WZW-модели и теория Черна-Саймонса

Антон Назаров
antonnaz@gmail.com

12 сентября 2010 г.

Аннотация

WZW-модель - это сигма-модель с дополнительным членом Весса-Зумино, связанным с топологией. Существует связь таких моделей с пределом бесконечного числа цветов в калибровочных теориях. WZW-модели также связаны с моделями топологической теории поля - моделями Черна-Саймонса-Виттена в трех измерениях. Квантовые состояния в теории Черна-Саймонса с уровнем k $(SU(2)_k)$ эквивалентны квантовым состояниям WZW-модели, связанной с представлениями уровня k аффинной алгебры Ли $\widehat{su(2)}$.

1 Конформная инвариантность

Откуда берется конформная инвариантность в физике конденсированного состояния и в теории струн?

Конформные преобразования:

$$M_{\mu\nu} \equiv i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)\,, \tag{1}$$

$$P_\mu \equiv -i\partial_\mu\,, \tag{2}$$

$$D \equiv -ix_\mu \partial^\mu\,, \tag{3}$$

$$K_\mu \equiv i(x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x_\nu \partial^\nu)\,, \tag{4}$$

Конформная инвариантность тесно связана с масштабной инвариантностью и иногда даже прямо из нее следует. В физике конденсированного состояния масштабная инвариантность имеет место при фазовом переходе (стремление параметра порядка к бесконечности). Флуктуации при фазовом переходе конформно-инвариантны, что позволяет классифицировать фазовые переходы в терминах конформной теории поля [1], [2].

В теории струн действие инвариантно относительно репараметризаций мировой поверхности, в том числе конформных преобразований. Однако эта инвариантность не может быть сохранена при квантовании, поэтому возникает конформная аномалия и центральный заряд алгебры Вирасоро.

В двумерной теории поля локальная конформная группа бесконечномерна, хотя глобальная конформная группа конечномерна. Например, в конформной теории поля на сфере Римана глобальные конформные преобразования образуют группу Мебиуса $PSL(2,\mathbb{C})$. Алгебра же инфинитезимальных преобразований в классической теории — это алгебра Витта, при квантовании возникает конформная аномалия, что соответствует центральному расширению алгебры. Так появляется алгебра Вирасоро.

1.1 Конформная инвариантность в теории струн

Действие свободной релятивистской частицы — это длина траектории.

$$x^\mu(0) = x_0^\mu,\ x^\mu(1) = x_1^\mu$$
$$S = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}^2\right)} d\tau \tag{5}$$

Оно Пуанкаре-инвариантно $x^\mu \to A^\mu_\nu x^\nu + B^\mu$ и не зависит от репараметризаций $\tau \to f(\tau),\ x^\mu(\tau) \to x^\mu(f(\tau))$.

Аналогично, струнное действие дается площадью мировой поверхности

$$X^\mu(x^1,x^2),\ \mu = 1\dots d$$
$$S_N[X^\mu(x^1,x^2)] = \int \sqrt{det \frac{\partial X^\mu}{\partial x^a}\frac{\partial X^\mu}{\partial x^b}} dx^1 dx^2 \tag{6}$$

Такое действие называется действием Намбу. Оно инвариантно относительно преобразований Лоренца и репараметризаций.

Амплитуда перехода для струны дается следующей формулой:

$$A = \int \mathcal{D}X^\mu(x^1,x^2) e^{-S_N[X^\mu(x^1,x^2)]} \tag{7}$$

Сложность, как всегда, состоит в определении меры интегрирования. Она плохо определена как и в большинстве случаев, так что теория струн здесь не выделяется.

Мы хотим сделать замену “переменных интегрирования”, чтобы избавиться от произвола в выборе параметризации мировой поверхности.

Теория должна быть инвариантна относительно репараметризаций:

$$\begin{aligned} x^a &\to f^a(x^1, x^2) \\ X^\mu(x^1, x^2) \to \tilde{X}^\mu(x^1, x^2) &= X^\mu(f^1(x^1, x^2), f^2(x^1, x^2)) \end{aligned} \tag{8}$$

Но в действии Намбу эта инвариантность не видна, поэтому мы перейдем к эквивалентному действию Полякова:

$$\begin{aligned} S_P[g^{ab}(x^1, x^2), X^\mu(x^1, x^2)] = \int g^{ab}(x)\partial_a X^\mu \partial_b X^\mu \sqrt{g}\ d^2x \\ g = \det g_{ab} \end{aligned} \tag{9}$$

Действия Полякова и Намбу эквивалентны в том смысле, что уравнения движения совпадают после исключения вспомогательного поля g_{ab}.

$$\delta_X S_N = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \delta_X S_P = 0 \\ \delta_g S_P = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Действие Полякова инвариантно относительно преобразований Лоренца и репараметризаций мировой поверхности:

$$\begin{aligned} x^a &\to f^a(x^1, x^2) \\ X^\mu(x^1, x^2) \to \tilde{X}^\mu(x^1, x^2) &= X^\mu(f^1(x^1, x^2), f^2(x^1, x^2)) \\ g_{ab}(x) \to \tilde{g}_{ab}(x) &= \frac{\partial f^{a_1}}{\partial x^a}\frac{\partial f^{b_1}}{\partial x^b} g_{a_1 b_1}(x) \end{aligned} \tag{11}$$

Кроме того, есть дополнительная симметрия, которая называется вейлевской или конформной инвариантностью:

$$\begin{aligned} g_{ab}(x) &\to e^{\sigma(x)} g_{ab}(x) \\ g &\to e^\sigma g \\ g^{ab} &\to e^{-\sigma} g^{ab} \\ S_P[e^{\sigma(x)} g_{ab}(x), X^\mu] &= S_P[g_{ab}(x), X^\mu] \end{aligned} \tag{12}$$

То есть у нас довольно большая свобода — мы можем, например, получить произвольную метрику на сфере из постоянной метрики путем репараметризации и преобразования Вейля

$$g_{ab}(x) = [e^{\sigma(x)} \hat{g}_{ab}]^{x^a \to f^a(x)} \tag{13}$$

Для поверхностей большего рода существуют дискретные семейства эквивалентных метрик.

При квантовании невозможно сохранить все симметрии. Поэтому мы сохраняем Лоренц-инвариантность и инвариантность относительно репараметризаций, но нарушаем конформную инвариантность. Возникает так называемая конформная аномалия.

Поясним это для амплитуды перехода

$$A = \int \mathcal{D}X^\mu(x^1, x^2) e^{-S_P[g_{ab}, X^\mu(x^1,x^2)]} \tag{14}$$

Легко видеть, что норма инвариантна относительно репараметризаций:

$$\begin{aligned} \|\delta X^\mu\|^2 &= \int \left(\delta X^\mu(x)\right)^2 \sqrt{g} d^2x \\ \|\delta g_{ab}\|^2 &= \int \delta g_{a_1 b_1} \delta g_{a_2 b_2} g^{a_1 a_2} g^{b_1 b_2} \sqrt{g}\, d^2x \end{aligned} \tag{15}$$

Чтобы понять, что происходит с Вейлевской инвариантностью при квантовании, введем эффективное действие. Мы интегрируем по полям X^μ и получаем следующий результат.

$$e^{-S_X^{eff}[g_{ab}]} \stackrel{def}{=} \int \mathcal{D}X^\mu e^{-S_P[g_{ab}, X]} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} S_X^{eff}[e^{\sigma(x)} g_{ab}(x)] &= S_X^{eff}[g_{ab}] + \frac{d}{48\pi} W[g,\sigma] \\ W[g,\sigma] &= \int \left[\frac{1}{2} g^{ab} \partial_a \sigma \partial_b \sigma + R[g]\sigma + \mu e^\sigma\right] \sqrt{g}\, d^2x \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь R - скалярная кривизна g_{ab}, а μ - параметр, зависящий от выбора регуляризации. Например, в регуляризации собственного времени $\mu = \frac{1}{4\pi\epsilon}$. Член $W[g,\sigma]$ имеет вид действия Лиувилля.

Замечание $\int R[x]\sqrt{g} d^2x = 4\pi\chi_E$, $\chi_E = 2 - 2h$, χ_E - характеристика Эйлера поверхности, h - род поверхности.

$W[g,\sigma]$ называют конформной аномалией.

Вариация действия

$$\begin{aligned} \delta S[g_{ab}, X] &= -\frac{1}{4\pi} \int \delta g^{ab} T_{ab} \sqrt{g}\, d^2x \\ & g_{ab} \to g_{ab} + \delta g_{ab} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} g_{ab} \to e^\sigma g_{ab} &\xrightarrow[\sigma \ll 1]{} (1+\delta\sigma) g_{ab} \\ \delta S[g_{ab}, X] &= -\frac{1}{4\pi} \int \delta\sigma g^{ab} T_{ab} \sqrt{g}\, d^2x \end{aligned} \tag{19}$$

$$\delta S = 0 \Rightarrow g^{ab} T_{ab} = 0 \tag{20}$$

Видно, что Вейлевская инвариантность эквивалентна бесследовости тензора энергии-импульса.

После квантования получаем

$$g^{ab} \langle T_{ab} \rangle = -\frac{d}{12} R[g] \tag{21}$$

Definition 1. Двумерная конформная теория поля — это теория, в которой действие преобразуется как в (17).

Множитель при $W[g, \sigma]$ называется *центральным зарядом.*

Сейчас у нас слишком много свободы в функциональном интеграле (14) — диффеоморфизмы (8) и преобразования Вейля (115). Мы хотим зафиксировать калибровку так, чтобы метрика давалась формулой

$$g_{ab} = [e^{\phi} \hat{g}_{ab}]^{f^a} \tag{22}$$

В результате этой процедуры возникают духи Фаддеева-Попова.

$$\begin{gathered} A = \int \mathcal{D}X^{\mu}(x^1, x^2) e^{-S_P[g_{ab}, X^{\mu}(x^1, x^2)]} = \\ = \int \mathcal{D}\phi \, \mathcal{D}X \, \mathcal{D}B_{ab} \, \mathcal{D}C^a e^{-S_P[e^{\phi}\hat{g}_{ab}, X] - S_{gh}[e^{\phi}\hat{g}_{ab}, B, C]} \end{gathered} \tag{23}$$

Здесь B, C - поля духов, $B_{ab}(X)$ - симметричный бесследовый тензор. Все функциональные интегралы используют метрику $e^{\phi}\hat{g}$.

$$S_{gh} = \int g^{ac} B_{ab} \nabla_c C^b \sqrt{g} \, d^2x \tag{24}$$

Теперь мы можем зафиксировать вейлевскую инвариантность так, чтобы мера интегрирования по полям материи и полям духов (131) не зависела от ϕ. Тогда в экспоненте возникает конформная аномалия:

$$A = \int \mathcal{D}_{e^{\phi}\hat{g}} \mathcal{D}_{\hat{g}} X \mathcal{D}_{\hat{g}} B_{ab} \mathcal{D}_{\hat{g}} C^a e^{-S_P[e^{\phi}\hat{g}_{ab}, X] - S_{gh}[e^{\phi}\hat{g}_{ab}, B, C] + \frac{d-26}{48\pi} W[\hat{g}_{ab}, \phi]} \tag{25}$$

$\frac{d}{48\pi}$ возникает из полей материи, а $\frac{-26}{48\pi}$ — из полей духов, так как оба эффективных действия являются действиями двумерной конформной теории поля.

Обычная бозонная струна живет в 26 измерениях и не взаимодействует с гравитацией Лиувилля. Такая струна называется "критической", так как может существовать при критическом значении размерности пространства. Другие струнные модели называются некритическими струнами.

Первое интегрирование в (134) очень неудобно, так как приходится интегрировать по ϕ с мерой, зависящей от ϕ. Эта мера $\mathcal{D}_{e^{\phi}\hat{g}}\phi$ соответствует интервалу

$$\|\delta\phi\|_P^2 = \int e^{\phi}(\delta\phi)^2\sqrt{\hat{g}}\, d^2x \tag{26}$$

Он не линеен и не инвариантен относительно сдвигов $\phi(x) \to \phi(x)+\eta(x)$. В течении некоторого времени это было существенной проблемой, так как никто не знал, как работать с такими объектами.

Но Дэвид, Дистлер и Каваи предложили изменить действие так, чтобы учесть изменение меры интегрирования к нормированной.

Они предположили, что амплитуда может быть записана в виде

$$A = \int \mathcal{D}_{\hat{g}}\phi\, \mathcal{D}_{\hat{g}}X\, \mathcal{D}_{\hat{g}}(B,C)\, e^{-S_P[\hat{g},X]-S_{gh}[\hat{g},B,C]-S_L[\hat{g},\phi]} \tag{27}$$

где мера интегрирования $\mathcal{D}_{\hat{g}}\phi$ соответствует интервалу $\|\delta\phi\|_{DDK}^2 = \int(\delta\phi)^2\sqrt{\hat{g}}\, d^2x$ и инвариантна относительно сдвигов $\phi \to \phi+\eta$ $(\delta\phi \to \delta\phi)$. S_L здесь - действие Лиувилля с двумя пока не определенными параметрами Q и b:

$$S_L[\hat{g},\phi] = \frac{1}{8\pi}\int \left[\frac{1}{2}\hat{g}^{ab}\partial_a\phi\partial_b\phi + QR\phi + \mu e^{2b\phi}\right]\sqrt{\hat{g}}\, d^2x \tag{28}$$

Мы выбираем следую нормировку:

$$\langle\phi(x)\phi(0)\rangle = \log|x|^2 \tag{29}$$

Член Лиувилля должен быть инвариантен при дилатациях $\hat{g}_{ab} \to e^{\sigma}\hat{g}_{ab}$.

После того, как мы положили

$$Q = \frac{1}{b} + b \tag{30}$$

действие Лиувилля становится конформным, так что

$$\begin{gathered}\int \mathcal{D}_{\hat{g}}\phi e^{-S_L[\hat{g},\phi]} = e^{-S_L^{eff}[\hat{g}]}\\ S_L^{eff}[e^{\sigma}\hat{g}] = S_L^{eff}[\hat{g}] + \frac{C_L}{12}W[\hat{g},\sigma]\end{gathered} \tag{31}$$

Где

$$C_L = 1 + 6Q^2 \tag{32}$$

Теперь мы требуем сокращения суммарного центрального заряда:

$$C_X + C_{gh} + C_L = C_{tot} = 0 \tag{33}$$

В результате амплитуда не зависит от $\hat{g}$ и параметры Q,b фиксированы.

$$d + 1 + 6\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 = 26 \tag{34}$$

Мы можем положить

$$\hat{g}_{ab} = \delta_{ab} \tag{35}$$

в некоторой конечной области. Кроме того, могут возникать топологические члены.

Сделаем замену переменных

$$\begin{aligned} x^1 + i\,x^2 &= z \\ x^1 - i\,x^2 &= \bar{z} \\ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 &= dz\,d\bar{z} \end{aligned} \tag{36}$$

Для полей и членов действия имеем

$$\begin{aligned} C^z = C,\ C^{\bar{z}} &= \bar{C} \\ B_{zz} = B,\ B_{\bar{z}\bar{z}} &= \bar{B} \\ S_{gh} &= \int d^2z[B\bar{\partial}C + \bar{B}\partial\bar{C}] \\ S_P[X] &= \int d^2z\bar{\partial}X\partial X \\ S_L[\phi] \propto \int d^2z\left[\bar{\partial}\phi\partial\phi + \mu e^{2b\phi}\right] &+ (\text{топологические члены}) \end{aligned} \tag{37}$$

$$e^{-S^{eff}[g]} = \int \mathcal{D}Xe^{-\int g^{ab}\partial_a X\partial_b X\sqrt{g}\,d^2x} = \int \mathcal{D}_g Xe^{-\int X\Delta X\sqrt{g}\,d^2x} \tag{38}$$

Оператор Лапласа зависит от метрики

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_a\sqrt{g}g^{ab}\partial_b \tag{39}$$

Это самосопряженный оператор.

Поле X может быть разложено по собственным функциям оператора Лапласа $X(x) = \sum c_n X_n,\ \Delta X_n = \lambda_n X_n,\ \lambda_n = \lambda_n[g]$. Тогда от интегрирования по всем полям X мы перейдем к интегрированию по всем собственным функциям. Этот интеграл может быть (условно) записан в виде произведения собственных значений оператора Лапласа или как его детерминант

$$e^{-S^{eff}[g]} = \left(\prod_n \lambda_n\right)^{-\frac{1}{2}} = (\det \Delta)^{-\frac{1}{2}} \tag{40}$$

Очевидно, что мы не можем вычислить все λ_n, но мы можем получить детерминант.

$$S^{eff}[g] = \log\det\Delta = tr\log\Delta \tag{41}$$

$$\log\frac{\lambda}{\lambda_0} = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} - e^{\lambda_0 t}}{t} dt \tag{42}$$

$$\delta S^{eff}[g] = tr(\log\Delta - \log\Delta_{g_0}) = \delta tr\int_0^\infty \frac{e^{-\Delta t}}{t} dt \tag{43}$$

Последний интеграл расходится, поэтому его необходимо регуляризовать. Мы используем регуляризацию теплового ядра.

$$\delta S^{eff}[g] = \delta tr\int_\epsilon^\infty \frac{e^{-\Delta t}}{t} dt \tag{44}$$

Как уже отмечалось, $\hat{g}_{ab}$ можно положить равным $\rho dz d\bar{z}$ в конечной области. Тогда

$$\Delta = \frac{1}{\rho}\bar{\partial}\partial \tag{45}$$

Для вариации эффективного действия имеем:

$$\begin{aligned}\delta_\rho S^{eff}[g] = \delta_\rho tr\int_\epsilon^\infty e^{-\frac{1}{\rho}\bar{\partial}\partial t}\frac{dt}{t} = \\ - tr\int_\epsilon^\infty \delta_\Delta e^{-\Delta t} dt = -tr\int_\epsilon^\infty \frac{\delta\rho}{\rho}\Delta e^{-\Delta t} dt = \\ - tr\int_\epsilon^\infty \frac{\delta\rho}{\rho}\frac{d}{dt}e^{-\Delta t} dt = -tr\frac{\delta\rho}{\rho}e^{-\Delta\epsilon}\end{aligned} \tag{46}$$

Введем функцию Грина для уравнения теплопроводности

$$G(t,x,y) = \sum_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) X_n(y) \tag{47}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial t} &= \Delta_x G(t,x,y) \\ G(o,x,y) &= \delta^2(x-y) \\ G(t,x,x) &= \frac{1}{4\pi t} + aR + O(t)\end{aligned} \tag{48}$$

Теперь вариация действия имеет вид

$$\delta S^{eff}[g] = \int d^2x \frac{\delta\rho}{\rho}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon} + aR\right) \tag{49}$$

Здесь не хватает какого-то вывода.

В конформной теории поля

$$g^{ab}\left\langle T_{ab}\right\rangle = \frac{C}{12}R[g] \tag{50}$$

C — центральный заряд.

Для плоской метрики $g_{ab} = \delta_{ab}$ имеем

$$g^{ab}\langle T_{ab}\rangle = 0 \tag{51}$$

Положим $T_{zz} = T$, $\quad T_{\bar{z}\bar{z}} = \bar{T}$, $\quad T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z}$. В плоском пространстве из уравнения неразрывности $\bar{\partial}T_{zz} + \partial T_{\bar{z}\bar{z}} = 0$ следует

$$\begin{aligned} T_{z\bar{z}} &= 0 \\ \bar{\partial}T_{zz} = \bar{\partial}T = 0, &\quad T\text{- голоморфная} \\ \partial T_{\bar{z}\bar{z}} = \partial\bar{T} = 0, &\quad \bar{T}\text{- антиголоморфная} \end{aligned} \tag{52}$$

В искривленном пространстве уравнение неразрывности имеет вид $\nabla_a T^{ab} = 0$ и мы можем выбрать такую систему координат, в которой $g_{ab}dx^a dx^b = \rho dz\, d\bar{z} = e^\sigma dz\, d\bar{z}$. Теперь введем псевдоэнергию T:

$$T_{zz} + \frac{C}{12}t_{zz} = T \tag{53}$$

где $t_{zz} = (\partial\sigma)^2 - 2\partial^2\sigma$. Легко проверить, что в этом случае $\bar{\partial}T = 0$.

При преобразованиях $z \to w(z)$ величины преобразуются следующим образом

$$\begin{aligned} T_{zz} &\to \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 T_{ww}(w(z)) \\ t &\to \left(\frac{dw}{dz}\right) t(w) + 2\{w,z\} \\ \text{где } \{w,z\} &= \left(\frac{\partial_z^3 w}{\partial_z w} - \frac{3}{2}\left(\frac{\partial_z^2 w}{\partial_z}\right)^2\right) \\ T &\to \left(\frac{dw}{dz}\right)^2 T(w) + \frac{C}{12}\{w,z\} \end{aligned} \tag{54}$$

Тензор энергии-импульса является генератором преобразований координат $x^a \to x^a + \epsilon^a(x)$:

$$\delta_\epsilon \langle A_1(x_1) \dots A_N(x_N) \rangle = \int d^2x \, \partial_a \epsilon_b(x) \langle T_{ab}(x) A_1(x_1) \dots A_N(x_N) \rangle \tag{55}$$

Выполняются следующие требования:

$$\begin{aligned} T_{aa} &= 0 \\ \partial_a \epsilon_b + \partial_b \epsilon_a &\sim \delta_{ab} \\ \epsilon^a = \epsilon x^a \text{ or } x^a &\to \frac{x^a}{(\vec{x})^2} \end{aligned} \tag{56}$$

Корреляционные функции не меняются при конформных преобразованиях

$$\delta_\epsilon A(x) = \int_{\partial D} dy^a \, \epsilon^b \tilde{T}_{ab}(y) A(x) - \int_D d^2y \, \partial^a \epsilon^b(y) T_{ab}(y) A(x) \tag{57}$$

Здесь $\tilde{T}_{ab} = \epsilon_{ac} T_{cb}$.

Пусть

$$\begin{aligned} \partial_a \epsilon_b + \partial_b \epsilon_a &\sim \delta_{ab} \\ \bar{\partial} \epsilon &= 0 \\ z &\to z + \epsilon(z, \bar{z}) \\ \bar{z} &\to \bar{z} + \bar{\epsilon}(z, \bar{z}) \end{aligned} \tag{58}$$

$$\delta_\epsilon A(z, \bar{z}) = \oint_z du \, \epsilon(u) T(u) A(z, \bar{z}) \tag{59}$$

Подставляя $T(z)$ на место произвольного оператора A получаем

$$\delta_\epsilon T(z) = \oint_z du \, \epsilon(u) T(u) T(z) \tag{60}$$

Если $w(z) = z + \epsilon(z)$, где ϵ мало, T преобразуется следующим образом:

$$T(z) \to \epsilon T'(z) + 2\epsilon' T(z) + \frac{C}{12} \epsilon''' \tag{61}$$

$$\delta_\epsilon T(z) = \oint du \, \epsilon(u) T(u) T(z) = \epsilon T'(z) + 2\epsilon' T(z) + \frac{C}{12} \epsilon''' \tag{62}$$

Предположим, что для полного набора операторов $\{A_j(x)\}$ существует операторное разложение:

$$A_i(x) A_j(0) = \sum C_{ij}^k(x) A_k(0) \tag{63}$$

Тогда для произведения $T(u)T(z)$ получаем

$$T(u)T(z) = \sum C_k(u-z)A_k(z) \tag{64}$$

Полюса можно восстановить из формулы (62):

$$T(u)T(z) = \frac{C}{2(u-z)^4} + \frac{2T(z)}{(u-z)^2} + \frac{T'(z)}{u-z} + \text{несингулярные члены} \tag{65}$$

Теперь введем операторы L_n:

$$L_n A(z) \equiv \frac{}{2\pi i} \oint_C du\, (u-z)^{n+1} T(u) A(z) \tag{66}$$

Можно показать, что для $n, m \in \mathbb{Z}$

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{C}{12}(n^3 - n)\delta_{n,-m} \tag{67}$$

и операторы $\{L_n\}$ образуют алгебру Вирасоро.

Все поля в теории оказываются суммами мультиплетов алгебры Вирасоро:

$$\{A_j\} = \sum [\Phi_{\Delta,A}] \tag{68}$$

В каждом мультиплете есть одно примарное поле, которое преобразуется так:

$$\begin{aligned} \Phi_\Delta(z) \underset{z \to w(z)}{\longrightarrow} \left(\frac{dw}{dz}\right)^\Delta \Phi_\Delta(w(z)) \\ L_n \Phi = 0, \quad n > 0 \\ L_0 \Phi = \Delta \Phi \end{aligned} \tag{69}$$

Все остальные поля называются вторичными и получаются из примарного действием операторов L_{-n}:

$$L_{-n_1} L_{-n_2} \ldots \Phi_\Delta \tag{70}$$

Например, следующие поля инвариантны относительно преобразований Вейля

$$O_a = \int \Phi_\Delta e^{2a\phi}\, d^2x, \quad \text{где } \Delta + a(Q-a) = 1 \tag{71}$$

O_a - главная наблюдаемая теории струн с гравитационной размерностью $\delta_a = -\frac{a}{b}$.

$$\int \langle O_{a_1} \ldots O_{a_n} \rangle_\mu e^{-\mu A} d\mu = \langle O_{a_1} \ldots O_{a_n} \rangle_A = A^{\sum \delta_k}, \quad \delta_k = \frac{a_k}{b} \tag{72}$$

Корреляционные функции выражаются как комбинации корреляционных функций примарных полей.

Осталось определить только скейлинговые размерности примарных полей. Чтобы определить теорию полностью надо задать $\Phi_a,\ \Delta_a,\ C_{ab}^c$. Если число примарных полей конечно, то теория называется *минимальной.*

1.2 Конформные блоки

Примарные поля преобразуются по формуле (69) в голоморфной и антиголоморфной части, то есть полностью

$$\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(z,\bar{z}) \to \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\Delta}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{\Delta}}\Phi_{\Delta,\bar{\Delta}}(w,\bar{w}) \tag{73}$$

Операторное разложение примарных полей

$$\Phi_{\Delta_1,\bar{\Delta_1}}(z,\bar{z})\Phi_{\Delta_2,\bar{\Delta_2}}(0,0) = \sum_i A_i z^{\Delta_i-\Delta_1-\Delta_2}\bar{z}^{\bar{\Delta}_i-\bar{\Delta_1}-\bar{\Delta_2}}\left[\Phi_{\Delta_i,\bar{\Delta_i}}(z,\bar{z})\right] \tag{74}$$

Здесь выражение в квадратных скобках обозначает вклад всех полей конформного семейства $\Phi_{\Delta_i,\bar{\Delta_i}}$. Рассмотрим четырехточечную корреляционную функцию.

$$\left\langle \Phi_{\Delta_4,\bar{\Delta_4}}(z_4,\bar{z_4})\Phi_{\Delta_3,\bar{\Delta_3}}(z_3,\bar{z_3})\Phi_{\Delta_2,\bar{\Delta_2}}(z_2,\bar{z_2})\Phi_{\Delta_1,\bar{\Delta_1}}(z_1,\bar{z_1})\right\rangle \tag{75}$$

При помощи проективного преобразования комплексной плоскости можно поместить три из четырех операторов в заданные точки, например $z_1 = 0, z_2 = z, z_3 = 1, z_4 = \infty$, так что корреляционная функция зависит от одной комплексной переменной

$$z = \frac{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)} \tag{76}$$

Используя разложение (74), получаем для корреляционной функции

$$\left\langle \Phi_{\delta_4,\bar{\delta_4}}(\infty,\infty)\Phi_{\delta_3,\bar{\delta_3}}(1,1)\Phi_{\delta_2,\bar{\delta_2}}(z,\bar{z})\Phi_{\delta_1,\bar{\delta_1}}(0,0)\right\rangle = \sum_i G_i\mathcal{F}(c,\Delta_i,\delta_k,z)\mathcal{F}(c,\bar{\Delta}_i,\bar{\delta}_k,\bar{z}) \tag{77}$$

Функция $\mathcal{F}$ называется конформным блоком, а константы G_i выражаются через A_i.

Аналогично для случая многочастичных разложений.

Из требований конформной инвариантности и предположения о существовании операторного разложения получаем требование голоморфной факторизации

$$\left\langle \Phi_{\Delta_1,\bar{\Delta_1}}(z_1,\bar{z_1})\ldots\Phi_{\Delta_N,\bar{\Delta_N}}(z_N,\bar{z_N})\right\rangle = \sum C^{ab}\mathcal{F}_a(z_1,\ldots,z_N)\overline{\mathcal{F}_b(z_1,\ldots,z_N)} \tag{78}$$

Функции $\mathcal{F},\bar{\mathcal{F}}$ называются конформными блоками.

В WZW-моделях на уравнения Книжника-Замолодчикова можно переписать в терминах конформных блоков. Вообще если известно пространство конформных блоков, то можно найти все константы в операторных разложениях.

При изучении теории на поверхностях рода больше единицы основной вопрос состоит именно в построении пространства конформных блоков.

1.3 Модулярные преобразования

Конформная инвариантность в квантовой и классической теории поля. Глобальная конформная инвариантность. Уравнения Книжника-Замолодчикова. Локальная конформная инвариантность. Бесследовость тензора энергии-импульса. Голоморфная факторизация.

2 Модели Весса-Зумино-Новикова-Виттена

Связь WZW-моделей с топологией, обоснование с точки зрения предела калибровочной теории.

Стартуем с нелинейной σ-модели.

$$S_0 = \frac{1}{4a^2}\int d^2x\, Tr'(\partial^\mu g^{-1}\partial_\mu g) \tag{79}$$

Здесь $a^2 > 0$ - положительный параметр, $g(x) \in G$ - поле со значениями в группе G, которую мы будем считать полупростой, а через Tr' мы обозначили след, не зависящий от выбора представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$

$$Tr' = \frac{1}{x_{rep}}Tr \tag{80}$$

x_{rep} - индекс Дынкина представления.

В нелинейной σ-модели конформная инвариантность теряется на квантовом уровне. Голоморфный и антиголоморфный токи не сохраняются по отдельности. Уравнения движения имеют вид

$$\partial^\mu(g^{-1}\partial_\mu g) = 0 \tag{81}$$

Токи задаются выражением

$$J_\mu = g^{-1}\partial_\mu g \tag{82}$$

или в комплексных координатах

$$\begin{aligned} \tilde{J}_z = g^{-1}\partial_z g, \qquad \tilde{J}_{\bar{z}} = g^{-1}\partial_{\bar{z}} g \\ \partial_z \tilde{J}_{\bar{z}} + \partial_{\bar{z}} \tilde{J}_z = 0 \end{aligned} \tag{83}$$

Члены в уравнении движения не разделяются, так как $\partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu}J_\nu) \neq 0$.

Поэтому мы добавляем член Весса-Зумино к действию и переопределяем токи:

$$J_z = \partial_z g\, g^{-1}, \qquad J_{\bar{z}} = g^{-1}\partial\bar{z} g \tag{84}$$

Член Весса-Зумино имеет вид

$$\Gamma = -\frac{i}{24\pi}\int_B \epsilon_{ijk} Tr' \left(\tilde{g}^{-1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y^i}\tilde{g}^{-1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y^j}\tilde{g}^{-1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y^k}\right) d^3y \tag{85}$$

Он определен на трехмерном многообразии B, ограниченном исходным двумерным пространством. Через $\tilde{g}$ мы обозначили продолжение поля g на B. Такое продолжение не единственно. В компактифицированном трехмерном пространстве компактное двумерное многообразие разделяет два трехмерных многообразия. Разность значений члена Весса-Зумино $\Delta\Gamma$ на этих многообразиях дается правой частью уравнения (85) с интегралом, продолженным на все компактное трехмерное пространство. Так как оно топологически эквивалентно три-сфере, получаем

$$\Delta\Gamma = -\frac{i}{24\pi}\int_{S^3} \epsilon_{ijk} Tr' \left(\tilde{g}^{-1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y^i}\tilde{g}^{-1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y^j}\tilde{g}^{-1}\frac{\partial\tilde{g}}{\partial y^k}\right) d^3y \tag{86}$$

$\Delta\Gamma$ определен по модулю $2\pi i$, поэтому Евклидов функциональный интеграл с весом $exp(-\Gamma)$ хорошо определен. Значит константа связи, умножаемая на этот член, должна быть целочисленной.

Теперь мы рассматриваем действи

$$S = S_0 + k\Gamma \tag{87}$$

где k - целое. Уравнение движения для полного действия (87):

$$\partial^\mu(g^{-1}\partial_\mu g) + \frac{a^2 ik}{4\pi}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\mu(g^{-1}\partial^\nu g) = 0 \tag{88}$$

В комплексных координатах оно записывается в виде

$$(1 + \frac{a^2k}{4\pi})\partial_z(g^{-1}\partial_{\bar{z}} g) + (1 - \frac{a^2k}{4\pi})\partial_{\bar{z}}(g^{-1}\partial_z g) = 0 \tag{89}$$

Видно, что при $a^2 = \frac{4\pi}{k}$ у нас имеются интересующие нас законы сохранения

$$\partial_z(g^{-1}\partial\bar{z}g) = 0 \tag{90}$$

Для токов

$$\partial_{\bar{z}}J = 0, \quad \partial_z\bar{J} = 0 \tag{91}$$

Решение классического уравнения движения имеет вид

$$g(z,\bar{z}) = f(z)\bar{f}(\bar{z}) \tag{92}$$

при произвольных $f(z)$ и $\bar{f}(\bar{z})$.

Сохранение по отдельности токов $J_z,\ J_{\bar{z}}$ приводит к инвариантности действия при преобразованиях

$$g(z,\bar{z}) \to \Omega(z)g(z,\bar{z})\bar{\Omega}^{-1}(\bar{z}) \tag{93}$$

где $\Omega,\ \bar{\Omega} \in G$. То есть мы получили локальную $G(z)\times G(\bar{z})$-инвариантность.

Для перехода к квантовому случаю мы переопределяем токи

$$J(z) \equiv -k\partial_z g g^{-1} \quad \bar{J}(\bar{z}) = kg^{-1}\partial_{\bar{z}}g \tag{94}$$

Тогда вариация действия при инфинитезимальных преобразованиях $\Omega = 1+\omega,\ \bar{\Omega} = 1+\bar{\omega}$ дается выражением

$$\delta_{\omega,\bar{\omega}}S = \frac{i}{4\pi}\oint dzTr'(\omega(z)J(z)) - \frac{i}{4\pi}\oint d\bar{z}Tr'(\bar{\omega}(\bar{z})\bar{J}(\bar{z})) \tag{95}$$

Раскладывая токи

$$\begin{aligned} J = \sum J^a t^a, \bar{J} = \sum \bar{J}^a t^a \\ \omega = \sum \omega^a t^a \end{aligned} \tag{96}$$

получаем

$$\delta_{\omega,\bar{\omega}}S = -\frac{1}{2\pi i}\oint dz\sum \omega^a J^a + \frac{1}{2\pi i}\oint d\bar{z}\sum \bar{\omega}^a\bar{J}^a \tag{97}$$

Мы также получили тождества Уорда $\delta\langle X\rangle = \langle(\delta S)X\rangle$

$$\delta_{\omega,\bar{\omega}}\langle X\rangle = -\frac{1}{2\pi i}\oint dz\sum \omega^a\langle J^a X\rangle + \frac{1}{2\pi i}\oint d\bar{z}\sum \bar{\omega}^a\left\langle \bar{J}^a X\right\rangle \tag{98}$$

Для токов имеем

$$\delta_\omega J = [\omega, J] - k\partial_z\omega, \quad \delta_\omega J^a = \sum if_{abc}\omega^b J^c - k\partial_z\omega^a \tag{99}$$

Операторное разложение для токов имеет вид

$$J^a(z)J^b(w) \sim \frac{k\delta_{ab}}{(z-w)^2} + \sum if_{abc}\frac{J^c(w)}{(z-w)} \tag{100}$$

Раскладывая токи в ряд, получаем

$$\begin{aligned} J^a(z) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{n-1}J^a_n \\ \left[J^a_n, J^b_m\right] &= \sum_c if^{abc}J^c_{n+m} + kn\delta^{ab}\delta_{n+m,0} \end{aligned} \tag{101}$$

Теперь мы видим, что компоненты токов образуют аффинную алгебру Ли $\hat{g}$.

Тензор энергии-импульса вводится при помощи конструкции Сугавары как сумма нормально упорядоченных компонент токов

$$T(z) = \frac{1}{2(k+h^v)}\sum_a N(J^aJ^a)(z) \tag{102}$$

Здесь h^v - дуальное число Кокстера.

Тензор энергии-импульса можно разложить на моды L_n

$$L_n = \frac{1}{2(k+h^v)}\sum_a\sum_m : J^a_mJ^a_{n-m} : \tag{103}$$

Тогда коммутационные соотношения для мод L_n имеют вид

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, J^a_m] &= -mJ^a_{n+m} \end{aligned} \tag{104}$$

Таким образом, конструкция Сугавары — это способ вложения алгебры Вирасоро в универсальную обертывающую аффинной алгебры Ли $\hat{g}$

Полная киральная алгебра модели Весса-Зумино-Виттена равна полупрямому произведению $Vir \ltimes \hat{g}$

Примарными называются поля, которые преобразуются ковариантно под действием $G(z)\times G(\bar{z})$, как $g(z,\bar{z})$. В терминах операторного разложения это свойство переформулируется следующим образом:

$$\begin{aligned} J^a(z)g(w,\bar{w}) &\sim \frac{-t^ag(w,\bar{w})}{(z-w)} \\ \bar{J}^a(z)g(w,\bar{w}) &\sim \frac{g(w,\bar{w})t^a}{(z-w)} \end{aligned} \tag{105}$$

Любое поле $\phi_{\lambda,\mu}$, преобразующееся ковариантно по отношению к некоторому представлению, заданному весом λ в голоморфном секторе и весом μ в антиголоморфном, является примарным полем WZW-модели.

В модах это свойство записывается в виде

$$\begin{aligned} (J_0^a\phi_\lambda) &= -t_\lambda^a\phi_\lambda \\ (J_n^a\phi_\lambda) &= 0 \quad \text{для } n>0 \end{aligned} \tag{106}$$

Мы можем сопоставить состояние $|\phi_\lambda\rangle$ полю ϕ_λ

$$\phi_\lambda(0) = |\phi_\lambda\rangle \tag{107}$$

Тогда условия (106) для примарных полей дают

$$\begin{aligned} J_0^a\,|\phi_\lambda\rangle &= -t_\lambda^a\,|\phi_\lambda\rangle \\ J_n^a\,|\phi_\lambda\rangle &= 0 \quad \text{для } n>0 \end{aligned} \tag{108}$$

Легко видеть, что действие генераторов алгебры Вирасоро имеет вид

$$L_0\,|\phi_\lambda\rangle = \frac{1}{2(k+h^v)}\sum_a J_0^a J_0^a\,|\phi_\lambda\rangle = \frac{(\lambda,\lambda+2\rho)}{2(k+h^v)}\,|\phi_\lambda\rangle \tag{109}$$

Здесь использовано явное выражение для собственных значений квадратичного оператора Казимира.

Примарные поля живут в интегрируемых конечномерных представлениях, так как бесконечномерные и неинтегрируемые поля отщепляются в корреляционных функциях.

Все вторичные состояния имеют вид

$$J_{-n_1}^{a_1}J_{n_2}^{a_2}\dots|\phi_\lambda\rangle \tag{110}$$

2.1 Глобальная инвариантность и уравнения Книжника-Замолодчикова

Подставив в тождества Уорда коррелятор $\langle J(z)\phi_1(z_1)\dots\phi_n(z_n)\rangle$ для корреляционных функций примарных полей можно получить уравнения Книжника-Замолодчикова, которые следуют из глобальной $G\times G$-инвариантности

$$\left(\partial_{z_i} + \frac{1}{k+h^v}\sum_{i\neq j}\frac{\sum_a t_i^a\otimes t_j^a}{z_i-z_k}\right)\langle\phi_1(z_1)\dots\phi_n(z_n)\rangle = 0 \tag{111}$$

Таким образом, теория полностью определяется представлениями аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}$.

2.2 Литература

Эта часть написана по книге [3], так же стоит отметить обзор [4].

2.3 Калибровочная WZW-модель

Добавить сюда действие G-WZW, обсудить связь с coset construction и branching functions.

(Добавить статью Gawedzki в ссылки и перевести оттуда содержательную часть).

Теперь мы знаем, что такое conformal blocks, так что это надо здесь объяснить при обсуждении G-WZW и coset construction.

3 Теория Черна-Саймонса

Теория Черна-Саймонса — это калибровочная теория, то есть классические полевые конфигурации в теории на M с калибровочной группой G описываются главным G-расслоением над M. Форму связности главного G-расслоения над M обозначим через $A : M \to g$, она принимает значения в g. В общем случае связность A определяется на отдельных картах, значения A на разных картах связаны калибровочными преобразованиями. Калибровочные преобразования характеризуются тем, что ковариантная производная $D = d + \frac{1}{2}[A, \cdot]$ преобразуется в присоединенном представлении G.

Тогда действие записывается в виде:

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_M \mathrm{tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \tag{112}$$

Кривизна связности

$$F = DA = dA + A \wedge A \in \Omega^2(M, g) \tag{113}$$

Уравнение движения

$$\frac{\delta S}{\delta A} = 0 = \frac{k}{2\pi} F \tag{114}$$

Решениями являются плоские связности, которые определяются голономиями вокруг нестягиваемых циклов на M. Плоские связности находятся в однозначном соответствии с классами эквивалентности гомоморфизмов из фундаментальной группы M в калибровочную группу G. Также говорят о том, что плоские связности определяются своими голономиями и

$$\text{критические значения/калибровочным преобразованиям} \leftrightarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)/G \tag{115}$$

Действие зависит только от топологии M, метрика нигде явно не появляется. Корреляторы тоже зависят только от топологии. Хотя действие и зависит от калибровки, статсумма в квантовой теории хорошо определена при целом k и напряженность калибровочного поля обнуляется на границах M.

Если у M есть граница $N = \partial M$, то есть дополнительные данные, которые описывают выбор тривиализации главного G-расслоения на N. Такой выбор задает отображение из N в G. Динамика этого отображения описывается WZW-моделью на N с уровнем k.

Рассматриваем калибровочное преобразование действия Черна-Саймонса. При калибровочном преобразовании g A преобразуется как

$$A_\mu \to g^* A = g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g \tag{116}$$

Для действия Черна-Саймонса имеем

$$S(g^* A) = S(A) + \frac{k}{4\pi} \int_{\partial M} \mathrm{Tr}(A \wedge dg\; g^{-1}) - 2\pi k \int_M g^* \sigma \tag{117}$$

Здесь

$$\sigma = \frac{1}{24\pi^2} \mathrm{Tr}(\mu \wedge \mu \wedge \mu) \tag{118}$$

где $\mu = X^{-1} dX, X \in G$ - форма Маурера-Картана.

Получаем добавку в (117), определенную на границе. Она выглядит как член Весса-Зумино. Из требования калибровочной инвариантности квантовых корреляторов получаем квантование k, так как функциональный интеграл должен быть однозначно определен.

3.1 Квантование

3.1.1 Задача квантования

При каноническом квантовании теории Черна-Саймонса состояние определяется на каждой двумерной поверхности $\Sigma \subset M$. Как в любой квантовой теории поля, состояния соответствуют лучам в гильбертовом пространстве. Так как мы имеем дело с топологической теорией поля типа

Шварца, то у нас нет предопределенного выделенного времени, поэтому Σ - произвольная поверхность Коши.

Коразмерность Σ равна 1, поэтому можно разрезать M вдоль Σ и получить многообразие с границей, на котором классическая динамика описывается WZW-моделью 3. Виттен показал, что это соответствие сохраняется и в квантовой механике. То есть гильбертово пространство состояний всегда конечномерно и может быть отождествлено с пространством конформных блоков G-WZW-модели с уровнем k. Конформные блоки - это локально голоморфные и антиголоморфные множители, произведения которых складываются в корреляционные функции двумерной конформной теории поля.

Например, если $\Sigma = S^2$, то гильбертово пространство одномерно и существует только одно состояние. При $\Sigma = T^2$ состояния соответствуют интегрируемым представлениям уровня k аффинного расширения алгебры Ли g. Рассмотрение поверхностей более высокого рода не требуется для решения теории Черна-Саймонса.

3.1.2 Наблюдаемые

Наблюдаемые в теории Черна-Саймонса - это n-точечные функции калибровочно-инвариантных операторов, чаще всего рассматривают петли Вильсона. Петля Вильсона - это голономия вокруг кольца в M, вычисленная в некотором представлении R группы G. Так как мы будем рассматривать произведения петель Вильсона, то мы можем считать представления неприводимыми.

$$\langle W_R(K) \rangle = \mathrm{Tr}_R \, P \, \exp i \oint_K A \tag{119}$$

Здесь A- 1-форма связности, мы берем главное значение интеграла по Коши, $P\exp$ - экспонента, упорядоченная вдоль пути.

Рассмотрим зацепление L в M, которое представляет собой набор из l несвязных циклов. Особенно интересна l-точечная корреляционная функция, представляющая собой произведение петель Вильсона в фундаментальном представлении G вокруг этих циклов. Эту корреляционную функцию можно нормировать, разделив ее на 0-точечную функцию (статсумму Z).

Если M - сфера, то такие нормированные функции пропорциональны известным полиномам (инвариантам) узлов. Например, при $G = U(N)$ теория Черна-Саймонса с уровнем k дает

$$\frac{\sin(\pi/(k+N))}{\sin(\pi N/(k+N))} \times \text{ полином HOMFLY} \tag{120}$$

При $N = 2$ полином HOMFLY переходит в полином Джонса. В случае $SO(N)$ получается полином Кауффмана.

3.1.3 Связь с G/G WZW-моделями

Задача квантования сводится к вычислению функциональных интегралов вида

$$\langle F \rangle = \frac{\int \mathcal{D}AF[A]e^{iS(A)}}{\int \mathcal{D}Ae^{iS(A)}} \tag{121}$$

В первую очередь нас интересует производящий функционал (статсумма, partition function)

$$Z_{\Sigma\times I} = \int \mathcal{D}Ae^{iS(A)} \tag{122}$$

Если многообразие M имеет вид $M = \Sigma \times S^1$, то функциональный интеграл можно строго определить и явно вычислить. В противном случае можно вычислять его по теории возмущений. Как явное вычисление для многообразий специального вида так и вычисление по теории возмущений показывают связь теории Черна-Саймонса с WZW-моделями. Мы начнем с рассмотрения случая $M = \Sigma \times S^1$, где Σ - компактная двумерная поверхность. Рассмотрение такого функционального интеграла можно свести к анализу теории Черна-Саймонса на пространстве $\Sigma \times I$, где $I = [0, 1]$, с заданными граничными условиями в точках $\{0\}, \{1\}$.

В случае $M = \Sigma \times S^1$ существует такой выбор калибровки, при котором функциональный интеграл имеет гауссову форму. Сначала разделим поле A на компоненты:

$$A = A + A_0 dt \tag{123}$$

Для вычисления функционального интеграла зафиксируем следующую калибровку

$$\partial_0 A_0 = 0 \tag{124}$$

Это условие устраняет не весь произвол, так как остаются ещё не зависящие от времени калибровочные преобразования. Обозначим через γ голономию A_0 вокруг S^1, то есть

$$\gamma = P\exp\left(\oint A_0\right) \tag{125}$$

При калибровочном преобразовании $h : A_0 \to A_0^h \equiv h^{-1}A_0h + h^{-1}\partial_0 h$ γ переходит в сопряженный элемент:

$$\gamma \to h^{-1}\gamma h \tag{126}$$

Мы можем наложить калибровочное условие, потребовав нахождения γ в максимальном торе $T \subset G$.

Покажем, как мы можем получить действие калибровочной WZW-модели в результате вычисления функционального интеграла. Действие калибровочной WZW-модели отличается от действия (87) наличием дополнительного члена, зависящего от калибровочного поля

$$S_{/H}(g, A) = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} d^2z(A_z\partial_{\bar{z}}gg^{-1} - A_{\bar{z}}g^{-1}\partial_z g + A_zA_{\bar{z}} - g^{-1}A_zgA_{\bar{z}}) \quad (127)$$

Если исходное действие (87) обладает глобальной инвариантностью относительно группы $G = G_L \times G_R : g \to agb^{-1}$, то здесь калибровочная группа $H \subset G$ - это достаточно хорошая ее подгруппа, например, $H \subset G_{adj}(g \to aga^{-1})$. Итоговое действие калибровочной WZW-модели

$$S_{G/H}(g, A) = S_{WZW}(g) + S_{/H}(g, A) \quad (128)$$

При $H = G$

$$S_{G/G}(g, A) = -\frac{1}{8\pi}\int_{\Sigma} \mathrm{tr} g^{-1}d_Ag * g^{-1}d_ag - i\Gamma(g, A) \quad (129)$$

$$\Gamma(g, A) = \frac{1}{12\pi}\int_{M:\partial M=\Sigma} \mathrm{tr}(g^{-1}dg)^3 - \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} \mathrm{tr}\left(A(dg\, g^{-1} + g^{-1}dg) + Ag^{-1}Ag\right) \quad (130)$$

Возвращаясь к действию Черна-Саймонса на $\Sigma \times I$, мы фиксируем калибровку (124) и вводим

$$\gamma_t \equiv P\exp\int_0^t A_0 = \exp tA_0 \quad (131)$$

При этом $\gamma_0 = 1,\ \gamma_1 = \gamma$ и $A_0^{(\gamma^{-1})} = 0$.

Вводим духи Фаддева-Попова, при этом к действию добавляются члены, фиксирующие калибровку:

$$\int_{\Sigma\times S^1} \mathrm{tr}(BA_0 + \bar{c}D_0c), \quad \text{где } D_0 = \partial_0 + A_0 \quad (132)$$

и накладываем условия

$$\oint B = \oint c = \oint \bar{c} = 0 \quad (133)$$

Мы можем проинтегрировать по A_t, тогда A_0 останется только как внешнее фиксированное поле, а в интеграле появится множитель $\mathrm{Det}' D_0$. Обозначим оставшиеся компоненты через B и зафиксируем граничные условия:

$$B_z|_{\Sigma\times\{0\}} = A_z, \quad B_{\bar z}|_{\Sigma\times\{1\}} = A_{\bar z} \tag{134}$$

Тогда надо добавить граничные члены к действию:

$$S_{CS}(A_0, B) \to S_{CS}(A_0, B) - \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma\times\{0\}} B_z B_{\bar z} - \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma\times\{1\}} B_z B_{\bar z} \tag{135}$$

Тогда нам надо вычислить

$$Z_{\Sigma\times S^1} = \int \mathcal{D}A_0 \mathcal{D}A \mathrm{Det}' D_0 Z_{\Sigma\times I}[A_0; A_z, A_{\bar z}] \exp\left(\frac{ik}{2\pi}\int_\Sigma A_z A_{\bar z}\right) \tag{136}$$

Последний член - Кэлеров потенциал, необходимый для голоморфного представления граничных членов (135).

На многообразии с границами $\exp iS_{CS}$ не инвариантна относительно произвольных калибровочных преобразований (117)

$$\exp iS_{CS}(A^g) = \Theta(A, g)^k \exp iS_{CS}(A) \tag{137}$$

$$\Theta(A, g) = \exp\left(-\frac{i}{12\pi}\int_M (g^{-1}dg)^3 + \frac{i}{4\pi}\int_{\partial M} Adgg^{-1}\right) \tag{138}$$

Тогда для амплитуды $Z_{\Sigma\times I}[A_0; A_z, A_{\bar z}]$ при преобразовании $\gamma_t = \exp tA_0$

$$Z_{\Sigma\times I}[A_0; A_z, A_{\bar z}^\gamma] = Z_{\Sigma\times I}[A_0^{(\gamma_t^{-1})} = 0; A_z, A_{\bar z}] C[A_{\bar z}, \gamma] \tag{139}$$

где $C[A_{\bar z}, \gamma]$ - коцикл Полякова-Вигманна:

$$C[A_{\bar z}, \gamma] = \exp iS_{G/G}(\gamma^{-1}, A_z = 0, A_{\bar z}) \tag{140}$$

Нам надо также перейти от меры $\mathcal{D}A_0$ на алгебре Ли к мере Хаара $\mathcal{D}\gamma$ на группе, при этом получается множитель, который сокращает член Det'. Имеем:

$$Z_{\Sigma\times S^1} = \int \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}A Z_{\Sigma\times I}[A_0 = 0; A_z, A_{\bar z}] C[A_{\bar z}, \gamma] \exp\left(\frac{ik}{2\pi}\int_\Sigma A_z A_{\bar z}^\gamma\right) \tag{141}$$

Осталось вычислить обычный интеграл $Z_{\Sigma\times I}[A_0; A_z, A_{\bar z}]$, только нужно быть аккуратными с граничными условиями:

$$Z_{\Sigma\times I}[A_0; A_z, A_{\bar z}] = N \exp\left(-\frac{ik}{2\pi}\int_{\Sigma\times\{0\}} A_z A_{\bar z}\right) \tag{142}$$

Подставляя, получаем для функционального интеграла

$$Z_{\Sigma\times S^1} \propto \int \mathcal{D}\gamma\mathcal{D}A \exp ik\left(\frac{1}{k}S_{WZW}(\gamma^{-1}) - \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma d^2z(A_{\bar z}\partial_z\gamma\gamma^{-1} + A_z A_{\bar z} - A_z A_{\bar z}^\gamma)\right) \tag{143}$$

$$Z_{\Sigma\times S^1} \propto \int \mathcal{D}\gamma\mathcal{D}A \exp iS_{G/G}(\gamma^{-1}, A) \tag{144}$$

При рассмотрении специальных видов поверхности Σ (диск, тор) удается перейти к чистой WZW-модели.

3.2 Литература

Оригинальные результаты по квантованию теории Черна-Саймонса и связь с WZW впервые опубликованы в работе [5]. Существуют записки с лекций Виттена [6], но они не очень понятные. С более математической точки зрения вопрос о связи конформной теории поля и теории Черна-Саймонса обсуждается в книге [7]. Теория Черна-Саймонса допускает также геометрическое квантование, чему посвящена диссертация [8]. Материал секции 3.1 написан по работе [9], а разделы 3.1.1, 3.1.2 представляют собой перевод английской статьи в Википедии (`http://en.wikipedia.org/wiki/Chern-Simons_theory`).

Список литературы

[1] A. M. Polyakov, “Conformal symmetry of critical fluctuations,” *JETP Lett.* **12** (1970) 381–383.

[2] A. Belavin, A. Polyakov, and A. Zamolodchikov, “Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory,” *Nuclear Physics* **241** (1984) 333–380.

[3] P. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal field theory.* Springer, 1997.

[4] M. Walton, “Affine Kac-Moody algebras and the Wess-Zumino-Witten model,” `arXiv:hep-th/9911187`.

[5] E. Witten, “Quantum field theory and the Jones polynomial,” *Communications in Mathematical Physics* **121** (1989) no. 3, 351–399.

[6] S. Hu, *Lecture notes on Chern-Simons-Witten theory.* World Scientific, 2001.

[7] T. Kohno, *Conformal field theory and topology.* Amer Mathematical Society, 2002.

[8] S. Axelrod, "Geometric quantization of Chern-Simons gauge theory,".

[9] M. Blau and G. Thompson, "Derivation of the Verlinde formula from Chern-Simons theory and the G/G model," *Nuclear Physics B* **408** (1993) no. 2, 345–390.