

WZW-модели и теория Черна-Саймонса

Антон Назаров
antonnaz@gmail.com

21 мая 2010 г.

Аннотация

WZW-модель - это сигма-модель с дополнительным членом Весса-Зумино, связанным с топологией. Существует связь таких моделей с пределом бесконечного числа цветов в калибровочных теориях. WZW-модели также связаны с моделями топологической теории поля - моделями Черна-Саймонса-Виттена в трех измерениях. Квантовые состояния в теории Черна-Саймонса с уровнем k ($SU(2)_k$) эквивалентны квантовым состояниям WZW-модели, связанной с представлениями уровня k аффинной алгебры Ли $\widehat{su(2)}$.

1 Конформная инвариантность

Откуда берется конформная инвариантность в физике конденсированного состояния и в теории струн?

Конформные преобразования:

$$M_{\mu\nu} \equiv i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu), \quad (1)$$

$$P_\mu \equiv -i\partial_\mu, \quad (2)$$

$$D \equiv -ix_\mu \partial^\mu, \quad (3)$$

$$K_\mu \equiv i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x_\nu \partial^\nu), \quad (4)$$

Конформная инвариантность тесно связана с масштабной инвариантностью и иногда даже прямо из нее следует. В физике конденсированного состояния масштабная инвариантность имеет место при фазовом переходе (стремление параметра порядка к бесконечности). Флуктуации при фазовом переходе конформно-инвариантны, что позволяет классифицировать фазовые переходы в терминах конформной теории поля [1], [2].

В теории струн действие инвариантно относительно репараметризаций мировой поверхности, в том числе конформных преобразований. Однако эта инвариантность не может быть сохранена при квантовании, поэтому возникает конформная аномалия и центральный заряд алгебры Вирасоро.

В двумерной теории поля локальная конформная группа бесконечномерна, хотя глобальная конформная группа конечномерна. Например, в конформной теории поля на сфере Римана глобальные конформные преобразования образуют группу Мебиуса $PSL(2, \mathbb{C})$. Алгебра же инфинитезимальных преобразований в классической теории — это алгебра Витта, при квантовании возникает конформная аномалия, что соответствует центральному расширению алгебры. Так появляется алгебра Вирасоро.

1.1 Конформная инвариантность в теории струн

Действие свободной релятивистской частицы — это длина траектории.

$$\begin{aligned} x^\mu(0) &= x_0^\mu, \quad x^\mu(1) = x_1^\mu \\ S &= \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)^2} d\tau \end{aligned} \quad (5)$$

Оно Пуанкаре-инвариантно $x^\mu \rightarrow A^\mu_\nu x^\nu + B^\mu$ и не зависит от репараметризаций $\tau \rightarrow f(\tau)$, $x^\mu(\tau) \rightarrow x^\mu(f(\tau))$.

Аналогично, струнное действие дается площадью мировой поверхности

$$\begin{aligned} X^\mu(x^1, x^2), \quad \mu = 1 \dots d \\ S_N[X^\mu(x^1, x^2)] = \int \sqrt{\det \frac{\partial X^\mu}{\partial x^a} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^b}} dx^1 dx^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Такое действие называется действием Намбу. Оно инвариантно относительно преобразований Лоренца и репараметризаций.

Амплитуда перехода для струны дается следующей формулой:

$$A = \int \mathcal{D}X^\mu(x^1, x^2) e^{-S_N[X^\mu(x^1, x^2)]} \quad (7)$$

Сложность, как всегда, состоит в определении меры интегрирования. Она плохо определена как и в большинстве случаев, так что теория струн здесь не выделяется.

Мы хотим сделать замену “переменных интегрирования”, чтобы избавиться от произвола в выборе параметризации мировой поверхности.

Теория должна быть инвариантна относительно репараметризаций:

$$\begin{aligned} x^a &\rightarrow f^a(x^1, x^2) \\ X^\mu(x^1, x^2) &\rightarrow \tilde{X}^\mu(x^1, x^2) = X^\mu(f^1(x^1, x^2), f^2(x^1, x^2)) \end{aligned} \quad (8)$$

Но в действии Намбу эта инвариантность не видна, поэтому мы перейдем к эквивалентному действию Полякова:

$$\begin{aligned} S_P[g^{ab}(x^1, x^2), X^\mu(x^1, x^2)] &= \int g^{ab}(x) \partial_a X^\mu \partial_b X^\mu \sqrt{g} d^2x \\ g &= \det g_{ab} \end{aligned} \quad (9)$$

Действия Полякова и Намбу эквивалентны в том смысле, что уравнения движения совпадают после исключения вспомогательного поля g_{ab} .

$$\delta_X S_N = 0 \iff \begin{cases} \delta_X S_P = 0 \\ \delta_g S_P = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Действие Полякова инвариантно относительно преобразований Лоренца и репараметризаций мировой поверхности:

$$\begin{aligned} x^a &\rightarrow f^a(x^1, x^2) \\ X^\mu(x^1, x^2) &\rightarrow \tilde{X}^\mu(x^1, x^2) = X^\mu(f^1(x^1, x^2), f^2(x^1, x^2)) \\ g_{ab}(x) &\rightarrow \tilde{g}_{ab}(x) = \frac{\partial f^{a_1}}{\partial x^a} \frac{\partial f^{b_1}}{\partial x^b} g_{a_1 b_1}(x) \end{aligned} \quad (11)$$

Кроме того, есть дополнительная симметрия, которая называется вейлевской или конформной инвариантностью:

$$\begin{aligned} g_{ab}(x) &\rightarrow e^{\sigma(x)} g_{ab}(x) \\ g &\rightarrow e^\sigma g \\ g^{ab} &\rightarrow e^{-\sigma} g^{ab} \\ S_P[e^{\sigma(x)} g_{ab}(x), X^\mu] &= S_P[g_{ab}(x), X^\mu] \end{aligned} \quad (12)$$

То есть у нас довольно большая свобода — мы можем, например, получить произвольную метрику на сфере из постоянной метрики путем репараметризации и преобразования Вейля

$$g_{ab}(x) = [e^{\sigma(x)} \hat{g}_{ab}]^{x^a \rightarrow f^a(x)} \quad (13)$$

Для поверхностей большего рода существуют дискретные семейства эквивалентных метрик.

При квантовании невозможно сохранить все симметрии. Поэтому мы сохраняем Лоренц-инвариантность и инвариантность относительно репараметризаций, но нарушаем конформную инвариантность. Возникает так называемая конформная аномалия.

Поясним это для амплитуды перехода

$$A = \int \mathcal{D}X^\mu(x^1, x^2) e^{-S_P[g_{ab}, X^\mu(x^1, x^2)]} \quad (14)$$

Легко видеть, что норма инвариантна относительно репараметризаций:

$$\begin{aligned} \|\delta X^\mu\|^2 &= \int (\delta X^\mu(x))^2 \sqrt{g} d^2x \\ \|\delta g_{ab}\|^2 &= \int \delta g_{a_1 b_1} \delta g_{a_2 b_2} g^{a_1 a_2} g^{b_1 b_2} \sqrt{g} d^2x \end{aligned} \quad (15)$$

Чтобы понять, что происходит с Вейлевской инвариантностью при квантовании, введем эффективное действие. Мы интегрируем по полям X^μ и получаем следующий результат.

$$e^{-S_X^{eff}[g_{ab}]} \stackrel{def}{=} \int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_P[g_{ab}, X]} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} S_X^{eff}[e^{\sigma(x)} g_{ab}(x)] &= S_X^{eff}[g_{ab}] + \frac{d}{48\pi} W[g, \sigma] \\ W[g, \sigma] &= \int \left[\frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \sigma \partial_b \sigma + R[g] \sigma + \mu e^\sigma \right] \sqrt{g} d^2x \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь R - скалярная кривизна g_{ab} , а μ - параметр, зависящий от выбора регуляризации. Например, в регуляризации собственного времени $\mu = \frac{1}{4\pi\epsilon}$. Член $W[g, \sigma]$ имеет вид действия Лиувилля.

Замечание $\int R[x] \sqrt{g} d^2x = 4\pi \chi_E$, $\chi_E = 2 - 2h$, χ_E - характеристика Эйлера поверхности, h - род поверхности.

$W[g, \sigma]$ называют конформной аномалией.

Вариация действия

$$\begin{aligned} \delta S[g_{ab}, X] &= -\frac{1}{4\pi} \int \delta g^{ab} T_{ab} \sqrt{g} d^2x \\ g_{ab} &\rightarrow g_{ab} + \delta g_{ab} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} g_{ab} &\rightarrow e^\sigma g_{ab} \xrightarrow{\sigma \ll 1} (1 + \delta\sigma) g_{ab} \\ \delta S[g_{ab}, X] &= -\frac{1}{4\pi} \int \delta\sigma g^{ab} T_{ab} \sqrt{g} d^2x \end{aligned} \quad (19)$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow g^{ab} T_{ab} = 0 \quad (20)$$

Видно, что Вейлевская инвариантность эквивалентна бесследовости тензора энергии-импульса.

После квантования получаем

$$g^{ab} \langle T_{ab} \rangle = -\frac{d}{12} R[g] \quad (21)$$

Definition 1. Двумерная конформная теория поля — это теория, в которой действие преобразуется как в (17).

Множитель при $W[g, \sigma]$ называется *центральный зарядом*.

Сейчас у нас слишком много свободы в функциональном интеграле (14) — диффеоморфизмы (8) и преобразования Вейля (115). Мы хотим зафиксировать калибровку так, чтобы метрика давалась формулой

$$g_{ab} = [e^\phi \hat{g}_{ab}]^{f^a} \quad (22)$$

В результате этой процедуры возникают духи Фаддеева-Попова.

$$\begin{aligned} A &= \int \mathcal{D}X^\mu(x^1, x^2) e^{-S_P[g_{ab}, X^\mu(x^1, x^2)]} = \\ &= \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}X \mathcal{D}B_{ab} \mathcal{D}C^a e^{-S_P[e^\phi \hat{g}_{ab}, X] - S_{gh}[e^\phi \hat{g}_{ab}, B, C]} \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь B, C — поля духов, $B_{ab}(X)$ — симметричный бесследовый тензор. Все функциональные интегралы используют метрику $e^\phi \hat{g}$.

$$S_{gh} = \int g^{ac} B_{ab} \nabla_c C^b \sqrt{g} d^2x \quad (24)$$

Теперь мы можем зафиксировать вейлевскую инвариантность так, чтобы мера интегрирования по полям материи и полям духов (131) не зависела от ϕ . Тогда в экспоненте возникает конформная аномалия:

$$A = \int \mathcal{D}_{e^\phi \hat{g}} \mathcal{D}_{\hat{g}} X \mathcal{D}_{\hat{g}} B_{ab} \mathcal{D}_{\hat{g}} C^a e^{-S_P[e^\phi \hat{g}_{ab}, X] - S_{gh}[e^\phi \hat{g}_{ab}, B, C] + \frac{d-26}{48\pi} W[\hat{g}_{ab}, \phi]} \quad (25)$$

$\frac{d}{48\pi}$ возникает из полей материи, а $\frac{-26}{48\pi}$ — из полей духов, так как оба эффективных действия являются действиями двумерной конформной теории поля.

Обычная бозонная струна живет в 26 измерениях и не взаимодействует с гравитацией Лиувилля. Такая струна называется “критической”, так

как может существовать при критическом значении размерности пространства. Другие струнные модели называются некритическими струнами.

Первое интегрирование в (134) очень неудобно, так как приходится интегрировать по ϕ с мерой, зависящей от ϕ . Эта мера $\mathcal{D}_{e^{\phi}\hat{g}}\phi$ соответствует интервалу

$$\|\delta\phi\|_P^2 = \int e^{\phi}(\delta\phi)^2 \sqrt{\hat{g}} d^2x \quad (26)$$

Он не линеен и не инвариантен относительно сдвигов $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \eta(x)$. В течении некоторого времени это было существенной проблемой, так как никто не знал, как работать с такими объектами.

Но Дэвид, Дистлер и Каваи предложили изменить действие так, чтобы учесть изменение меры интегрирования к нормированной.

Они предположили, что амплитуда может быть записана в виде

$$A = \int \mathcal{D}_{\hat{g}}\phi \mathcal{D}_{\hat{g}}X \mathcal{D}_{\hat{g}}(B, C) e^{-S_P[\hat{g}, X] - S_{gh}[\hat{g}, B, C] - S_L[\hat{g}, \phi]} \quad (27)$$

где мера интегрирования $\mathcal{D}_{\hat{g}}\phi$ соответствует интервалу $\|\delta\phi\|_{DDK}^2 = \int (\delta\phi)^2 \sqrt{\hat{g}} d^2x$ и инвариантна относительно сдвигов $\phi \rightarrow \phi + \eta$ ($\delta\phi \rightarrow \delta\phi$). S_L здесь - действие Лиувилля с двумя пока не определенными параметрами Q и b :

$$S_L[\hat{g}, \phi] = \frac{1}{8\pi} \int \left[\frac{1}{2} \hat{g}^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi + QR\phi + \mu e^{2b\phi} \right] \sqrt{\hat{g}} d^2x \quad (28)$$

Мы выбираем следующую нормировку:

$$\langle \phi(x) \phi(0) \rangle = \log |x|^2 \quad (29)$$

Член Лиувилля должен быть инвариантен при дилатациях $\hat{g}_{ab} \rightarrow e^{\sigma} \hat{g}_{ab}$.

После того, как мы положили

$$Q = \frac{1}{b} + b \quad (30)$$

действие Лиувилля становится конформным, так что

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}_{\hat{g}}\phi e^{-S_L[\hat{g}, \phi]} &= e^{-S_L^{eff}[\hat{g}]} \\ S_L^{eff}[e^{\sigma}\hat{g}] &= S_L^{eff}[\hat{g}] + \frac{C_L}{12} W[\hat{g}, \sigma] \end{aligned} \quad (31)$$

Где

$$C_L = 1 + 6Q^2 \quad (32)$$

Теперь мы требуем сокращения суммарного центрального заряда:

$$C_X + C_{gh} + C_L = C_{tot} = 0 \quad (33)$$

В результате амплитуда не зависит от \hat{g} и параметры Q, b фиксированы.

$$d + 1 + 6 \left(b + \frac{1}{b} \right)^2 = 26 \quad (34)$$

Мы можем положить

$$\hat{g}_{ab} = \delta_{ab} \quad (35)$$

в некоторой конечной области. Кроме того, могут возникать топологические члены.

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} x^1 + i x^2 &= z \\ x^1 - i x^2 &= \bar{z} \\ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 &= dz d\bar{z} \end{aligned} \quad (36)$$

Для полей и членов действия имеем

$$\begin{aligned} C^z &= C, \quad C^{\bar{z}} = \bar{C} \\ B_{zz} &= B, \quad B_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{B} \\ S_{gh} &= \int d^2 z [B \bar{\partial} C + \bar{B} \partial \bar{C}] \\ S_P[X] &= \int d^2 z \bar{\partial} X \partial X \end{aligned} \quad (37)$$

$$S_L[\phi] \propto \int d^2 z [\bar{\partial} \phi \partial \phi + \mu e^{2b\phi}] + (\text{топологические члены})$$

$$e^{-S^{eff}[g]} = \int \mathcal{D}X e^{-\int g^{ab} \partial_a X \partial_b X \sqrt{g} d^2 x} = \int \mathcal{D}_g X e^{-\int X \Delta X \sqrt{g} d^2 x} \quad (38)$$

Оператор Лапласа зависит от метрики

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a \sqrt{g} g^{ab} \partial_b \quad (39)$$

Это самосопряженный оператор.

Поле X может быть разложено по собственным функциям оператора Лапласа $X(x) = \sum c_n X_n$, $\Delta X_n = \lambda_n X_n$, $\lambda_n = \lambda_n[g]$. Тогда от интегрирования по всем полям X мы перейдем к интегрированию по всем собственным функциям. Этот интеграл может быть (условно) записан

в виде произведения собственных значений оператора Лапласа или как его детерминант

$$e^{-S^{eff}[g]} = \left(\prod_n \lambda_n \right)^{-\frac{1}{2}} = (\det \Delta)^{-\frac{1}{2}} \quad (40)$$

Очевидно, что мы не можем вычислить все λ_n , но мы можем получить детерминант.

$$S^{eff}[g] = \log \det \Delta = tr \log \Delta \quad (41)$$

$$\log \frac{\lambda}{\lambda_0} = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}}{t} dt \quad (42)$$

$$\delta S^{eff}[g] = tr(\log \Delta - \log \Delta_{g_0}) = \delta tr \int_0^\infty \frac{e^{-\Delta t}}{t} dt \quad (43)$$

Последний интеграл расходится, поэтому его необходимо регуляризовать. Мы используем регуляризацию теплового ядра.

$$\delta S^{eff}[g] = \delta tr \int_\epsilon^\infty \frac{e^{-\Delta t}}{t} dt \quad (44)$$

Как уже отмечалось, \hat{g}_{ab} можно положить равным $\rho dz d\bar{z}$ в конечной области. Тогда

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \bar{\partial} \partial \quad (45)$$

Для вариации эффективного действия имеем:

$$\begin{aligned} \delta_\rho S^{eff}[g] &= \delta_\rho tr \int_\epsilon^\infty e^{-\frac{1}{\rho} \bar{\partial} \partial t} \frac{dt}{t} = \\ &= -tr \int_\epsilon^\infty \delta_\rho \Delta e^{-\Delta t} dt = -tr \int_\epsilon^\infty \frac{\delta \rho}{\rho} \Delta e^{-\Delta t} dt = \\ &= -tr \int_\epsilon^\infty \frac{\delta \rho}{\rho} \frac{d}{dt} e^{-\Delta t} dt = -tr \frac{\delta \rho}{\rho} e^{-\Delta \epsilon} \end{aligned} \quad (46)$$

Введем функцию Грина для уравнения теплопроводности

$$G(t, x, y) = \sum_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) X_n(y) \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= \Delta_x G(t, x, y) \\ G(o, x, y) &= \delta^2(x - y) \\ G(t, x, x) &= \frac{1}{4\pi t} + aR + O(t) \end{aligned} \quad (48)$$

Теперь вариация действия имеет вид

$$\delta S^{eff}[g] = \int d^2x \frac{\delta \rho}{\rho} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon} + aR \right) \quad (49)$$

Здесь не хватает какого-то вывода.

В конформной теории поля

$$g^{ab} \langle T_{ab} \rangle = \frac{C}{12} R[g] \quad (50)$$

C — центральный заряд.

Для плоской метрики $g_{ab} = \delta_{ab}$ имеем

$$g^{ab} \langle T_{ab} \rangle = 0 \quad (51)$$

Положим $T_{zz} = T$, $T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}$, $T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z}$. В плоском пространстве из уравнения неразрывности $\bar{\partial}T_{zz} + \partial T_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ следует

$$\begin{aligned} T_{z\bar{z}} &= 0 \\ \bar{\partial}T_{zz} &= \bar{\partial}T = 0, \quad T\text{- голоморфная} \\ \partial T_{\bar{z}\bar{z}} &= \partial\bar{T} = 0, \quad \bar{T}\text{- антиголоморфная} \end{aligned} \quad (52)$$

В искривленном пространстве уравнение неразрывности имеет вид $\nabla_a T^{ab} = 0$ и мы можем выбрать такую систему координат, в которой $g_{ab} dx^a dx^b = \rho dz d\bar{z} = e^\sigma dz d\bar{z}$. Теперь введем псевдоэнергию T :

$$T_{zz} + \frac{C}{12} t_{zz} = T \quad (53)$$

где $t_{zz} = (\partial\sigma)^2 - 2\partial^2\sigma$. Легко проверить, что в этом случае $\bar{\partial}T = 0$.

При преобразованиях $z \rightarrow w(z)$ величины преобразуются следующим образом

$$\begin{aligned} T_{zz} &\rightarrow \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 T_{ww}(w(z)) \\ t &\rightarrow \left(\frac{dw}{dz} \right) t(w) + 2\{w, z\} \\ \text{где } \{w, z\} &= \left(\frac{\partial_z^3 w}{\partial_z w} - \frac{3}{2} \left(\frac{\partial_z^2 w}{\partial_z w} \right)^2 \right) \\ T &\rightarrow \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 T(w) + \frac{C}{12} \{w, z\} \end{aligned} \quad (54)$$

Тензор энергии-импульса является генератором преобразований координат $x^a \rightarrow x^a + \epsilon^a(x)$:

$$\delta_\epsilon \langle A_1(x_1) \dots A_N(x_N) \rangle = \int d^2x \partial_a \epsilon_b(x) \langle T_{ab}(x) A_1(x_1) \dots A_N(x_N) \rangle \quad (55)$$

Выполняются следующие требования:

$$\begin{aligned} T_{aa} &= 0 \\ \partial_a \epsilon_b + \partial_b \epsilon_a &\sim \delta_{ab} \\ \epsilon^a &= \epsilon x^a \text{ or } x^a \rightarrow \frac{x^a}{(\vec{x})^2} \end{aligned} \quad (56)$$

Корреляционные функции не меняются при конформных преобразованиях

$$\delta_\epsilon A(x) = \int_{\partial D} dy^a \epsilon^b \tilde{T}_{ab}(y) A(x) - \int_D d^2y \partial^a \epsilon^b(y) T_{ab}(y) A(x) \quad (57)$$

Здесь $\tilde{T}_{ab} = \epsilon_{ac} T_{cb}$.

Пусть

$$\begin{aligned} \partial_a \epsilon_b + \partial_b \epsilon_a &\sim \delta_{ab} \\ \bar{\partial} \epsilon &= 0 \\ z &\rightarrow z + \epsilon(z, \bar{z}) \\ \bar{z} &\rightarrow \bar{z} + \bar{\epsilon}(z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (58)$$

$$\delta_\epsilon A(z, \bar{z}) = \oint_z du \epsilon(u) T(u) A(z, \bar{z}) \quad (59)$$

Подставляя $T(z)$ на место произвольного оператора A получаем

$$\delta_\epsilon T(z) = \oint_z du \epsilon(u) T(u) T(z) \quad (60)$$

Если $w(z) = z + \epsilon(z)$, где ϵ мало, T преобразуется следующим образом:

$$T(z) \rightarrow \epsilon T'(z) + 2\epsilon' T(z) + \frac{C}{12} \epsilon''' \quad (61)$$

$$\delta_\epsilon T(z) = \oint du \epsilon(u) T(u) T(z) = \epsilon T'(z) + 2\epsilon' T(z) + \frac{C}{12} \epsilon''' \quad (62)$$

Предположим, что для полного набора операторов $\{A_j(x)\}$ существует операторное разложение:

$$A_i(x) A_j(0) = \sum C_{ij}^k(x) A_k(0) \quad (63)$$

Тогда для произведения $T(u)T(z)$ получаем

$$T(u)T(z) = \sum C_k(u-z)A_k(z) \quad (64)$$

Полюса можно восстановить из формулы (62):

$$T(u)T(z) = \frac{C}{2(u-z)^4} + \frac{2T(z)}{(u-z)^2} + \frac{T'(z)}{u-z} + \text{несингулярные члены} \quad (65)$$

Теперь введем операторы L_n :

$$L_n A(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_C du (u-z)^{n+1} T(u) A(z) \quad (66)$$

Можно показать, что для $n, m \in \mathbb{Z}$

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{C}{12}(n^3-n)\delta_{n,-m} \quad (67)$$

и операторы $\{L_n\}$ образуют алгебру Вирасоро.

Все поля в теории оказываются суммами мультиплетов алгебры Вирасоро:

$$\{A_j\} = \sum [\Phi_{\Delta, A}] \quad (68)$$

В каждом мультиплете есть одно примарное поле, которое преобразуется так:

$$\begin{aligned} \Phi_{\Delta}(z) &\xrightarrow{z \rightarrow w(z)} \left(\frac{dw}{dz} \right)^{\Delta} \Phi_{\Delta}(w(z)) \\ L_n \Phi &= 0, \quad n > 0 \\ L_0 \Phi &= \Delta \Phi \end{aligned} \quad (69)$$

Все остальные поля называются вторичными и получаются из примарного действием операторов L_{-n} :

$$L_{-n_1} L_{-n_2} \dots \Phi_{\Delta} \quad (70)$$

Например, следующие поля инвариантны относительно преобразований Вейля

$$O_a = \int \Phi_{\Delta} e^{2a\phi} d^2x, \quad \text{где } \Delta + a(Q-a) = 1 \quad (71)$$

O_a - главная наблюдаемая теории струн с гравитационной размерностью $\delta_a = -\frac{a}{b}$.

$$\int \langle O_{a_1} \dots O_{a_n} \rangle_{\mu} e^{-\mu A} d\mu = \langle O_{a_1} \dots O_{a_n} \rangle_A = A^{\sum \delta_k}, \quad \delta_k = \frac{a_k}{b} \quad (72)$$

Корреляционные функции выражаются как комбинации корреляционных функций примарных полей.

Осталось определить только скейлинговые размерности примарных полей. Чтобы определить теорию полностью надо задать Φ_a , Δ_a , C_{ab}^c . Если число примарных полей конечно, то теория называется *минимальной*.

1.2 Конформные блоки

Примарные поля преобразуются по формуле (69) в голоморфной и антиголоморфной части, то есть полностью

$$\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\Delta} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}} \Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(w, \bar{w}) \quad (73)$$

Операторное разложение примарных полей

$$\Phi_{\Delta_1,\bar{\Delta}_1}(z, \bar{z})\Phi_{\Delta_2,\bar{\Delta}_2}(0, 0) = \sum_i A_i z^{\Delta_i-\Delta_1-\Delta_2} \bar{z}^{\bar{\Delta}_i-\bar{\Delta}_1-\bar{\Delta}_2} [\Phi_{\Delta_i,\bar{\Delta}_i}(z, \bar{z})] \quad (74)$$

Здесь выражение в квадратных скобках обозначает вклад всех полей конформного семейства $\Phi_{\Delta_i,\bar{\Delta}_i}$. Рассмотрим четырехточечную корреляционную функцию.

$$\langle \Phi_{\Delta_4,\bar{\Delta}_4}(z_4, \bar{z}_4)\Phi_{\Delta_3,\bar{\Delta}_3}(z_3, \bar{z}_3)\Phi_{\Delta_2,\bar{\Delta}_2}(z_2, \bar{z}_2)\Phi_{\Delta_1,\bar{\Delta}_1}(z_1, \bar{z}_1) \rangle \quad (75)$$

При помощи проективного преобразования комплексной плоскости можно поместить три из четырех операторов в заданные точки, например $z_1 = 0, z_2 = z, z_3 = 1, z_4 = \infty$, так что корреляционная функция зависит от одной комплексной переменной

$$z = \frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)} \quad (76)$$

Используя разложение (74), получаем для корреляционной функции

$$\langle \Phi_{\delta_4,\bar{\delta}_4}(\infty, \infty)\Phi_{\delta_3,\bar{\delta}_3}(1, 1)\Phi_{\delta_2,\bar{\delta}_2}(z, \bar{z})\Phi_{\delta_1,\bar{\delta}_1}(0, 0) \rangle = \sum_i G_i \mathcal{F}(c, \Delta_i, \delta_k, z) \mathcal{F}(c, \bar{\Delta}_i, \bar{\delta}_k, \bar{z}) \quad (77)$$

Функция \mathcal{F} называется конформным блоком, а константы G_i выражаются через A_i .

Аналогично для случая многочастичных разложений.

Из требований конформной инвариантности и предположения о существовании операторного разложения получаем требование голоморфной факторизации

$$\langle \Phi_{\Delta_1, \bar{\Delta}_1}(z_1, \bar{z}_1) \dots \Phi_{\Delta_N, \bar{\Delta}_N}(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \sum C^{ab} \mathcal{F}_a(z_1, \dots, z_N) \overline{\mathcal{F}_b(z_1, \dots, z_N)} \quad (78)$$

Функции $\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}$ называются конформными блоками.

В WZW-моделях на уравнения Книжника-Замолодчикова можно переписать в терминах конформных блоков. Вообще если известно пространство конформных блоков, то можно найти все константы в операторных разложениях.

При изучении теории на поверхностях рода больше единицы основной вопрос состоит именно в построении пространства конформных блоков.

1.3 Модулярные преобразования

Конформная инвариантность в квантовой и классической теории поля. Глобальная конформная инвариантность. Уравнения Книжника-Замолодчикова. Локальная конформная инвариантность. Бесследовость тензора энергии-импульса. Голоморфная факторизация.

2 Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена

Связь WZW-моделей с топологией, обоснование с точки зрения предела калибровочной теории.

Стартуем с нелинейной σ -модели.

$$S_0 = \frac{1}{4a^2} \int d^2x \operatorname{Tr}'(\partial^\mu g^{-1} \partial_\mu g) \quad (79)$$

Здесь $a^2 > 0$ - положительный параметр, $g(x) \in G$ - поле со значениями в группе G , которую мы будем считать полупростой, а через Tr' мы обозначили след, не зависящий от выбора представления алгебры Ли \mathfrak{g}

$$\operatorname{Tr}' = \frac{1}{x_{rep}} \operatorname{Tr} \quad (80)$$

x_{rep} - индекс Дынкина представления.

В нелинейной σ -модели конформная инвариантность теряется на квантовом уровне. Голоморфный и антиголоморфный токи не сохраняются по отдельности. Уравнения движения имеют вид

$$\partial^\mu (g^{-1} \partial_\mu g) = 0 \quad (81)$$

Токи задаются выражением

$$J_\mu = g^{-1} \partial_\mu g \quad (82)$$

или в комплексных координатах

$$\begin{aligned} \tilde{J}_z &= g^{-1} \partial_z g, & \tilde{J}_{\bar{z}} &= g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \\ \partial_z \tilde{J}_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} \tilde{J}_z &= 0 \end{aligned} \quad (83)$$

Члены в уравнении движения не разделяются, так как $\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu} J_\nu) \neq 0$.

Поэтому мы добавляем член Весса-Зумино к действию и переопределяем токи:

$$J_z = \partial_z g g^{-1}, \quad J_{\bar{z}} = g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \quad (84)$$

Член Весса-Зумино имеет вид

$$\Gamma = -\frac{i}{24\pi} \int_B \epsilon_{ijk} Tr' \left(\tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^i} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^j} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^k} \right) d^3 y \quad (85)$$

Он определен на трехмерном многообразии B , ограниченном исходным двумерным пространством. Через \tilde{g} мы обозначили продолжение поля g на B . Такое продолжение не единственно. В компактифицированном трехмерном пространстве компактное двумерное многообразие разделяет два трехмерных многообразия. Разность значений члена Весса-Зумино $\Delta\Gamma$ на этих многообразиях дается правой частью уравнения (85) с интегралом, продолженным на все компактное трехмерное пространство. Так как оно топологически эквивалентно три-сфере, получаем

$$\Delta\Gamma = -\frac{i}{24\pi} \int_{S^3} \epsilon_{ijk} Tr' \left(\tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^i} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^j} \tilde{g}^{-1} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y^k} \right) d^3 y \quad (86)$$

$\Delta\Gamma$ определен по модулю $2\pi i$, поэтому Евклидов функциональный интеграл с весом $\exp(-\Gamma)$ хорошо определен. Значит константа связи, умножаемая на этот член, должна быть целочисленной.

Теперь мы рассматриваем действи

$$S = S_0 + k\Gamma \quad (87)$$

где k - целое. Уравнение движения для полного действия (87):

$$\partial^\mu (g^{-1} \partial_\mu g) + \frac{a^2 i k}{4\pi} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\mu (g^{-1} \partial^\nu g) = 0 \quad (88)$$

В комплексных координатах оно записывается в виде

$$\left(1 + \frac{a^2 k}{4\pi}\right) \partial_z (g^{-1} \partial_{\bar{z}} g) + \left(1 - \frac{a^2 k}{4\pi}\right) \partial_{\bar{z}} (g^{-1} \partial_z g) = 0 \quad (89)$$

Видно, что при $a^2 = \frac{4\pi}{k}$ у нас имеются интересующие нас законы сохранения

$$\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}}g) = 0 \quad (90)$$

Для токов

$$\partial_{\bar{z}}J = 0, \quad \partial_z\bar{J} = 0 \quad (91)$$

Решение классического уравнения движения имеет вид

$$g(z, \bar{z}) = f(z)\bar{f}(\bar{z}) \quad (92)$$

при произвольных $f(z)$ и $\bar{f}(\bar{z})$.

Сохранение по отдельности токов J_z , $J_{\bar{z}}$ приводит к инвариантности действия при преобразованиях

$$g(z, \bar{z}) \rightarrow \Omega(z)g(z, \bar{z})\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}) \quad (93)$$

где $\Omega, \bar{\Omega} \in G$. То есть мы получили локальную $G(z) \times G(\bar{z})$ -инвариантность.

Для перехода к квантовому случаю мы переопределяем токи

$$J(z) \equiv -k\partial_z g g^{-1} \quad \bar{J}(\bar{z}) = k g^{-1} \partial_{\bar{z}} g \quad (94)$$

Тогда вариация действия при инфинитезимальных преобразованиях $\Omega = 1 + \omega$, $\bar{\Omega} = 1 + \bar{\omega}$ дается выражением

$$\delta_{\omega, \bar{\omega}} S = \frac{i}{4\pi} \oint dz Tr'(\omega(z)J(z)) - \frac{i}{4\pi} \oint d\bar{z} Tr'(\bar{\omega}(\bar{z})\bar{J}(\bar{z})) \quad (95)$$

Раскладывая токи

$$J = \sum J^a t^a, \quad \bar{J} = \sum \bar{J}^a t^a \\ \omega = \sum \omega^a t^a \quad (96)$$

получаем

$$\delta_{\omega, \bar{\omega}} S = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum \omega^a J^a + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum \bar{\omega}^a \bar{J}^a \quad (97)$$

Мы также получили тождества Уорда $\delta \langle X \rangle = \langle (\delta S) X \rangle$

$$\delta_{\omega, \bar{\omega}} \langle X \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum \omega^a \langle J^a X \rangle + \frac{1}{2\pi i} \oint d\bar{z} \sum \bar{\omega}^a \langle \bar{J}^a X \rangle \quad (98)$$

Для токов имеем

$$\delta_{\omega} J = [\omega, J] - k\partial_z \omega, \quad \delta_{\omega} J^a = \sum i f_{abc} \omega^b J^c - k\partial_z \omega^a \quad (99)$$

Операторное разложение для токов имеет вид

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{k\delta_{ab}}{(z-w)^2} + \sum i f_{abc} \frac{J^c(w)}{(z-w)} \quad (100)$$

Раскладывая токи в ряд, получаем

$$\begin{aligned} J^a(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{n-1} J_n^a \\ [J_n^a, J_m^b] &= \sum_c i f^{abc} J_{n+m}^c + kn\delta^{ab}\delta_{n+m,0} \end{aligned} \quad (101)$$

Теперь мы видим, что компоненты токов образуют аффинную алгебру Ли \hat{g} .

Тензор энергии-импульса вводится при помощи конструкции Сугавары как сумма нормально упорядоченных компонент токов

$$T(z) = \frac{1}{2(k+h^v)} \sum_a N(J^a J^a)(z) \quad (102)$$

Здесь h^v - дуальное число Кокстера.

Тензор энергии-импульса можно разложить на моды L_n

$$L_n = \frac{1}{2(k+h^v)} \sum_a \sum_m : J_m^a J_{n-m}^a : \quad (103)$$

Тогда коммутационные соотношения для мод L_n имеют вид

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, J_m^a] &= -mJ_{n+m}^a \end{aligned} \quad (104)$$

Таким образом, конструкция Сугавары — это способ вложения алгебры Вирасоро в универсальную обертывающую аффинной алгебры Ли \hat{g}

Полная киральная алгебра модели Весса-Зумино-Виттена равна полупрямому произведению $Vir \ltimes \hat{g}$

Примарными называются поля, которые преобразуются ковариантно под действием $G(z) \times G(\bar{z})$, как $g(z, \bar{z})$. В терминах операторного разложения это свойство переформулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} J^a(z)g(w, \bar{w}) &\sim \frac{-t^a g(w, \bar{w})}{(z-w)} \\ \bar{J}^a(z)g(w, \bar{w}) &\sim \frac{g(w, \bar{w})t^a}{(z-w)} \end{aligned} \quad (105)$$

Любое поле $\phi_{\lambda,\mu}$, преобразующееся ковариантно по отношению к некоторому представлению, заданному весом λ в голоморфном секторе и весом μ в антиголоморфном, является примарным полем WZW-модели.

В модах это свойство записывается в виде

$$\begin{aligned} (J_0^a \phi_\lambda) &= -t_\lambda^a \phi_\lambda \\ (J_n^a \phi_\lambda) &= 0 \quad \text{для } n > 0 \end{aligned} \quad (106)$$

Мы можем сопоставить состоянию $|\phi_\lambda\rangle$ полю ϕ_λ

$$\phi_\lambda(0) = |\phi_\lambda\rangle \quad (107)$$

Тогда условия (106) для примарных полей дают

$$\begin{aligned} J_0^a |\phi_\lambda\rangle &= -t_\lambda^a |\phi_\lambda\rangle \\ J_n^a |\phi_\lambda\rangle &= 0 \quad \text{для } n > 0 \end{aligned} \quad (108)$$

Легко видеть, что действие генераторов алгебры Вирасоро имеет вид

$$L_0 |\phi_\lambda\rangle = \frac{1}{2(k+h^v)} \sum_a J_0^a J_0^a |\phi_\lambda\rangle = \frac{(\lambda, \lambda + 2\rho)}{2(k+h^v)} |\phi_\lambda\rangle \quad (109)$$

Здесь использовано явное выражение для собственных значений квадратичного оператора Казимира.

Примарные поля живут в интегрируемых конечномерных представлениях, так как бесконечномерные и неинтегрируемые поля отщепляются в корреляционных функциях.

Все вторичные состояния имеют вид

$$J_{-n_1}^{a_1} J_{n_2}^{a_2} \dots |\phi_\lambda\rangle \quad (110)$$

2.1 Глобальная инвариантность и уравнения Книжника-Замолодчикова

Подставив в тождества Уорда коррелятор $\langle J(z)\phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) \rangle$ для корреляционных функций примарных полей можно получить уравнения Книжника-Замолодчикова, которые следуют из глобальной $G \times G$ -инвариантности

$$\left(\partial_{z_i} + \frac{1}{k+h^v} \sum_{i \neq j} \frac{\sum_a t_i^a \otimes t_j^a}{z_i - z_k} \right) \langle \phi_1(z_1) \dots \phi_n(z_n) \rangle = 0 \quad (111)$$

Таким образом, теория полностью определяется представлениями аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$.

2.2 Литература

Эта часть написана по книге [3], так же стоит отметить обзор [4].

2.3 Калибровочная WZW-модель

Добавить сюда действие G-WZW, обсудить связь с coset construction и branching functions.

(Добавить статью Gawedzki в ссылки и перевести оттуда содержательную часть).

Теперь мы знаем, что такое conformal blocks, так что это надо здесь объяснить при обсуждении G-WZW и coset construction.

3 Теория Черна-Саймонса

Теория Черна-Саймонса — это калибровочная теория, то есть классические полевые конфигурации в теории на M с калибровочной группой G описываются главным G -расслоением над M . Форму связности главного G -расслоения над M обозначим через $A : M \rightarrow g$, она принимает значения в g . В общем случае связность A определяется на отдельных картах, значения A на разных картах связаны калибровочными преобразованиями. Калибровочные преобразования характеризуются тем, что ковариантная производная $D = d + \frac{1}{2}[A, \cdot]$ преобразуется в присоединенном представлении G .

Тогда действие записывается в виде:

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \quad (112)$$

Кривизна связности

$$F = DA = dA + A \wedge A \in \Omega^2(M, g) \quad (113)$$

Уравнение движения

$$\frac{\delta S}{\delta A} = 0 = \frac{k}{2\pi} F \quad (114)$$

Решениями являются плоские связности, которые определяются голономиями вокруг нестягиваемых циклов на M . Плоские связности находятся в однозначном соответствии с классами эквивалентности гомоморфизмов из фундаментальной группы M в калибровочную группу G . Также

говорят о том, что плоские связности определяются своими голономиями и

$$\text{критические значения/калибровочным преобразованиям} \leftrightarrow \text{Hom}(\pi_1(M), G)/G \quad (115)$$

Действие зависит только от топологии M , метрика нигде явно не появляется. Корреляторы тоже зависят только от топологии. Хотя действие и зависит от калибровки, статсумма в квантовой теории хорошо определена при целом k и напряженность калибровочного поля обнуляется на границах M .

Если у M есть граница $N = \partial M$, то есть дополнительные данные, которые описывают выбор тривиализации главного G -расслоения на N . Такой выбор задает отображение из N в G . Динамика этого отображения описывается WZW-моделью на N с уровнем k .

Рассматриваем калибровочное преобразование действия Черна-Саймонса. При калибровочном преобразовании g A преобразуется как

$$A_\mu \rightarrow g^* A = g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g \quad (116)$$

Для действия Черна-Саймонса имеем

$$S(g^* A) = S(A) + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M} \text{Tr}(A \wedge dg g^{-1}) - 2\pi k \int_M g^* \sigma \quad (117)$$

Здесь

$$\sigma = \frac{1}{24\pi^2} \text{Tr}(\mu \wedge \mu \wedge \mu) \quad (118)$$

где $\mu = X^{-1} dX$, $X \in G$ - форма Маурера-Картана.

Получаем добавку в (117), определенную на границе. Она выглядит как член Весса-Зумино. Из требования калибровочной инвариантности квантовых корреляторов получаем квантование k , так как функциональный интеграл должен быть однозначно определен.

3.1 Квантование

3.1.1 Задача квантования

При каноническом квантовании теории Черна-Саймонса состояние определяется на каждой двумерной поверхности $\Sigma \subset M$. Как в любой квантовой теории поля, состояния соответствуют лучам в гильбертовом пространстве. Так как мы имеем дело с топологической теорией поля типа

Шварца, то у нас нет predetermined выделенного времени, поэтому Σ - произвольная поверхность Коши.

Коразмерность Σ равна 1, поэтому можно разрезать M вдоль Σ и получить многообразие с границей, на котором классическая динамика описывается WZW-моделью 3. Виттен показал, что это соответствие сохраняется и в квантовой механике. То есть гильбертово пространство состояний всегда конечномерно и может быть отождествлено с пространством конформных блоков G -WZW-модели с уровнем k . Конформные блоки - это локально голоморфные и антиголоморфные множители, произведения которых складываются в корреляционные функции двумерной конформной теории поля.

Например, если $\Sigma = S^2$, то гильбертово пространство одномерно и существует только одно состояние. При $\Sigma = T^2$ состояния соответствуют интегрируемым представлениям уровня k аффинного расширения алгебры Ли g . Рассмотрение поверхностей более высокого рода не требуется для решения теории Черна-Саймонса.

3.1.2 Наблюдаемые

Наблюдаемые в теории Черна-Саймонса - это n -точечные функции калибровочно-инвариантных операторов, чаще всего рассматривают петли Вильсона. Петля Вильсона - это голономия вокруг кольца в M , вычисленная в некотором представлении R группы G . Так как мы будем рассматривать произведения петель Вильсона, то мы можем считать представления неприводимыми.

$$\langle W_R(K) \rangle = \text{Tr}_R P \exp i \oint_K A \quad (119)$$

Здесь A - 1-форма связности, мы берем главное значение интеграла по Коши, $P \exp$ - экспонента, упорядоченная вдоль пути.

Рассмотрим зацепление L в M , которое представляет собой набор из l несвязных циклов. Особенно интересна l -точечная корреляционная функция, представляющая собой произведение петель Вильсона в фундаментальном представлении G вокруг этих циклов. Эту корреляционную функцию можно нормировать, разделив ее на 0-точечную функцию (статсумму Z).

Если M - сфера, то такие нормированные функции пропорциональны известным полиномам (инвариантам) узлов. Например, при $G = U(N)$ теория Черна-Саймонса с уровнем k дает

$$\frac{\sin(\pi/(k+N))}{\sin(\pi N/(k+N))} \times \text{полином HOMFLY} \quad (120)$$

При $N = 2$ полином HOMFLY переходит в полином Джонса. В случае $SO(N)$ получается полином Кауффмана.

3.1.3 Связь с G/G WZW-моделями

Задача квантования сводится к вычислению функциональных интегралов вида

$$\langle F \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A F[A] e^{iS(A)}}{\int \mathcal{D}A e^{iS(A)}} \quad (121)$$

В первую очередь нас интересует производящий функционал (статсумма, partition function)

$$Z_{\Sigma \times I} = \int \mathcal{D}A e^{iS(A)} \quad (122)$$

Если многообразие M имеет вид $M = \Sigma \times S^1$, то функциональный интеграл можно строго определить и явно вычислить. В противном случае можно вычислять его по теории возмущений. Как явное вычисление для многообразий специального вида так и вычисление по теории возмущений показывают связь теории Черна-Саймонса с WZW-моделями. Мы начнем с рассмотрения случая $M = \Sigma \times S^1$, где Σ - компактная двумерная поверхность. Рассмотрение такого функционального интеграла можно свести к анализу теории Черна-Саймонса на пространстве $\Sigma \times I$, где $I = [0, 1]$, с заданными граничными условиями в точках $\{0\}, \{1\}$.

В случае $M = \Sigma \times S^1$ существует такой выбор калибровки, при котором функциональный интеграл имеет гауссову форму. Сначала разделим поле A на компоненты:

$$A = A + A_0 dt \quad (123)$$

Для вычисления функционального интеграла зафиксируем следующую калибровку

$$\partial_0 A_0 = 0 \quad (124)$$

Это условие устраняет не весь произвол, так как остаются ещё не зависящие от времени калибровочные преобразования. Обозначим через γ голономию A_0 вокруг S^1 , то есть

$$\gamma = P \exp \left(\oint A_0 \right) \quad (125)$$

При калибровочном преобразовании $h : A_0 \rightarrow A_0^h \equiv h^{-1} A_0 h + h^{-1} \partial_0 h$ γ переходит в сопряженный элемент:

$$\gamma \rightarrow h^{-1} \gamma h \quad (126)$$

Мы можем наложить калибровочное условие, потребовав нахождения γ в максимальном торе $T \subset G$.

Покажем, как мы можем получить действие калибровочной WZW-модели в результате вычисления функционального интеграла. Действие калибровочной WZW-модели отличается от действия (87) наличием дополнительного члена, зависящего от калибровочного поля

$$S_{/H}(g, A) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d^2z (A_z \partial_{\bar{z}} g g^{-1} - A_{\bar{z}} g^{-1} \partial_z g + A_z A_{\bar{z}} - g^{-1} A_z g A_{\bar{z}}) \quad (127)$$

Если исходное действие (87) обладает глобальной инвариантностью относительно группы $G = G_L \times G_R : g \rightarrow agb^{-1}$, то здесь калибровочная группа $H \subset G$ - это достаточно хорошая ее подгруппа, например, $H \subset G_{adj}(g \rightarrow aga^{-1})$. Итоговое действие калибровочной WZW-модели

$$S_{G/H}(g, A) = S_{WZW}(g) + S_{/H}(g, A) \quad (128)$$

При $H = G$

$$S_{G/G}(g, A) = -\frac{1}{8\pi} \int_{\Sigma} \text{tr} g^{-1} d_A g * g^{-1} d_a g - i\Gamma(g, A) \quad (129)$$

$$\Gamma(g, A) = \frac{1}{12\pi} \int_{M: \partial M = \Sigma} \text{tr}(g^{-1} dg)^3 - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \text{tr} (A(dg g^{-1} + g^{-1} dg) + Ag^{-1} Ag) \quad (130)$$

Возвращаясь к действию Черна-Саймонса на $\Sigma \times I$, мы фиксируем калибровку (124) и вводим

$$\gamma_t \equiv P \exp \int_0^t A_0 = \exp t A_0 \quad (131)$$

При этом $\gamma_0 = 1$, $\gamma_1 = \gamma$ и $A_0^{(\gamma^{-1})} = 0$.

Вводим духи Фаддева-Попова, при этом к действию добавляются члены, фиксирующие калибровку:

$$\int_{\Sigma \times S^1} \text{tr}(B A_0 + \bar{c} D_0 c), \quad \text{где } D_0 = \partial_0 + A_0 \quad (132)$$

и накладываем условия

$$\oint B = \oint c = \oint \bar{c} = 0 \quad (133)$$

Мы можем проинтегрировать по A_t , тогда A_0 останется только как внешнее фиксированное поле, а в интеграле появится множитель $\text{Det}' D_0$. Обозначим оставшиеся компоненты через B и зафиксируем граничные условия:

$$B_z|_{\Sigma \times \{0\}} = A_z, \quad B_{\bar{z}}|_{\Sigma \times \{1\}} = A_{\bar{z}} \quad (134)$$

Тогда надо добавить граничные члены к действию:

$$S_{CS}(A_0, B) \rightarrow S_{CS}(A_0, B) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma \times \{0\}} B_z B_{\bar{z}} - \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma \times \{1\}} B_z B_{\bar{z}} \quad (135)$$

Тогда нам надо вычислить

$$Z_{\Sigma \times S^1} = \int \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}A \text{Det}' D_0 Z_{\Sigma \times I}[A_0; A_z, A_{\bar{z}}] \exp \left(\frac{ik}{2\pi} \int_{\Sigma} A_z A_{\bar{z}} \right) \quad (136)$$

Последний член - Кэлера потенциал, необходимый для голоморфного представления граничных членов (135).

На многообразии с границами $\exp iS_{CS}$ не инвариантна относительно произвольных калибровочных преобразований (117)

$$\exp iS_{CS}(A^g) = \Theta(A, g)^k \exp iS_{CS}(A) \quad (137)$$

$$\Theta(A, g) = \exp \left(-\frac{i}{12\pi} \int_M (g^{-1} dg)^3 + \frac{i}{4\pi} \int_{\partial M} \text{Ad} g g^{-1} \right) \quad (138)$$

Тогда для амплитуды $Z_{\Sigma \times I}[A_0; A_z, A_{\bar{z}}]$ при преобразовании $\gamma_t = \exp tA_0$

$$Z_{\Sigma \times I}[A_0; A_z, A_{\bar{z}}^\gamma] = Z_{\Sigma \times I}[A_0^{(\gamma_t^{-1})} = 0; A_z, A_{\bar{z}}] C[A_{\bar{z}}, \gamma] \quad (139)$$

где $C[A_{\bar{z}}, \gamma]$ - коцикл Полякова-Вигманна:

$$C[A_{\bar{z}}, \gamma] = \exp iS_{G/G}(\gamma^{-1}, A_z = 0, A_{\bar{z}}) \quad (140)$$

Нам надо также перейти от меры $\mathcal{D}A_0$ на алгебре Ли к мере Хаара $\mathcal{D}\gamma$ на группе, при этом получается множитель, который сокращает член Det' . Имеем:

$$Z_{\Sigma \times S^1} = \int \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}A Z_{\Sigma \times I}[A_0 = 0; A_z, A_{\bar{z}}] C[A_{\bar{z}}, \gamma] \exp \left(\frac{ik}{2\pi} \int_{\Sigma} A_z A_{\bar{z}}^\gamma \right) \quad (141)$$

Осталось вычислить обычный интеграл $Z_{\Sigma \times I}[A_0; A_z, A_{\bar{z}}]$, только нужно быть аккуратными с граничными условиями:

$$Z_{\Sigma \times I}[A_0; A_z, A_{\bar{z}}] = N \exp \left(-\frac{ik}{2\pi} \int_{\Sigma \times \{0\}} A_z A_{\bar{z}} \right) \quad (142)$$

Подставляя, получаем для функционального интеграла

$$Z_{\Sigma \times S^1} \propto \int \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}A \exp ik \left(\frac{1}{k} S_{WZW}(\gamma^{-1}) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d^2z (A_{\bar{z}} \partial_z \gamma \gamma^{-1} + A_z A_{\bar{z}} - A_z A_{\bar{z}}^{\gamma}) \right) \quad (143)$$

$$Z_{\Sigma \times S^1} \propto \int \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}A \exp i S_{G/G}(\gamma^{-1}, A) \quad (144)$$

При рассмотрении специальных видов поверхности Σ (диск, тор) удастся перейти к чистой WZW-модели.

3.2 Литература

Оригинальные результаты по квантованию теории Черна-Саймонса и связь с WZW впервые опубликованы в работе [5]. Существуют записки с лекций Виттена [6], но они не очень понятные. С более математической точки зрения вопрос о связи конформной теории поля и теории Черна-Саймонса обсуждается в книге [7]. Теория Черна-Саймонса допускает также геометрическое квантование, чему посвящена диссертация [8]. Материал секции 3.1 написан по работе [9], а разделы 3.1.1, 3.1.2 представляют собой перевод английской статьи в Википедии (http://en.wikipedia.org/wiki/Chern-Simons_theory).

Список литературы

- [1] A. M. Polyakov, “Conformal symmetry of critical fluctuations,” *JETP Lett.* **12** (1970) 381–383.
- [2] A. Belavin, A. Polyakov, and A. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” *Nuclear Physics* **241** (1984) 333–380.
- [3] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal field theory*. Springer, 1997.
- [4] M. Walton, “Affine Kac-Moody algebras and the Wess-Zumino-Witten model,” [arXiv:hep-th/9911187](https://arxiv.org/abs/hep-th/9911187).
- [5] E. Witten, “Quantum field theory and the Jones polynomial,” *Communications in Mathematical Physics* **121** (1989) no. 3, 351–399.
- [6] S. Hu, *Lecture notes on Chern-Simons-Witten theory*. World Scientific, 2001.

- [7] T. Kohno, *Conformal field theory and topology*. Amer Mathematical Society, 2002.
- [8] S. Axelrod, “Geometric quantization of Chern-Simons gauge theory,”.
- [9] M. Blau and G. Thompson, “Derivation of the Verlinde formula from Chern-Simons theory and the G/G model,” *Nuclear Physics B* **408** (1993) no. 2, 345–390.