Рекурсивные свойства ветвления и БГГ резольвента

В Д Ляховский[1], А А Назаров[2,3]

[1] Теоретический отдел,

Санкт - Петербургский государственный университет

198904, Санкт - Петербург, Россия

e-mail: lyakh1507@nm.ru

[2] Теоретический отдел,

Санкт - Петербургский государственный университет

198904, Санкт - Петербург, Россия

[2] Лаборатория имени Чебышева,

математико-механический факультет,

Санкт - Петербургский государственный университет

199178, Санкт - Петербург, Россия

email: antonnaz@gmail.com

14 февраля 2011 г.

Аннотация

Рекуррентные соотношения для коэффициентов ветвления основываются на определенном разложении сингулярного элемента. Мы показываем, что такое разложение может использоваться для построения параболических модулей Верма и получения обобщенных формул Вейля-Верма для характеров. Также мы демонстрируем, что коэффициенты ветвления определяют обобщенную резольвенту Бернштейна-Гельфанда-Гельфанда.

1 Введение

Свойства ветвления (аффинных) алгебр Ли важны для приложений в квантовой теории поля (смотри, например, модели конформной теории поля [1],[2]). В данной работе мы показываем, что ветвление для произвольной редуктивной подалгебры связано с БГГ резольвентой и проявляет свойства резольвенты в категории $\mathcal{O}^p$ [3] (параболического обобщения категории $\mathcal{O}$ [4]).

Резольвента для неприводимых модулей в терминах бесконечномерных модулей важна для теории интегрируемых спиновых цепочек [5]. В подходе $\mathcal{Q}$-оператора Бакстера [6] общие трансфер-матрицы, соответствующие (обобщенным) модулям Верма, факторизуются в произведение операторов Бакстера. Резольвента позволяет вычислить трансфер-матрицы для конечномерных вспомогательных пространств.

Чтобы продемонстрировать связь БГГ резольвенты с ветвлением мы используем рекурсивный подход, представленный в работе [7] (похожий подход для максимальных вложений использовался в работе [8]). Мы рассматриваем подалгебру $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ вместе с $\mathfrak{a}_\perp$ – "ортогональным партнером" $\mathfrak{a}$ по отношению к форме Киллинга, а также $\widetilde{\mathfrak{a}_\perp} := \mathfrak{a}_\perp \oplus \mathfrak{h}_\perp$, где $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp} \oplus \mathfrak{h}_\perp$. Для любой редуктивной подалгебры $\mathfrak{a}$ подалгебра $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$ регулярна и редуктивна. Для интегрируемого модуля старшего веса $L^{(\mu)}$ и ортогональной подалгебры $\mathfrak{a}_\perp$ мы рассматриваем сингулярный элемент $\Psi^{(\mu)}$ (числитель в формуле Вейля для характеров $ch\left(L^\mu\right) = \frac{\Psi^{(\mu)}}{\Psi^{(0)}}$, см., например, [9]) и знаменатель Вейля $\Psi^{(0)}_{\mathfrak{a}_\perp}$ для ортогонального партнера. В работе показано, что элемент $\Psi^{(\mu)}_\mathfrak{g}$ может быть разложен в комбинацию числителей Вейля $\Psi^{(\nu)}_{\mathfrak{a}_\perp}$, где $\nu \in P^+_{\mathfrak{a}_\perp}$. Это разложение дает возможность построить множество модулей старшего веса $L^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}}_{\mathfrak{a}_\perp}$. В том случае, если вложение $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$ удовлетворяет "стандартным параболическим" условиям, эти модули порождают параболические модули Верма $M^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}}_{(\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g})}$, так что исходный характер $ch\left(L^\mu\right)$ в итоге раскладывается в чередующуюся сумму таких модулей. С другой стороны, если параболическое условие нарушено, конструкция сохраняется и порождает разложение по отношению к набору обобщенных модулей Верма $M^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}}}_{\left(\widetilde{\mathfrak{b}_\perp},\mathfrak{g}\right)}$, где $\widetilde{\mathfrak{b}_\perp}$ уже не является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, а оказывается сжатием $\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}$.

Некоторые общие свойства предложенного разложения формулируются в терминах определенного формального элемента $\Gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}}$, называемого “веером вложения”. Использование этого инструмента позволило сформулировать простой и явный алгоритм для вычисления правил ветвления, подходящий для произвольной (максимальной или не максимальной) подалгебры в аффинной алгебре Ли [7].

Возможные обобщения полученных результатов обсуждаются в Разделе 4.

1.1 Обозначения

Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ – (аффинные) алгебры Ли, а вложение $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ таково, что $\mathfrak{a}$ – редуктивная подалгебра в $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ с согласованным корневым пространством: $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}^{*} \subset \mathfrak{h}_{\mathfrak{g}}^{*}$. Мы используем следующие обозначения:

$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^{-} + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}^{+}$ — разложение Картана;

r , $(r_{\mathfrak{a}})$ — ранг алгебра $\mathfrak{g}$ (соотв., $\mathfrak{a}$) ;

Δ $(\Delta_{\mathfrak{a}})$— корневая система; Δ^{+} (соотв., $\Delta_{\mathfrak{a}}^{+}$)— набор положительных корней (алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ соответственно);

$\mathrm{mult}\,(\alpha)$ $(\mathrm{mult}_{\mathfrak{a}}\,(\alpha))$ — кратность корня α в Δ (соотв., в $(\Delta_{\mathfrak{a}})$);

S $(S_{\mathfrak{a}})$ — множество простых корней (для $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ соответственно);

α_i , $\left(\alpha_{(\mathfrak{a})j}\right)$ — i-й (соотв., j-й) простой корень алгебры $\mathfrak{g}$ (соотв.,$\mathfrak{a}$); $i = 0, \ldots, r,$ $(j = 0, \ldots, r_{\mathfrak{a}})$;

$\alpha_i^{\vee}$, $\left(\alpha_{(\mathfrak{a})j}^{\vee}\right)$– простой ко-корень для $\mathfrak{g}$ (соотв.,$\mathfrak{a}$) , $i = 0, \ldots, r$; $(j = 0, \ldots, r_{\mathfrak{a}})$;

W , $(W_{\mathfrak{a}})$— группа Вейля;

C , $(C_{\mathfrak{a}})$— фундаментальная камера Вейля;

$\bar{C}, \left(\bar{C}_{\mathfrak{a}}\right)$ — замыкание фундаментальной камеры Вейля;

$\epsilon\,(w) := (-1)^{\mathrm{length}(w)}$;

ρ , $(\rho_{\mathfrak{a}})$ — вектор Вейля;

L^{μ} $(L_{\mathfrak{a}}^{\nu})$ — интегрируемый модуль $\mathfrak{g}$ со старшим весом μ ; (соотв., интегрируемый $\mathfrak{a}$-модуль старшего веса ν);

$\mathcal{N}^{\mu}$, $(\mathcal{N}_{\mathfrak{a}}^{\nu})$ — весовая диаграмма модуля L^{μ} (соотв., $L_{\mathfrak{a}}^{\nu}$);

P (соотв., $P_{\mathfrak{a}}$) — весовая решетка;

P^{+} (соотв., $P_{\mathfrak{a}}^{+}$) — решетка доминантных весов;

$m_{\xi}^{(\mu)}$, $\left(m_{\zeta}^{(\nu)}\right)$ — кратность веса $\xi \in P$ (соотв., $\in \mathrm{P}_{\mathfrak{a}}$) в L^{μ}, (соотв., в $\zeta \in L_{\mathfrak{a}}^{\nu}$);

$ch\,(L^{\mu})$ (соотв., $\mathrm{ch}\,(L_{\mathfrak{a}}^{\nu})$)— формальный характер L^{μ} (соответственно, $L_{\mathfrak{a}}^{\nu}$);

$ch\,(L^{\mu}) = \frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w \circ (\mu+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^{+}} (1-e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}}$ — формула Вейля-Каца;

$R := \prod_{\alpha\in\Delta^+}\left(1-e^{-\alpha}\right)^{\mathrm{mult}(\alpha)}$ (соотв., $R_{\mathfrak{a}} := \prod_{\alpha\in\Delta_{\mathfrak{a}}^+}\left(1-e^{-\alpha}\right)^{\mathrm{mult}_{\mathfrak{a}}(\alpha)}$)— знаменатель Вейля.

2 Ортогональная подалгебра и сингулярные элементы

В этом разделе мы покажем, как рекуррентный подход к проблеме ветвления естественным образом приводит к представлению формального характера $\mathfrak{g}$-модуля в виде комбинации характеров, соответствующих параболическим (обобщенным) модулям Верма. Рассмотрим редуктивную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ и ее редуктивную подалгебру $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{g}$. Пусть L^{μ} – интегрируемый модуль старшего веса алгебры $\mathfrak{g}$, $\mu\in P^+$. Будем считать L^{μ} полностью приводимым по отношению к подалгебре $\mathfrak{a}$,

$$L^{\mu}_{\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{a}} = \bigoplus_{\nu\in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} L_{\mathfrak{a}}^{\nu}.$$

Это разложение может быть записано в терминах формальных характеров с использованием оператора проекции $\pi_{\mathfrak{a}}$ (на весовое пространство ${\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}}^*$):

$$\pi_{\mathfrak{a}} ch\left(L^{\mu}\right) = \sum_{\nu\in P_{\mathfrak{a}}^+} b_{\nu}^{(\mu)} ch\left(L_{\mathfrak{a}}^{\nu}\right). \tag{1}$$

Для модуля L^{μ} существует БГГ резольвента (см. [4, 10, 11] и [12]). Все члены фильтрующей последовательности представляются суммами модулей Верма со старшими весами ν, сильно связанными с μ:

$$\{\nu\} = \{w(\mu+\rho)-\rho | w\in W\}.$$

2.1 Ортогональная подалгебра

Пусть $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}$ – подалгебра Картана в $\mathfrak{g}$. Для $\mathfrak{a}\hookrightarrow\mathfrak{g}$ введем “ортогонального партнера” $\mathfrak{a}_{\perp}\hookrightarrow\mathfrak{g}$.

Рассмотрим корневое подпространство $\mathfrak{h}^*_{\perp\mathfrak{a}}$, ортогональное к $\mathfrak{a}$,

$$\mathfrak{h}^*_{\perp\mathfrak{a}} := \{\eta\in\mathfrak{h}^* | \forall h\in\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}; \eta(h)=0\},$$

и корни $\mathfrak{g}$ (соответственно, положительные корни) ортогональные к $\mathfrak{a}$,

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{a}_\perp} &: = \left\{\beta \in \Delta_{\mathfrak{g}} | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} ; \beta\left(h\right) = 0\right\}, \\ \Delta^+_{\mathfrak{a}_\perp} &: = \left\{\beta^+ \in \Delta^+_{\mathfrak{g}} | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} ; \beta^+\left(h\right) = 0\right\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Обозначим через $W_{\mathfrak{a}_\perp}$ подгруппу W, порожденную отражениями w_β с корнями $\beta \in \Delta^+_{\mathfrak{a}_\perp}$. Корневая подсистема $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}$ определяет подалгебру $\mathfrak{a}_\perp$, имеющую подалгебру Картана $\mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp}$. Пусть

$$\mathfrak{h}^*_\perp := \left\{\eta \in \mathfrak{h}^*_{\perp \mathfrak{a}} | \forall h \in \mathfrak{h}_{\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}_\perp} ; \eta\left(h\right) = 0\right\}$$

и у $\mathfrak{g}$ есть подалгебры

$$\widetilde{\mathfrak{a}_\perp} := \mathfrak{a}_\perp \oplus \mathfrak{h}_\perp \qquad \widetilde{\mathfrak{a}} := \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_\perp. \tag{3}$$

Заметим, что $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}_\perp$ в общем случае не является подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Для подалгебр Картана имеет место разложение

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp} \oplus \mathfrak{h}_\perp = \mathfrak{h}_{\widetilde{\mathfrak{a}}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp} = \mathfrak{h}_{\widetilde{\mathfrak{a}_\perp}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}}. \tag{4}$$

Рассмотрим векторы Вейля $\rho_{\mathfrak{a}}$ и $\rho_{\mathfrak{a}_\perp}$, соответствующие $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}_\perp$. Введем так называемые "дефекты" вложения $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}}$ и $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$:

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{a}} := \rho_{\mathfrak{a}} - \pi_{\mathfrak{a}}\rho, \qquad \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} := \rho_{\mathfrak{a}_\perp} - \pi_{\mathfrak{a}_\perp}\rho. \tag{5}$$

Для $\mu \in P^+$ рассмотрим связанные веса $\left\{\left(w(\mu+\rho)-\rho\right) | w \in W\right\}$ и их проекции на $h^*_{\mathfrak{a}_\perp}$, дополнительно сдвинутые на дефект $-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$:

$$\mu_{\mathfrak{a}_\perp}\left(w\right) := \pi_{\mathfrak{a}_\perp}\left[w(\mu+\rho)-\rho\right] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}, \quad w \in W.$$

Среди весов $\left\{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}\left(w\right) | w \in W\right\}$ всегда можно выбрать те, которые попадают в фундаментальную камеру $\overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}}$. Пусть U – множество представителей u классов $W/W_{\mathfrak{a}_\perp}$, таких что

$$U := \left\{u \in W | \quad \mu_{\mathfrak{a}_\perp}\left(u\right) \in \overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}}\right\} \quad . \tag{6}$$

Тогда можно выделить подмножества:

$$\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}\left(u\right) := \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}}}\left[u(\mu+\rho)-\rho\right] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}, \quad u \in U, \tag{7}$$

и

$$\mu_{\mathfrak{a}_\perp}\left(u\right) := \pi_{\mathfrak{a}_\perp}\left[u(\mu+\rho)-\rho\right] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}, \quad u \in U. \tag{8}$$

Заметим, что подалгебра $\mathfrak{a}_\perp$ по определению регулярна, так как она построена на подмножестве корней алгебры $\mathfrak{g}$.

Для интересующих нас модулей формула Вейля-Каца для $\mathrm{ch}\,(L^\mu)$ может быть записана через сингулярные элементы [9],

$$\Psi^{(\mu)} := \sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho},$$

а именно:

$$\mathrm{ch}\,(L^\mu) = \frac{\Psi^{(\mu)}}{\Psi^{(0)}} = \frac{\Psi^{(\mu)}}{R}. \tag{9}$$

То же верно и для подмодулей $\mathrm{ch}\,(L^\nu_{\mathfrak{a}})$ в формуле (1)

$$\mathrm{ch}\,(L^\nu_{\mathfrak{a}}) = \frac{\Psi^{(\nu)}_{\mathfrak{a}}}{\Psi^{(0)}_{\mathfrak{a}}} = \frac{\Psi^{(\nu)}_{\mathfrak{a}}}{R_{\mathfrak{a}}},$$

где

$$\Psi^{(\nu)}_{\mathfrak{a}} := \sum_{w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) e^{w(\nu+\rho_{\mathfrak{a}})-\rho_{\mathfrak{a}}}.$$

Применяя формулу (9) к правилу ветвления (1) мы получаем соотношение, связывающее сингулярные элементы $\Psi^{(\mu)}$ и $\Psi^{(\nu)}_{\mathfrak{a}}$:

$$\begin{aligned}
\pi_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\sum_{w \in W} \epsilon(w) e^{w(\mu+\rho)-\rho}}{\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1-e^{-\alpha})^{\mathrm{mult}(\alpha)}} \right) &= \sum_{\nu \in P^+_{\mathfrak{a}}} b^{(\mu)}_\nu \frac{\sum_{w \in W_{\mathfrak{a}}} \epsilon(w) e^{w(\nu+\rho_{\mathfrak{a}})-\rho_{\mathfrak{a}}}}{\prod_{\beta \in \Delta^+_{\mathfrak{a}}} (1-e^{-\beta})^{\mathrm{mult}_{\mathfrak{a}}(\beta)}}, \\
\pi_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\Psi^{(\mu)}}{R} \right) &= \sum_{\nu \in P^+_{\mathfrak{a}}} b^{(\mu)}_\nu \frac{\Psi^{(\nu)}_{\mathfrak{a}}}{R_{\mathfrak{a}}}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

2.2 Разложение сингулярного элемента.

Теперь мы выполним разложение сингулярного элемента $\Psi^{(\mu)}$ на сингулярные элементы модулей ортогонального партнера:

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{a}_\perp$ – ортогональный партнер редуктивной подалгебры $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp} \oplus \mathfrak{h}_\perp$, $\widetilde{\mathfrak{a}_\perp} = \mathfrak{a}_\perp \oplus \mathfrak{h}_\perp$, $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_\perp$.*

Пусть L^μ – интегрируемый модуль старшего веса $\mu \in P^+$ и $\Psi^{(\mu)}$ – сингулярный элемент L^μ.

Тогда элемент $\Psi^{(\mu)}$ может быть разложен в сумму по $u \in U$ (см. (6)) сингулярных элементов $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$ с коэффициентами $\epsilon(u) e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)}$:

$$\Psi^{(\mu)} = \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)} \Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть

$$u(\mu+\rho) = \pi_{(\widetilde{\mathfrak{a}})} u(\mu+\rho) + \pi_{(\mathfrak{a}_\perp)} u(\mu+\rho),$$

где $u \in U$. Для произвольного $v \in W_{\mathfrak{a}_\perp}$ рассмотрим сингулярный вес $vu(\mu+\rho) - \rho$ и выполним разложение:

$$\begin{array}{rcl} vu(\mu+\rho) - \rho & = & \pi_{(\mathfrak{a})}\left(u(\mu+\rho)\right) - \rho + \rho_{\mathfrak{a}_\perp} \\ & & + \; v\left(\pi_{(\widetilde{\mathfrak{a}}_\perp)} u(\mu+\rho) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp} + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}\right) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp}. \end{array} \tag{12}$$

Используем дефект $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$ (5), чтобы упростить первую строчку в формуле (12):

$$\begin{array}{c} \pi_{(\widetilde{\mathfrak{a}})}\left(u(\mu+\rho)\right) - \rho + \rho_{\mathfrak{a}_\perp} = \\ \pi_{(\widetilde{\mathfrak{a}})}\left(u(\mu+\rho)\right) - \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}}}\rho - \pi_{\mathfrak{a}_\perp}\rho + \rho_{\mathfrak{a}_\perp} = \\ = \pi_{(\widetilde{\mathfrak{a}})}\left(u(\mu+\rho) - \rho\right) + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}, \end{array}$$

и вторую

$$\begin{array}{c} v\left(\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)} u(\mu+\rho) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp} + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}\right) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp} = \\ v\left(\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)} u(\mu+\rho) - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} - \pi_{(\mathfrak{a}_\perp)}\rho + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}\right) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp} = \\ = v\left(\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)}\left[u(\mu+\rho) - \rho\right] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}\right) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp}. \end{array}$$

В результате получаем требуемое разложение сингулярного элемента Ψ^μ на сингулярные элементы $\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^\eta$ модулей $L_{\mathfrak{a}_\perp}^\eta$ подалгебры $\mathfrak{a}_\perp$:

$$\begin{array}{l} \Psi^\mu = \sum_{u \in U} \sum_{v \in W_{\mathfrak{a}_\perp}} \epsilon(v)\epsilon(u) e^{vu(\mu+\rho)-\rho} = \\ = \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\pi_{\widetilde{\mathfrak{a}}}[u(\mu+\rho)-\rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} \sum_{v \in W_{\mathfrak{a}_\perp}} \epsilon(v) e^{v\left(\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)}[u(\mu+\rho)-\rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}\right) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp}} = \\ = \sum_{u \in U} \epsilon(u) \Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\pi_{(\mathfrak{a}_\perp)}[u(\mu+\rho)-\rho] - \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} e^{\pi_{(\widetilde{\mathfrak{a}})}[u(\mu+\rho)-\rho] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}}. \end{array} \tag{13}$$

□

Замечание 1. Это соотношение можно рассматривать как обобщенную форму формулы Вейля для сингулярного элемента $\Psi_{\mathfrak{g}}^\mu$: векторы $\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)$

играют роль сингулярных весов, а чередующиеся множители $\epsilon(u)$ расширены до $\epsilon(u)\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$.

Действительно, при $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$ подалгебры $\mathfrak{a}_\perp$, и $\mathfrak{h}_\perp$ тривиальны, $U = W$ и оригинальная формула Вейля восстанавливается, так как сингулярные элементы $\epsilon(u)\Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} = \epsilon(u)$ становятся тривиальными.

В противоположном пределе, когда $\mathfrak{a} = 0$, $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp} = \Delta_{\mathfrak{g}}$, $\mathfrak{h}_\perp^* = 0$, $\mathfrak{a}_\perp = \mathfrak{g}$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp} = 0$ и $U = W/W_{\mathfrak{a}_\perp} = e$, опять восстанавливается сингулярный элемент Ψ^μ, теперь в результате тривиализации множества векторов $\mu_{\mathfrak{a}}(e) = 0$.

Замечание 2. В работе [7] разложение, аналогичное формуле (13), было использовано для построения рекуррентных соотношений для коэффициентов ветвления $k_\xi^{(\mu)}$, соответствующих вложению $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$:

$$k_\xi^{(\mu)} = -\tfrac{1}{s(\gamma_0)} \left(\textstyle\sum_{u \in U} \epsilon(u) \ \dim \left(L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} \right) \delta_{\xi-\gamma_0, \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u(\mu+\rho)-\rho)} + \right. \\ \left. + \textstyle\sum_{\gamma \in \Gamma_{\widetilde{\mathfrak{a}} \to \mathfrak{g}}} s\left(\gamma + \gamma_0\right) k_{\xi+\gamma}^{(\mu)} \right). \tag{14}$$

Рекурсия задается множеством $\Gamma_{\widetilde{\mathfrak{a}} \to \mathfrak{g}}$, называемом веером вложения. Это множество определяется как носитель $\{\xi\}_{\mathfrak{a} \to \mathfrak{g}}$ коэффициентной функции $s(\xi)$

$$\{\xi\}_{\widetilde{\mathfrak{a}} \to \mathfrak{g}} := \{\xi \in P_{\widetilde{\mathfrak{a}}} | s(\xi) \neq 0\},$$

возникающей в разложении

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_\perp^+} \left(1 - e^{-\pi_{\widetilde{\mathfrak{a}}}\alpha}\right)^{\mathrm{mult}(\alpha) - \mathrm{mult}_{\mathfrak{a}}(\pi_{\widetilde{\mathfrak{a}}}\alpha)} = -\sum_{\gamma \in P_{\widetilde{\mathfrak{a}}}} s(\gamma) e^{-\gamma}; \tag{15}$$

Веса из множества $\{\xi\}_{\widetilde{\mathfrak{a}} \to \mathfrak{g}}$ сдвигаются на γ_0 – младший вектор в $\{\xi\}$, и исключается нулевой элемент:

$$\Gamma_{\widetilde{\mathfrak{a}} \to \mathfrak{g}} = \{\xi - \gamma_0 | \xi \in \{\xi\}\} \setminus \{0\}. \tag{16}$$

Рекуррентное соотношение (14) первоначально использовалось для описания ветвления интегрируемых модулей. Заметим, что существует важный класс модулей, которые также могут быть редуцированы при помощи веера вложения – это модули Верма.

2.3 Фомулы Вейля-Верма.

Утверждение 1. *Для ортогональной подалгебры* $\mathfrak{a}_\perp$ *в* $\mathfrak{g}$ *(являющейся ортогональным партнером редуктивной подалгебры* $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$*) характер интегрируемого модуля старшего веса* L^μ *может быть представлен в виде комбинации (с целочисленными коэффициентами) характеров параболических модулей Верма, распределенных по множеству весов* $e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)}$*:*

$$\mathrm{ch}\,(L^\mu) = \sum_{u \in U} \epsilon(u) e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \mathrm{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}, \tag{17}$$

где $U := \left\{ u \in W | \quad \mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) \in \overline{C_{\mathfrak{a}_\perp}} \right\}$ *и* I *– такое подмножество в* S*, что* Δ_I^+ *эквивалентно* $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$*.*

Доказательство. Подалгебра $\mathfrak{a}_\perp$ регулярна и редуктивна по определению (2). Рассмотрим её знаменатель Вейля $R_{\mathfrak{a}_\perp} := \prod_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+} \left(1 - e^{-\alpha}\right)^{\mathrm{mult}_{\mathfrak{a}}(\alpha)}$ и элемент $R_J := \prod_{\alpha \in \Delta^+ \setminus \Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+} \left(1 - e^{-\alpha}\right)^{\mathrm{mult}(\alpha)}$ как сомножители в R:

$$R = R_J R_{\mathfrak{a}_\perp}.$$

Согласно этой факторизации и разложению (11) характер $\mathrm{ch}\,(L^\mu)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}\,(L^\mu) &= (R_J)^{-1} \left(R_{\mathfrak{a}_\perp}\right)^{-1} \Psi^\mu = (R_J)^{-1} \sum_{u \in U} e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \epsilon(u) \left(R_{\mathfrak{a}_\perp}\right)^{-1} \Psi_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} \\
&= (R_J)^{-1} \sum_{u \in U} e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \epsilon(u) \mathrm{ch}\left(L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} \right),
\end{aligned}$$

где $\left\{ L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} | u \in U \right\}$ – множество конечномерных $\mathfrak{a}_\perp$-модулей со старшими весами $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)$. Нас интересуют нетривиальные подалгебры $\mathfrak{a}$ и, соответственно, нетривиальные $\mathfrak{a}_\perp$ (случай тривиальной ортогональной подалгебры рассматривался выше в (см. Замечание 1)). Значит $r_{\mathfrak{a}} \geq 1$ и $r_{\mathfrak{a}_\perp} < r$. Так как диаграмма Дынкина для любой регулярной подалгебры получается в результате исключения одной, двух или более вершин из расширенной диаграммы Дынкина алгебры, а расширенная диаграмма содержит не более одного зависимого корня (старший корень), множество корней $\Delta_{\mathfrak{a}_\perp}^+$ всегда эквивалентно некоторому множеству Δ_I^+, порожденному набором простых корней $I \subset S$.

Следовательно мы можем (переопределяя множество Δ^+) отождествить $\Delta^+_{\mathfrak{a}_\perp}$ с подмножеством Δ^+_I, где $I \subset S$. В результате мы можем определить объекты, необходимые для построения обобщенных модулей Верма [3, 12]. У нас есть два множества корневых векторов $\left\{ x_\xi \in \mathfrak{g}_\xi | \xi \in \Delta^+_I \right\}$ и $\left\{ x_\eta \in \mathfrak{g}_\eta | \eta \in \Delta^+ \setminus \Delta^+_I \right\}$, и соответствующие нильпотентные подалгебры в $\mathfrak{n}^+$:

$$\mathfrak{n}^+_I := \sum_{\xi \in \Delta^+_I} \mathfrak{g}_\xi, \quad \mathfrak{u}^+_I := \sum_{\eta \in \Delta^+ \setminus \Delta^+_I} \mathfrak{g}_\eta.$$

Первая подалгебра вместе со своей отрицательной копией $\mathfrak{n}^-_I$ порождает простую подалгебру

$$\mathfrak{s}_I = \mathfrak{n}^-_I + \mathfrak{h}_I + \mathfrak{n}^+_I.$$

Мы расширяем ее оставшимися картановскими генераторами:

$$\mathfrak{l}_I = \mathfrak{n}^-_I + \mathfrak{h} + \mathfrak{n}^+_I.$$

Полупрямое произведение $\mathfrak{l}_I$ и $\mathfrak{u}^+_I$ дает параболическую подалгебру $\mathfrak{p}_I \hookrightarrow \mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{p}_I = \mathfrak{l}_I \rhd \mathfrak{u}^+_I. \tag{18}$$

Ее универсальная обертывающая $U(\mathfrak{p}_I)$ является подалгеброй в $U(\mathfrak{g})$. Модули $L^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}_{\mathfrak{a}_\perp}$ алгебры $\mathfrak{l}_I$ легко поднимаются до $\mathfrak{p}_I$-модулей при помощи тривиального действия нильрадикала $\mathfrak{u}^+_I$. Последний стандартным образом индуцирует $U(\mathfrak{g})$-модули:

$$M^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}_I = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}_I)} L^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}_{\mathfrak{a}_\perp}.$$

Это *обобщенные модули Верма* [3], порожденные старшими весами $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)$. Как $U\left(\mathfrak{u}^-_I\right)$-модуль каждый $M^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}_I$ изоморфен $U\left(\mathfrak{u}^-_I\right) \otimes L^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}_{\mathfrak{a}_\perp}$ и его характер можно записать при помощи функции Костанта-Хекмана [13], соответствующей вложению ортогонального партнера $\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}$:

$$\mathrm{ch} M^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}_I = \mathcal{KH}_{\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}} \mathrm{ch} L^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}_{\mathfrak{a}_\perp}.$$

Функция $\mathcal{KH}_{\mathfrak{a}_\perp \hookrightarrow \mathfrak{g}}$ генерируется знаменателем R_I, так что последнее выражение можно переписать следующим образом

$$\mathrm{ch} M^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}_I = \frac{1}{R_I} \mathrm{ch} L^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}_{\mathfrak{a}_\perp}.$$

Значит мы получили обобщенную формулу Вейля-Верма для характеров – разложение $\mathrm{ch}\,(L^{\mu})$ на характеры обобщенных модулей Верма:

$$\mathrm{ch}\,(L^{\mu}) = \sum_{u \in U} e^{\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}(u)} \epsilon(u) \mathrm{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}. \tag{19}$$

$\square$

Замечание 3. Здесь обобщенная формула Вейля-Верма для характеров (называемая формулой переменного суммирования в книге [12]) имеет специальный вид: веса $\mu_{\tilde{\mathfrak{a}}}$ и старшие веса обобщенных модулей Верма $\mu_{\mathfrak{a}_\perp}$ разделены. Причина в том, что старший вес M_I-модуля не равен проекции его максимального веса на $h^*_{\mathfrak{a}_\perp}$ (а должен быть дополнительно сдвинут на дефект).

Пример 1. Рассмотрим обобщенные модули Верма для вложения $A_1 \hookrightarrow B_2$, где подалгебра $\mathfrak{a}_\perp$ связана с корнем α_1 алгебры B_2. Обобщенный модуль Верма $M_I^{\omega_1}$ со старшим весом $\omega_1 = e_1$ показан на Рисунке 1.

Замечание 4. Как доказано, например, в книге [12] (см. утверждение 9.6), характеры обобщенных модулей Верма $M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$ могут также описываться как линейные комбинации обычных модулей Верма алгебры $\mathfrak{g}$:

$$\mathrm{ch} M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)} = \sum_{w \in W_{\mathfrak{a}_\perp}} \epsilon\,(w)\,\mathrm{ch} M^{w\left(\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) + \rho_{\mathfrak{a}_\perp}\right) - \rho_{\mathfrak{a}_\perp}}$$

Подставляя это выражение в формулу (19) и используя определения (7,8) и (5), мы восстанавливаем стандартное разложение Вейля-Верма для характера:

$$\mathrm{ch}\,(L^{\mu}) = \sum_{w \in W} \epsilon(u) \mathrm{ch} M^{w(\mu+\rho)-\rho}.$$

3 БГГ резольвента и ветвление

В работе [3] показано, что для модуля старшего веса L^{μ}, где $\mu \in P^+$, последовательность

$$0 \to M_r^I \xrightarrow{\delta_r} M_{r-1}^I \xrightarrow{\delta_{r-1}} \ldots \xrightarrow{\delta_1} M_0^I \xrightarrow{\varepsilon} L^{\mu} \to 0, \tag{20}$$

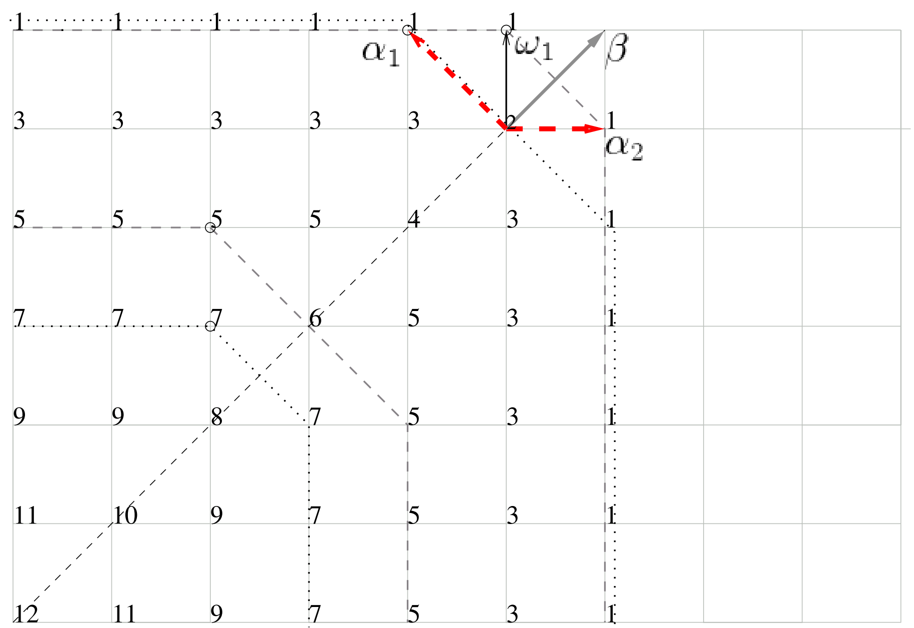

Рис. 1: Обобщенные модули Верма для регулярного вложения A_1 в B_2. Простые корни α_1, α_2 алгебры B_2 показаны пунктирными стрелками. Простой корень $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$ алгебры A_1 показан серым вектором. Разложение L^{ω_1} представлено набором контуров входящих в него обобщенных модулей Верма. Пунктирные контуры соответствуют положительным значениям $\epsilon(u)$, а точечные – отрицательным.

где

$$M_k^I = \bigoplus_{u \in U,\ \mathrm{length}(u)=k} M_I^{u(\mu+\rho)-\rho}, \quad M_0^I = M_I^\mu \tag{21}$$

(обобщенная БГГ резольвента), является точной и формула (17) следует из этого разложения.

Утверждение 2. *Пусть L^μ – $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $\mu \in P^+$, и пусть регулярная подалгебра $\mu \in P^+$ ортогональна редуктивной подалгебре $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$. Тогда разложение (11) определяет как обобщенную резольвенту L^μ по отношению к $\mathfrak{a}_\perp$, так и правила ветвления L^μ по отношению к подалгебре $\mathfrak{a}_\perp$, так и правила ветвления L^μ по отношению к $\mathfrak{a}$.*

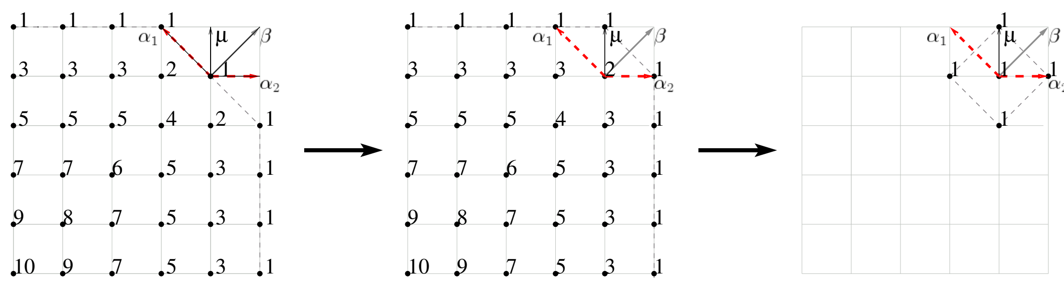

Рис. 2: Вложение $A_1 \hookrightarrow B_2$ (см. Рисунок 1). Ортогональный партнер – это подалгебра A_1, соответствующая корню α_1. Резольвента простого модуля L^{ω_1}. Показана центральная часть точной последовательности $0 \to Im(\delta_2) \to \left(e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(e)}\mathrm{ch}M_I^{\pi_{\mathfrak{a}_\perp}[\omega_1]-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}} = M_I^{\omega_1}\right) \to L^{\omega_1} \to 0$. Здесь $\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(e) = \pi_{\widetilde{\mathfrak{a}}}[\mu] + \mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$.

Доказательство. Положим

$$\mathrm{ch}M_I^{u(\mu+\rho)-\rho} = e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)}\mathrm{ch}M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}, \mathrm{ch}M_I^{\mu} = e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(e)}\mathrm{ch}M_I^{\pi_{\mathfrak{a}_\perp}[\mu]-\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}}$$

где $\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u), \mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)$ и $\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_\perp}$ определены как в Лемме 1, а $u \in U$ определено формулой (6). Тогда мы получаем элементы фильтрующей последовательности (20).

Рассмотрим множество $\{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u) \,|\, u \in U\}$ как множество старших весов простых модулей $L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}$ и вычислим размерности этих модулей. Вместе с $\{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u) \,|\, u \in U\}$ мы получим набор сингулярных весов

$$\left\{\epsilon(u)\, e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)} \dim\left(L_{\mathfrak{a}_\perp}^{\mu_{\mathfrak{a}_\perp}(u)}\right)\right\}.$$

Ветвление $L^{\mu}_{\mathfrak{g}\downarrow\mathfrak{a}} = \bigoplus\limits_{\nu \in P_{\mathfrak{a}}^+} b_\nu^{(\mu)} L_{\mathfrak{a}}^{\nu}$ определяется веером вложения $\Gamma_{\mathfrak{a}\to\mathfrak{g}}$ и соотношением (14), которое дает нам коэффициенты $k_\xi^{(\mu)}$, а значит определяет и $b_\nu^{(\mu)}$, так как $b_\nu^{(\mu)} = k_\nu^{(\mu)}$ при $\nu \in \overline{C_{\mathfrak{a}}}$. □

Следствие 0.1. *Пусть L^μ – $\mathfrak{g}$-модуль со старшим весом $\mu \in P^+$ и $\mathfrak{a} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ – редуктивная подалгебра $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{a}_\perp$ – ортогональный партнер для $\mathfrak{a}$, – эквивалентен A_1, $\mathfrak{a}_\perp \approx A_1$, и $\widetilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{h}_\perp$ с $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}} \oplus \mathfrak{h}_{\mathfrak{a}_\perp} \oplus \mathfrak{h}_\perp$. Пусть $L^{\mu}_{\mathfrak{g}\downarrow\widetilde{\mathfrak{a}}} = \bigoplus\limits_{\nu \in P_{\widetilde{\mathfrak{a}}}^+} b_\nu^{(\mu)} L_{\widetilde{\mathfrak{a}}}^{\nu}$ – ветвление модуля L^μ относительно подалгебры $\widetilde{\mathfrak{a}}$. Тогда коэффициенты $b_\nu^{(\mu)}$ определяют обобщенную резольвенту (20) модуля L^μ по отношению к $\mathfrak{a}_\perp$.*

Доказательство. Пусть α – простой корень A_1. Используем преобразования из группы Вейля чтобы перевести его в некоторый простой корень алгебры $\mathfrak{g}$, например α_1. Построим сингулярный элемент для модуля $L^{\mu}_{\mathfrak{g}\downarrow\widetilde{\mathfrak{a}}}$, то есть $\Psi_{\widetilde{\mathfrak{a}}}^{\left(L^{\mu}_{\mathfrak{g}\downarrow\widetilde{\mathfrak{a}}}\right)} = \sum_{\nu\in P^+_{\widetilde{\mathfrak{a}}}, b^{(\mu)}_{\nu}>0} b^{(\mu)}_{\nu}\Psi^{(\nu)}_{\widetilde{\mathfrak{a}}}$, и разложим его $\Psi_{\widetilde{\mathfrak{a}}}^{\left(L^{\mu}_{\mathfrak{g}\downarrow\widetilde{\mathfrak{a}}}\right)} = k^{(\mu)}_{\xi}e^{\xi}$. В нашем случае представители u в рекуррентном соотношении (14) определяются весом ξ однозначно:

$$\epsilon(u\left(\xi\right))\ \dim\left(L_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u(\xi))}\right) = -s\left(\gamma_0\right)k^{(\mu)}_{\xi} - \sum_{\gamma\in\Gamma_{\widetilde{\mathfrak{a}}\to\mathfrak{g}}} s\left(\gamma+\gamma_0\right)k^{(\mu)}_{\xi+\gamma}.$$

Тогда

$$\dim\left(L_{\mathfrak{a}_{\perp}}^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u(\xi))}\right) = \left| s\left(\gamma_0\right)k^{(\mu)}_{\xi} + \sum_{\gamma\in\Gamma_{\widetilde{\mathfrak{a}}\to\mathfrak{g}}} s\left(\gamma+\gamma_0\right)k^{(\mu)}_{\xi+\gamma}\right|$$

и

$$\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}\left(u\left(\xi\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\dim\left(L^{\mu(\xi)}_{A_1}\right) - 1\right)\alpha_1$$

Таким образом, множество обобщенных модулей Верма $e^{\xi+\mathcal{D}_{\mathfrak{a}_{\perp}}}\mathrm{ch}M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u(\xi))}$ теперь определено:

$$\left\{e^{\mu_{\widetilde{\mathfrak{a}}}(u)}\mathrm{ch}M_I^{\mu_{\mathfrak{a}_{\perp}}(u)}|u\in U\right\}.$$

Упорядочивая эти модули по длине u, мы получаем компоненты (21) резольвенты (20). □

4 Заключение

В работе [7] было показано, что метод веера вложения работает также и для специальных вложений. Надо заметить, что разложения Вейля-Верма также могут быть получены в этом случае. Резольвенты, соответствующие специальным подалгебрам, описывают соотношения между проекциями характера начального модуля и обобщенными модулями Верма со старшими весами в подпространстве h^*.

Рассмотрим ситуацию, когда выбор простых корней зафиксирован какими-то внешними факторами (возникающими, например, из требований физических приложений). В этом случае ортогональный партнер не может порождаться только простыми корнями. Элементы $\mathfrak{u}^+_I := \sum_{\eta\in\Delta^+\setminus\Delta^+_I}\mathfrak{g}_{\eta}$ не образуют подалгебру в $\mathfrak{g}$, так как некоторые не простые корни отсутствуют в $\Delta^+ \setminus \Delta_I^+$. Важно отметить, что в этом случае формула Вейля-Верма по-прежнему существует. В ней обобщенные модули Верма соответствуют сжатиями [14] алгебры $\mathfrak{n}^+$ и соотношения Вейля-Верма описывают разложение пространства представления L^μ в набор обобщенных модулей Верма сжатой алгебры $U(\mathfrak{n}_c^+)$. Весовые векторы образованы базисом Пуанкаре-Биркгофа-Витта алгебр $U(\mathfrak{n}_c^+)$ и $U(\mathfrak{a}_\perp)$. Чтобы рассмотреть такое пространство как $\mathfrak{g}$-модуль мы должны выполнить деформацию [15] алгебры $\mathfrak{n}_c^+$ (то есть восстановить первоначальный закон композиции). Пространство сохраняется и после такой деформации генераторы начальной алгебры будут действовать на нем правильным образом.

5 Благодарности

Авторы выражают свою искреннюю благодарность всем, кто подготовил и организовал III международную конференцию “Модели квантовой теории поля 2010”, посвященную 70-летию А.Н. Васильева.

Данная работа была частично поддержана грантом РФФИ № 09-01-00504 и лабораторией имени Чебышева (математико-механический факультет СПбГУ) из средств гранта 11.G34.31.2006 правительства Российской Федерации.

Список литературы

[1] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal field theory*. Springer, 1997.

[2] R. Coquereaux and G. Schieber, “From conformal embeddings to quantum symmetries: an exceptional SU (4) example,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 103, p. 012006, Institute of Physics Publishing. 2008. `arXiv:0710.1397`.

[3] J. Lepowsky, “A generalization of the Bernstein-Gelfand-Gelfand resolution,” *Journal of Algebra* **49** (1977) no. 2, 496–511.

[4] J. Bernstein, I. Gel’fand, and S. Gel’fand, “On a category of g-modules,” *Funktsional. Analiz i ego prilozheniya* **10** (1976) no. 2, 1–8.

[5] S. Derkachov and A. Manashov, "Noncompact sl(N) spin chains: Alternating sum representation for finite dimensional transfer matrices," `arXiv:1008.4734`.

[6] S. Derkachov and A. Manashov, "Factorization of $\mathcal{R}$ -matrix and Baxter $\mathcal{Q}$ -operators for generic $sl(N)$ spin chains," *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009), 075204.

[7] V. Lyakhovsky and A. Nazarov, "Recursive algorithm and branching for nonmaximal embeddings," *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011), 075205. `arXiv:1007.0318 [math.RT]`.

[8] M. Ilyin, P. Kulish, and V. Lyakhovsky, "On a property of branching coefficients for affine Lie algebras," *Algebra i Analiz* **21** (2009) 2, `arXiv:0812.2124 [math.RT]`.

[9] J. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory.* Springer, 1997.

[10] I. Bernstein, M. Gelfand, and S. Gelfand, "Differential operators on the base affine space and a study of g-modules," in *Lie groups and their representations, Summer school of Bolyai Janos Math.Soc., Budapest, 1971* Halsted Press, NY, (1975) 21–64.

[11] I. Bernstein, I. Gel'fand, and S. Gel'fand, "Structure of representations generated by vectors of highest weights," *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **5** (1971) no. 1, 1–8.

[12] J. Humphreys, *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category O.* Amer. Mathematical Society, 2008.

[13] G. Heckman *Invent. Math.* **67** (1982) 333–356.

[14] H. Doebner and O. Melsheimer, "On a Class of Generalized Group Contractions", *Nouvo Cimento A* **49** no. 2, (1967) 306–311.

[15] A. Nijenhuis and R.W. Richardson, "Cohomology and Deformations in Graded Lie Algebras," *Bull. Amer. Math. Soc.* **72** P. 1 (1966) 1–29.