

# Лекции по теории поля в двух измерениях

Академический университет, кафедра теоретической физики

Антон Назаров

СПбГУ, физический факультет

кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц

`antonnaz@gmail.com`

Осенний семестр 2010 года

## Аннотация

Текст представляет собой конспект лекций по квантовой теории поля в двух измерениях. Лекции читаются в осеннем семестре 2010 года в Академическом университете для магистрантов 6 курса, группа теории твердого тела.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Лекция 1</b>	<b>2</b>
1.1	Программа курса . . . . .	2
1.2	Литература . . . . .	3
1.3	Введение . . . . .	3
1.4	Фазовые переходы. Основные понятия . . . . .	4
1.5	Классические статистические модели. Связь с теорией поля.	6
<b>2</b>	<b>Лекция 2.</b>	<b>8</b>
2.1	Квантовые статистические модели . . . . .	8
2.2	Критические явления . . . . .	9
2.3	Скейлинг или масштабная инвариантность . . . . .	11
2.4	Процедура Каданова . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Лекция 3</b>	<b>14</b>
3.1	Ренормгруппа в решеточных моделях . . . . .	14
3.2	Ренормгруппа в непрерывных моделях . . . . .	17

4	Лекция 4. Уравнение Каллана-Симанчика. Ренормгруппа в двух измерениях.	18
5	Лекция 5. Двумерная модель Изинга	22
5.1	Низкотемпературное и высокотемпературное разложение .	23
5.2	Дуальность Крамерса-Ванье . . . . .	25
6	Лекция 6. Решение Вдовиченко.	25
7	Лекция 7. Конформная группа.	30
8	Лекция 8. Инварианты. Явный вид конформных преобразований полей в $d \geq 3$ .	34

# 1 Лекция 1

## 1.1 Программа курса

1. Введение.
  - Двумерные модели
  - Фазовые переходы, критические индексы
  - Универсальность
  - Методы квантовой теории поля в статистической физике
2. Перенормировки, ренормгруппа
3. Решение модели Изинга
  - Интегрируемость
  - Подход Каданова
4. Конформная инвариантность
  - Глобальная конформная инвариантность
  - Ограничения на корреляционные функции
  - Локальная конформная инвариантность в двух измерениях
  - Алгебра Витта и алгебра Вирасоро.
5. Конформная теория поля
  - Примарные и вторичные поля
  - Минимальные модели

## 1.2 Литература

В первых лекциях 1,2 мы опираемся на вводные главы книги [1]. Подробно решение модели Изинга в двух измерениях рассмотрено в книге [2]. Последовательное изложение техники функционального интеграла в статистической физике можно найти в книге А.Н. Васильева [3].

В следующих лекциях 3, 4 мы обсуждаем применение ренормгруппы к описанию критического поведения, более подробно и достаточно педагогически этот вопрос рассматривается в книге [4] ([5]). Исчерпывающую информацию содержит монография [6] (английский вариант [7]). Лекция 4 основана на вводной главе обзора [8].

Изложение конформной теории поля в двух измерениях опирается на оригинальную статью [9], книгу [1] и обзор [10, 11], недавно переизданный в виде книги.

## 1.3 Введение

Чем интересны двумерные системы? Во-первых, они существуют в природе. Например, критическое поведение на поверхности металлов напоминает поведение модели Изинга в двух измерениях [12]. Во-вторых, в двух измерениях даже в простых моделях есть фазовые переходы. Это не так, например, в одномерной модели Изинга. В простых двумерных моделях можно вычислить критические индексы и изучать поведение системы при фазовых переходах. Гипотеза универсальности утверждает, что все системы в критической точке разбиваются на небольшое число классов. Системы из одного класса ведут себя одинаково, имеют одинаковые критические индексы. Благодаря гипотезе универсальности существует лишь небольшое число типов критического поведения, поэтому значения индексов, вычисленные теоретически в простых моделях соответствуют гораздо более сложным реальным системам. В критической точке наблюдается масштабная инвариантность, что ведет к конформной инвариантности [13]. В двух измерениях конформная инвариантность дает очень много сведений о системе, так как алгебра конформных преобразований бесконечномерна. В результате поведение системы может быть описано строго математически методами двумерной конформной теории поля. Двумерная конформная теория поля имеет и другое применение, не связанное с описанием фазовых переходов — это теория струн, которая считается перспективным кандидатом на роль квантовой теории гравитации.

## 1.4 Фазовые переходы. Основные понятия

Напомним некоторые основные понятия теории фазовых переходов на примере двумерной модели Изинга.

Мы рассматриваем статистические системы. Все макроскопические характеристики таких систем вычисляются из статсуммы, которая связана с микроскопическим описанием системы. Для больцмановского распределения вероятность системы находиться в состоянии с номером  $i$  с энергией  $E_i$

$$P_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}, \quad \beta = \frac{1}{T} \quad (1)$$

Мы используем систему единиц, в которой постоянная Больцмана равна единице  $k_B = 1$ , введем  $\beta = \frac{1}{T}$ . Статсумма:

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}. \quad (2)$$

Свободная энергия

$$F = -T \ln Z \quad (3)$$

Внутренняя энергия

$$U = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = -T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{F}{T} \right) \quad (4)$$

Телоемкость равна производной внутренней энергии по температуре при заданном объеме

$$C = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad (5)$$

Таким образом статсумма является производящей функцией всех термодинамических величин. Вычисление статсуммы в реальных системах — это сложная задача. Макроскопическое описание имеет смысл только в термодинамическом пределе, когда число частиц стремится к бесконечности  $N \rightarrow \infty$ .

Двумерная модель Изинга — это простейшая модель магнетика. Она формулируется на решетке, которую мы будем, для простоты, считать прямоугольной. Вершины решетки нумеруются латинскими индексами  $i, j$ . В вершинах решетки находятся частицы со спинами  $\sigma_j$  равными  $\pm 1$  (вверх или вниз). Взаимодействуют только ближайшие соседи, константу взаимодействия обозначим через  $J$ . Для энергии системы имеем

$$E = J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \cdot \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \quad (6)$$

Суммирование в первом члене ведется только по парам ближайших соседей, второй член — это взаимодействие со внешним полем  $h$ . Пусть система состоит из  $N$  вершин. Она имеет  $2^N$  различных конфигураций. Случай  $J > 0$  соответствует ферромагнетику,  $J < 0$  — антиферромагнетику. При  $h = 0$  низшее энергетическое состояние двукратно вырождено — это состояние, в котором все спины направлены вверх или вниз.

Существует несколько точных решений двумерной модели Изинга в отсутствие внешнего поля. Решений со внешним полем и в большем числе измерений пока не известно. Недавнее достижение Станислава Смирнова, за которое он получил в этом году премию Филдса, непосредственно связано с темой наших лекций. В своих работах Станислав Смирнов впервые строго доказал наличие конформного предела в двумерной модели Изинга [14, 15, 16]. Фазовые переходы в модели Изинга наблюдаются только в этом пределе, при конечных размерах системы никаких переходов нет.

При исследовании магнетиков нас интересуют следующие термодинамические величины. Намагниченность, которая равна среднему значению спина по всем конфигурациям  $[\sigma]$ :

$$M = \langle \sigma_j \rangle = \frac{1}{NZ} \sum_{[\sigma]} \left( \sum_i \sigma_i \right) e^{-\beta E[\sigma]} = -\frac{1}{N} \frac{\partial F}{\partial h}. \quad (7)$$

Магнитная восприимчивость

$$\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial h} \right|_{h=0} = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{1}{Z} \sum_{[\sigma]} \left( \sum_i \sigma_i \right) e^{-\beta E[\sigma]} \right) = \frac{1}{NT} (\langle \sigma_{\text{tot}}^2 \rangle - \langle \sigma_{\text{tot}} \rangle^2) \quad (8)$$

Здесь мы ввели обозначение  $\sigma_{\text{tot}} = \sum_i \sigma_i$ . Видно, что магнитная восприимчивость пропорциональна дисперсии полного спина. Введем парную корреляционную функцию

$$\Gamma(i-j) = \langle \sigma_i - \sigma_j \rangle. \quad (9)$$

Из-за вращательной и трансляционной инвариантности  $\Gamma$  зависит только от расстояния между вершинами  $|i-j|$ . Связная корреляционная функция

$$\Gamma_c(i-j) = \langle \sigma_i - \sigma_j \rangle_c = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle. \quad (10)$$

Можно показать, что

$$\chi = \beta \sum_i \Gamma(i)_c. \quad (11)$$

То есть магнитная восприимчивость — это мера статистической когерентности системы, она растет с ростом зависимости спинов между собой.

## 1.5 Классические статистические модели. Связь с теорией поля.

Распределение Больцмана инвариантно относительно сдвига энергии на константу, поэтому можно переписать гамильтониан в более удобном для обобщения виде:

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_j &= 2\delta_{\sigma_i \sigma_j} - 1 \\ E[\sigma] &= -2J \sum_{\langle ij \rangle} \delta_{\sigma_i \sigma_j} - h \sum_i \sigma_i\end{aligned}\tag{12}$$

Обсудим некоторые обобщения модели Изинга и проиллюстрируем сходство статистической механики с теорией поля. Если  $\sigma_i$  может принимать значения не  $-1, 1$ , а  $1, 2, \dots, q$ , то мы получаем модель Поттса с  $q$  состояниями. Подобным образом получаются и модели Ашкина-Теллера. Другой класс дискретных моделей отличается более существенно. Если в модели Изинга переменные (спины) живут в вершинах, а энергия — на ребрах, то в вершинных моделях все наоборот. В качестве переменных берутся направленные ребра (стрелки), а энергия в вершине зависит от числа входящих и выходящих из нее стрелок. Пусть ребра, входящие в вершину имеют значения  $0, 1$  в зависимости от направления стрелки. Тогда энергия вершины обозначается через  $R_{\alpha\mu}^{\beta\nu}$ ,  $\alpha, \beta, \mu, \nu = 0, 1$ . Бывает 16 таких членов. В зависимости от того, сколько из них не равны нулю выделяют 6-вершинную и 8-вершинную модели. 8-вершинная модель — ненулевой вклад только когда входит четное число стрелок.

Другой класс статистических моделей — это модели с непрерывными степенями свободы. Например, заменим спины  $\sigma_i$  в (6) на единичные вектора в  $m$ -мерном пространстве  $\vec{n}_i$ .

$$|\vec{n}|^2 = 1\tag{13}$$

В результате получим гамильтониан

$$E[\vec{n}] = J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j - \sum_i \vec{h} \cdot \vec{n}_i\tag{14}$$

Это гамильтониан классической  $O(m)$ -модели Гейзенберга.

В критической точке параметр порядка системы стремится к бесконечности, кроме того, фазовый переход в дискретных моделях наблюдается только в термодинамическом пределе числа вершин стремящегося

к бесконечности ( $N \rightarrow \infty$ ). Поэтому при описании фазового перехода имеет смысл перейти модели с дискретным пространством к непрерывному пространству  $d$ -мерному пространству. В дальнейшем  $d$  будет равно двум, но сейчас мы пишем в самом общем виде, чтобы указать аналогию с теорией поля. При переходе к непрерывному пространству гамильтониан (14) принимает вид

$$E[\vec{n}] = \int d^d x (J \partial_k n_i \partial_k n_i - h_i \cdot n_i) \quad (15)$$

Здесь подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. (Легко понять обратный переход, если заменить производные разностями по ближайшим соседям, а потом отбросить в энергии постоянный член  $J \sum_i |\vec{n}_i|^2 = JN$ ). Условие  $\vec{n}^2(x) = 1$  сложно использовать, поэтому мы заменим его на другое аналогичное. Первый вариант такой замены — это  $\frac{1}{V} \int d^d x \vec{n}^2 = 1$ . В результате получается так называемая сферическая модель. Другая возможность — добавить в гамильтониан (15) потенциал  $V(|\vec{n}|)$  с минимумом в  $|\vec{n}| = 1$  и устремить константу связи к бесконечности. Простейший вид такого потенциала —  $V(|\vec{n}|) = a\vec{n}^2 + b(\vec{n}^2)^2$ . Добавим его в гамильтониан и изменим нормировку  $\vec{n}$  так, чтобы константа  $J$  ушла. Получим

$$E[\vec{n}] = \int d^d x \left( \frac{1}{2} \partial_k n_i \cdot \partial_k n_i - \frac{1}{2} \mu^2 \vec{n}^2 + \frac{1}{4} u (\vec{n}^2)^2 \right) \quad (16)$$

Если у  $\vec{n}$  всего одна компонента  $\varphi$ , то мы получаем скалярную модель  $\varphi^4$ . Если  $u = 0$ , то такая модель называется Гауссовой и допускает точное решение.

$$E[\varphi] = \int d^d x \left( \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 \right) \quad (17)$$

Статсумма — это сумма  $e^{-\beta E[\varphi]}$  по всем конфигурациям поля  $\varphi$ , то есть она записывается при помощи функционального интеграла:

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\beta E[\varphi]} \quad (18)$$

В гауссовой модели функциональный интеграл имеет гауссовский вид, поэтому он хорошо определен и легко вычисляется. Значит можно вычислить статсумму и все корреляционные функции. Величины в модели  $\varphi^4$  можно получать по теории возмущений вокруг решения гауссовой модели. Это и есть вычисление функционального интеграла как суммы по фейнмановским диаграммам.

## 2 Лекция 2.

### 2.1 Квантовые статистические модели

Микросостояния квантовых статистических систем описываются при помощи матрицы плотности

$$\rho = e^{-\beta H} \quad (19)$$

Статсумма дается суммой по собственным состояниям гамильтониана или следом матрицы плотности:

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \text{Tr} \rho \quad (20)$$

Значение физической величины определим как среднее по состояниям:

$$\langle A \rangle = \sum_n \langle n | e^{-\beta H} A | n \rangle = \text{Tr}(\rho A) \quad (21)$$

$e^{-\beta H}$  похоже на оператор эволюции  $e^{-iHt}$ , то есть его тоже можно записать через функциональный интеграл. Покажем, как это делается на примере системы с одной степенью свободы. В этом случае ядро оператора плотности имеет вид

$$\rho(x_f, x_i) = \langle x_f | e^{-\beta H} | x_i \rangle \quad (22)$$

Вспомним, что в квантовой механике оператор эволюции имеет вид  $U(t) = e^{-iHt}$ , а его ядро — амплитуда перехода из состояния  $|x_i\rangle$  в  $\langle x_f|$  дается интегралом по траекториям

$$\langle x_f | U(t) | x_i \rangle = \int_{(x_i, 0)}^{(x_f, t)} [dx] e^{iS[x]} \quad (23)$$

Заменой  $t \rightarrow i\tau$ ,  $\tau \in [0, \beta]$  (виковским поворотом) переходим к евклидову действию  $S[x(t)] \rightarrow iS_E[x(\tau)]$ . Для ядра оператора плотности получаем

$$\rho(x_f, x_i) = \int_{(x_i, 0)}^{(x_f, \beta)} [dx] e^{-S_E[x]} \quad (24)$$

Статсумма

$$Z = \int dx \rho(x, x) = \int [dx] e^{-S_E[x]} \quad (25)$$



Среднее значение  $A$

$$\begin{aligned}
\langle A \rangle &= \frac{1}{Z} \int dx \langle x | \rho A | x \rangle = \frac{1}{Z} \int dx dy \langle x | \rho | y \rangle \langle y | A | x \rangle = \\
&= \frac{1}{Z} \int dx dy \int_{(x,0)}^{(y,\beta)} [dx] \langle y | A | x \rangle e^{-S_E[x]} = \frac{1}{Z} \int dx dy \int_{(x,0)}^{(y,\beta)} [dx] A(x) \delta(x - y) e^{-S_E[x]} = \\
&= \frac{1}{Z} \int [dx] A(x(0)) e^{-S_E[x]}
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь мы предположили, что  $A$  зависит только от  $x$ , то есть  $\langle y | A | x \rangle = A(x) \delta(x - y)$ . Мы видим, что значение  $A$  дается функциональным интегралом, но  $A$  вычисляется в точке  $\tau = 0$ .

Обобщение на систему с континуумом степеней свободы и многочастичные функции естественно. Статсумма квантовой системы получается из обычного интеграла по траекториям путем викового поворота и ограничения евклидова времени на конечный промежуток  $[0, \beta]$ . При нулевой температуре ( $\beta \rightarrow \infty$ ) мы получаем обычный производящий функционал в евклидовом времени, то есть теорию поля. При конечных температурах статсумма квантовой  $d$ -мерной системы напоминает статсумму  $d + 1$ -мерной классической системы на полосе шириной  $\beta$ .

## 2.2 Критические явления

Фазовые переходы характеризуются скачком в макроскопических характеристиках системы. При переходах первого рода скачком меняется внутренняя энергия (например, при переходе жидкость-газ). При переходах второго рода наблюдается скачок производных макроскопических термодинамических величин (теплоемкость, магнитная восприимчивость).

Строго говоря, фазовые переходы бывают только в термодинамическом пределе. Это легко понять для систем типа модели Изинга в нулевом поле, где энергия любой конфигурации кратна энергетическому масштабу  $\epsilon = -J$ , а статсумма представляет собой полином от  $z = e^{-\beta\epsilon}$ . В модели Изинга наибольшая энергия  $E = 2N\epsilon$ ,  $Z$ -полином степени  $2N$  от  $z$  с единичными коэффициентами. Корни этого полинома лежат вне положительной вещественной оси и комплексно сопряжены. Сингулярности свободной энергии или ее производных могут быть только в корнях, которые находятся вне физической области при  $N < \infty$ . При  $N \rightarrow \infty$  число корней становится бесконечным, они лежат на дугах, которые могут касаться положительной вещественной оси. В этих точках поведение термодинамических величин и становится сингулярным.

Нас будут интересовать переходы второго рода. Именно в них имеет место конформная инвариантность. Перечислим основные результаты для модели Изинга в двух измерениях.

Здесь есть один фазовый переход при конечной температуре. Критическая температура

$$T_c : \quad \text{sh} \frac{2J}{T_c} = 1 \quad (27)$$

При  $T > T_c$  спонтанная намагниченность исчезает. При  $T < T_c$  она не равна нулю и стремится к 1 при  $T \rightarrow 0$  и к 0 при  $T \rightarrow T_c$ . Это ферромагнитная фаза. Около критической точки спонтанная намагниченность ведет себя как

$$M \sim |T_c - T|^{\frac{1}{8}} \quad (28)$$

Направление намагниченности определяется тем, куда было направлено внешнее поле до того, как его устремили к 0.

При подходе к критической точке магнитная восприимчивость расходится

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial h} \sim |T - T_c|^{-\frac{7}{4}}. \quad (29)$$

Вдали от критической точки корреляторы  $\Gamma_c(i)$  убывают экспоненциально с расстоянием. Характерная длина убывания  $\xi$  называется корреляционной длиной

$$\langle \sigma_i \sigma_j \rangle_c \sim e^{-\frac{|i-j|}{\xi(T)}} \quad |i - j| \gg 1. \quad (30)$$

При  $T \rightarrow T_c$  корреляционная длина расходится

$$\xi(T) \sim \frac{1}{|T - T_c|}. \quad (31)$$

Такое поведение характеризует переходы второго рода и наблюдается в критических точках фазовой диаграммы.

Около критической точки система состоит из доменов разной намагниченности. Существуют домены всевозможных размеров от шага решетки до корреляционной длины  $\xi$ . Свободная энергия  $F$  получает вклады от доменных стенок. Сингулярное поведение возникает из-за вкладов доменов большого размера, оно определяется флуктуациями и не может быть правильно учтено в теории среднего поля. Вблизи критической температуры  $\xi$  больше физических размеров системы. Свободная энергия перестает зависеть от  $\xi$ .

Парная корреляционная функция ведет себя как

$$\Gamma(\vec{n}) \sim \frac{1}{|\vec{n}|^{d-2+\eta}} \quad (32)$$

Поведение термодинамических величин определяется критическими индексами. Перечислим их вместе со значениями в двумерной модели Изинга. Эти значения получены из точных решений модели.

Критический индекс	Термодинамическая величина	Значение индекса в двумерной модели Изинга
$\alpha$	$C \sim \frac{1}{ T-T_c ^\alpha}$	0
$\beta$	$M \sim  T - T_c ^\beta$	$\frac{1}{8}$
$\gamma$	$\chi \sim \frac{1}{ T-T_c ^\gamma}$	$\frac{7}{4}$
$\delta$	$M \sim h^{\frac{1}{\delta}}$	15
$\nu$	$\xi \sim \frac{1}{ T-T_c ^\nu}$	1
$\eta$	$\Gamma(\vec{n}) \sim  \vec{n} ^{2-d-\eta}$	$\frac{1}{4}$

Таблица 1: Критические индексы и их значения в модели Изинга в 2 измерениях

Заметим, что систему можно описывать классической статистической механикой (обычной квантовой теорией поля с неограниченным временем) когда корреляционная длина больше характерной длины волны де Бройля. Если характерная скорость  $v$  (скорость света, скорость Ферми или скорость какого-либо возбуждения), то  $\lambda_T = \frac{v\hbar}{k_B T} \sim \beta$ . То есть классическая статистика применима при больших температурах или вблизи критической точки, если  $T_c \neq 0$ .

## 2.3 Скейлинг или масштабная инвариантность

Гипотеза подобия связывает между собой критические индексы. Ее можно сформулировать так: плотность свободной энергии  $f(t, h) = \frac{F}{N}$  около критической точки является однородной функцией  $h$  и безразмерной температуры  $t = \frac{T}{T_c} - 1$ . То есть существуют  $a, b$ :

$$f(\lambda^a t, \lambda^b h) = \lambda f(t, h) \quad (33)$$

В следующих лекциях мы обоснуем эту гипотезу при помощи ренорм-группы.

Покажем теперь, какие условия накладывает гипотеза подобия на критические индексы. Заметим, что  $t^{-\frac{1}{a}} f$  инвариантна при преобразовании  $t \rightarrow \lambda^a t, h \rightarrow \lambda^b h$ . Введем

$$y = \frac{h}{t^{\frac{b}{a}}} \quad (34)$$

Тогда

$$f(t, h) = t^{\frac{1}{a}} g(y). \quad (35)$$

Для спонтанной намагниченности имеем

$$M = - \left. \frac{\partial f}{\partial h} \right|_{h=0} = t^{\frac{1-b}{a}} g'(0), \quad (36)$$

а для магнитной восприимчивости

$$\chi = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} \right|_{h=0} = t^{\frac{1-2b}{a}} g''(0). \quad (37)$$

Аналогично для удельной теплоемкости получаем

$$c = -T \left. \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \right|_{h=0} = -\frac{1}{T_c} t^{\frac{1}{a-2}} g''(0) \quad (38)$$

В пределе  $t \rightarrow 0$   $M \sim h^{\frac{1}{\delta}}$ , поэтому  $g'(y) \sim y^{\frac{1}{\delta}}$  при  $y \rightarrow \infty$ . А значит, если в критической точке намагниченность  $M$  конечна и не равна нулю, должно выполняться равенство  $1 - b - \frac{b}{\delta} = 0$ . Подставляя выражение для  $\delta$  через  $b$  в (36,37,38), мы получаем связь критических индексов

$$\alpha = 2 - \frac{1}{a} \quad (39)$$

$$\beta = \frac{1-b}{a} \quad (40)$$

$$\gamma = -\frac{1-2b}{a} \quad (41)$$

$$\delta = \frac{b}{1-b} \quad (42)$$

## 2.4 Процедура Каданова

Теперь обоснуем гипотезу подобия в модели Изинга при помощи процедуры Каданова и свяжем индексы  $a, b$  с  $\nu, \eta$ . Рассмотрим кубическую  $d$ -мерную модель Изинга.

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i \quad (43)$$

Разбиваем решетку на блоки со стороной в  $r$  ячеек. Будем нумеровать блоки большими латинскими буквами  $I, J$  и понимать под записью  $i \in I$  перечисление вершин в  $I$ -том блоке. Сумма спинов в блоке принимает значения от  $r^{-d}$  до  $r^d$ . Введем блочный спин

$$\Sigma_I = \frac{1}{R} \sum_{i \in I} \sigma_i \quad (44)$$

$R$  - нормировочный множитель, который выбирается так, чтобы блочный спин мог принимать значения  $\pm 1$ . Если бы спины были всегда в одном направлении, то  $R$  имел бы значение  $r^d$ .

Мы предполагаем, что поведение вблизи критической точки описывается в терминах блочных спинов, так как корреляционная длина  $\xi \gg r$ . Гамильтониан для блочных спинов имеет вид

$$H' = -J' \sum_{\langle IJ \rangle} \Sigma_I \Sigma_J - h' \sum_I \Sigma_I \quad (45)$$

Так как корреляционная длина для блоков

$$\xi' = \frac{\xi}{r}, \quad (46)$$

то из (31) для температуры имеем

$$t' = r^{\frac{1}{\nu}} t. \quad (47)$$

Суммарная энергия взаимодействия со внешним полем должна оставаться неизменной, то есть

$$h \sum_i \sigma_i = h' \sum_I \Sigma_I = \frac{h'}{R} \sum_i \sigma_i \implies h' = Rh \quad (48)$$

Так как общая свободная энергия тоже не должна меняться, то свободная энергия на блок  $\sim r^d f$ , то есть

$$f(t', h') = r^d f(t, h) \quad (49)$$

или

$$f(t, h) = r^{-d} f(r^{\frac{1}{\nu}} t, Rh) \quad (50)$$

Осталось вычислить  $R$  как функцию от  $r$ , чтобы оправдать гипотезу подобия. Смотрим на парный коррелятор в критической точке

$$\begin{aligned} \Gamma'(\vec{n}) &= \langle \Sigma_I \Sigma_J \rangle - \langle \Sigma_I \rangle \langle \Sigma_J \rangle = \frac{1}{R^2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (\langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle) = \\ &= \frac{r^{2d}}{R^2} \Gamma(r\vec{n}) = \frac{R^{-2} r^{2d}}{|r\vec{n}|^{d-2+\eta}} = \frac{R^{-2} r^{d+2-\eta}}{|\vec{n}|^{d-2+\eta}} \end{aligned} \quad (51)$$

Отсюда

$$R = r^{\frac{d+2-\eta}{2}}, \quad h' = r^{\frac{d+2-\eta}{2}} h \quad (52)$$

Подставляя в (33)  $r = \lambda^{\frac{1}{d}}$  получаем выражение для скейлинговых параметров  $a, b$ :

$$a = \frac{1}{\nu d} \quad (53)$$

$$b = \frac{d + 2 - \eta}{2d} \quad (54)$$

Для критических индексов имеем

$$\alpha = 2 - \nu d \quad (55)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\nu(d - 2 + \eta) \quad (56)$$

$$\gamma = \nu(2 - \eta) \quad (57)$$

$$\delta = \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta} \quad (58)$$

### 3 Лекция 3

В прошлой лекции мы обосновали гипотезу подобия при помощи рассмотрения блочных спинов и введения эффективного гамильтониана, имеющего ту же форму, но другие константы связи. Эта процедура является перенормировкой в координатном пространстве, она определяет отображение гамильтониана  $H \rightarrow H'$ . Последовательное применение такой процедуры порождает так называемую ренормгруппу. Строго говоря, ренормгруппа является не группой, полугруппой, так как у преобразования нет обратного, ведь при переходе к блокам большего размера мы теряем информацию. Опишем ренормгруппу для решеточных моделей.

#### 3.1 Ренормгруппа в решеточных моделях

Рассматриваем решеточную модель, состоящую из  $N$  спинов  $\sigma_i$  на  $d$ -мерной решетке. Общий вид гамильтониана таких моделей

$$H(\vec{J}, [\sigma], N) = J_0 + J_1 \sum_i \sigma_i + J_2 \sum_{\langle ij \rangle}^{(1)} \sigma_i \sigma_j + J_3 \sum_{\langle ij \rangle}^{(2)} \sigma_i \sigma_j + \dots \quad (59)$$

Здесь мы явно указали на зависимость гамильтониана от констант связи, которые собраны в вектор  $\vec{J} = (J_0, J_1, J_2, J_3, \dots)$ . Сумма  $\sum_{\langle ij \rangle}^{(1)}$  - это сумма по ближайшим соседям,  $\sum_{\langle ij \rangle}^{(2)}$  - сумма по вершинам, разделенным двумя

ребрами (через одного) и так далее. Статсумма

$$Z(\vec{J}, N) = \sum_{[\sigma]} e^{-H(\vec{J}, [\sigma], N)} \quad (60)$$

Мы так переопределили константы связи, чтобы избавиться от множителя  $\beta$ .

Теперь мы вводим блочные переменные с блоком со стороной в  $r$  ячеек решетки, содержащим  $r^d$  вершин.  $\Sigma_I$  - блочные спины,  $\xi_i$  - переменные внутри блока. В таких переменных статсумма переписывается так:

$$Z(\vec{J}, N) = \sum_{[\Sigma][\sigma]} e^{-H(\vec{J}, [\Sigma], [\sigma], N)} \quad (61)$$

Если мы просуммируем по внутриблочным степеням свободы  $\xi$ , то получится перенормированный гамильтониан  $H'(\vec{J}, [\Sigma], Nr^{-d})$ .

$$e^{-H'(\vec{J}, [\Sigma], Nr^{-d})} = \sum_{[\xi]} e^{-H(\vec{J}, [\Sigma], [\xi], N)} \quad (62)$$

Вблизи критической точки можно предполагать что у  $H'$  такой же вид, как и у  $H$ , так как параметр порядка расходится и поведение определяется дальними корреляциями. Описания поведения системы в терминах  $H'$  и  $H$  эквивалентны, поэтому соответствующие выражения для статсуммы должны совпадать (с точностью до умножения на константу):

$$Z(\vec{J}, N) = \sum_{[\Sigma]} e^{-H'(\vec{J}, [\Sigma], Nr^{-d})} = Z(\vec{J}', Nr^{-d}) \quad (63)$$

Удельная свободная энергия отображается как  $f(\vec{J}) = r^{-d}f(\vec{J}')$ .

Отображение констант связи  $\vec{J} \rightarrow \vec{J}'$  и порождает ренормгруппу. Будем его записывать как

$$\vec{J}' = T(\vec{J}) \quad (64)$$

Последовательное применение таких преобразований порождает в пространстве констант связи некоторый набор точек, который называется траекторией ренормгруппы.

На каждом шаге корреляционная длина уменьшается в  $r$  раз, поэтому траектория уводит систему из окрестности критической точки. Но в самой критической точке корреляционная длина бесконечна, поэтому эта точка неподвижна относительно действия ренормгруппы.

В общем случае критическое поведение наблюдается на некоторой критической поверхности в пространстве  $\vec{J}$ . Под действием ренормгруппы точки двигаются по ней. Стационарная точка

$$\vec{J}_c = T(\vec{J}_c) \quad (65)$$

называется фиксированной точной ренормгруппы.

Вообще говоря, преобразование  $T$  нелинейно, однако в окрестности фиксированной точки его можно линеаризовать. Вводим переменную  $\delta\vec{J} = \vec{J} - \vec{J}_c$  и раскладываем  $T$  в ряд Тейлора по  $\delta\vec{J}$ . Тогда

$$\delta\vec{J}' = A\delta\vec{J}, \quad (66)$$

где  $A$  - матрица,  $A_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial J_j}$ . Мы можем диагонализировать матрицу  $A$ , ее собственные значения мы обозначим через  $\lambda_i$ , собственные векторы через  $\vec{u}_i$ . Тогда для точки в пространстве констант связи мы можем написать (в окрестности критической точки):

$$\vec{J} = \vec{J}_c + \sum_i t_i \vec{u}_i \quad (67)$$

Переменные  $t_i$  под действием ренормгруппы преобразуются так:

$$t'_i = \lambda_i t_i = r^{y_i} t_i \quad (68)$$

Здесь мы ввели обозначение  $y_i$  для критических индексов. В примере из раздела 2.4 такими индексами были  $a$  и  $b$ . Для свободной энергии имеем

$$f(t_1, t_2, \dots) = r^{-d} f(r^{y_1} t_1, r^{y_2} t_2, \dots) \quad (69)$$

Таким образом, критические индексы получаются из собственных значений линеаризованной ренормгруппы в фиксированной точке.

Если часть собственных значений  $\lambda_i$  положительна, а часть - отрицательная, то фиксированная точка называется гиперболической. Критической поверхностью называются такие точки  $\vec{J}$ , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\vec{J}) = \vec{J}_c \quad (70)$$

Около точки  $\vec{J}_c$  она представляет собой векторное пространство, натянутое на те векторы  $\vec{u}_i$ , для которых соответствующие собственные значения  $\lambda_i < 1$ .

Параметры  $t_i$ , которые соответствуют  $\lambda_i > 1$  называются релевантными, так как они растут под действием ренормгруппы. Параметры с  $y_i < 0$  ( $\lambda_i < 1$ ) — иррелевантные, с  $y_i = 0$  — маргинальные.

Существование критической поверхности объясняет универсальность критических индексов в разных моделях. Статистические системы разбиваются на классы универсальности, члены которых имеют одинаковое критическое поведение. Это так, если разные системы живут на подмногообразиях в пространстве констант связи, которые пересекают одну и ту же критическую поверхность. Тогда критическая точка у них общая.



### 3.2 Ренормгруппа в непрерывных моделях

В непрерывных моделях перенормировка осуществляется в импульсном пространстве. Рассмотрим скалярное поле  $\varphi(\vec{x})$ , где  $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ . Проведем преобразование Фурье

$$\varphi(\vec{x}) = \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (71)$$

Функционал действия может быть переписан в виде, зависящем только от  $\tilde{\varphi}$ :  $S[\varphi] \rightarrow S[\tilde{\varphi}]$ . Например, для модели  $\varphi^4$  (16) получается

$$\begin{aligned} S[\varphi, r, u] = & \int \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{2} \tilde{\varphi}(-\vec{k}) \tilde{\varphi}(\vec{k}) (\vec{k}^2 + r) + \\ & \frac{1}{4} u \int \frac{d^d \vec{k}_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d \vec{k}_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d \vec{k}_3}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}(-\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{k}_3) \tilde{\varphi}(\vec{k}_1) \tilde{\varphi}(\vec{k}_2) \tilde{\varphi}(\vec{k}_3). \end{aligned} \quad (72)$$

В общем случае функционал действия зависит от поля  $\varphi$  и параметров  $u_i$  в плотности Лагранжиана (констант связи).

Квантовая теория поля всегда содержит расходящиеся интегралы, поэтому нужна регуляризация. Будем считать, что в качестве такой регуляризации используется обрезание по импульсам  $|\vec{k}| < \Lambda$ . После преобразования Фурье мера в функциональном интеграле переписывается как

$$[d\varphi]_\Lambda = \prod_x d\varphi(x) = \prod_{|\vec{k}| < \Lambda} d\tilde{\varphi}(\vec{k}) \quad (73)$$

Теперь опишем перенормировку Вильсона-Каданова. Она проводится в два этапа. Сначала мы интегрируем по  $\tilde{\varphi}(\vec{k}) : \Lambda/s < |\vec{k}| < \Lambda$ . То есть мы исключаем быстрые моды, так как критическое поведение описывается медленными модами.  $s$ -масштабный фактор. В результате мы получаем новое обрезание  $\Lambda/s$  и действие  $S'[\varphi, \{u_i\}]$ .

$$e^{-S'[\varphi, \{u_i\}]} = \int \prod_{\Lambda/s < |\vec{k}| < \Lambda} d\varphi(\vec{k}) e^{-S[\varphi, \{u_i\}]} \quad (74)$$

Пока нас интересуют только медленные моды, действие  $S'$  эквивалентно  $S$ . Вторым шагом осуществим масштабное преобразование

$$\vec{k} \rightarrow \vec{k}' = s\vec{k} \quad (75)$$

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = \vec{x}/s \quad (76)$$

При этом поле преобразуется так:

$$\varphi(\vec{x}) \rightarrow \varphi'(\vec{x}/s) = s^\Delta \varphi(\vec{x}) \quad (77)$$

$$\tilde{\varphi}'(s\vec{k}) = s^{\Delta-d} \tilde{\varphi}(\vec{k}) \quad (78)$$

Здесь  $\Delta$ -скейлинговая размерность поля  $\varphi$ , она связана с индексом  $\eta$ :  $\Delta = \eta/2$ . Мера в функциональном интеграле при масштабном преобразовании умножится на константу. Теперь можно сравнить  $S'$  и  $S$ , так как масштаб обрезания и там и там равен  $\Lambda$  и те же степени свободы. Эти два действия описывают одинаковое поведение на больших расстояниях. Поэтому вид действия  $S'$  должен быть тот же, что и у  $S$ , но с другими константами связи  $u'_i$ .

$$S'[\varphi, \{u_i\}] = S[\varphi, \{u'_i\}] \quad (79)$$

Последовательным действием таких преобразований мы получаем кривую  $u_i(s)$  в пространстве параметров лагранжиана. Мы можем записать уравнение этой кривой как

$$\frac{du_i}{d(\ln s)} = \beta_i(\{u_i\}) \quad (80)$$

$\beta_i$  называется  $\beta$ -функцией параметра  $u_i$ . Фиксированная точка  $u_j^*$ :

$$\beta_i(\{u_j^*\}) = 0 \quad (81)$$

Эта точка неподвижна относительно преобразований ренормгруппы. В фиксированной точке теория масштабно-инвариантна на квантовом уровне.

## 4 Лекция 4. Уравнение Каллана-Симанчика. Ренормгруппа в двух измерениях.

Вообще говоря, квантовая теория поля может быть не масштабно-инвариантна из-за наличия размерных параметров на классическом уровне или возникающих при перенормировке. Действие

$$S = \int d^d x \mathcal{L} \quad (82)$$

зависит от полей  $\varphi$  и констант связи  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ . Рассмотрим инфинитезимальное масштабное преобразование  $\lambda = 1 + \omega$ . При этом вариация  $x_\nu$  будет  $\delta_\omega x_\nu = \omega x_\nu$ . Такое преобразование, в соответствии с предыдущей лекцией, можно рассматривать как преобразование констант связи

$\vec{u} \rightarrow \vec{u}'$ . При наличии масштабной инвариантности  $\vec{u} = \vec{u}'$ . При инфинитезимальных преобразованиях  $x \rightarrow x + dl x$  вариация плотности лагранжиана дается Нётеровским током:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu J^\mu dl \quad (83)$$

$$J^\mu = x_\nu T^{\mu\nu} \quad (84)$$

Здесь  $T^{\mu\nu}$  - тензор энергии-импульса. Через  $\Theta$  мы обозначим след тензора энергии-импульса  $\Theta = \partial_\mu J^\mu = T^\mu_\mu$ . Он задает вариацию действия

$$\delta S = dl \int d^d x \Theta(x) \quad (85)$$

Если теория масштабно-инвариантна, то  $\partial_\mu J^\mu = T^\mu_\mu = \Theta = 0$ . В масштабно-инвариантной теории тензор энергии-импульса бесследовый.

В классической теории вид преобразований полей при масштабных преобразованиях легко получаются из анализа размерностей. Напомним, что достаточно иметь одну единицу измерения - длины (или обратной длины). Если теория масштабно-инвариантна, то действие должно быть безразмерным. Канонические (классические) размерности полей легко определить из требования безразмерности слагаемых в функционале действия, если ввести соглашение, определяющее размерность координат или импульсов.

Будем обозначать каноническую размерность произвольно величины  $F$  через  $d[F]$ . Положим  $d[p] = -d[x] = 1$ . Тогда  $d[d^d x] = -d$ ,  $d[\partial] = 1$ . Теперь легко найти размерности полей. Например, для модели  $\varphi^4$

$$S[\varphi] = \int d^d x \left( -\frac{(\partial\varphi)^2}{2} - \frac{\mu\varphi^2}{2} - \frac{u\varphi^4}{24} + h\varphi \right), \quad (86)$$

рассмотрим первое слагаемое. Оно должно быть безразмерным. При этом его размерность  $d[\int d^d x (\partial\varphi)^2] = 2d[\varphi] + 2 - d = 0$ . Отсюда  $d[\varphi] = d/2 - 1$ . Для общего действия

$$S[\varphi] = - \int d^d x \left( \frac{(\partial\varphi)^2}{2} + \sum_n u_n \frac{\varphi^n}{n!} \right) \quad (87)$$

размерности констант связи следующие:

$$d[h = -u_1] = d/2 + 1, \quad d[\mu = u_2] = 2, \quad d[g_4] = 4 - d, \quad d[g_6] = 6 - 2d, \quad d[g_n] = n - \frac{d(n-2)}{2} \quad (88)$$

При масштабных преобразованиях поля и константы связи ведут себя так:

$$\varphi'(x) = s^{-d[\varphi]}\varphi(x/s), \quad u'_i = s^{-d[u_i]}u_i \quad (89)$$

Напомним, что

$$\beta_i(\vec{u}) = \frac{du_i}{d \ln s} \quad (90)$$

Параметр ренормгруппы  $s$  связан с параметром масштабного преобразования  $l$  соотношением  $l = \ln s$ , при этом

$$\beta_i(\vec{u}) = \frac{du_i}{dl} \quad (91)$$

Если в точке  $u$   $\beta_i(\vec{u}) > 0$ , то  $u_i(l)$  растет,  $\beta_i(\vec{u}) < 0$  - убывает. В фиксированной точке  $u^*$   $\beta_i(\vec{u}^*) = 0$ . Пространство действий делится фиксированной точкой на регионы. Константы связи “заперты” в одном из этих регионов. Фиксированная точка может достигаться при  $l \rightarrow \pm\infty$ . Если  $u(l) \rightarrow u^*$  при  $l \rightarrow +\infty$ , то такая точка называется инфракрасной, если  $u(l) \rightarrow u^*$  при  $l \rightarrow -\infty$ , то ультрафиолетовой. Введем функции  $\Phi_i$ :

$$\Phi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \quad (92)$$

Вариация  $\delta \mathcal{L}$  дается их линейной комбинацией.

$$\Theta(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dl} = \sum_i \beta_i(\vec{u}) \Phi_i(\vec{u}) \quad (93)$$

$\Theta = 0$  тогда и только тогда, когда  $\beta_i(\vec{u}) = 0$ , значит в фиксированной точке ренормгруппы есть масштабная инвариантность.

Рассмотрим  $N$ -точечную корреляционную функцию — среднее значение некоторого  $N$ -точечного локального оператора

$$\langle X \rangle = \langle A_1(x_1) \dots A_N(x_N) \rangle \quad (94)$$

Мы хотим получить уравнение для его преобразования под действием ренормгруппы. Такое уравнение называется уравнением Каллана-Симанчика.

Вариация корреляционных функций при масштабных преобразованиях может описываться двумя способами.

Во-первых, мы можем вычислить вариацию всех полей:

$$\begin{aligned} \delta \langle X \rangle &= \delta \langle A_1(x_1) \dots A_N(x_N) \rangle = \delta \int \mathcal{D}\varphi A_1 \dots A_N e^{-S[\varphi]} = \\ &= \delta \int \mathcal{D}\varphi \left( \sum_k A_1 \dots \delta A_k \dots A_N e^{-S[\varphi]} - A_1 \dots A_N e^{-S[\varphi]} \delta S \right) \end{aligned} \quad (95)$$

Вариация  $A_k$  дается глобальной дилатацией координат и внутренней вариацией поля в соответствии с его канонической размерностью:

$$\delta A_k = dl(x_k^\mu \partial_\mu^k + d[A_k])A_k \quad (96)$$

Вариация действия определяется следом тензора энергии-импульса (85). Поэтому

$$\delta \langle X \rangle = dl \left( \sum_k (x_k^\mu \partial_\mu^k + d[A_k]) \langle X \rangle - \int d^d y \Theta(y) \right) \quad (97)$$

Другой способ вычисления состоит в вариации полей и действия по константам связи  $u_i$ :

$$\delta \langle X \rangle = dl \sum_i \beta_i(\vec{u}) \frac{\partial}{\partial u_i} \langle X \rangle, \quad (98)$$

но

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \langle X \rangle = \sum_k \langle A_1 \dots \frac{\partial A_k}{\partial u_i} \dots A_N \rangle - \int d^d y \langle X \Phi_i(y) \rangle. \quad (99)$$

Отсюда

$$\delta \langle X \rangle = dl \sum_i \sum_k \langle A_1 \dots \frac{\partial A_k}{\partial u_i} \dots A_N \rangle - \int d^d y \langle X \Theta(y) \rangle \quad (100)$$

Сравнивая это уравнение с (97) получаем уравнение Каллана-Симанчика:

$$\left[ \sum_k \left( x_k^\mu \frac{\partial}{\partial x_k^\mu} + \Gamma_k(\vec{u}) \right) - \sum_i \beta_i(\vec{u}) \frac{\partial}{\partial u_i} \right] \langle X \rangle = 0, \quad (101)$$

где  $\Gamma_k$  - аномальная размерность поля  $A_k(x_k)$ , определяющаяся выражением

$$\Gamma_k A_k(x_k) = \left( d[A_k] + \sum_i \beta_i(\vec{u}) \frac{\partial}{\partial u_i} \right) A_k(x_k). \quad (102)$$

В частности, для следа тензора энергии-импульса  $\Gamma\Theta = 2\Theta$ , то есть аномальная размерность равна классической. Это верно и для других компонент тензора энергии-импульса в силу Лоренц-инвариантности.

Ренормгрупповой анализ квантовой теории поля в двух измерениях дает следующий результат, известный как *s*-теорема Замолотчикова [17].

**Theorem 1.** *Для любой унитарной квантовой теории поля в двух измерениях существует функция  $s(\vec{u})$  такая, что*

- $c(\vec{u})$  убывает, как функция параметра ренормгруппы

$$\frac{dc}{dl} \leq 0 \quad (103)$$

- $c(\vec{u})$  стационарна в фиксированной точке  $\vec{u}^*$  ренормгруппы, то есть

$$\frac{dc(\vec{u}^*)}{dl} = 0 \Leftrightarrow \beta_i(\vec{u}^*) = 0 \quad (104)$$

- 2-точечные корреляторы в фиксированной точке полностью определяются значением  $c = c(\vec{u}^*)$ . Если ввести комплексные координаты  $z = x_1 + ix_2$ ,  $\bar{z} = x_1 - ix_2$  и обозначить компоненты тензора энергии импульса через  $T = T_{zz}$ ,  $\bar{T} = T_{\bar{z}\bar{z}}$ ,  $\Theta = T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = T_{\mu\mu} = 0$ , то для корреляторов верно следующее выражение

$$\langle T(z, \bar{z}) T(0, 0) \rangle = \frac{c/2}{z^4} \quad (105)$$

$$\langle \bar{T}(z, \bar{z}) \bar{T}(0, 0) \rangle = \frac{c/2}{\bar{z}^4} \quad (106)$$

$$\langle T(z, \bar{z}) \bar{T}(0, 0) \rangle = 0 \quad (107)$$

Число  $c = \lim_{\vec{u} \rightarrow \vec{u}^*} c(\vec{u})$  называется центральным зарядом.

Для унитарных теорий из этой теоремы следует, что  $c_{UV} \geq c_{IR}$ .

В фиксированной точке ренормгруппы имеет место масштабная инвариантность. Вместе с трансляционной и лоренц-инвариантностью она порождает конформную инвариантность, то есть инвариантность относительно преобразований, сохраняющих углы.

## 5 Лекция 5. Двумерная модель Изинга

Вернемся на некоторое время к модели Изинга в двух измерениях (6). Точного решения для модели с внешним полем до сих пор не найдено. Решение же для  $h = 0$  впервые было получено Онзагером в 1944 году. В этой и следующей лекциях излагается решение Вдовиченко, как наиболее короткое и простое. Изложение взято из книги [2]. Энергия системы в отсутствие внешнего поля дается выражением

$$E[\sigma] = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j. \quad (108)$$

Введем обозначение

$$K = J/T. \quad (109)$$

Статсумма имеет вид

$$Z = \sum_{[\sigma]} e^{K \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j} \quad (110)$$

Будем считать, что в наша решетка  $\mathcal{L}$  состоит из  $N = mn$  узлов. Обозначим через  $M$  число пар  $\langle i, j \rangle$ .  $M = 2N - n - m$ . Для простоты будем накладывать тороидальные граничные условия. Тогда  $M = 2N$ . Введем *дуальную решетку*  $\mathcal{L}^*$ , вершинами которой будут центры граней исходной решетки. Нам удобно будет использовать действие в следующем виде:

$$Z = \sum_{[\sigma]} e^{K \sum_{\langle i,j \rangle} (\sigma_i \sigma_j - 1)} = e^{KM} \sum_{[\sigma]} e^{K \sum_{\langle i,j \rangle} (\sigma_i \sigma_j - 1)}. \quad (111)$$

## 5.1 Низкотемпературное и высокотемпературное разложение

Обозначим выражения, входящие в сумму в последнем уравнении, через  $X[\sigma]$ :

$$X[\sigma] = e^{K \sum_{\langle i,j \rangle} (\sigma_i \sigma_j - 1)}. \quad (112)$$

Заметим, что все состояния можно упорядочить следующим образом:

- Основное состояние, все спины направлены в одну сторону,  $X[\sigma] = 1$
- Все спины в одну сторону, один в противоположную. Такому состоянию можно сопоставить контур на дуальной решетке вокруг этого спина. Тогда каждая сторона контура даст вклад  $e^{-2K}$  в  $X[\sigma]$ .

$$X[\sigma] = (e^{-2K})^4 \quad (113)$$

- Два спина направлены в противоположную сторону, здесь есть два варианта контура на дуальной решетке - если спины рядом, то его длина равна шести, если не рядом - то восьми. То есть вклады  $(e^{-2K})^6$  и  $(e^{-2K})^8$ .
- И так далее.

В итоге мы можем записать все вклады  $X[\sigma]$  в виде суммы по всевозможным замкнутым контурам на дуальной решетке. Если ввести обозначение

$$\kappa = e^{-2K}, \quad (114)$$

то

$$X[\sigma] = \kappa^{l[c]}. \quad (115)$$

Здесь  $l[c]$  — длина контура  $c$  на дуальной решетке, соответствующего состоянию  $\sigma$ . Тогда для  $Z$  получаем

$$Z = e^{MK} \sum_c \kappa^{l[c]}. \quad (116)$$

Такое выражение называется низкотемпературным разложением, так как оно хорошо сходится при малых температурах ( $K \gg 1$ ).

Чтобы получить высокотемпературное разложение, воспользуемся тем, что  $e^{K\sigma_i\sigma_j} = \text{ch } K + \sigma_i\sigma_j \text{sh } K = \text{ch } K (1 + \sigma_i\sigma_j \text{th } K)$ . Тогда статсумма записывается в виде

$$Z = (\text{ch } K)^M \sum_{[\sigma]} \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + \sigma_i\sigma_j \text{th } K) \quad (117)$$

Будем раскрывать скобки в произведении, сопоставляя каждому множителю  $\sigma_i\sigma_j \text{th } K$  ребро на решетке  $\mathcal{L}$ , соединяющее вершины  $i, j$ . Заметим, что вклад непрерывного пути, соединяющего вершины  $i$  и  $k$  пропорционален  $(\sigma_i\sigma_{i+1})(\sigma_{i+1}\sigma_{i+2})(\sigma_{i+2}\sigma_{i+3}) \dots (\sigma_{k-1}\sigma_k) = \sigma_i\sigma_k$ , где мы пронумеровали вершины вдоль пути. То есть вклад от незамкнутого пути дается его концами, а вклад от замкнутого контура всегда равен 1. Тогда произведение запишется в виде

$$\prod_{\langle i,j \rangle} (1 + \sigma_i\sigma_j \text{th } K) = 1 + a_1 \text{th } K + a_2 \text{th}^2 K + \dots, \quad (118)$$

где  $a_k$  дается суммой по всем контурам  $c$  (не обязательно замкнутым или односвязным) длины  $k$ . Чтобы вычислить статсумму, нам надо просуммировать такие выражения по всем возможным конфигурациям спинов. Заметим, что для любого незамкнутого контура и любой конфигурации найдется другая конфигурация, куда вклад этого контура входит с противоположным знаком (так как спины направлены в другую сторону). А вклад замкнутого контура равен  $\text{th}^{l[c]} K$  в любой конфигурации, то есть входит в статсумму  $2^N$  раз. В результате получаем высокотемпературное разложение статсуммы в виде суммы по всем замкнутым контурам на решетке  $\mathcal{L}$ :

$$Z = (\text{ch } K)^M 2^N \sum_c (\text{th } K)^{l[c]} = (\text{ch } K)^M 2^N \sum_c \kappa^{l[c]}. \quad (119)$$

Здесь мы ввели обозначение  $\kappa = \text{th } K$ . Это разложение хорошо сходится при  $K \ll 1$ .



## 5.2 Дуальность Крамерса-Ванье

У нас есть два точных разложения для статсуммы. Сравним их в термодинамическом пределе.

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Z_N}{N}. \quad (120)$$

Решетки  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}^*$  отличаются только на границе, поэтому в термодинамическом пределе  $M/N \rightarrow 2$  и выражения для удельной свободной энергии из высокотемпературного и низкотемпературного разложений должны совпадать. Если ввести функцию  $\Phi(\kappa) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln (\sum_c \kappa^{l[c]})$ , то свободная энергия запишется в высокотемпературном и низкотемпературном разложениях следующим образом:

$$-f(K) = 2K + \Phi(e^{-2K}) = \ln(2 \operatorname{ch}^2 K) + \Phi(\operatorname{th} K) \quad (121)$$

Это и есть соотношение дуальности *Крамерса-Ванье*. Если ввести  $K^*$  так, что  $\operatorname{th} K^* = e^{-2K}$  или  $\operatorname{sh} 2K^* \operatorname{sh} 2K = 1$ , то соотношение дуальности будет связывать теорию при температуре  $K$  и  $K^*$ :

$$f(K^*) = f(K) + 2K - \ln(2 \operatorname{ch}^2 K^*). \quad (122)$$

Рассмотрим теперь поведение теории в критической точке  $K_c$ . В ней свободная энергия  $f(K_c)$  не аналитична. Тогда  $f$  должна быть не аналитична и при  $K^* = K_c$ . Если предположить, что критическая точка единственна, то мы можем найти ее из требования  $K = K^*$ , то есть  $2K = \ln(2 \operatorname{ch}^2 K)$  или

$$\operatorname{sh}^2 2K_c = 1. \quad (123)$$

Теперь перейдем к точному решению модели Изинга.

## 6 Лекция 6. Решение Вдовиченко.

Суть состоит в сведении вычисления статсуммы в высокотемпературном разложении к решению некоторого рекуррентного соотношения. Это соотношение записывается в матричном виде и его решение дается следом матрицы, который можно вычислить после преобразования Фурье.

Заметим, что суммирование по замкнутым контурам обозначает, что в каждой вершине сходится четное число ребер. Поэтому мы можем перейти от суммирования по замкнутым контурам к суммированию по “траекториям чернильной точки” — замкнутым путям, состоящим из компонент, которые можно нарисовать, не отрывая ручку от бумаги. При этом в случае контура с самопересечениями существует несколько способов нарисовать его. Например, “восьмерку” можно представить как два

пути, путь без самопересечения и путь с самопересечением (Смотри рисунок 1). Поэтому такие вклады надо брать с множителем  $(-1)^{\nu(\Gamma)}$ , где

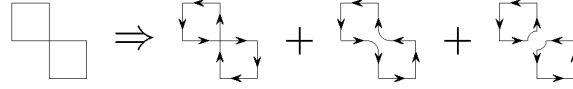


Рис. 1: Переход от контуров к замкнутым путям

$\nu(\Gamma)$  - число самопересечений пути  $\Gamma$ . Статсумма в высокотемпературном разложении (119) дается выражением

$$Z = (\text{ch } K)^M 2^N \sum_c \kappa^{l[c]}. \quad (124)$$

Обозначим сумму через  $\Sigma = \sum_c \kappa^{l[c]}$ . Перепишем её через сумму по путям

$$\Sigma = \sum_{\Gamma} (-1)^{\nu(\Gamma)} \kappa^{l[\Gamma]} \quad (125)$$

Воспользуемся следующим утверждением, доказательство которого оставляется в качестве упражнения. Для любой связной замкнутой петли на плоскости с  $\nu$  самопересечениями и полным углом поворота  $2\pi(n+1)$  (при ее обходе) верно равенство

$$(-1)^\nu = (-1)^n. \quad (126)$$

Сопоставим каждому узлу в пути  $\Gamma$  с углом поворота  $\varphi$  в нем  $(0, \pm\pi/2)$  множитель  $e^{\frac{i\varphi}{2}}$ . Тогда после обхода петли полный множитель будет равен  $(-1)^{\nu+1}$ . Для несвязного пути, состоящего из  $s$  компонент —  $(-1)^{m+s}$ , где  $m = \sum \nu$ . То есть если ввести для пути  $\Gamma$  общий множитель  $s(\Gamma)$ , то  $\Sigma$  можно переписать в виде

$$\Sigma = \sum_{\Gamma} (-1)^{s(\Gamma)} \prod_{j \in \Gamma} e^{\frac{i\varphi_j}{2}} \kappa^{l[\Gamma]} \quad (127)$$

Обозначим через  $F_l^{(1)}$  сумму по всем однокомпонентным петлям длины  $l$ , через  $F_l^{(2)}$  — двухкомпонентным и так далее.

$$F_l^{(1)} = \sum_{\Gamma: l[\Gamma]=l} \prod_{j \in \Gamma} e^{\frac{i\varphi_j}{2}}. \quad (128)$$

Тогда  $F_l^{(2)}$  можно вычислить через  $F^{(1)}$ :

$$F_l^{(2)} = \frac{1}{2!} \sum_{l_1, l_2: l_1+l_2=l} F_{l_1}^{(1)} F_{l_2}^{(1)} \quad (129)$$

Аналогично

$$F_l^{(s)} = \frac{1}{s!} \sum_{l_1, \dots, l_s: l_1 + \dots + l_s = l} F_{l_1}^{(1)} \dots F_{l_s}^{(1)} \quad (130)$$

Теперь мы можем выразить  $\Sigma$  через  $F^{(1)}$ :

$$\Sigma = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{l_1, \dots, l_s=1}^{\infty} \kappa^{l_1 + \dots + l_s} F_{l_1}^{(1)} \dots F_{l_s}^{(1)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left( \sum_{l=1}^{\infty} \kappa^l F_l^{(1)} \right)^s = \exp \left( - \sum_{l=1}^{\infty} \kappa^l F_l \right) \quad (131)$$

Петли с числом узлов больше  $N$  не дают вклада, так как содержат повторяющиеся ребра и поэтому сократятся (Смотри рисунок 2). Наша задача

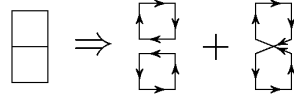


Рис. 2: Сокращение путей с повторяющимися ребрами

свелась к вычислению  $F_l$ . Рассмотрим произвольную вершину с координатами  $(n, m)$ . Пронумеруем направления выхода из нее индексом  $\nu = 1, 2, 3, 4$  против часовой стрелки. Обозначим через  $W_l(n, m, \nu | n_0, m_0, \nu_0)$  сумму по всем путям длины  $l$ , соединяющим вершины  $(n_0, m_0)$  и  $(n, m)$ . Первый шаг пути в направлении  $\nu_0$ . Учитываются множители  $e^{\frac{i\nu}{2}}$  начиная с узла, следующего за  $(n_0, m_0)$  и заканчивая узлом  $(n, m)$ . Последний шаг пути не должен быть в направлении, противоположном  $\nu$ . Тогда  $F_l$  можно записать как сумму  $W_l(n, m, \nu | n, m, \nu)$  по всем вершинам решетки. Каждая петля при этом будет учтена  $2l$  раз, так как у нее  $l$  возможных вершин начала и два возможных направления.

$$F_l = \frac{1}{2l} \sum_{(n, m) \in \mathcal{L}} \sum_{\nu=1,2,3,4} W_l(n, m, \nu | n, m, \nu) \quad (132)$$

Если мы зафиксируем начальную вершину путей  $(n_0, m_0, \nu_0)$ , то сумму по путям длины  $l + 1$  можно выразить через сумму по путям длины  $l$ . В вершину  $(n, m, 1)$  пути могут входить с направлений 2, 3, 4, то есть последний шаг может быть из вершины  $(n - 1, m)$  в направлении 1, из вершины  $(n, m - 1)$  в направлении 2 и из вершины  $(n, m - 1)$  в направлении 4. Аналогично для других направлений. Тогда

$$\begin{aligned} W_{l+1}(n, m, 1) &= W_l(n - 1, m, 1) + e^{-i\pi/4} W_l(n, m - 1, 2) + e^{i\pi/4} W_l(n, m - 1, 4) \\ W_{l+1}(n, m, 2) &= e^{i\pi/4} W_l(n - 1, m, 1) + W_l(n, m - 1, 2) + e^{i\pi/4} W_l(n + 1, m, 3) \\ W_{l+1}(n, m, 3) &= e^{i\pi/4} W_l(n, m - 1, 2) + W_l(n + 1, m, 3) + e^{-i\pi/4} W_l(n, m + 1, 4) \\ W_{l+1}(n, m, 4) &= e^{-i\pi/4} W_l(n - 1, m, 1) + e^{i\pi/4} W_l(n + 1, m, 3) + W_l(n, m + 1, 4) \end{aligned} \quad (133)$$

Эти рекуррентные соотношения можно переписать в матричном виде, если ввести матрицу коэффициентов  $\Lambda$ :

$$W_{l+1}(n, m, \nu) = \sum_{p, q, \mu} \Lambda(n, m, \nu | t, u, \mu) W_l(t, u, \mu) \quad (134)$$

Если вершины  $(t, u)$  и  $(n, m)$  не являются соседними, то  $\Lambda(n, m, \nu | p, q, \mu) = 0$ . Матрица  $\Lambda$  не зависит от начала пути.  $W_{l+1} = \Lambda W_l$ , поэтому мы  $F_l$  даётся следом  $l$ -той степени  $\Lambda$ :

$$F_l = \frac{1}{2l} \text{Tr} W_l = \frac{1}{2l} \text{Tr} \Lambda^l W_0 \quad (135)$$

Но матрица  $W_0 = I$  (единичной матрице), поэтому

$$F_l = \frac{1}{2l} \text{Tr} \Lambda^l = \frac{1}{2l} \sum_k (\lambda_k)^l, \quad (136)$$

где  $\lambda_k$  - собственные значения матрицы  $\Lambda$ . Подставим выражение (136) в формулу (131):

$$\begin{aligned} \Sigma &= \exp \left( - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\kappa^l}{2l} \text{Tr} \Lambda^l \right) = \exp \left( - \frac{1}{2} \sum_k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\kappa \lambda_k)^l}{l} \right) = \\ &= \exp \left( \frac{1}{2} \sum_k \ln(1 - \kappa \lambda_k) \right) = \prod_k (1 - \kappa \lambda_k)^{1/2} = (\det(I - \kappa \Lambda))^{1/2} \end{aligned} \quad (137)$$

Чтобы вычислить детерминант сделаем дискретное преобразование Фурье:

$$W_l(n, m, \nu) = \sum_{p_1, p_2} \tilde{W}_l(p_1, p_2, \nu) e^{\frac{2\pi i(p_1 n + p_2 m)}{\sqrt{N}}} \quad (138)$$

В импульсном представлении матрица  $\Lambda$  будет иметь блочно-диагональный вид

$$\Lambda(p_1, p_2, \mu | q_1, q_2, \nu) = \delta_{p, q} \Lambda_p(\mu, \nu), \quad (139)$$

где

$$\Lambda_p(\mu, \nu) = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i p_1}{\sqrt{N}}} & e^{\frac{2\pi i p_2}{\sqrt{N}}} e^{-\frac{i\pi}{4}} & 0 & e^{\frac{2\pi i p_2}{\sqrt{N}}} e^{\frac{i\pi}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i p_1}{\sqrt{N}}} e^{\frac{i\pi}{4}} & e^{\frac{2\pi i p_2}{\sqrt{N}}} & e^{-\frac{2\pi i p_1}{\sqrt{N}}} e^{-\frac{i\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i p_2}{\sqrt{N}}} e^{\frac{i\pi}{4}} & e^{-\frac{2\pi i p_1}{\sqrt{N}}} & e^{-\frac{2\pi i p_2}{\sqrt{N}}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i p_1}{\sqrt{N}}} e^{-\frac{i\pi}{4}} & 0 & e^{\frac{2\pi i p_1}{\sqrt{N}}} e^{\frac{i\pi}{4}} & e^{-\frac{2\pi i p_2}{\sqrt{N}}} \end{pmatrix} \quad (140)$$

Матрица  $I - \kappa \Lambda$  тоже имеет блочный вид с блоками

$$\begin{pmatrix} 1 - \kappa e^{\frac{2\pi i p_1}{\sqrt{N}}} & e^{\frac{2\pi i p_2}{\sqrt{N}}} e^{-\frac{i\pi}{4}} & 0 & e^{\frac{2\pi i p_2}{\sqrt{N}}} e^{\frac{i\pi}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i p_1}{\sqrt{N}}} e^{\frac{i\pi}{4}} & 1 - \kappa e^{\frac{2\pi i p_2}{\sqrt{N}}} & e^{-\frac{2\pi i p_1}{\sqrt{N}}} e^{-\frac{i\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i p_2}{\sqrt{N}}} e^{\frac{i\pi}{4}} & 1 - \kappa e^{-\frac{2\pi i p_1}{\sqrt{N}}} & e^{-\frac{2\pi i p_2}{\sqrt{N}}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \\ e^{\frac{2\pi i p_1}{\sqrt{N}}} e^{-\frac{i\pi}{4}} & 0 & e^{\frac{2\pi i p_1}{\sqrt{N}}} e^{\frac{i\pi}{4}} & 1 - \kappa e^{-\frac{2\pi i p_2}{\sqrt{N}}} \end{pmatrix}. \quad (141)$$

В результате вычисления детерминанта получаем

$$\Sigma = \prod_{p_1, p_2} D_p^{1/2} \quad (142)$$

$$D_p = (1 + \kappa^2)^2 - 2\kappa(1 - \kappa^2) \left( \cos \frac{2\pi p_1}{\sqrt{N}} + \cos \frac{2\pi p_2}{\sqrt{N}} \right) \quad (143)$$

В результате выражение для статсуммы имеет вид

$$Z_N = (2 \operatorname{ch}^2 K)^N \prod_{p_1, p_2} D_p^{1/2}. \quad (144)$$

Исследуем критическое поведение. Вычислим для этого удельную свободную энергию:

$$f = -T \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Z_N}{N} = -T \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \ln(2 \operatorname{ch}^2 K) + \frac{1}{2N} \sum_p \ln D_p \right) \quad (145)$$

В термодинамическом пределе  $N \rightarrow \infty$  значения импульса покрывают всю ось, поэтому сумма переходит в интеграл. Мы сделаем замену переменных

$$w_1 = \frac{2\pi p_1}{\sqrt{N}} \quad w_2 = \frac{2\pi p_2}{\sqrt{N}}, \quad w_{1,2} \in [0; 2\pi] \quad (146)$$

$$dp_1 dp_2 = \frac{N}{(2\pi)^2} dw_1 dw_2 \quad (147)$$

Вспомним, что  $\kappa = \operatorname{th} K$ , поэтому

$$-\ln(2 \operatorname{ch}^2 K) = \ln \left( \frac{1 - \kappa^2}{2} \right) \quad (148)$$

Нам будет удобно переписать  $D_p$  в виде

$$D_p = (\kappa^2 + 2\kappa - 1)^2 + 4\kappa(1 - \kappa^2) \left( \sin^2 \frac{w_1}{2} + \sin^2 \frac{w_2}{2} \right) \quad (149)$$

Тогда свободная энергия дается интегралом

$$f = T \ln \left( \frac{1 - \kappa^2}{2} \right) - \frac{T}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left( (\kappa^2 + 2\kappa - 1)^2 + 4\kappa(1 - \kappa^2) \left( \sin^2 \frac{w_1}{2} + \sin^2 \frac{w_2}{2} \right) \right) dw_1 dw_2 \quad (150)$$

В критической точке должна быть расходимость. Интеграл может иметь особую точку только при  $(\kappa^2 + 2\kappa - 1)^2 + 4\kappa(1 - \kappa^2) \left( \sin^2 \frac{w_1}{2} + \sin^2 \frac{w_2}{2} \right) = 0$ . Это выражение имеет минимум при  $w_1 = w_2 = 0$ . Тогда при  $\kappa^2 + 2\kappa - 1 = 0$  интеграл расходится, что соответствует критической точке.

$$\kappa_c = \sqrt{2} - 1 \quad (151)$$

В критической точке основной вклад в интеграл дает окрестность  $w_1 = w_2 = 0$ , введем

$$\epsilon = \kappa - \kappa_c \quad (152)$$

Тогда около критической точки свободная энергия ведет себя как

$$f = g(\epsilon) - \frac{T}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln (c\epsilon^2 + A(\epsilon)(w_1^2 + w_2^2)) dw_1 dw_2. \quad (153)$$

Здесь  $g(\epsilon)$ ,  $A(\epsilon)$  - регулярные функции. Если взять интеграл, то

$$f \approx g_1(\epsilon) + c\epsilon^2 \ln(\epsilon) \quad (154)$$

Тогда для теплоемкости имеем

$$c \propto \ln |T - T_c| \quad (155)$$

То есть мы подтвердили, что критический индекс  $\alpha = 0$  (см. таблицу 2.2). Вычисление других критических индексов также возможно, но сопряжено с техническими трудностями. Мы не будем его проделывать, так как в следующих лекциях мы легко сможем вычислить корреляторы из конформной теории поля.

## 7 Лекция 7. Конформная группа.

Построение Каданова-Вильсона (см. лекцию 2.4) обосновало нам масштабную инвариантность модели Изинга. Сейчас мы обсудим, какие ограничения накладывает на теорию конформная инвариантность, а затем

покажем, что в двух измерениях она следует из масштабной, трансляционной и вращательной инвариантностей.

Сперва рассмотрим конформную группу в произвольном числе измерений  $d$ . Метрический тензор обозначим через  $g_{\mu\nu}$ ,  $\mu, \nu = 1, \dots, d$ . Конформными называются преобразования  $x \rightarrow x'$ , сохраняющие метрический тензор с точностью до масштаба:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (156)$$

Заметим, что группа Пуанкаре является подгруппой конформной группы с  $\Lambda(x) = 1$ , а также что конформные преобразования сохраняют углы.

Рассмотрим инфинитезимальные преобразования

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu. \quad (157)$$

Метрический тензор преобразуется следующим образом:

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta} = (\delta_\mu^\alpha - \partial_\mu \epsilon^\alpha)(\delta_\nu^\beta - \partial_\nu \epsilon^\beta) g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} - (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) \quad (158)$$

Перепишем условие (156) в таком виде:

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x) - f(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (159)$$

Отсюда вытекает условие на вид преобразований:

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = f(x)g_{\mu\nu}(x). \quad (160)$$

Для простоты рассмотрим преобразования, действующие на плоскую метрику  $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$ , кроме того, с учетом приложений к статистической физике, будем работать в евклидовом пространстве, а не в пространстве Минковского. Так что  $\eta = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ ,  $\eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ . В этом случае условие (160) переписется в простом виде

$$f(x) = \frac{2}{d} \partial_\rho \epsilon^\rho. \quad (161)$$

Теперь подставим  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  в уравнение (160) и продифференцируем:

$$\partial_\rho \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\rho \partial_\nu \epsilon_\mu = \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f. \quad (162)$$

Переставим два раза значки и скомбинируем три уравнения в одно:

$$2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \eta_{\mu\rho} \partial_\nu f + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu f - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho f \quad (163)$$

Свернем это уравнение с  $\eta^{\mu\nu}$  и получим

$$2\partial^2\epsilon_\rho = (2-d)\partial_\rho f \quad (164)$$

Теперь продифференцируем его по  $x^\nu$  и поменяем значок  $\rho$  на  $\mu$ :

$$2\partial^2\partial_\nu\epsilon_\mu = (2-d)\partial_\mu\partial_\nu f \quad (165)$$

Сравним полученное равенство с результатом применения оператора  $\partial^2$  к уравнению (162):

$$\partial^2\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial^2\partial_\nu\epsilon_\mu = \eta_{\mu\nu}\partial^2 f \quad (166)$$

Из равенств (165), (166) следует, что

$$(2-d)\partial_\mu\partial_\nu f = \eta_{\mu\nu}\partial^2 f. \quad (167)$$

Свернув с  $\eta^{\mu\nu}$  получим

$$(d-1)\partial^2 f = 0. \quad (168)$$

Сразу можно отметить, что при  $d = 1$  любое гладкое преобразование будет конформным. Рассмотрим случай  $d \geq 3$ . Функция  $f(x)$  должна иметь вид

$$f(x) = A + B_\mu x^\mu. \quad (169)$$

Тогда из (161) получаем для  $\epsilon$

$$\epsilon_\mu = a_\mu + b_{\mu\nu}x^\nu + c_{\mu\nu\rho}x^\nu x^\rho, \quad c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu} \quad (170)$$

Так как равенства (160), (161), (163) должны выполняться для любых  $x^\mu$ , то мономы в  $\epsilon$  можно рассматривать независимо. На  $a_\mu$  не возникает никаких ограничений. Этот член соответствует трансляциям. Теперь подставляем линейный член в (160), (161) и получаем условие

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d}b_\lambda^\lambda\eta_{\mu\nu} \quad (171)$$

То есть  $b_{\mu\nu}$  можно записать в виде

$$b_{\mu\nu} = \alpha\eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu}, \quad m_{\mu\nu} = -m_{\nu\mu} \quad (172)$$

Первый член соответствует масштабному преобразованию, а второй - повороту. В результате подстановки квадратичного члена  $\epsilon$  в (161), (163) получаем следующее условие на  $c_{\mu\nu\rho}$ :

$$c_{\mu\nu\rho} = \eta_{\mu\rho}h_\nu + \eta_{\mu\nu}h_\rho - \eta_{\nu\rho}h_\mu, \quad h_\mu = \frac{1}{d}c_{\alpha\mu}^\alpha \quad (173)$$



Ему соответствует преобразование

$$x'^\mu = x^\mu + 2(x^\nu h_\nu)x^\mu - h^\mu x^\nu x_\nu \quad (174)$$

Такое преобразование называется специальным конформным преобразованием. Это преобразование можно естественно интерпретировать, если переписать в виде

$$\frac{x'^\mu}{x'^2} = \frac{x^\mu}{x^2} - h^\mu. \quad (175)$$

Видно, что специальное конформное преобразование — это инверсия, трансляция и обратная инверсия.

Соответствующие конечные конформные преобразования имеют вид

$$x'^\mu = x^\mu + a^\mu \quad \text{— трансляция} \quad (176)$$

$$x'^\mu = \alpha x^\mu \quad \text{— растяжение} \quad (177)$$

$$x'^\mu = m_\nu^\mu x^\nu \quad \text{— поворот} \quad (178)$$

$$x'^\mu = \frac{x^\mu - h^\mu x^2}{1 - 2h_\mu x^\mu + h^2 x^2} \quad \text{— специальное конформное преобразование} \quad (179)$$

Теперь выпишем вид генераторов конформных преобразований для скалярного поля. Напомним, что при произвольном конечном преобразовании скалярное поле преобразуется как

$$\Phi'(x') = F(\Phi(x)). \quad (180)$$

При соответствующем инфинитезимальном преобразовании

$$x'^\mu = x^\mu + \omega_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \quad (181)$$

скалярное поле преобразуется так:

$$\Phi'(x') = \Phi(x) + \omega_a \frac{\delta F}{\delta \omega_a}(x). \quad (182)$$

Генератор преобразования определяется следующим равенством:

$$\delta_\omega \Phi(x) = \Phi'(x) - \Phi(x) \equiv -i\omega_a G_a \Phi(x) \quad (183)$$

(здесь нет суммирования по  $a$ ). Из (182) получаем действие генератора на скалярное поле:

$$iG_a \Phi = \frac{\delta x^\mu}{\delta \omega_a} \partial_\mu \Phi - \frac{\delta F}{\delta \omega_a} \quad (184)$$

Если мы предположим, что поле  $\Phi$  такое поле, которое не меняется при конформных преобразованиях, то есть  $F(\Phi) = \Phi$ , то мы получим следующий вид для генераторов:

$$\text{трансляция} \quad P_\mu = -i\partial_\mu \quad (185)$$

$$\text{поворот} \quad L_{\mu\nu} = i(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) \quad (186)$$

$$\text{растяжение} \quad D = -ix^\mu\partial_\mu \quad (187)$$

$$\text{специальное конформное преобразование} \quad K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu\partial_\nu - x^2\partial_\mu) \quad (188)$$

Отсюда легко найти коммутационные соотношения алгебры конформных преобразований в случае  $d \geq 3$ :

$$[D, P_\mu] = iP_\mu \quad (189)$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu \quad (190)$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}) \quad (191)$$

$$[K_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu) \quad (192)$$

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}) \quad (193)$$

Остальные коммутаторы равны нулю. Чтобы понять, о какой алгебре идет речь, переопределим генераторы следующим образом. Введем генераторы  $J_{ab}$ ,  $a, b = -1, 0, \dots, d$ ,  $J_{ab} = -J_{ba}$ :

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} \quad (194)$$

$$J_{-1,0} = D \quad (195)$$

$$J_{-1,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu - K_\mu) \quad (196)$$

$$J_{0,\mu} = \frac{1}{2}(P_\mu + K_\mu) \quad (197)$$

Коммутационные соотношения для таких генераторов запишутся в виде

$$[J_{ab}, J_{cd}] = i(\eta_{ad}J_{bc} + \eta_{bc}J_{ad} - \eta_{ac}J_{bd} - \eta_{bd}J_{ac}), \quad (198)$$

где  $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ . Видно, что мы получили алгебру  $so(d+1, 1)$ . В случае пространства Минковского была бы  $so(d, 2)$ .

## 8 Лекция 8. Инварианты. Явный вид конформных преобразований полей в $d \geq 3$ .

Обсудим, какой вид могут иметь простейшие инварианты —  $N$ -точечные функции  $\Gamma(x_1, \dots, x_N)$ . В силу трансляционной инвариантности они мо-

гут зависеть только от модуля разности  $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$ . Масштабная инвариантность может сохраняться только отношениями

$$\frac{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}{|\vec{x}_k - \vec{x}_l|} \quad (199)$$

Но при специальных конформных преобразованиях

$$|\vec{x}'_i - \vec{x}'_j| = \frac{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}{(1 - 2(\vec{h}, \text{vec} x_i) + h^2 x_i^2)^{1/2} (1 - 2(\vec{h}, \vec{x}_j) + h^2 x_j^2)^{1/2}} \quad (200)$$

Поэтому не обойтись двумя или тремя точками и простейшие инварианты имеют вид

$$\frac{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| |\vec{x}_3 - \vec{x}_4|}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_3| |\vec{x}_2 - \vec{x}_4|} \quad (201)$$

$$\frac{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2| |\vec{x}_3 - \vec{x}_4|}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_3| |\vec{x}_1 - \vec{x}_4|} \quad (202)$$

Всего  $N(N-3)/2$  вариантов для  $N$  точек.

Покажем теперь, как преобразуются поля при конформных преобразованиях. Для этого используем метод индуцированных представлений, который можно легко объяснить на примере алгебры Пуанкаре. Сначала рассматриваем подалгебру, которая оставляет точку  $x = 0$  неподвижной. Это алгебра группы Лоренца или группы вращений в случае евклидова пространства. На поля в точке  $x = 0$  она действует своими матричными представлениями:

$$L_{\mu\nu} \Phi(0) = S_{\mu\nu} \Phi(0) \quad (203)$$

Затем мы пользуемся коммутационными соотношениями алгебры Пуанкаре и формулой Хаусдорфа

$$e^{-A} B e^A = B + [B, A] + \frac{1}{2!} [[B, A], A] + \frac{1}{3!} [[[B, A], A], A] + \dots \quad (204)$$

чтобы вычислить результат переноса в точку  $x$ :

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} \Phi(x) &= e^{ix^\rho P_\rho} L_{\mu\nu} e^{-ix^\rho P_\rho} \Phi(x) = \\ &= (S_{\mu\nu} - x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu) \Phi(x) = \\ &= i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \Phi(x) + S_{\mu\nu} \Phi(x) \end{aligned} \quad (205)$$

Для полной конформной группы подгруппа стабильности точки  $x = 0$  порождается поворотами, растяжениями и специальными конформными преобразованиями. Обозначим представление генераторов через

$S_{\mu\nu}, \tilde{\Delta}, k_\mu$  соответственно. Они порождают матричное представление усеченной алгебры с коммутационными соотношениями

$$[\tilde{\Delta}, S_{\mu\nu}] = 0 \quad (206)$$

$$[\tilde{\Delta}, k_\mu] = -ik_\mu \quad (207)$$

$$[k_\mu, k_\nu] = 0 \quad (208)$$

$$[k_\rho, S_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}k_\nu - \eta_{\rho\nu}k_\mu) \quad (209)$$

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}S_{\mu\rho}) \quad (210)$$

Трансляция генераторов дилатации и специальных конформных преобразований дается равенствами

$$e^{ix^\rho P_\rho} D e^{-ix^\rho P_\rho} = D + x^\nu P_\nu \quad (211)$$

$$e^{ix^\rho P_\rho} K_\mu e^{-ix^\rho P_\rho} = K_\mu + 2x_\mu D - 2x^\nu L_{\mu\nu} + 2x_\mu(x^\nu P_\nu) - x^{2P_\mu} \quad (212)$$

В результате действие этих генераторов на поле имеет вид

$$D\Phi(x) = (-ix^\nu \partial_\nu + \tilde{\Delta})\Phi(x) \quad (213)$$

$$K_\mu\Phi(x) = (k_\mu + 2x_\mu\tilde{\Delta} - x^\nu S_{\mu\nu} - 2ix_\mu x^\nu \partial_\nu + ix^2 \partial_\mu)\Phi(x) \quad (214)$$

## Список литературы

- [1] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal field theory*. Springer, 1997.
- [2] А. Белавин, А. Кулаков, and Р. Усманов, *Лекции по теоретической физике*. М.: МЦНМО, 2001.
- [3] А. Васильев, *Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике*. Изд-во Ленинградского унив., Ленинград, 1976.
- [4] S. Ma, *Современная теория критических явлений*. "Mir 1980.
- [5] S. Ma, *Modern theory of critical phenomena*. Westview Press, 2000.
- [6] А. Васильев, *Квантовополевая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике*. Изд-во Петербург. ин-та ядер. физики (ПНЯФ) СПб., 1998.
- [7] A. N. Vasilev, *The field theoretic renormalization group in critical behavior theory and stochastic dynamics*. Chapman and Hall, St. Petersburg, 1998.

- [8] F. Ravanini, “Finite size effects in integrable quantum field theories,” [arXiv:hep-th/0102148](#).
- [9] A. Belavin, A. Polyakov, and A. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” *Nuclear Physics* **241** (1984) 333–380.
- [10] A. Замолодчиков and A. Замолодчиков, “Конформная теория поля и критические явления в двумерных системах,” *ИТЭФ, ЦНИИатоминформ, М* **1990** (1989) .
- [11] A. Zamolodchikov, *Conformal field theory and critical phenomena in two-dimensional systems*. Harwood Academic Pub, 1989.
- [12] J. Campuzano, M. Foster, G. Jennings, R. Willis, and W. Unertl, “Au (110)(1× 2)-to-(1× 1) phase transition: a physical realization of the two-dimensional Ising model,” *Physical Review Letters* **54** (1985) no. 25, 2684–2687.
- [13] A. M. Polyakov, “Conformal symmetry of critical fluctuations,” *JETP Lett.* **12** (1970) 381–383.
- [14] S. Smirnov, “Conformal invariance in random cluster models. I. Holomorphic fermions in the Ising model,” (2007) , 0708.0039.
- [15] S. Smirnov, “Towards conformal invariance of 2D lattice models,” in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Madrid*, vol. 2, pp. 1421–1452. 2006.
- [16] S. Smirnov, “Critical percolation in the plane: Conformal invariance, Cardy’s formula, scaling limits,” *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences-Series I-Mathematics* **333** (2001) no. 3, 239–244.
- [17] A. Zamolodchikov, “‘Irreversibility’ of the Flux of the Renormalization Group in a 2-D Field Theory,” *JETP Lett* **43** (1986) no. 730-732, 9.