Содержание

1 Модулярная инвариантность

Если мы изучаем конформную теорию поля на плоскости или на сфере, то мы можем рассматривать голоморфный и антиголоморфный сектора независимо. Если говорить о WZW-моделях, то примарные поля принадлежат тензорному произведению неприводимых представлений аффинной алгебры.

Если мы говорим о применении конформной теории для описания поведения струн, то теория должна быть определена на римановых поверхностях большего рода ($h > 0$), чтобы можно было описывать взаимодействия струн. Считается, что для этого необходимо (и, возможно, достаточно [1]) чтобы теория была определена на торе.

В теории критического поведения конформная инвариантность имеет место только в критической точке, где голоморфный и антиголоморфный сектора расцеплены. Но вблизи критической точки эти сектора должны быть связаны, и так как мы предполагаем плавный переход к критической точке в пространстве параметров, то эта связь должна сохраняться и в критической точке. Физический спектр теории должен плавно меняться, когда мы покидаем критическую точку, и связь голоморфного и антиголоморфного сектора вдали от критической точки должна приводить к ограничениям на набор состояний в критической точке. Этого можно достичь через геометрию, то есть накладывая граничные условия на состояния [2]. Здесь естественно рассматривать периодические граничные условия, которые эквивалентны рассмотрению теории на торе.

Если мы наложили периодические граничные условия с периодами $\omega_1, \omega_2,\ \tau = \omega_2/\omega_1$, то статсумма записывается в виде

$$Z(\tau) = Tr \exp 2\pi i(\tau(L_0 - c/24) - \bar{\tau}(\bar{L}_0 - c/24)) \qquad (1)$$

Или, если ввести $q = \exp 2\pi i\tau$

$$Z(\tau) = Tr \left(q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} \right) \qquad (2)$$

Двумерный тор представляет собой фактор пространство $\mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C}$ по отношениям эквивалентности $z \sim z + w_1$ and $z \sim z + w_2$, где w_1 и w_2 не параллельны.

Разные параметризации тора связаны модулярными преобразованиями, таким образом возникает требование модулярной инвариантности статсуммы.

Комплексная структура такого тора конформно эквивалентна тору, для которого соотношения эквивалентности записываются в виде $z \sim z + 1$ и $z \sim z + \tau$, где τ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}$.

Легко видеть, что τ, $T(\tau) = \tau + 1$ и $S(\tau) = -\frac{1}{\tau}$ описывают конформно-эквивалентные торы. Отображения T и S порождают группу $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$, состоящую из матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{где } a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1, \tag{3}$$

и матрицы A и $-A$ действуют одинаково на τ

$$\tau \to A\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \tag{4}$$

τ называется модулярным параметром, а группа $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$ — модулярной группой.

Конформная теория поля задаётся примарными полями Φ_a с конформными размерностями Δ_a:

$$\begin{aligned} \Phi_a(z) \underset{z \to w(z)}{\longrightarrow} \left(\frac{dw}{dz}\right)^{\Delta_a} \Phi_a(w(z)) \\ L_n \Phi_a = 0, \quad n > 0 \\ L_0 \Phi_a = \Delta_a \Phi_a \end{aligned} \tag{5}$$

Примарные поля живут в пространствах $\mathcal{H}_{(i,j)}$, которые представляют собой тензорные произведения неприводимого представления $\mathcal{H}_j$ киральной алгебры и неприводимого представления $\bar{\mathcal{H}}_{\bar{j}}$ антикиральной алгебры. Тогда статсуммы на торе (2) может быть переписана в виде

$$\sum_{(j,\bar{j})} \chi_j(q) \bar{\chi}_{\bar{j}}(\bar{q}) \tag{6}$$

где χ_j — характер пердставления $\mathcal{H}_j$,

$$\chi_j(\tau) = Tr_{\mathcal{H}_j}(q^{L_0 - \frac{c}{24}}) \quad \text{где } q = e^{2\pi i \tau} \tag{7}$$

Характеры переходят друг в друга при модулярных преобразованиях:

$$\chi_j\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_k S_{jk}\chi_k(\tau) \quad \text{и} \quad \chi_j(\tau+1) = \sum_k T_{jk}\chi_k(\tau), \tag{8}$$

где S и T — постоянные матрицы. Это верно для большого класса конформных теорий поля [1].

Для WZW-моделей представления определяются старшими весами $\hat{\lambda}, \hat{\xi}$. Тогда

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{\hat{\lambda},\hat{\xi}\in P_+^{(k)}} M_{\hat{\lambda},\hat{\xi}} L_{\hat{\lambda}} \otimes L_{\hat{\xi}} \tag{9}$$

Статсумма даётся выражением

$$Z(\tau) = \sum_{\hat{\lambda},\hat{\xi}\in P_+^{(k)}} \chi_{\hat{\lambda}}(\tau) M_{\hat{\lambda}\hat{\xi}} \bar{\chi}_{\hat{\xi}}(\bar{\tau}) \tag{10}$$

Элементы так называемой матрицы масс $M_{\hat{\lambda}\hat{\xi}}$ можно рассматривать как кратности примарных полей с весами $\hat{\lambda}, \hat{\xi}$. У них есть следующие свойства: $M_{\hat{\lambda}\hat{\xi}} \in \mathbb{Z}_+$, модулярная инвариантность

$$\begin{aligned} T^\dagger M T = S^\dagger M S = M, \\ [M,S] = [M,T] = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

и $M_{00} = 1$ для единственности вакуума.

Простейший случай диагональной матрицы M соответствует равным голоморфным и антиголоморфным конформным размерностям. Есть несколько способов построения недиагональных модулярных инвариантов из диагональных [2]:

- Метод внешних автоморфизмов
- Конформное вложение в большую теорию
- Перестановки Галуа

Мы будем обсуждать только конформные вложения.

2 Конформные вложения

Состояния в теории соответствующей алгебре g (с киральной алгеброй $Vir \ltimes \hat{g}$) имеют вид

$$J^{a_1}_{-n_1} J^{a_2}_{-n_2} \dots |\lambda\rangle \quad n_1 \geq n_2 \geq \dots > 0 \tag{12}$$

А для подалгебры $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$

$$\tilde{J}^{a'_1}_{-n_1} \tilde{J}^{a'_2}_{-n_2} \dots |\mathcal{P}\lambda\rangle \tag{13}$$

Здесь $\tilde{J}^{a'_j}_{-n_j}$ — генераторы $\mathfrak{p}$, а $\mathcal{P}$ — проекция $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{p}$. Очевидно, что $\mathfrak{g}$-инвариантность вакуума ведёт к его $\mathfrak{p}$-инвариантности, но нет оснований считать, что проекция сохраняет конформную инвариантность. Это легко увидеть из рассмотрения тензора энергии - импульса. Действительно, в тензоре энергии - импульса в виде Сугавары можно выделить часть, составленную из тех комбинаций генераторов g, которые входят в p. Но есть ещё и остаток. Из-за него действие генераторов Вирасоро на состояния (13) будет выводить из этого набора. Таким образом в ситуации общего положения конформная инвариантность нарушается.

Однако есть исключения. Так для представлений уровня 1 simply-laced алгебр тензор энергии - импульса в форме Сугавары состоит только из генераторов Картана. В этом случае он может быть пере-выражен через генераторы подалгебры и конформная инвариантность сохраняется. Тогда $T_{\hat{\mathfrak{g}}_k} = T_{\hat{\mathfrak{p}}_{\tilde{k}}} \Rightarrow c(\hat{\mathfrak{g}}_k) = c(\hat{\mathfrak{p}}_{\tilde{k}})$. Это можно переписать в виде равенства

$$\frac{k\ dim\mathfrak{g}}{k+g} = \frac{x_e k\ dim\mathfrak{p}}{x_e k + p} \tag{14}$$

Где x_e - индекс вложения, а g, p - дуальные числа Кокстера соответствующих алгебр и было использовано равенство $\tilde{k} = x_e k$.

$$x_e = \frac{|\mathcal{P}\Theta_g|^2}{|\Theta_p|^2}, \quad x_e = \sum_{\mu \in P_+} b_{\lambda\mu} \frac{x_\mu}{x_\lambda} \tag{15}$$

(Здесь x_λ - индекс представления со старшим весом λ:

$$x_\lambda = \frac{dim\,|\lambda|\,(\lambda, \lambda+\rho)}{2dimg} \tag{16}$$

)

Вложения, которые удовлетворяют условию (14), называются конформными.

Нетрудно показать, что решения уравнения (14) существуют только для уровня $k = 1$.

(Существует конечное число конформных вложений, они классифицированы).

Примеры

- $su(2) \subset su(3),\ x_e = 4$

- $\hat{su}(2)_{10} \subset \hat{sp}(4)_1$
- $\hat{su}(2)_{28} \subset (\hat{G}_2)_1$
- $\hat{su}(2)_{16} \oplus \hat{su}(3) \subset (\hat{E}_8)_1$

3 Конформные коэффициенты ветвления

Для ветвления аффинных алгебр $\hat{\lambda} \to \bigoplus_{\hat{\mu}} b_{\hat{\lambda}\hat{\mu}} \hat{\mu}$ существуют разные алгоритмы, однако мы можем существенно сократить работу при рассмотрении конформных вложений.

Во-первых, заметим, что если коэффициент $b_{\hat{\lambda}\hat{\mu}}$ отличен от нуля, то конечная часть старшего веса μ модуля $L_{\hat{\mu}}$ находится в некотором грейде n бесконечномерного модуля $L_{\hat{\lambda}}$ уровня 1. Сохранение конформной инвариантности ведет к соотношению для конформных размерностей соответствующих полей

$$\Delta_{\hat{\lambda}} + n = \Delta_{\hat{\mu}}, \tag{17}$$

которое переписывается в виде

$$\frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(1+g)} + n = \frac{(\mu, \mu + 2\rho)}{2(x_e + p)} \tag{18}$$

Используя этот факт можно легко вычислять правила ветвления. Для этого надо вычислить размерности интегрируемых представлений обеих алгебр $\mathfrak{g}, \mathfrak{p}$ и найти все тройки (λ, μ, n), удовлетворяющие соотношению (18). Затем рассматриваем разложения представления $L_{\hat{\lambda}}$ в грейде n в сумму неприводимых представлений конечномерной алгебры $\mathfrak{g}$ и выписываем правила ветвления этих представлений на представления подалгебры $\mathfrak{p}$. Коэффициент ветвления $b_{\hat{\lambda},\hat{\mu}}$ — это сколько раз представление со старшим весом μ появляется в этом списке.

Пример

$\hat{su}(2)_4 \subset \hat{su}(3)_1$. Список конформных размерностей:

$$\begin{aligned} &\hat{su}(2)_4 : h_{[4,0]} = 0, h_{[3,1]} = \frac{1}{8}, h_{[2,2]} = \frac{1}{3}, h_{[1,3]} = \frac{5}{8}, h_{[0,4]} = 1 \\ &\hat{su}(3)_1 : h_{[1,0,0]} = 0, h_{[0,1,0]} = h_{[0,0,1]} = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{19}$$

Отсюда видно, что

$$\begin{aligned} &[1,0,0] \to c_1[4,0]_0 \oplus c_2[0,4]_1 \\ &[0,1,0] \to c_3[2,2]_0 \\ &[0,0,1] \to c_4[2,2]_0 \end{aligned} \tag{20}$$

Где c_1, c_2, c_3, c_4 - коэффициенты, которые надо найти, а нижний индекс указывает грейд n.

Коэффициенты c_1, c_3, c_4 вычисляются из правил ветвления в нулевом грейде. В этом грейде $L_{\hat{\lambda}}$ содержит только L_λ. Из правил ветвления

$$(0,0) \to (0), \quad (1,0) \to (2), \quad (0,1) \to (2) \tag{21}$$

мы получаем, что $c_1 = c_3 = c_4 = 1$. c_2 вычисляется из представления грейда 1, содержащего конечномерное представление $(1,1)$ с правилом ветвления

$$(1,1) \to (4) \oplus (2) \tag{22}$$

То есть c_2 тоже равен 1.

После нахождения коэффициентов ветвления, недиагональные модулярные инварианты строятся путем подстановки соотношений для характеров. Например, зная коэффициенты ветвления для вложения $\hat{su}(2)_{28} \subset (\hat{G}_2)_1$

$$\begin{aligned} &[1,0,0] \to [28,0] \oplus [18,10] \oplus [10,18] \oplus [0,28] \\ &[0,0,1] \to [22,6] \oplus [16,12] \oplus [12,16] \oplus [6,22] \end{aligned} \tag{23}$$

мы получаем следующую модулярно-инвариантную статсумму:

$$Z = \left|\chi_{[28,0]} + \chi_{[18,10]} + \chi_{[10,18]} + \chi_{[0,28]}\right|^2 + \left|\chi_{[22,6]} + \chi_{[16,12]} + \chi_{[12,16]} + \chi_{[6,22]}\right|^2 \tag{24}$$

Список литературы

[1] M. Gaberdiel, “An introduction to conformal field theory,” *Reports on Progress in Physics* **63** (2000) no. 4, 607–668, `hep-th/9910156`.

[2] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal field theory.* Springer, 1997.