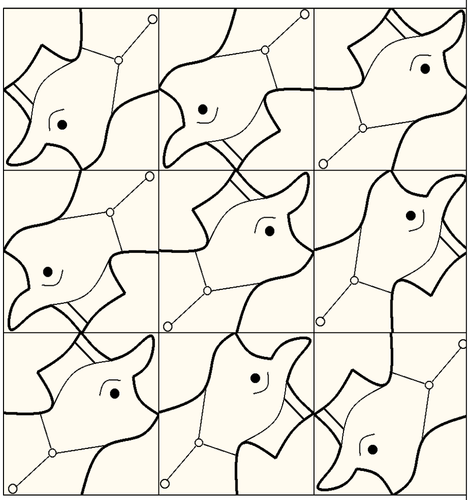
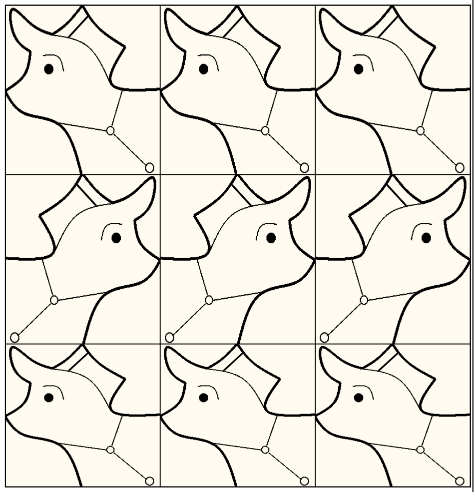
gxgygxgy 0 xy, 180 xy, y xy, x xy,90 xy,270 xy, y=x xy, y=-x xy,	0 yx, 180 yx, y yx, x yx. 90 yx, 270 yx, y=x yx, y=-x yx,	tctc 0 , 180, x, y	**G가 없으므로 원본변환 8가지중 4개씩 2가지가 있다.** 90, 270, y=x, y=-x
			

ccgg 0 y=x , y=-x y=x	90 y=x, x y=x	y y=x 270 y=x	y=x y=x, 180 y=x
	0 y=x, y=-x y-x 가 같은 이유는 CCGG를 유지하는 방법이 y=-x 이기 때문이다. 이 경우도 32가지 중 2개씩 4가지 그림이 있고 나머지 24가지는 안되는 경우이다. 나머지 패턴의 경우도 모두 찾을 수 있다.		
			

tgtg 0 y, 180 y , x y, y y	0 x, 180 x x x, y x,	0 y=x, 180 y=x ,y y=-x, x y=-x 90 y=-x, 270 y=-x, y=x y=x , y=-x y=x, 270 회전 y=x	0 y=-x, 180 y=-x, y=x y=-x, y=-x y=-x, 90 y=x, 270 y=x, y y=x, x y=x,
			

gggg 0 y=x , 180 y=x, x y=-x, y y=-x 90 y=-x , 270 y=-x, y=-x y=x, y=x y=x ,	0 y=-x ,90 y=x , y=x y=-x, y=-x y=-x, y y=x, x y=x,	0 y ,180 y , x y, y y 90 x, 270 x, y=x x, y=-x x,	0 x ,180 x, y x , x x 90 y, 270 y, y=x y, y=-x y,
			

부록6

TTTT	GGGG	CCCC
		
CGCG	CCGG	TGTG
		
C3C1C3C1	CTCT	GXGYGXGY