

SIMILARITAS

- Similaritas
 - Pendiagonalan Matriks
 - Similaritas dari Matriks Simetri

Prof.Dr. Budi Murtiyasa
Muhammadiyah University of Surakarta

Pengantar

- Cari akar dan vektor karakteristik dari

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Similaritas

- Dua matriks transformasi A dan B dikatakan similar jika terdapat matriks nonsingular R sehingga $B = R^{-1}AR$
- Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ adalah similar}$$

sebab terdapat matriks $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,
sehingga $B = P^{-1}AP$.

Sifat :

- 1) dua matriks yang similar mempunyai akar karakteristik yang sama
- 2) jika Y adalah vektor karakteristik dari B yang berhubungan dengan akar karakteristik λ_i , maka $X = PY$ adalah vektor invarian A yang berhubungan dengan akar karakteristik λ_i .

Persoalannya sekarang adalah :
Jika diketahui dua matriks
A dan B, bagaimana mendapatkan
matriks P sehingga berlaku
 $P^{-1}AP = B$?

- Cari akar dan vektor karakteristik dari

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Matriks Diagonal

$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Akar dan vektor karakteristik dari matriks D

adalah $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 7$, dan $\lambda_3 = 9$. Dengan vektor

karakteristiknya berturut-turut adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Setiap matriks diagonal
berdimensi $n \times n$ pasti
mempunyai n vektor
yang bebas linear.

Similar dengan Matriks Diagonal : Pendiagonalan Matriks

- Teorema :

Setiap matrik A bedimensi $n \times n$ yg mempunyai n vektor yang bebas linear similar dengan matriks diagonal.

Bukti:

Andaikan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ adalah vektor invarian yg berhubungan dng akar karakteristik $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ sehingga $AX_i = \lambda_i X_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

Andaikan $P = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_n]$, maka

$$AP = A[X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_n] = [AX_1 \ AX_2 \ AX_3 \ \dots \ AX_n]$$

$$AP = [\lambda_1 X_1 \ \lambda_2 X_2 \ \lambda_3 X_3 \ \dots \ \lambda_n X_n]$$

Bukti...

$$AP = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$AP = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_n] \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$$

$$AP = P D$$

$$P^{-1}AP = P^{-1}P D$$

$$P^{-1}AP = D$$

Jadi matriks A similar dengan matriks diagonal D, sebab ada matriks non singular P sehingga $P^{-1}AP = D$.

- Matriks $A_{n \times n}$ yg mempunyai n vektor invarian yg bebas linear dinamakan *diagonalisabel* (dapat didiagonalkan / similar dengan matriks diagonal).

Algoritma utk mendiagonalkan matriks $A_{n \times n}$:

- (1) cari akar-akar karakteristik dari matriks A , yaitu $\lambda_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$
- (2) cari vektor-vektor karakteristik dari A yg berhubungan dengan akar-akar karakteristik λ_i .
- (3) Jika banyaknya vektor invarian $< n$, maka A tidak diagonalisabel. Selesai.
- (4) Jika banyaknya vektor invarian $= n$, maka A diagonalisabel. Selanjutnya :
 - (4.1). Ambil $P = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_n]$, dengan X adalah vektor invarian dari A .
 - (4.2). Cari P^{-1}
 - (4.3). $P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$, dengan λ_i adalah akar-akar karakteristik dari A .
 - (4.4). selesai.

contoh

Apakah matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisabel ?. Jika ya, cari matriks P sehingga $P^{-1}AP = D$ (diagonal).

contoh

Apakah matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ diagonalisabel ?. Jika ya, cari

matriks P sehingga $P^{-1}AP = D$ (diagonal).

contoh

- Apakah matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ diagonalisabel ?

Jika ya, cari matriks P sehingga $P^{-1}AP = D$ (Didagonal).

contoh

- Apakah matriks $B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ diagonalisabel ?

Jika ya, cari matriks P sehingga $P^{-1}BP = D$ (Diagonal).

Similaritas dari matriks-matriks

Simetri

- Jika A matriks simetri, yaitu $A^T = A$, maka dapat ditemukan matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}AR = D$ (diagonal).
- Teorema :
Vektor-vektor invarian dari matriks simetri yg berasal dari akar karakteristik yg berbeda adalah saling ortogonal

bukti

Andaikan X_1 dan X_2 adalah vektor invarian yg berasal dari λ_1 dan λ_2 (dengan $\lambda_1 \neq \lambda_2$) dari matriks simetri A , maka :

$$AX_1 = \lambda_1 X_1$$

$$X_2^T AX_1 = X_2^T \lambda_1 X_1 \quad (1)$$

$$(X_2^T AX_1)^T = (\lambda_1 X_2^T X_1)^T$$

$$X_1^T A^T X_2 = \lambda_1 X_1^T X_2$$

$$X_1^T A X_2 = \lambda_1 X_1^T X_2 \quad (2)$$

bukti...

Sementara itu juga :

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_2 = \lambda_2\mathbf{X}_2$$

$$\mathbf{X}_1^T \mathbf{A}\mathbf{X}_2 = \lambda_2 \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 \quad (3)$$

$$(\mathbf{X}_1^T \mathbf{A}\mathbf{X}_2)^T = (\lambda_2 \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2)^T$$

$$\mathbf{X}_2^T \mathbf{A}^T \mathbf{X}_1 = \lambda_2 \mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_1$$

$$\mathbf{X}_2^T \mathbf{A} \mathbf{X}_1 = \lambda_2 \mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_1 \quad (4)$$

dari (2) dan (3) :

$$\lambda_1 \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 = \lambda_2 \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2$$

$$\lambda_1 \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 - \lambda_2 \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 = 0$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 = 0 \text{ atau } \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2 = 0$$

Ini berarti \mathbf{X}_1 ortogonal \mathbf{X}_2 .

Untuk matrik simetri A , algoritma untuk mendapatkan matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}AR = D$ (diagonal) adlh

- (1) cari akar karakteristik dari A
- (2) cari vektor invarian dari A
- (3) jika semua akar karakteristik berbeda, maka vektor invarian X_1, \dots, X_n adalah saling ortogonal.
 - (3.1) normalisir vektor-vektor X_1, \dots, X_n sehingga menjadi Y_1, Y_2, \dots, Y_n .
 - (3.2) Matriks ortogonal $R = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n]$.
 - (3.3) $R^{-1}AR = D$ (diagonal). Selesai.
- (4) **Jika ada akar karakteristik yg sama**, misalnya $\lambda_1 = \lambda_2$, maka X_1 dan X_2 belum ortogonal; sedangkan X_3, \dots, X_n sudah ortogonal.
 - (4.1) lakukan proses Gram-Schmidt thd X_1 dan X_2 sehingga menjadi W_1 dan W_2 yang saling ortogonal.
 - (4.2) Ambil $W_3 = X_3, \dots, W_n = X_n$
 - (4.3) Normalisir vektor-vektor $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$ sehingga menjadi $Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n$.
 - (4.4) Matriks ortogonal $R = [Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n]$.
 - (4.5) $R^{-1}AR = D$ (diagonal). Selesai.

contoh

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}AR = D$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

contoh

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}BR = D$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

contoh

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}CR = D$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

contoh

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}FR = D$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}AR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}BR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}CR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}ER = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}FR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$F = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}GR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1} H R = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}KR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$K = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Latihan

- Cari matriks ortogonal R sehingga $R^{-1}LR = D$ (diagonal), jika matriks transformasi

$$L = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$