

# Recursive algorithms, branching coefficients affine algebras and applications

Vladimir Lyakhovsky \*

Theoretical Department, SPb State University,  
198904, Sankt-Petersburg, Russia  
e-mail:lyakh1507@nm.ru

Anton Nazarov †

Theoretical Department, SPb State University,  
198904, Sankt-Petersburg, Russia  
e-mail:antonnaz@gmail.com

7 июня 2010 г.

## Аннотация

Примерный текст доклада на семинаре кафедры ФВЭиЭЧ по работе “Recursive algorithms, branching coefficients and applications”.

## 1 Постановка задачи

Здравствуйте! Сегодня я хочу рассказать о работе “Рекуррентные алгоритмы, коэффициенты ветвления аффинных алгебр Ли и приложения”. В этой работе мы решали следующую задачу.

Даны две аффинные алгебры Ли  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ . Аффинные алгебры Ли — это особый класс бесконечномерных алгебр, которые строятся из конечномерных (полу)простых алгебр Ли, как центральные расширения алгебр петель. Более подробное определение будет дано позже. Неприводимое представление  $L_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$  аффинной алгебры  $\mathfrak{g}$  со старшим весом  $\mu$  может быть разложено на представления подалгебры  $\mathfrak{a}$ . Наша задача

---

\*Supported by RFFI grant N 09-01-00504 and the National Project RNP.2.1.1./1575

†Supported by the National Project RNP.2.1.1./1575

— придумать практический алгоритм вычисления коэффициентов этого разложения. Конечно же эта задача уже решалась, например, существует способ решения “в лоб”, требующий построения всех представлений и различные способы, которые работают для частных случаев, например, многое упрощается в физически интересном случае конформных вложений. Мы предлагаем общий метод, но иллюстрировать его будем как-раз физическими примерами конформных вложений.

Я начну с физической мотивации этой задачи в двумерной конформной теории поля, напомним некоторые факты из теории представлений аффинных алгебр Ли, кратко опишу предложенное нами решение проблемы и расскажу про физические примеры в нашей статье.

## 2 Физическая мотивация

### 2.1 Напоминание про двумерную конформную теорию поля

Конформное преобразование — это преобразование, меняющее только масштаб у метрического тензора:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x)g_{\mu\nu}(x) \quad (1)$$

Конформная теория поля — это теория поля, обладающая инвариантностью относительно этих преобразований.

В теории струн двумерная конформная теория поля описывает динамику на мировой поверхности, а в теории критических явлений — фазовые переходы в двумерных системах.

На двумерной мировой поверхности удобно ввести комплексные координаты  $z, \bar{z}$ . В двумерном случае существует бесконечное число локально-конформных преобразований. Это легко можно увидеть из условия конформности преобразований, так как в двумерном случае это условие эквивалентно уравнению Коши-Римана для голоморфных функций ( $\partial_{\bar{z}}w(z, \bar{z}) = 0$ ).

Таким образом локально-конформные преобразования находятся в однозначном соответствии с множеством всех аналитических функций  $w(z)$  на плоскости.

Глобальные конформные преобразования имеют вид  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ,  $ad-bc = 1$ .

Рассмотрим инфинитезимальные преобразования  $w(z) = z + \epsilon(z)$ ,  $\epsilon(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^{n+1}$ . Тогда для бесспинового поля  $\phi(z, \bar{z})$  верно следующее:  $\phi'(z', \bar{z}') =$

$\phi(z, \bar{z}), \delta\phi = -\epsilon(z)\partial\phi - \bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{\partial}\phi = \sum_n (c_n L_n \phi + \bar{c}_n \bar{L}_n \phi)$ , где  $L_n = -z^{n+1}\partial_z$ ,  $\bar{L}_n = -\bar{z}^{n+1}\bar{\partial}_{\bar{z}}$

Мы видим, что в классической теории алгебра конформных преобразований — это алгебра Витта, которая порождается генераторами  $\{L_n, n \in \mathbb{Z}\}$  — модами разложения оператора энергии-импульса  $T$ , с коммутационными соотношениями

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} \quad (2)$$

При квантовании возникает конформная аномалия, что соответствует центральному расширению алгебры (то есть появлению центрального заряда  $c$ ). В коммутационные соотношения надо добавить член  $\frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}$ . В результате получаем алгебру Вирасоро.

(Про тензор энергии-импульса:  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu \Rightarrow \delta S = \int d^2x T^{\mu\nu} \partial_\mu \epsilon_\nu = \frac{1}{2} \int d^2x T_\mu^\mu \partial_\rho \epsilon^\rho$  В двумерной конформной теории поля тензор энергии-импульса бесследовый).

Поля теории  $\phi(z, \bar{z})$  должны преобразовываться определенным образом при конформных преобразованиях. Оказывается, что все поля группируются в конформные семейства, в которых есть одно примарное поле

$$\begin{aligned} \phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(z, \bar{z}) &\xrightarrow[\substack{z \rightarrow w(z) \\ \bar{z} \rightarrow \bar{w}(\bar{z})}]{\left(\frac{dw}{dz}\right)^\Delta \left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}}} \phi_{\Delta, \bar{\Delta}}(w(z), \bar{w}(\bar{z})) \\ L_n \phi &= 0, \quad n > 0 \\ L_0 \phi &= \Delta \phi \end{aligned} \quad (3)$$

$\Delta, \bar{\Delta}$  называются конформными размерностями поля. Все остальные поля называются вторичными и получаются из примарного действием операторов  $L_{-n}$ :

$$L_{-n_1} L_{-n_2} \dots \phi_\Delta \quad (4)$$

Все поля в теории оказываются суммами произведений элементов мультиплетов алгебры Вирасоро.

При некоторых дополнительных предположениях двумерную конформную теорию можно построить и решить полностью, если определен набор примарных полей и конформных размерностей.

Существуют различные подходы к аксиоматизации двумерной конформной теории поля. В общем случае нам не нужно знать действие, если мы полный знаем набор примарных полей и операторные разложения их произведений.

В том случае, если в теории конечное число примарных полей, такая теория называется минимальной. Кроме того, теории классифицируются

по значениям центрального заряда  $s$ . Теории с рациональным центральным зарядом называются рациональными. Оказывается, что все такие теории могут быть получены факторизацией так называемых моделей Весса-Зумино-Новикова-Виттена.

## 2.2 WZW-модели

WZW-модели обладают дополнительной симметрией. Алгебра токов в них — это алгебра Каца-Муди (аффинная алгебра Ли  $\mathfrak{g}$ ), полная киральная алгебра — полупрямое произведение  $Vir \ltimes \mathfrak{g}$ , примарные поля преобразуются по неприводимым представлениям алгебры  $\mathfrak{g}$ .

Сейчас я поясню, что все это значит и как строятся такие модели.

Модели Весса-Зумино-Виттена можно строить начиная со следующего действия:

$$S = S_0 + k\Gamma \quad (5)$$

где  $k$  - целое. Здесь  $S_0$  — действие нелинейной  $\sigma$ -модели.

$$S_0 = \frac{1}{4a^2} \int_{S^2} d^2x \operatorname{Tr}(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g), \quad (6)$$

где  $a^2 > 0$  - положительный параметр,  $g(x) \in G$  - поле со значениями в группе  $G$ , которую мы будем считать полупростой. Действие задается на комплексной плоскости с бесконечностью, которая топологически эквивалентна 2-сфере.

В нелинейной  $\sigma$ -модели конформная инвариантность теряется на квантовом уровне. Голоморфный и антиголоморфный токи не сохраняются по отдельности. Поэтому мы добавляем член Весса-Зумино  $\Gamma$  к действию

$$\Gamma = -\frac{i}{24\pi} \int_B \epsilon_{ijk} \operatorname{Tr} \left( \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^i} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^j} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^k} \right) d^3y \quad (7)$$

Он определен на трехмерном многообразии  $B$ , ограниченном исходным двумерным пространством. Через  $\tilde{g}$  мы обозначили продолжение поля  $g$  на  $B$ . Такое продолжение не единственно. В компактифицированном трехмерном пространстве компактное двумерное многообразие разделяет два трехмерных многообразия.

Разность значений члена Весса-Зумино  $\Delta\Gamma$  на этих многообразиях дается правой частью уравнения (7) с интегралом, продолженным на все компактное трехмерное пространство. Так как оно топологически эквивалентно три-сфере, получаем

$$\Delta\Gamma = -\frac{i}{24\pi} \int_{S^3} \epsilon_{ijk} \operatorname{Tr}' \left( \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^i} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^j} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^k} \right) d^3y \quad (8)$$

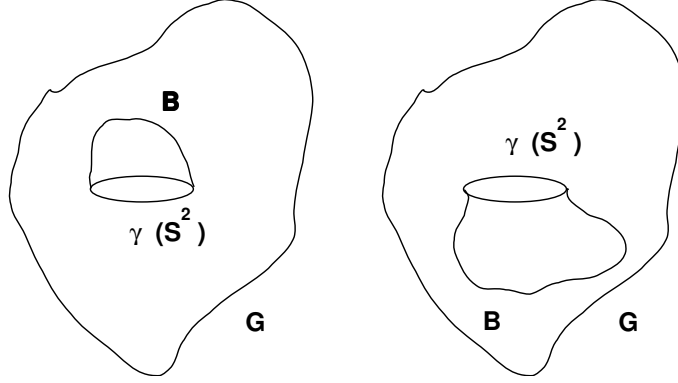


Рис. 1: Два продолжения поля на трехмерное многообразие

$\Delta\Gamma$  определен по модулю  $2\pi i$ , поэтому Евклидов функциональный интеграл с весом  $\exp(-\Gamma)$  хорошо определен. Значит константа связи, умножаемая на этот член, должна быть целочисленной.

Уравнение движения для полного действия (5):

$$\partial^\mu(g^{-1}\partial_\mu g) + \frac{a^2 ik}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\mu(g^{-1}\partial^\nu g) = 0 \quad (9)$$

В комплексных координатах оно записывается в виде

$$(1 + \frac{a^2 k}{4\pi})\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}}g) + (1 - \frac{a^2 k}{4\pi})\partial_{\bar{z}}(g^{-1}\partial_zg) = 0 \quad (10)$$

Видно, что при  $a^2 = \frac{4\pi}{k}$  у нас имеются законы сохранения

$$\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}}g) = 0 \quad (11)$$

Для токов

$$J_z = \partial_z g g^{-1}, \quad J_{\bar{z}} = g^{-1}\partial_{\bar{z}}g \quad (12)$$

$$\partial_{\bar{z}}J = 0, \quad \partial_z\bar{J} = 0 \quad (13)$$

То есть голоморфная и антиголоморфная части отщепляются, что является указанием на наличие конформной инвариантности.

Решение классического уравнения движения имеет вид

$$g(z, \bar{z}) = f(z)\bar{f}(\bar{z}) \quad (14)$$

при произвольных  $f(z)$  и  $\bar{f}(\bar{z})$ .

Сохранение по отдельности токов  $J_z$ ,  $J_{\bar{z}}$  приводит к инвариантности действия при преобразованиях

$$g(z, \bar{z}) \rightarrow \Omega(z)g(z, \bar{z})\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}) \quad (15)$$

где  $\Omega, \bar{\Omega} \in G$ . То есть мы получили локальную  $G(z) \times G(\bar{z})$ -инвариантность.

Для перехода к квантовому случаю мы переопределяем токи

$$J(z) \equiv -k\partial_z g g^{-1} \quad \bar{J}(\bar{z}) = k g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \quad (16)$$

При инфинитезимальных преобразованиях  $\Omega = 1 + \omega$ ,  $\bar{\Omega} = 1 + \bar{\omega}$  вариация  $\delta_\omega g = \omega g$ , а вариация действия

$$\delta S = -\frac{1}{2\pi} \int d^2x \left( \partial_{\bar{z}} \text{Tr}(\omega(z)J(z)) + \partial_z \text{Tr}(\bar{\omega}(\bar{z})\bar{J}(\bar{z})) \right) \quad (17)$$

Заменяем  $d^2x = -\frac{i}{2}dzd\bar{z}$ , интегрируем по частям и переходим к интегралу по контуру, замыкая контур в разных направлениях для голоморфной и антиголоморфной частей. Тогда вариация действия

$$\delta_{\omega, \bar{\omega}} S = \frac{i}{4\pi} \oint dz \text{Tr}(\omega(z)J(z)) - \frac{i}{4\pi} \oint d\bar{z} \text{Tr}(\bar{\omega}(\bar{z})\bar{J}(\bar{z})) \quad (18)$$

Раскладывая токи

$$J = \sum J^a t^a, \quad \bar{J} = \sum \bar{J}^a t^a \\ \omega = \sum \omega^a t^a \quad (19)$$

получаем

$$\delta_{\omega, \bar{\omega}} S = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum \omega^a J^a + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum \bar{\omega}^a \bar{J}^a \quad (20)$$

Мы также получили тождества Уорда  $\delta \langle X \rangle = \langle (\delta S) X \rangle$

$$\delta_{\omega, \bar{\omega}} \langle X \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum \omega^a \langle J^a X \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum \bar{\omega}^a \langle \bar{J}^a X \rangle \quad (21)$$

Для токов из явного вида тока и формулы для преобразования  $g$  имеем

$$\delta_\omega J = [\omega, J] - k\partial_z \omega, \quad \delta_\omega J^a = \sum i f_{abc} \omega^b J^c - k\partial_z \omega^a \quad (22)$$

Если это подставить в тождество Уорда, то получаем операторное разложение для токов, которое имеет вид

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{k\delta_{ab}}{(z-w)^2} + \sum i f_{abc} \frac{J^c(w)}{(z-w)} \quad (23)$$

Раскладывая токи в ряд, получаем

$$J^a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n-1} J_n^a$$

$$[J_n^a, J_m^b] = \sum_c i f^{abc} J_{n+m}^c + kn \delta^{ab} \delta_{n+m,0} \quad (24)$$

Теперь мы видим, что компоненты токов образуют аффинную алгебру Ли  $\hat{g}$ .

Тензор энергии-импульса вводится при помощи конструкции Сугавары как сумма нормально упорядоченных компонент токов

$$T(z) = \frac{1}{2(k + h^v)} \sum_a N(J^a J^a)(z) \quad (25)$$

Здесь  $h^v$  - дуальное число Кокстера.  $h^v = \sum_i \alpha_i^v + 1 = \frac{1}{2}(\Theta, \Theta + 2\rho)$ , а нормальное упорядочение вводится следующим образом:

$$N(AB)(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z-w} A(z) B(w) \quad (26)$$

Тензор энергии-импульса можно разложить на моды  $L_n$

$$L_n = \frac{1}{2(k + h^v)} \sum_a \sum_m : J_m^a J_{n-m}^a : \quad (27)$$

Тогда коммутационные соотношения для мод  $L_n$  имеют вид

$$[L_n, L_m] = (n - m) L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m,0}$$

$$c = \frac{k \dim g}{k + h^v} \quad (28)$$

$$[L_n, J_m^a] = -m J_{n+m}^a.$$

Таким образом, конструкция Сугавары — это способ вложения алгебры Вирасоро в универсальную обертывающую аффинной алгебры Ли  $\hat{g}$

Полная киральная алгебра модели Весса-Зумино-Виттена равна полупрямому произведению  $Vir \ltimes \hat{g}$

Примарными оказываются поля, которые преобразуются ковариантно под действием  $G(z) \times G(\bar{z})$ , как  $g(z, \bar{z})$ . В терминах операторного разложения это свойство переформулируется следующим образом:

$$J^a(z) g(w, \bar{w}) \sim \frac{-t^a g(w, \bar{w})}{(z - w)}$$

$$\bar{J}^a(z) g(w, \bar{w}) \sim \frac{g(w, \bar{w}) t^a}{(z - w)} \quad (29)$$

Любое поле  $\phi_{\lambda,\mu}$ , преобразующееся ковариантно по отношению к некоторому представлению, заданному весом  $\lambda$  в голоморфном секторе и весом  $\mu$  в антиголоморфном, является примарным полем WZW-модели.

В модах это свойство записывается в виде

$$\begin{aligned} (J_0^a \phi_\lambda) &= -t_\lambda^a \phi_\lambda \\ (J_n^a \phi_\lambda) &= 0 \quad \text{для } n > 0 \end{aligned} \quad (30)$$

Мы можем сопоставить состоянию  $|\phi_\lambda\rangle$  полю  $\phi_\lambda$

$$\phi_\lambda(0) = |\phi_\lambda\rangle \quad (31)$$

Тогда условия (30) для примарных полей дают

$$\begin{aligned} J_0^a |\phi_\lambda\rangle &= -t_\lambda^a |\phi_\lambda\rangle \\ J_n^a |\phi_\lambda\rangle &= 0 \quad \text{для } n > 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Все вторичные состояния имеют вид

$$J_{-n_1}^{a_1} J_{n_2}^{a_2} \dots |\phi_\lambda\rangle \quad (33)$$

Легко видеть, что действие генераторов алгебры Вирасоро на примарные поля имеет вид

$$L_0 |\phi_\lambda\rangle = \frac{1}{2(k+h^v)} \sum_a J_0^a J_0^a |\phi_\lambda\rangle = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k+h^v)} |\phi_\lambda\rangle \quad (34)$$

Здесь использовано явное выражение для собственных значений квадратичного оператора Казимира.

Примарные поля преобразуются интегрируемыми конечномерными представлениями, а бесконечномерные и неинтегрируемые поля зануляют корреляционные функции. В WZW-моделях примарные поля принадлежат тензорному произведению неприводимых представлений аффинной алгебры, так как есть голоморфный и антиголоморфный сектора.

## 2.3 Конформные вложения и модулярно-инвариантные статсуммы

При изучении конформной теории поля на плоскости или на сфере голоморфный и антиголоморфный сектора можно рассматривать независимо. Если мы говорим о применении конформной теории для описания



поведения струн, то теория должна быть определена на римановых поверхностях большего рода ( $h > 0$ ), чтобы можно было описывать взаимодействия струн. Считается, что для этого необходимо (и, возможно, достаточно) чтобы теория была определена на торе.

(Нарисовать картинку штанов).

В теории критического поведения конформная инвариантность имеет место только в критической точке, где голоморфный и антиголоморфный сектора расцеплены. Но вблизи критической точки эти сектора должны быть связаны, и так как мы предполагаем плавный переход к критической точке в пространстве параметров, то эта связь должна сохраняться и в критической точке. Физический спектр теории должен плавно меняться, когда мы покидаем критическую точку, и связь голоморфного и антиголоморфного сектора вдали от критической точки должна приводить к ограничениям на набор состояний в критической точке. Этого можно достичь через геометрию, то есть накладывая граничные условия на состояния. Здесь естественно рассматривать периодические граничные условия, которые эквивалентны рассмотрению теории на торе.

Разные параметризации тора связаны модулярными преобразованиями, таким образом возникает требование модулярной инвариантности статсуммы.

При помощи конформных преобразований можно перейти к таким координатам, в которых соотношения эквивалентности для тора (граничные условия) записываются в виде  $z \sim z + 1$  и  $z \sim z + \tau$ , где  $\tau$  в верхней полуплоскости  $\mathbb{C}$ . Конформная теория поля задаётся примарными полями  $\Phi_a$  с конформными размерностями  $\Delta_a$ .

Примарные поля живут в пространствах  $\mathcal{H}_{(i,j)}$ , которые представляют собой тензорные произведения неприводимого представления  $\mathcal{H}_j$  киральной алгебры и неприводимого представления  $\mathcal{H}_{\bar{j}}$  антикиральной алгебры. Тогда статсумма на торе (2) может быть записана в виде

$$Z(\tau) = \sum_{(j,\bar{j})} \chi_j(q) \bar{\chi}_{\bar{j}}(\bar{q}) \quad (35)$$

где  $\chi_j$  — нормализованный характер представления  $\mathcal{H}_j$ ,

$$\chi_j(\tau) = \text{Tr}_{\mathcal{H}_j}(q^{L_0 - \frac{c}{24}}) \quad \text{где } q = e^{2\pi i \tau} \quad (36)$$

Характеры переходят друг в друга при модулярных преобразованиях:

$$\chi_j\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_k S_{jk} \chi_k(\tau) \quad \text{и} \quad \chi_j(\tau + 1) = \sum_k T_{jk} \chi_k(\tau), \quad (37)$$

где  $S$  и  $T$  — постоянные матрицы.

Для WZW-моделей примарные поля определяются старшими весами  $\hat{\lambda}, \hat{\xi}$  соответствующих представлений алгебры  $\mathfrak{g}$ . Тогда

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\hat{\lambda}, \hat{\xi} \in P_+^{(k)}} M_{\hat{\lambda}, \hat{\xi}} L_{\hat{\lambda}} \otimes L_{\hat{\xi}} \quad (38)$$

Коэффициенты ветвления для вложения аффинной подалгебры Ли в аффинную алгебру можно использовать для построения модулярно-инвариантной статсуммы в соответствующей WZW-модели. Когда рассматривается теория на торе, набор физически допустимых полей ограничен требованиями модулярной инвариантности.

Простейший модулярный инвариант можно записать следующим образом:

$$Z(\tau) = \sum_{\mu \in P_{\mathfrak{g}}^+} \chi_{\mu}(\tau) \bar{\chi}_{\mu}(\bar{\tau}) \quad (39)$$

Здесь суммирование ведется по всем конформным семействам (то есть по всем представлениям алгебры  $\mathfrak{a}$ ).

Другие модулярные инварианты в WZW-модели с алгеброй  $\mathfrak{a}$  можно получить, если существует алгебра  $\mathfrak{g}$ , в которую  $\mathfrak{a}$  вкладывается конформно. (Я сейчас поясню, что это значит).

Представления алгебры можно рассматривать как сумму представлений подалгебры.

Если мы рассмотрим редукцию характеров аффинной алгебры

$$\pi_{\mathfrak{a}}(ch L_{\mathfrak{g}}^{\mu}) = \sum_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} ch L_{\mathfrak{a}}^{\nu} \quad (40)$$

и подставим разложение в формулу (39), то модулярная инвариантность сохранится. То есть из диагонального инварианта для алгебры  $\mathfrak{g}$  мы получаем новый не диагональный инвариант для подалгебры  $\mathfrak{a}$ . Но возникает вопрос, будет ли теория, полученная таким образом, самосогласованной, сохранится ли в ней конформная инвариантность.

Пусть  $J_{-n_j}^{a_j}$  и  $\tilde{J}_{-n_j}^{a'_j}$  — понижающие операторы алгебр  $\mathfrak{g}$  и  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ .  $\pi_{\mathfrak{a}}$  — проекционный оператор  $\pi_{\mathfrak{a}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{a}$ . В теории, связанной с  $\mathfrak{g}$  с вакуумом  $|\lambda\rangle$  будут следующие состояния:

$$J_{-n_1}^{a_1} J_{-n_2}^{a_2} \dots |\lambda\rangle \quad n_1 \geq n_2 \geq \dots > 0. \quad (41)$$

Вакуум  $\mathfrak{g}$ -инвариантен, то есть  $J_0^a |0\rangle = 0$ . При проекции на подалгебру  $\mathfrak{a}$  состояния примут вид

$$\tilde{J}_{-n_1}^{a'_1} \tilde{J}_{-n_2}^{a'_2} \dots |\pi_{\mathfrak{a}}(\lambda)\rangle. \quad (42)$$

Из  $\mathfrak{g}$ -инвариантности вакуума следует его  $\mathfrak{a}$ -инвариантность, но для тензора энергии-импульса в общем случае это не так. Поэтому тензор энергии-импульса большей теории должен состоять только из генераторов  $\tilde{J}$ . Тогда  $T_{\mathfrak{g}} = T_{\mathfrak{a}} \Rightarrow c(\mathfrak{g}) = c(\mathfrak{a})$ . Это приводит к уравнению

$$\frac{k \dim \mathfrak{g}}{k + g} = \frac{x_e k \dim \mathfrak{a}}{x_e k + a} \quad (43)$$

Здесь  $x_e$  — индекс вложения, а  $g, a$  — дуальные числа Кокстера, которые характеризуют алгебры.

Можно показать, что только для представлений уровня 1 это равенство удовлетворяется. То есть класс конформных вложений не слишком широк и существует полная их классификация. Кроме того, для конформных вложений существуют специальные методы разложения представлений.

Модулярная инвариантность статсуммы для полей, принадлежащих представлениям алгебры  $\mathfrak{g}$ , сохраняется при проекции на подалгебру  $\mathfrak{a}$ . Если все представления  $\mathfrak{g}$  в теории удовлетворяют описанным требованиям, то при проекции мы получаем конформную теорию поля.

Существует теорема о том, что для конформного вложения  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$  только конечное число коэффициентов ветвления отлично от нуля. Поэтому после того, как мы разложили все представления  $\mathfrak{g}$  мы подставляем результаты в выражение для статсуммы и получаем модулярно-инвариантную статсумму для вложенной теории. Такая статсумма уже не будет иметь диагональный вид:

$$Z_{\mathfrak{a}}(\tau) = \sum_{\nu, \lambda \in P_{\mathfrak{a}}^+} \chi_{\nu}(\tau) M_{\nu\lambda} \bar{\chi}_{\lambda}(\bar{\tau}) \quad (44)$$

Наша работа посвящена разработке общего метода редукции представлений аффинных алгебр Ли, поэтому случай конформных вложений — лишь один из примеров применения нашего метода. Однако в этом случае физический смысл наиболее очевиден.

Теперь я перейду к краткому объяснению метода и примерам вычислений.

### 3 Рекуррентные соотношения для коэффициентов ветвления

Ранее для вычисления коэффициентов ветвления был предложен способ, основанный на преобразовании формулы Вейля-Каца для характеров представлений аффинных алгебр Ли в рекуррентное соотношение

для коэффициентов ветвления. Однако исходный алгоритм не работал для не максимальных вложений. В данной работе была решена данная проблема и предложено обобщение рекуррентных соотношений.

Используя формулу Вейля-Каца мы выделяем два набора элементов в весовом пространстве. Первый набор  $\Gamma$  называется веером и описывает вложение подалгебры  $\mathfrak{a}$  в алгебру  $\mathfrak{g}$ . Веер универсален, в том смысле, что он может быть использован для разложения любого из представлений. Другой набор элементов весового пространства  $\Psi^{(\mu)}$  называется набором аномальных весов. Он описывает раскладываемое представление без явного его построения.

После этого процесс вычисления коэффициентов ветвления можно реализовать при помощи следующей рекуррентной формулы:

$$k_{\xi}^{(\mu)} = -\frac{1}{s(\gamma_0)} \left( \sum_{\omega \in W_{\perp} \setminus W} \epsilon(\omega) \dim \left( L_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\pi_{\mathfrak{a}_{\perp}}(\omega(\mu+\rho)) - \rho_{\mathfrak{a}_{\perp}}} \right) \delta_{\xi - \gamma_0, \pi_{\mathfrak{a}}(\omega(\mu+\rho) - \rho)} + \sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}}} s(\gamma + \gamma_0) k_{\xi + \gamma}^{(\mu)} \right) \quad (45)$$

Здесь  $\mathfrak{a}_{\perp}$  — это подалгебра, “натяннутая” на корни  $\mathfrak{g}$ , ортогональные к корневой системе подалгебры  $\mathfrak{a}$ ,  $W_{\perp}$  — соответствующая этим корням группа Вейля,  $\Gamma_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}}$  — веер — набор весов в разложении знаменателя

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{a}_{\perp}}^+} (1 - e^{-\pi_{\mathfrak{a}}(\alpha)})^{\text{mult}(\alpha) - \text{mult}_{\mathfrak{a}}(\pi_{\mathfrak{a}}(\alpha))}$$

, а  $s(\gamma)$  — коэффициент при  $e^{\gamma}$  в этом разложении.

Набор аномальных весов  $\Psi^{(\mu)}$  дает член с  $\delta$ -символом.

Это рекуррентное соотношение позволяет нам сформулировать следующий алгоритм вычисления коэффициентов ветвления, который осуществляется без явного построения исходного представления или представлений, входящих в разложение.

1. Построить наборы положительных корней  $\Delta^+$  и  $\Delta_{\mathfrak{a}}^+$ .
2. Выбрать те положительные корни  $\alpha \in \Delta^+$ , которые ортогональны корневому подпространству  $\mathfrak{a}$  и собрать их в набор  $\Delta_{\perp}^+$ .
3. Построить множество весов  $\Gamma$ , которое мы называем “веером”.
4. Найти множество  $\widehat{\Psi^{(\mu)}} = \{\omega(\mu + \rho) - \rho; \omega \in W\}$  аномальных весов представления  $L_{\mathfrak{g}}^{(\mu)}$ .
5. Выбрать в нем веса  $\{\lambda = \omega(\mu + \rho) | \pi_{\mathfrak{a}_{\perp}} \lambda \in \bar{C}_{\mathfrak{a}_{\perp}}\}$ . Это можно легко сделать, так как у нас есть набор  $\Delta_{\perp}^+$  и мы можем проверить, лежит

ли вес  $\pi_{\mathfrak{a}_\perp} \lambda$  в главной камере Вейля алгебры  $\mathfrak{a}_\perp$ . Для этого все скалярные произведения этого веса  $\lambda$  с корнями из  $\Delta_\perp^+$  должны быть неотрицательны.

6. Далее для весов  $\lambda = \omega(\mu + \rho)$ ,  $\pi_{\mathfrak{a}_\perp} \lambda \in \bar{C}_{\mathfrak{a}_\perp}$  мы вычисляем размерность соответствующих представлений  $\dim \left( L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\pi_{\mathfrak{a}_\perp}(\omega(\mu+\rho))-\rho_{\mathfrak{a}_\perp}} \right)$  при помощи формулы Вейля и набора  $\Delta_\perp^+$ .
7. Далее рекуррентно вычисляются аномальные коэффициенты ветвления, а внутри главной камеры Вейля алгебры  $\mathfrak{a}$  аномальные коэффициенты совпадают с настоящими коэффициентами ветвления.

Сейчас я поясню всю процедуру на примере редукции представления простой алгебры  $B_2$  ( $so(5)$ ) на подалгебру  $A_1$  ( $so(3)$ ), а потом расскажу про аффинные алгебры Ли.

### 3.1 Примеры

Я начну с примера вычисления в случае конечномерных простых алгебр Ли, так как его легко нарисовать.

Рассмотрим регулярное вложение  $A_1$  в  $B_2$ . Вот на рисунке корневая системы алгебры  $B_2 = so(5)$ . Корень  $\beta$  вложенной алгебры  $A_1$  равен  $\alpha_1 + 2\alpha_2$ .

Функция  $s(\gamma)$  и веер  $\Gamma$  строятся исходя из корневых систем  $\mathfrak{g}, \mathfrak{a}$  
$$\frac{\pi_{\mathfrak{a}} \left( \prod_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{a}}^+} (1 - e^{-\alpha}) \right)}{\prod_{\beta \in \Delta_{\mathfrak{a}}^+} (1 - e^{-\beta})}$$
 и получается

$$(1, 2), (2, -1) \quad (46)$$

Вторая компонента - значение  $s(\gamma)$ .

Опишем редукцию первого фундаментального представления  $B_2$ . Старший вес изображен на рисунке. Вот набор аномальных весов  $\omega(\mu + \rho) - \rho$ ,  $\omega \in W$  с соответствующими четностями отражений  $\epsilon(\omega)$ . Теперь мы факторизуем группу Вейля  $W$  по подгруппе  $W_\perp = \{\omega_1\}$ . Получаем следующий набор весов и размерностей представлений  $L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\pi_{\mathfrak{a}_\perp}(\omega(\mu+\rho))-\rho_{\mathfrak{a}_\perp}}$ :

Затем мы проектируем эти веса и размерности на корневое подпространство подалгебры  $\mathfrak{a} = A_1$  и получаем следующие аномальные веса и их кратности:

$$(1, 2), (0, -3), (-4, 3), (-5, -2) \quad (47)$$

Аномальный коэффициент ветвления  $k_1^{(1,0)} = 2$ , для коэффициента  $k_0^{(1,0)}$  из рекуррентного соотношения получаем

$$k_0^{(1,0)} = -1 \cdot k_2^{(1,0)} + 2 \cdot k_1^{(1,0)} - 3 \cdot \delta_{0,0} = 1 \quad (48)$$

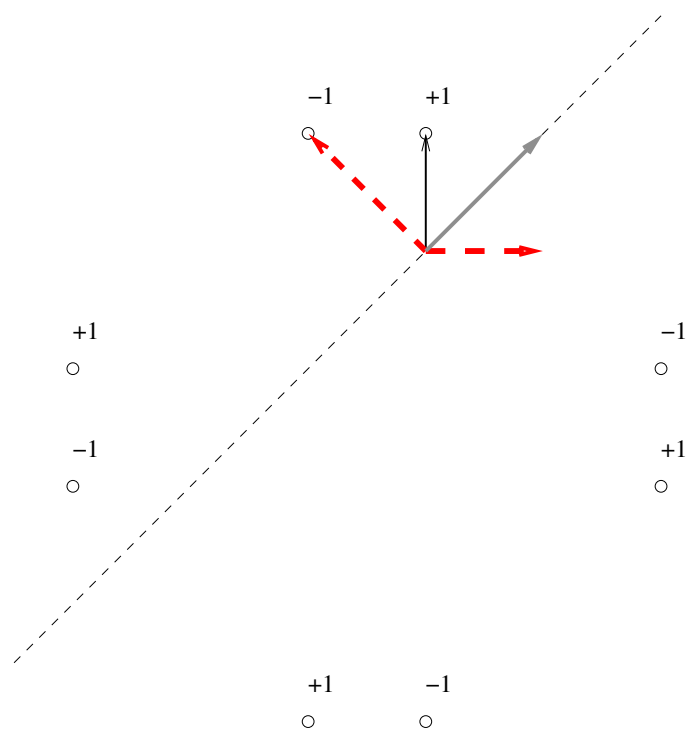


Рис. 2: Регулярное вложение  $A_1$  в  $B_2$

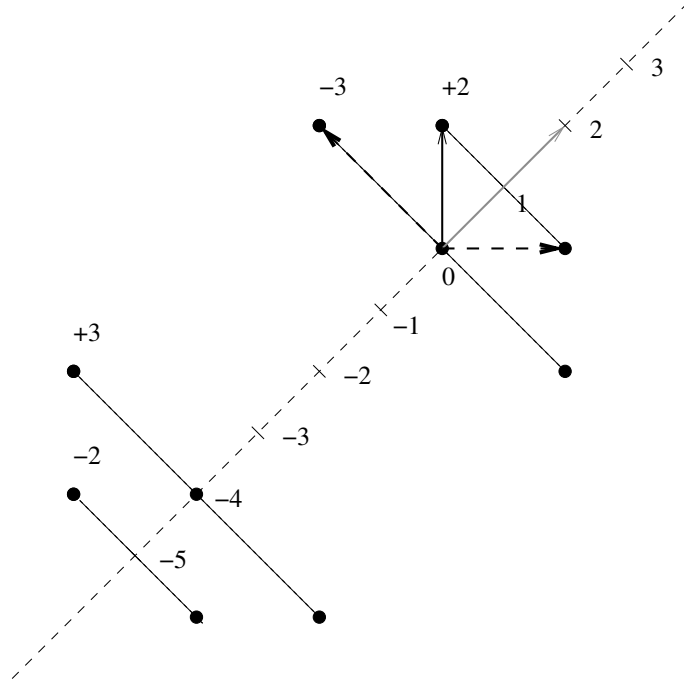


Рис. 3: Аномальные веса и соответствующие  $\mathfrak{a}_\perp = A_1$ -модули

В работе рассмотрено большое число примеров вложений аффинных алгебр Ли. На самом деле мы написали программу, которая может строить такие примеры автоматически для алгебр Ли не слишком большого ранга.

Я сейчас покажу результаты применения нашего алгоритма для одного из примеров конформных вложений.

Рассмотрим такое вложение  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ , где  $\mathfrak{a} = \hat{A}_1 \oplus \hat{A}_1$ , а  $\mathfrak{g} = \hat{A}_3$ . Это вложение является аффинным расширением специального вложения конечномерных алгебр Ли  $A_1 \oplus A_1 \subset A_3$ . ( $su(2) \oplus su(2) \subset su(4)$ ).

#### Для заинтересованных читателей

Это специальное вложение строится следующим образом: берем четырехмерное представление  $A_1 \oplus A_1$  со старшим весом  $(1, 1)$ . Вот веса этого представления 4, их координаты в базисе фундаментальных весов:  $\nu_1 = (1, 1)$ ,  $\nu_2 = (-1, 1)$ ,  $\nu_3 = (1, -1)$ ,  $\nu_4 = (-1, -1)$ .

Тогда матричные элементы представления генераторов подалгебры Картана  $b_1, b_2$  в базисе Вейля даются выражениями

$$d(b_i) = \text{diag} \left( \frac{2(\nu_1, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \frac{2(\nu_2, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \frac{2(\nu_3, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \frac{2(\nu_4, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \right), \quad (49)$$

так что  $d(b_1) = \text{diag}(1, -1, 1, -1)$ ,  $d(b_2) = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ .

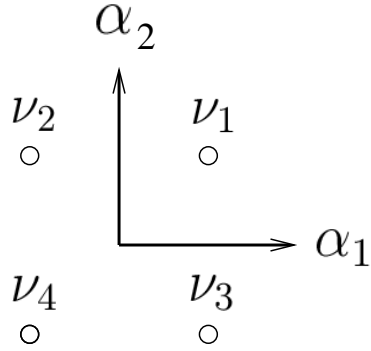


Рис. 4: Представление для специального вложения  $A_1 \oplus A_1 \subset A_3$

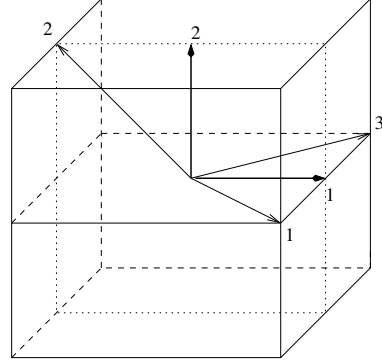


Рис. 5: Вложенные корни  $A_1 \oplus A_1 \subset A_3$

10cm

■

Вложенные корни  $\alpha_1, \alpha_2$  подалгебры  $A_1 \oplus A_1$  выражаются через корни  $\tilde{\alpha}_i$  алгебры  $A_3$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_3) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}_1 + 2\tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3)\end{aligned}\tag{50}$$

**Для заинтересованных читателей**

Они изображены на рисунке 5.

10cm

■

Вложение имеет индексы  $(2, 2)$  и является конформным, так как  $c(A_1 \oplus A_1) = c(A_1) + c(A_1) = 2 \frac{x_e \dim(A_1)}{x_e + 2} = \frac{\dim A_3}{5} = c(A_3)$ .

Для построения модулярно-инвариантной статсуммы нам нужно знать редукцию фундаментальных представлений  $\widehat{su(4)}$ . Фундаментальные веса имеют следующие координаты в ортогональном базисе

$$\begin{aligned}\omega_0 &= (0, 0, 0, 0; 1; 0) \\ \omega_1 &= (\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}; 1; 0) \\ \omega_2 &= (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 1; 0) \\ \omega_3 &= (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}; 1; 0)\end{aligned}\tag{51}$$



Множества положительных корней  $\Delta^+$  и  $\Delta_{\mathfrak{a}}^+$ :

$$\begin{aligned}\Delta^+ &= \left\{ \overset{\circ}{\Delta}^+ = \{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2, \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3, \tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_2 + \tilde{\alpha}_3\}; \right. \\ &\quad \left. \overset{\circ}{\Delta} + n\delta; +n\delta \text{ с кратностью } 3; n = 1, 2, \dots, \right\} \\ \Delta_{\mathfrak{a}}^+ &= \{\alpha_1, \alpha_2; \pm\alpha_1 - n\delta, \pm\alpha_2 - n\delta; -n\delta \text{ с кратностью } 2; n = 1, 2, \dots\} \quad (52)\end{aligned}$$

Набор  $\Delta_{\perp}^+$  пуст. Веер  $\Gamma_{\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}}$  показан на рисунке 6. Конечные координаты даны в базисе фундаментальных весов  $A_1 \oplus A_1$ . Элемент  $\gamma$  обозначен крестом, если  $s(\gamma) = 1$  и кругом, если  $s(\gamma) = -1$ .

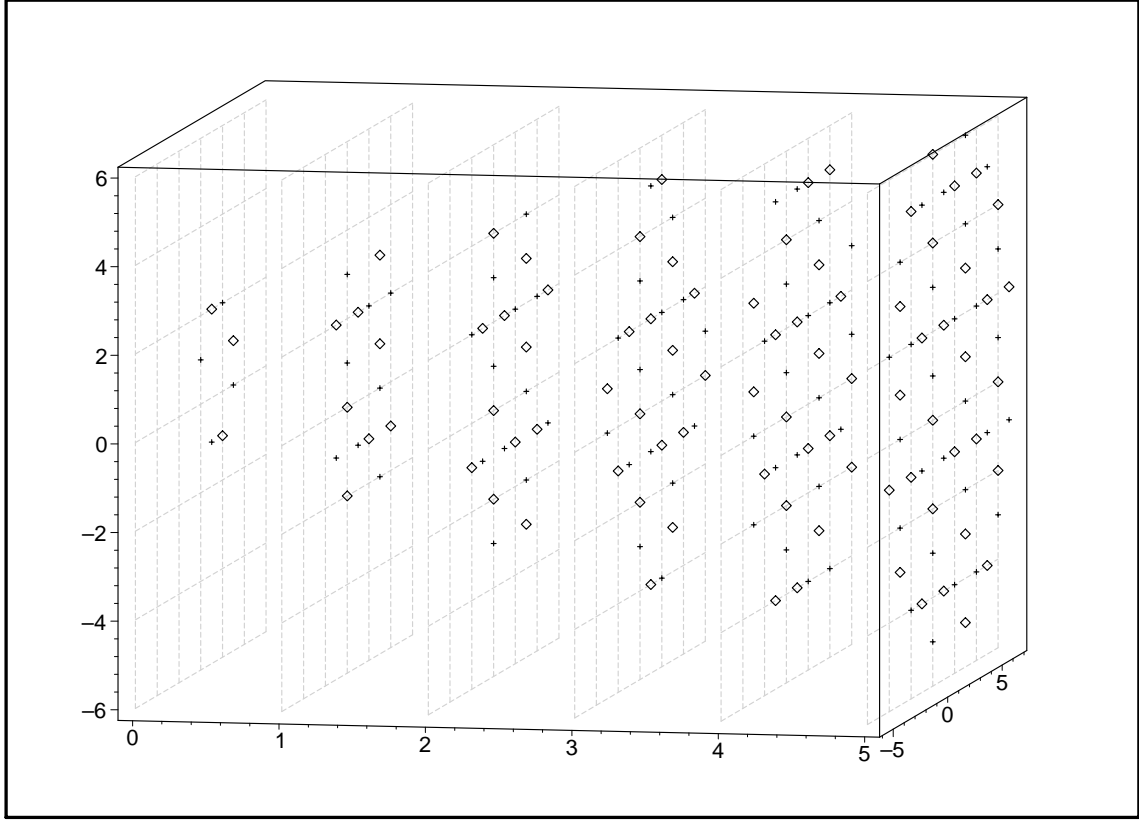


Рис. 6: Веер для специального вложения  $\hat{A}_1 \oplus \hat{A}_1 \subset \hat{A}_3$

Мы ограничимся вычислениями до пятого грейда.

Множество аномальных весов  $\widehat{\Psi^{(\mu)}} = \{\omega(\mu + \rho) - \rho; \omega \in W\}$  представления алгебры  $\hat{A}_3$  состоит из 192 элементов, их проекции  $\pi_{\mathfrak{a}}(\widehat{\Psi^{(\mu)}})$  показаны на рисунке 7 для  $\mu = \omega_2 = (0, 1, 0; 1; 0)$ .

Аналогичные картинки для  $\omega_0, \omega_1, \omega_3$  я не показываю.

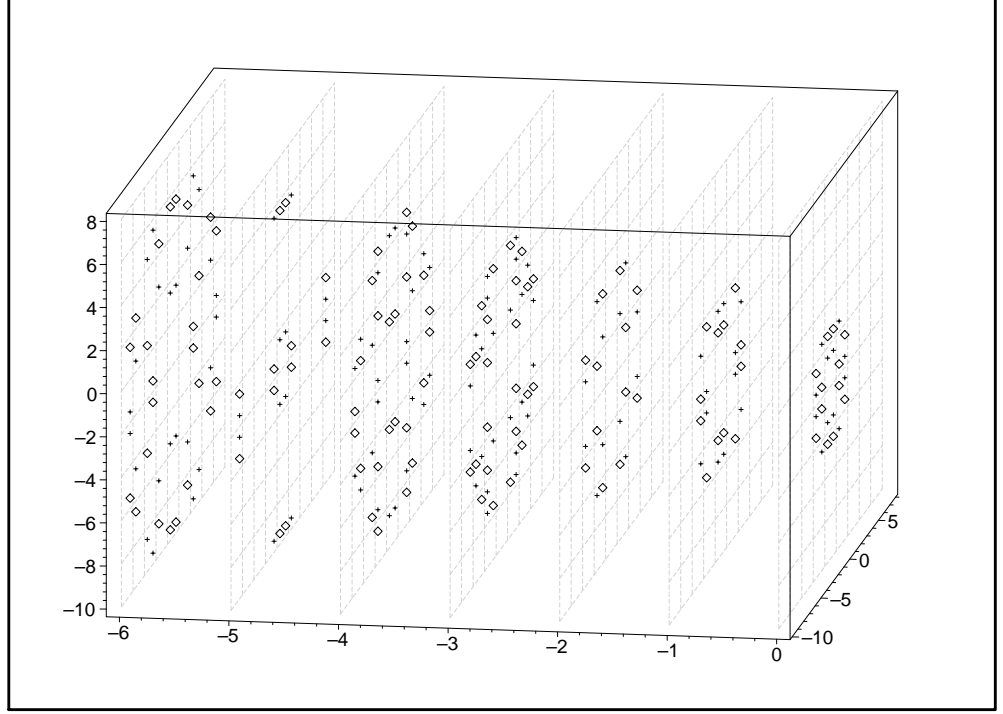


Рис. 7: Спроектированные аномальные веса  $L_{A_3}^{\omega_2}$

Аномальные коэффициенты ветвления для представления  $L^{(\omega_2)}$  вычислены при помощи рекуррентных соотношений и показаны на рисунке 8.

Получаются следующие правила ветвления:

$$\begin{aligned}
 L_{\hat{A}_3 \downarrow \hat{A}_1 \oplus \hat{A}_1}^{(0,0,0;1;0)} &= L_{\hat{A}_1}^{(0;2;0)} \otimes L_{\hat{A}_1}^{(0;2;0)} \\
 L_{\hat{A}_3 \downarrow \hat{A}_1 \oplus \hat{A}_1}^{(1,0,0;1;0)} &= L_{\hat{A}_1}^{(1;2;0)} \otimes L_{\hat{A}_1}^{(1;2;0)} \\
 L_{\hat{A}_3 \downarrow \hat{A}_1 \oplus \hat{A}_1}^{(0,1,0;1;0)} &= \left( L_{\hat{A}_1}^{(2;2;0)} \otimes L_{\hat{A}_1}^{(0;2;0)} \right) \oplus \left( L_{\hat{A}_1}^{(0;2;0)} \otimes L_{\hat{A}_1}^{(2;2;0)} \right) \\
 L_{\hat{A}_3 \downarrow \hat{A}_1 \oplus \hat{A}_1}^{(0,0,1;1;0)} &= L_{\hat{A}_1}^{(1;2;0)} \otimes L_{\hat{A}_1}^{(1;2;0)}
 \end{aligned} \tag{53}$$

В результате мы получаем модулярно-инвариантную статсумму для

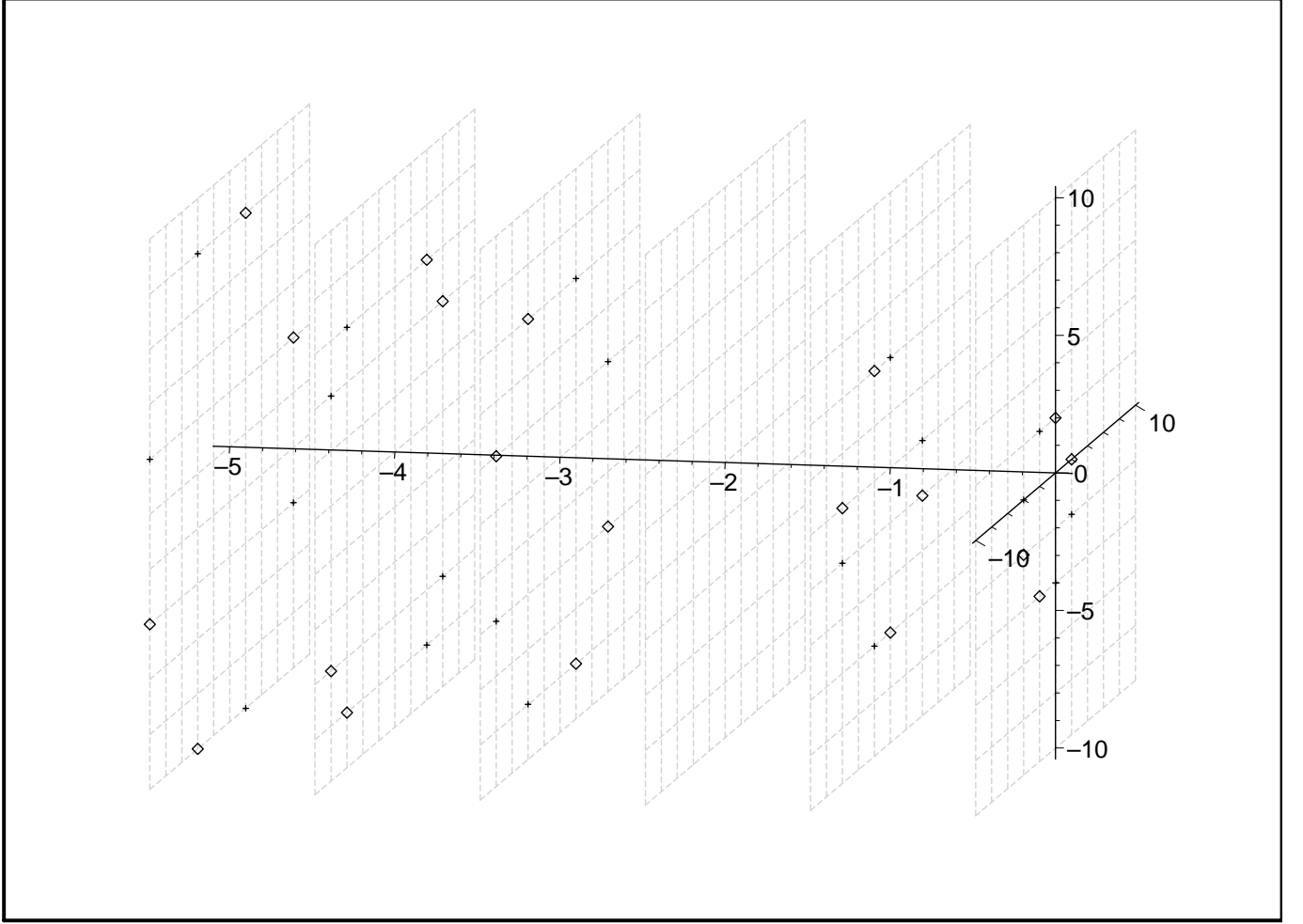


Рис. 8: Аномальные коэффициенты ветвления для представления  $L_{A_3}^{(0,1,0;1;0)}$

WZW-модели с киральной алгеброй  $\hat{A}_1 \oplus \hat{A}_1$ .

$$Z = \left| \chi_{(0;2;0)} \chi_{(0;2;0)} \right|^2 + 2 \left| \chi_{(1;2;0)} \chi_{(1;2;0)} \right|^2 + \left| \chi_{(2;2;0)} \chi_{(0;2;0)} + \chi_{(0;2;0)} \chi_{(2;2;0)} \right|^2 = \\ \left| \chi_{(0;2;0)} \right|^4 + 2 \left| \chi_{(1;2;0)} \right|^4 + 4 \left| \chi_{(2;2;0)} \chi_{(0;2;0)} \right|^2 \quad (54)$$

## 4 Заключение. Обсуждение перспектив.

Функции ветвления играют важную роль в coset-моделях. Эти модели строятся путем факторизации WZW-модели с алгеброй  $\mathfrak{g}$  по отношению

к модели с подалгеброй  $\mathfrak{a}$ . Тут функции ветвления фактически описывают состояния в системе.

Недавно мы заметили, что струнные функции, которые описывают представления, функции ветвления, описывающие редукцию представлений и функции слияния, которые описывают разложение тензорных произведений представлений на неприводимые, допускают построение дуальных систем функций. Эти дуальные функции могут быть построены просто из анализа соответствующих групп и камер Вейля. Задача явного построения струнных функций или функций ветвления тогда сведется к обращению матрицы. Явный вид функций ветвления полезен при изучении coset-моделей. Кроме того, многие известные результаты могут быть перенесены на дуальные функции, например, результаты Каца о модулярных свойствах струнных функций и функций ветвления. В настоящее время мы начали исследовать эти системы дуальных функций.

Среди других возможных приложений полученных методов можно отметить также приложения в интегрируемых цепочках, а также в приложениях дуальных функций теории модулярных форм.