# Лекции по теории поля в двух измерениях

Академический университет, кафедра теоретической физики

Антон Назаров

СПбГУ, физический факультет

кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц

antonnaz@gmail.com

Осенний семестр 2010 года

**Аннотация**

Текст представляет собой конспект лекций по квантовой теории поля в двух измерениях. Лекции читаются в осеннем семестре 2010 года в Академическом университете для магистрантов 6 курса, группа теории твердого тела.

## 1 Программа курса

1. Введение.
   - Двумерные модели
   - Фазовые переходы, критические индексы
   - Универсальность
   - Методы квантовой теории поля в статистической физике
2. Перенормировки, ренормгруппа
3. Решение модели Изинга
   - Интегрируемость
   - Подход Каданова
4. Конформная инвариантность
   - Глобальная конформная инвариантность

- Ограничения на корреляционные функции
- Локальная конформная инвариантность в двух измерениях
- Алгебра Витта и алгебра Вирасоро.

5. Конформная теория поля

   - Примарные и вторичные поля
   - Минимальные модели

# 2 Лекция 1

## 2.1 Введение

Чем интересны двумерные системы? Во-первых, они существуют в природе. Например, критическое поведение на поверхности металлов напоминает поведение модели Изинга в двух измерениях [1]. Во-вторых, в двух измерениях даже в простых моделях есть фазовые переходы. Это не так, например, в одномерной модели Изинга. В простых двумерных моделях можно вычислить критические индексы и изучать поведение системы при фазовых переходах. Гипотеза универсальности утверждает, что все системы в критической точке разбиваются на небольшое число классов. Системы из одного класса ведут себя одинаково, имеют одинаковые критические индексы. Благодаря гипотезе универсальности существует лишь небольшое число типов критического поведения, поэтому значения индексов, вычисленные теоретически в простых моделях соответствуют гораздо более сложным реальным системам. В критической точке наблюдается масштабная инвариантность, что ведет к конформной инвариантности [2]. В двух измерениях конформная инвариантность дает очень много сведений о системе, так как алгебра конформных преобразований бесконечномерна. В результате поведение системы может быть описано строго математически методами двумерной конформной теории поля. Двумерная конформная теория поля имеет и другое применение, не связанное с описанием фазовых переходов — это теория струн, которая считается перспективным кандидатом на роль квантовой теории гравитации.

## 2.2 Фазовые переходы. Основные понятия

Напомним некоторые основные понятия теории фазовых переходов на примере двумерной модели Изинга.

Мы рассматриваем статистические системы. Все макроскопические характеристики таких систем вычисляются из статсуммы, которая связана с микроскопическим описанием системы. Для больцмановского распределения вероятность системы находиться в состоянии с номером $i$ с энергией $E_i$

$$P_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}, \quad \beta = \frac{1}{T} \tag{1}$$

Мы используем систему единиц, в которой постоянная Больцмана равна единице $k_B = 1$, введем $\beta = \frac{1}{T}$. Статсумма:

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}. \tag{2}$$

Свободная энергия

$$F = -T \ln Z \tag{3}$$

Внутренняя энергия

$$U = -\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{F}{T}\right) \tag{4}$$

Телоемкость равна производной внутренней энергии по температуре при заданном объеме

$$C = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \tag{5}$$

Таким образом статсумма является производящей функцией всех термодинамических величин. Вычисление статсуммы в реальных системах — это сложная задача. Макроскопическое описание имеет смысл только в термодинамическом пределе, когда число частиц стремится к бесконечности $N \to \infty$.

Двумерная модель Изинга — это простейшая модель магнетика. Она формулируется на решетке, которую мы будем, для простоты, считать прямоугольной. Вершины решетки нумеруются латинскими индексами $i, j$. В вершинах решетки находятся частицы со спинами $\sigma_j$ равными $\pm 1$ (вверх или вниз). Взаимодействуют только ближайшие соседи, константу взаимодействия обозначим через $J$. Для энергии системы имеем

$$E = J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \cdot \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \tag{6}$$

Суммирование в первом члене ведется только по парам ближайших соседей, второй член — это взаимодействие со внешним полем $h$. Пусть система состоит из $N$ вершин. Она имеет $2^N$ различных конфигураций.

Случай $J > 0$ соответствует ферромагнетику, $J < 0$ — антиферромагнетику. При $h = 0$ низшее энергетическое состояние двукратно вырождено — это состояние, в котором все спины направлены вверх или вниз.

Существует несколько точных решений двумерной модели Изинга в отсутствие внешнего поля. Решений со внешним полем и в большем числе измерений пока не известно. Недавнее достижение Станислава Смирнова, за которое он получил в этом году премию Филдса, непосредственно связано с темой наших лекций. В своих работах Станислав Смирнов впервые строго доказал наличие конформного предела в двумерной модели Изинга [3, 4]. Фазовые переходы в модели Изинга наблюдаются только в этом пределе, при конечных размерах системы никаких переходов нет.

При исследовании магнетиков нас интересуют следующие термодинамически величины. Намагниченность, которая равна среднему значению спина по всем конфигурациям $[\sigma]$:

$$M = \langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{NZ} \sum_{[\sigma]} \left( \sum_i \sigma_i \right) e^{-\beta E[\sigma]} = -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial h}. \tag{7}$$

Магнитная восприимчивость

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial h} \right|_{h=0} = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{1}{Z} \sum_{[\sigma]} \left( \sum_i \sigma_i \right) e^{-\beta E[\sigma]} \right) = \frac{1}{NT} \left( \left\langle \sigma_{\mathrm{tot}}^2 \right\rangle - \left\langle \sigma_{\mathrm{tot}} \right\rangle^2 \right) \tag{8}$$

Здесь мы ввели обозначение $\sigma_{\mathrm{tot}} = \sum_i \sigma_i$. Видно, что магнитная восприимчивость пропорциональна дисперсии полного спина. Введем парную корреляционную функцию

$$\Gamma(i-j) = \langle \sigma_i - \sigma_j \rangle . \tag{9}$$

Из-за вращательной и трансляционной инвариантности $\Gamma$ зависит только от расстояния между вершинами $|i-j|$. Связная корреляционная функция

$$\Gamma_c(i-j) = \langle \sigma_i - \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle . \tag{10}$$

Можно показать, что

$$\chi = \beta \sum_i \Gamma(i)_c. \tag{11}$$

То есть магнитная восприимчивость — это мера статистической когерентности системы, она растет с ростом зависимости спинов между собой.

## 2.3 Классические статистические модели. Связь с теорией поля.

Распределение Больцмана инвариантно относительно сдвига энергии на константу, поэтому можно переписать гамильтониан в более удобном для обобщения виде:

$$\begin{aligned} &\sigma_i\sigma_j = 2\delta_{\sigma_i\sigma_j} - 1 \\ &E[\sigma] = -2J\textstyle\sum_{\langle ij\rangle}\delta_{\sigma_i\sigma_j} - h\sum_i\sigma_i \end{aligned} \tag{12}$$

Обсудим некоторые обобщения модели Изинга и проиллюстрируем сходство статистической механики с теорией поля. Если $\sigma_i$ может принимать значения не $-1, 1$, а $1, 2 \ldots, q$, то мы получаем модель Поттса с $q$ состояниями. Подобным образом получаются и модели Ашкина-Теллера. Другой класс дискретных моделей отличается более существенно. Если в модели Изинга переменные (спины) живут в вершинах, а энергия — на ребрах, то в вершинных моделях все наоборот. В качестве переменных берутся направленные ребра (стрелки), а энергия в вершине зависит от числа входящих и выходящих из нее стрелок. Пусть ребра, входящие в вершину имеют значения $0, 1$ в зависимости от направления стрелки. Тогда энергия вершины обозначается через $R^{\beta\nu}_{\alpha\mu}$, $\alpha, \beta, \mu, \nu = 0, 1$. Бывает 16 таких членов. В зависимости от того, сколько из них не равны нулю выделяют 6-вершинную и 8-вершинную модели. 8-вершинная модель — ненулевой вклад только когда входит четное число стрелок.

Другой класс статистических моделей — это модели с непрерывными степенями свободы. Например, заменим спины $\sigma_i$ в (6) на единичные вектора в $m$-мерном пространстве $\vec{n}_i$.

$$|\vec{n}|^2 = 1 \tag{13}$$

В результате получим гамильтониан

$$E[\vec{n}] = J\sum_{\langle ij\rangle}\vec{n}_i\cdot\vec{n}_j - \sum_i\vec{h}\cdot\vec{n}_i \tag{14}$$

Это гамильтониан классической $O(m)$-модели Гейзенберга.

В критической точке параметр порядка системы стремится к бесконечности, кроме того, фазовый переход в дискретных моделях наблюдается только в термодинамическом пределе числа вершин стремящегося к бесконечности ($N \to \infty$). Поэтому при описании фазового перехода имеет смысл перейти модели с дискретным пространством к непрерывному пространству $d$-мерному пространству. В дальнейшем $d$ будет равно двум, но сейчас мы пишем в самом общем виде, чтобы указать аналогию с теорией поля. При переходе к непрерывному пространству гамильтониан (14) принимает вид

$$E[\vec{n}] = \int d^d x \left( J \partial_k n_i \partial_k n_i - h_i \cdot n_i \right) \tag{15}$$

Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. (Легко понять обратный переход, если заменить производные разностями по ближайшим соседям, а потом отбросить в энергии постоянный член $J \sum_i |\vec{n}_i|^2 = JN$). Условие $\vec{n}^2(x) = 1$ сложно использовать, поэтому мы заменим его на другое аналогичное. Первый вариант такой замены — это $\frac{1}{V} \int d^d x \ \vec{n}^2 = 1$. В результате получается так называемая сферическая модель. Другая возможность — добавить в гамильтониан (15) потенциал $V(|\vec{n}|)$ с минимумом в $|\vec{n}| = 1$ и устремить константу связи к бесконечности. Простейший вид такого потенциала — $V(|\vec{n}|) = a\vec{n}^2 + b\left(\vec{n}^2\right)^2$. Добавим его в гамильтониан и изменим нормировку $\vec{n}$ так, чтобы константа $J$ ушла. Получим

$$E[\vec{n}] = \int d^d x \left( \frac{1}{2} \partial_k n_i \cdot \partial_k n_i - \frac{1}{2} \mu^2 \vec{n}^2 + \frac{1}{4} u \left( \vec{n}^2 \right)^2 \right) \tag{16}$$

Если у $\vec{n}$ всего одна компонента $\varphi$, то мы получаем скалярную модели $\varphi^4$. Если $u = 0$, то такая модель называется Гауссовой и допускает точное решение.

$$E[\varphi] = \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 \right) \tag{17}$$

Статсумма — это сумма $e^{-\beta E[\varphi]}$ по всем конфигурациям поля $\varphi$, то есть она записывается при помощи функционального интеграла:

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\beta E[\varphi]} \tag{18}$$

В гауссовой модели функциональный интеграл имеет гауссовский вид, поэтому он хорошо определен и легко вычисляется. Значит можно вычислить статсумму и все корреляционные функции. Величины в модели $\varphi^4$ можно получать по теории возмущений вокруг решения гауссовой модели. Это и есть вычисление функционального интеграла как суммы по фейнмановским диаграммам.

# 3 Лекция 2.

## 3.1 Квантовые статистические модели

Микросостояния квантовых статистических систем описываются при помощи матрицы плотности

$$\rho = e^{-\beta H} \tag{19}$$

Статсумма дается суммой по собственным состояниям гамильтониана или следом матрицы плотности:

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \mathrm{Tr}\rho \tag{20}$$

Значение физической величины определим как среднее по состояниям:

$$\langle A \rangle = \sum_n \langle n| e^{-\beta H} A |n\rangle = \mathrm{Tr}(\rho A) \tag{21}$$

$e^{-\beta H}$ похоже на оператор эволюции $e^{-iHt}$, то есть его тоже можно записать через функциональный интеграл. Покажем, как это делается на примере системы с одной степенью свободы. В этом случае ядро оператора плотности имеет вид

$$\rho(x_f, x_i) = \langle x_f| e^{-\beta H} |x_i\rangle \tag{22}$$

Вспомним, что в квантовой механике оператор эволюции имеет вид $U(t) = e^{-iHt}$, а его ядро — амплитуда перехода из состояния $|x_i\rangle$ в $\langle x_f|$ дается интегралом по траекториям

$$\langle x_f| U(t) |x_i\rangle = \int_{(x_i,0)}^{(x_f,t)} [dx] e^{iS[x]} \tag{23}$$

Заменой $t \to i\tau,\ \tau \in [0, \beta]$ (виковским поворотом) переходим к евклидову действию $S[x(t)] \to iS_E[x(\tau)]$. Для ядра оператора плотности получаем

$$\rho(x_f, x_i) = \int_{(x_i,0)}^{(x_f,\beta)} [dx] e^{-S_E[x]} \tag{24}$$

Статсумма

$$Z = \int dx \rho(x, x) = \int [dx] e^{-S_E[x]} \tag{25}$$

Среднее значение $A$

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z}\int dx \, \langle x| \rho A \, |x\rangle = \frac{1}{Z}\int dx \; dy \, \langle x| \, \rho \, |y\rangle \, \langle y| \, A \, |x\rangle =$$
$$= \frac{1}{Z}\int dx \; dy \int_{(x,0)}^{(y,\beta)} [dx] \, \langle y| \, A \, |x\rangle \, e^{-S_E[x]} = \frac{1}{Z}\int dx \; dy \int_{(x,0)}^{(y,\beta)} [dx] A(x) \delta(x-y) e^{-S_E[x]} =$$
$$= \frac{1}{Z}\int [dx] A(x(0)) e^{-S_E[x]} \tag{26}$$

Здесь мы предположили, что $A$ зависит только от $x$, то есть $\langle y| \, A \, |x\rangle = A(x)\delta(x-y)$. Мы видим, что значение $A$ дается функциональным интегралом, но $A$ вычисляется в точке $\tau = 0$.

Обобщение на систему с континуумом степеней свободы и многочастичные функции естественно. Статсумма квантовой системы получается из обычного интеграла по траекториям путем викова поворота и ограничения евклидова времени на конечный промежуток $[0, \beta]$. При нулевой температуре ($\beta \to \infty$) мы получаем обычный производящий функционал в евклидовом времени, то есть теорию поля. При конечных температурах статсумма квантовой $d$-мерной системы напоминает статсумму $d+1$-мерной классической системы на полосе шириной $\beta$.

## 3.2 Критические явления

Фазовые переходы характеризуются скачком в макроскопических характеристиках системы. При переходах первого рода скачком меняется внутренняя энергия (например, при переходе жидкость-газ). При переходах второго рода наблюдается скачок производных макроскопических термодинамических величин (теплоемкость, магнитная восприимчивость).

Строго говоря, фазовые переходы бывают только в термодинамическом пределе. Это легко понять для систем типа модели Изинга в нулевом поле, где энергия любой конфигурации кратна энергетическому масштабу $\epsilon = -J$, а статсумма представляет собой полином от $z = e^{-\beta\epsilon}$. В модели Изинга наибольшая энергия $E = 2N\epsilon$, $Z$- полином степени $2N$ от $z$ с единичными коэффициентами. Корни этого полинома лежат вне положительной вещественной оси и комплексно сопряжены. Сингулярности свободной энергии или ее производных могут быть только в корнях, которые находятся вне физической области при $N < \infty$. При $N \to \infty$ число корней становится бесконечным, они лежат на дугах, которые могут касаться положительной вещественной оси. В этих точках поведение термодинамических величин и становится сингулярным.

Нас будут интересовать переходы второго рода. Именно в них имеет место конформная инвариантность. Перечислим основные результаты для модели Изинга в двух измерениях.

Здесь есть один фазовый переход при конечной температуре. Критическая температура

$$T_C: \quad \operatorname{sh}\frac{2J}{T_C} = 1 \tag{27}$$

При $T > T_C$ спонтанная намагниченность исчезает. При $T < T_C$ она не равна нулю и стремится к 1 при $T \to 0$ и к 0 при $T \to T_C$. Это ферромагнитная фаза. Около критической точки спонтанная намагниченность ведет себя как

$$M \sim |T_C - T|^{\frac{1}{8}} \tag{28}$$

# Список литературы

[1] J. Campuzano, M. Foster, G. Jennings, R. Willis, and W. Unertl, "Au (110)(1× 2)-to-(1× 1) phase transition: a physical realization of the two-dimensional Ising model," *Physical Review Letters* **54** (1985) no. 25, 2684–2687.

[2] A. M. Polyakov, "Conformal symmetry of critical fluctuations," *JETP Lett.* **12** (1970) 381–383.

[3] S. Smirnov, "Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model," *arXiv* **708** (2007) .

[4] S. Smirnov, "Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy's formula, scaling limits," *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics* **333** (2001) no. 3, 239–244.