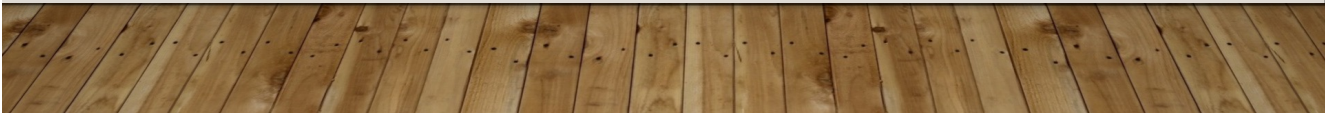


39 LES LOGIQUES

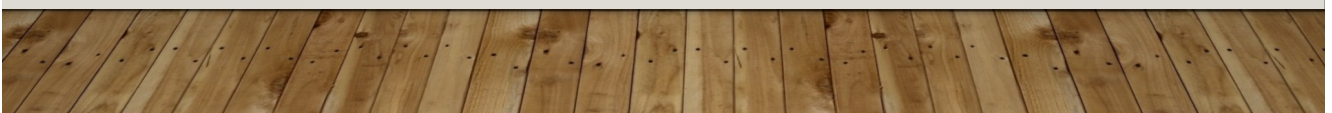
- La logique a été l'un des premiers formalismes proposés pour représenter de la connaissance.
- La logique est un moyen de :
 - description des objets et de leurs propriétés.
 - de faire des raisonnements.
- Domaines d'application :
 - Intelligence artificielle,
 - Spécification et conception sûres,
 - Bases de données, ...



40 LES LOGIQUES

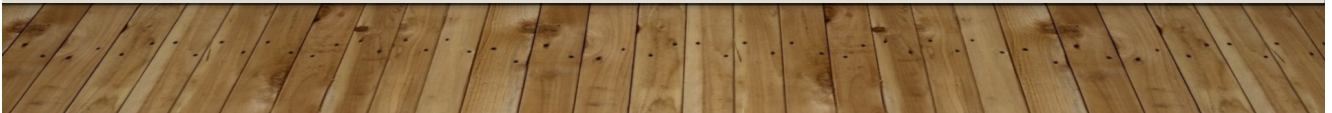
En général, on décrit une logique par les éléments suivants :

- syntaxe :
 - qu'est-ce qu'une formule ?
 - comment s'écrit-elle ?
- sémantique :
 - quel est le sens donné à chaque formule ?
- système de déduction :
 - une méthode de preuve pour déterminer si une formule est **vraie**.



41 LES LOGIQUES

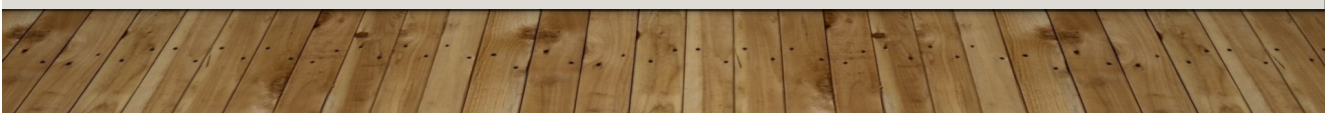
- Les logiques les plus connues
 - La logique des propositions (LP)
 - La logique des prédicats du premier ordre



42 LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

- Logique des propositions est définie par:
 - un alphabet:
 - Symboles de propositions: P, Q, \dots (phrases)
 - Phrases spéciales (valeurs): Vrai, Faux
 - Opérateurs: \wedge (et), \vee (ou), \neg (non), \Rightarrow (implique), \Leftrightarrow (équivalent)
 - des règles de construction de phrases: former énoncés plus complexes en utilisant les connecteurs logiques.
 - un calcul de valeurs de vérité pour ces phrases: par tables de vérités, par inférence, ...

Les phrases sont appelées des formules en logique.



43 LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

Exemple

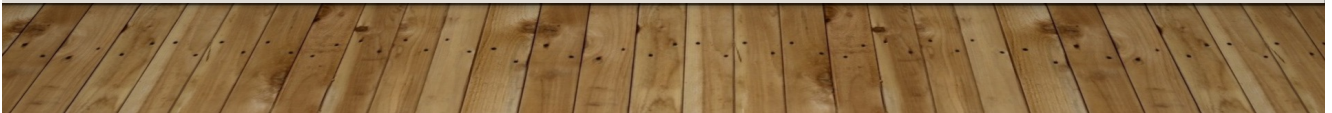
- s'il fait beau et que l'on est pas vendredi alors je fais la cueillette des olives.
- si je fais la cueillette des olives alors c'est l'hiver

Ce problème peut être modélisé sous la forme suivante :

- variable propositionnelle b = il fait beau
- variable propositionnelle s = on est vendredi
- variable propositionnelle f = je fais la cueillette des olives
- variable propositionnelle p = c'est l'hiver

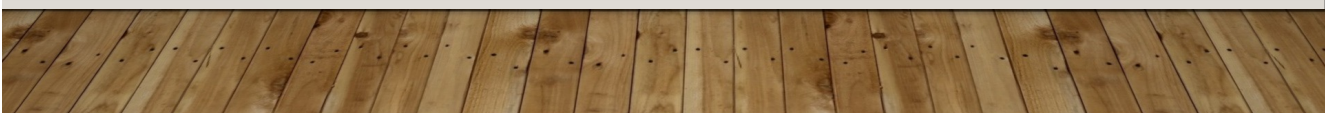
$$((b \wedge (\neg s)) \rightarrow f)$$

$$(f \rightarrow p)$$



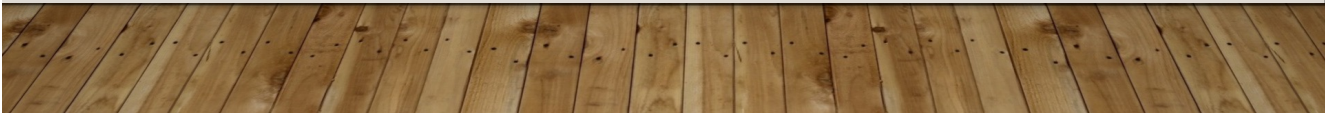
44 LA LOGIQUE DES PROPOSITIONS

- La logique propositionnelle a un pouvoir expressif limité (contrairement au langage naturel par exemple)
- Exemples:
 - Tous les étudiants sont intelligents
 - Tous les étudiants sont soit satisfaits ou pas par les cours de ce semestre
 - Chaque étudiant travaille avec un autre.
- Donc, la plupart de nos connaissances portent sur des individus, sur des classes d'individus, sur des relations entre individus.
- Utiliser la logique des prédicats du premier ordre



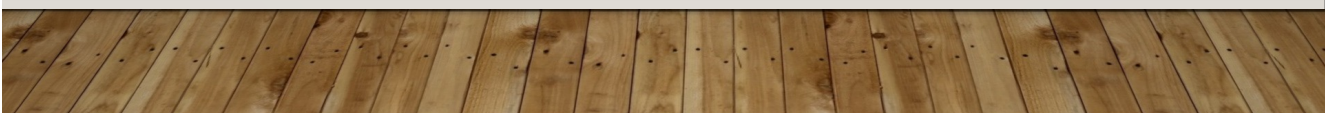
45 LOGIQUE DES PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

- Logique des prédicats du premier ordre
 - plus riche que LP,
 - L'alphabet inclut des symboles de fonctions.
- Eléments de Syntaxe
 - un ensemble de variables x, y, \dots ,
 - un ensemble de constantes a, b, \dots ,
 - les éléments V et F,
 - un ensemble de fonctions f, g, \dots , ayant chacun une arité,
 - un ensemble de prédicats P, Q, \dots , ayant chacun une arité,
 - des connecteurs : la négation \neg , et des connecteurs binaires : \wedge, \vee, \dots
 - les quantificateurs \forall et \exists .



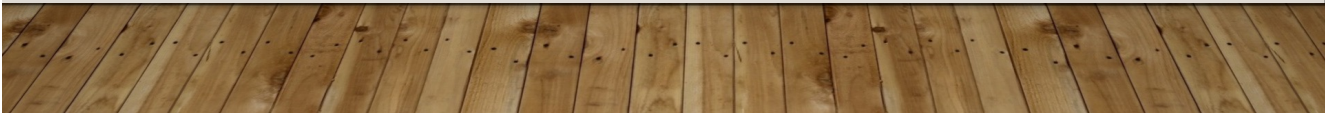
46 LOGIQUE DES PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

- Par exemple, $\neg((\forall x)(\exists y)P(x, f(y), a))$, est une formule du premier ordre.
- $(\forall x)$: quantification universelle ("pour tout x"),
- $(\exists x)$: quantification existentielle ("il existe un x tel que")
- Si P est un prédicat d'arité n, $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une formule atomique.



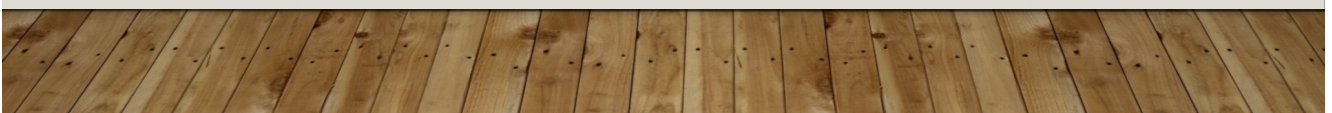
47 LOGIQUE DES PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

- Permet de modéliser le monde en termes d'objets, de relations entre objets, de propriétés des objets et de faits ou règles concernant ces relations et propriétés.
- Dans les formules logiques utilisées :
 - les constantes, variables et fonctions représentent des objets de la partie du monde ou du système modélisé
 - les symboles de prédicats représentent les relations entre objets ou, pour les prédicat unaires, le fait qu'un objet possède une propriété
 - les formules fermées représentent des faits particuliers (formules sans quantificateurs) ou et règles générales (formules quantifiées)



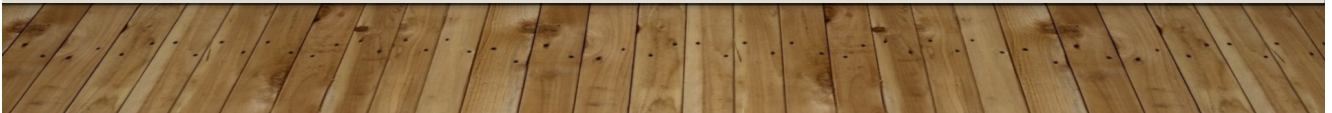
48 LOGIQUE DES PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

- On veut modéliser les relations entre personnes (connaissances, amitié, ...), le fait qu'une personne a envoyé un message à une autre personne, et les règles générales sur ces relations. On utilise le vocabulaire de prédicats
- prédicats : personne (unaire), message (ternaire), connaît (binaire),
- constantes : Fatma, Omar, Ali (représentent des personnes), m1, m2, m3, ... (les messages)
- soient les faits suivants :
 - Fatma est une personne
 - le message m3 a été envoyé par Fatma à Ali
 - Ali connaît Houda



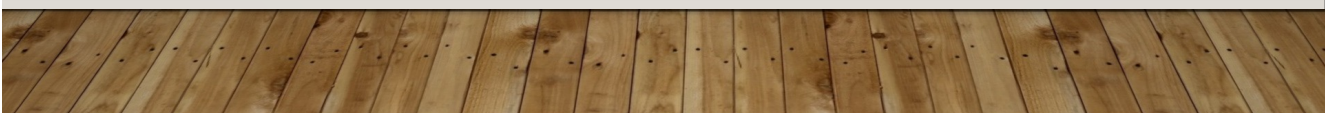
49 LOGIQUE DES PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

- $f1 = \text{personne}(\text{Fatma})$.
- $f2 = \text{message}(m3, \text{Fatma}, \text{Ali})$
- $f3 = \text{connait}(\text{Ali}, \text{Houda})$.
- La représentation des règles générales de ce domaine passe par l'écriture de formules quantifiées.
- L'expéditeur et le destinataire d'un message sont forcément des personnes et elles doivent se connaître :
$$f4 = \forall x \forall y \forall z (\text{message}(x, y, z) \Rightarrow \text{personne}(y) \wedge \text{personne}(z) \wedge \text{connait}(y, z))$$
- Pour être dans le réseau il faut connaître au moins une personne
$$f5 = \forall x (\text{personne}(x) \Rightarrow \exists y \text{ connait}(x, y))$$



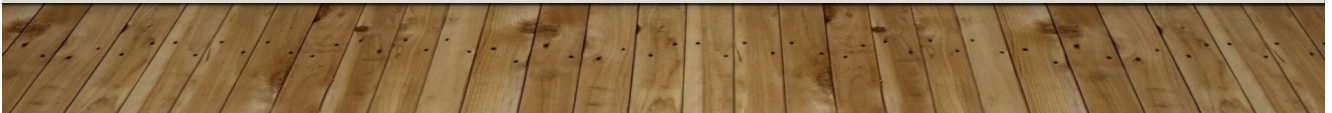
50 LOGIQUE DES PRÉDICATS DU PREMIER ORDRE

- La programmation logique est née d'une analogie entre les expressions du langage logique et les langages de programmation, donnant naissance au langage PROLOG (En 1972).
- **Inconvénient:** la logique dite classique ne reconnaît comme modalités que le **vrai** et le **faux**



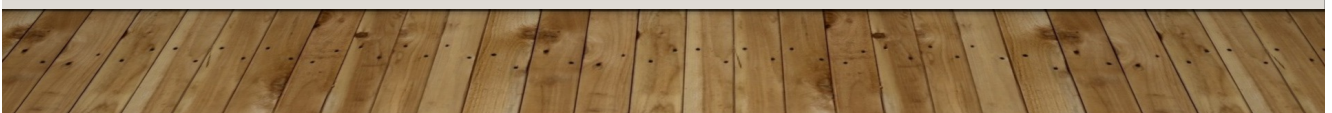
51 LES LOGIQUES NON CLASSIQUES

- Logique **non classique**:
 - La logique **floue**: introduit des degrés dans la valeur de vérité d'une formule.
 - Les logiques **modales** : introduisent :
 - des modalités telles que la **possibilité** ou la **nécessité**
 - Exemple : un étudiant peut avoir un diplôme,
 - des modalités temporelles telles que le **passé** ou le **futur**
 - Exemple: un étudiant finira par avoir un diplôme.



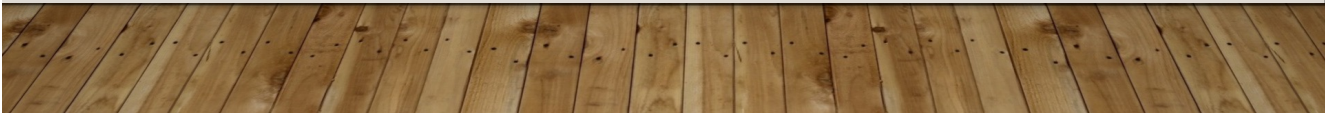
52 LES LOGIQUES NON CLASSIQUES

- Logique **non classique**:
 - Les logiques **non-monotones** nées à partir des années 1970 introduisent la non-monotonie :
 - certaines formules peuvent être considérées comme prouvables dans un ensemble d'axiomes A, mais non prouvables dans un ensemble A' contenant A.
 - Les logiques de **défauts** (exceptions)
 - Prise en considération des exception dans la modélisation
 - Exemple: tous les oiseaux volent, **exception** les autruches



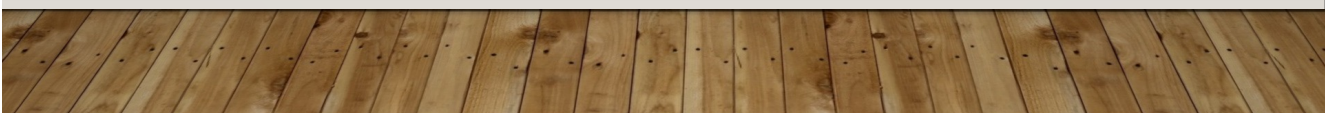
53 LOGIQUE DE DESCRIPTION

- La **logiques de description** (LD) est une famille de langages de représentation de connaissances.
- Les LD sont influencées par:
 - la logique des prédicats,
 - les schémas (frames), et
 - les réseaux sémantiques.
- La présence de catégories générales d'objets et de relations dans LD fait partie de l'héritage conceptuel des schémas et des réseaux sémantiques.



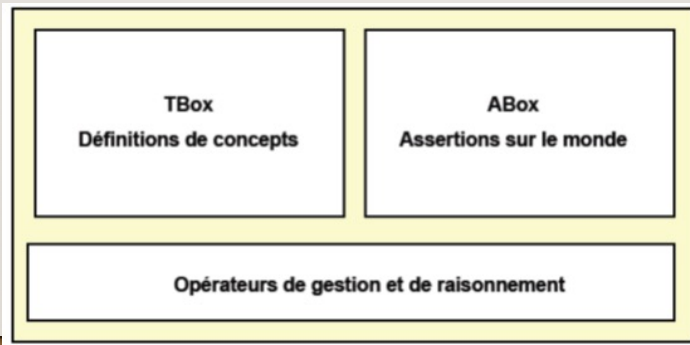
54 LOGIQUE DE DESCRIPTION

- **Concept** \Leftrightarrow entité générique d'un domaine
 - Un **concept** permet de représenter un **ensemble** d'individus
- **Individu** \Leftrightarrow une entité singulière, une **instance** d'un concept.
 - Un **rôle** représente une **relation** binaire entre individus.
- Un concept et un rôle possèdent une *description structurée* élaborée à partir de *constructeurs*
- Une sémantique est associée à chaque description de concept et de rôle par l'intermédiaire d'une *interprétation*.



55 PRINCIPES DES LD

- Modélisation des connaissances d'un domaine :
 - Représentation des **concepts** et des **rôles** relèvent du niveau terminologique \Leftrightarrow TBox
 - Description et manipulation des **individus** relèvent du niveau *factuel* ou niveau des *assertions* ABox



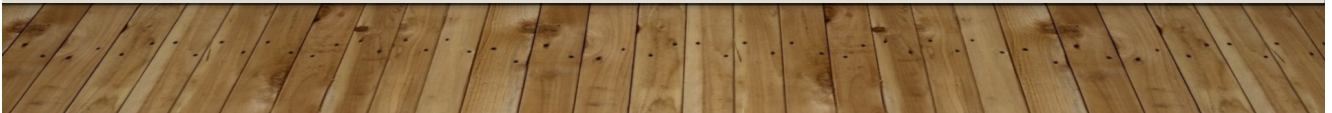
56 LOGIQUE DE DESCRIPTION

Exemple

TBox	ABox
$Femelle \sqsubseteq \top \sqcap \neg M\grave{a}le$	$Humain(Anne)$
$M\grave{a}le \sqsubseteq \top \sqcap \neg Femelle$	$Femelle(Anne)$
$Animal \equiv M\grave{a}le \sqcup Femelle$	$Femme(Sophie)$
$Humain \sqsubseteq Animal$	$Humain(Robert)$
$Femme \equiv Humain \sqcap Femelle$	$\neg Femelle(Robert)$
$Homme \equiv Humain \sqcap \neg Femelle$	$Homme(David)$
$M\grave{e}re \equiv Femme \sqcap \exists relationParentEnfant$	$relationParentEnfant(Sophie, Anne)$
$P\grave{e}re \equiv Homme \sqcap \exists relationParentEnfant$	$relationParentEnfant(Robert, David)$
$M\grave{e}reSansFille \equiv M\grave{e}re \sqcap$ $\forall relationParentEnfant. \neg Femme$	
$relationParentEnfant \sqsubseteq \top_R$	

57 PRINCIPES DES LD

- Organisation des concepts et rôles par la relation de **subsomption** par niveau de généralité:
 - C subsume D si C est plus général que D au sens que l'ensemble d'individus représenté par C contient l'ensemble d'individus représenté par D \Leftrightarrow hiérarchie de concepts et (parfois) hiérarchie de rôles.
- Opérations de base : **classification** et **instanciation**.
 - **Classification** de concepts (ou rôles) et détermine la position d'un concept (d'un rôle) dans une hiérarchie. Construction et maintenance de la hiérarchie est assistée par le processus de classification.
 - **L'instanciation** permet de retrouver les concepts dont UN individu est susceptible d'être une instance (*sens différent dans les langages à objet*).

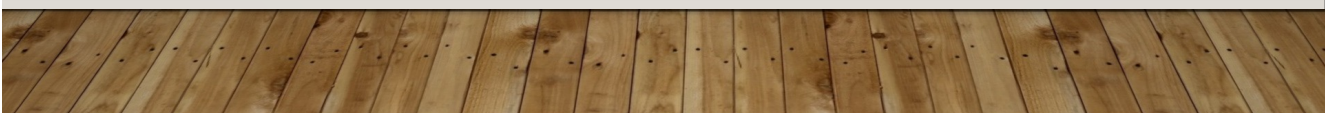


58 LOGIQUE DE DESCRIPTION

- Niveau terminologique (TBox)
 - **Entités atomiques**
 - Les concepts atomiques et rôles atomiques constituent les entités élémentaires d'une TBox.
 - Les noms **débutant** par une lettre **majuscule** désignent les concepts (par exemple : *Femelle, Mâle*), (A, B des concepts atomiques)
 - Les noms **débutant** par une lettre **minuscule** dénomment les rôles (par exemple : *relationParentEnfant*). (R dénote un rôle)
 - **Concepts et rôles atomiques prédéfinis**

Les LD prédéfinissent minimalement quatre concepts atomiques :

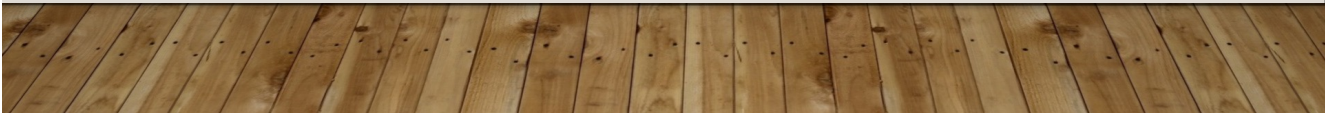
 - le concept T et le rôle T_R , les plus généraux de leur catégorie respective
 - le concept \perp ainsi que le rôle \perp_R les plus spécifiques (l'ensemble vide).



59 LOGIQUE DE DESCRIPTION

- **Entités composées**

- Les concepts et rôles **atomiques** peuvent être combinés au moyen de *constructeurs* pour former respectivement des concepts et des rôles **composés**. (C, D des concepts composés)
- Exemple 1:
 - le concept composé $M\grave{a}le \sqcap Femelle$ résulte de l'application du constructeur \sqcap aux concepts atomiques $M\grave{a}le$ et $Femelle$.
 - Il s'interprète comme l'ensemble des individus qui appartiennent aux concepts $M\grave{a}le$ et $Femelle$.
- Les différentes LD se distinguent par les constructeurs qu'elles proposent.



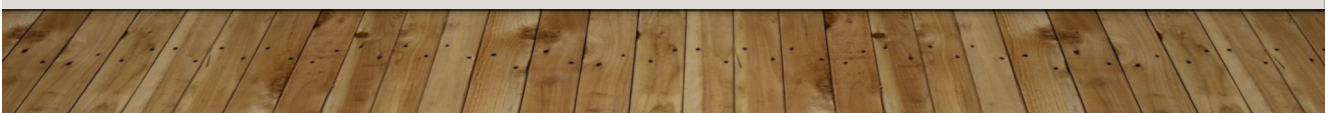
60 LOGIQUE DE DESCRIPTION

- **Notion d'interprétation:**

Pour expliciter formellement la sémantique d'une TBox.

Définition 1 (*Interprétation*)

Une interprétation $\mathcal{I} = (\Delta_{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ est la donnée d'un ensemble $\Delta_{\mathcal{I}}$ appelé domaine de l'interprétation et d'une fonction d'interprétation $\cdot^{\mathcal{I}}$ qui fait correspondre à un concept un sous-ensemble de $\Delta_{\mathcal{I}}$ et à un rôle un sous-ensemble de $\Delta_{\mathcal{I}} \times \Delta_{\mathcal{I}}$, de telle sorte que les équations suivantes soient satisfaites :



61 LOGIQUE DE DESCRIPTION

- **Notion d'interprétation:**

Pour expliciter formellement la sémantique d'une TBox.

$$\begin{aligned}\top^I &= \Delta_I \\ \perp^I &= \emptyset \\ (C \sqcap D)^I &= C^I \cap D^I \\ (C \sqcup D)^I &= C^I \cup D^I \\ (\neg C)^I &= \Delta_I - C^I \\ (\forall r.C)^I &= \{x \in \Delta_I / \forall y : (x, y) \in r^I \rightarrow y \in C^I\} \\ (\exists r.C)^I &= \{x \in \Delta_I / \exists y : (x, y) \in r^I \wedge y \in C^I\} \\ (\geq n r)^I &= \{x \in \Delta_I / |\{y \in \Delta_I / (x, y) \in r^I\}| \geq n\} \\ (\leq n r)^I &= \{x \in \Delta_I / |\{y \in \Delta_I / (x, y) \in r^I\}| \leq n\} \\ (r_1 \sqcap \dots \sqcap r_n)^I &= r_1^I \cap \dots \cap r_n^I\end{aligned}$$

62 LOGIQUE DE DESCRIPTION

- **Définition formelle de TBox**

Une TBox contient des axiomes terminologiques de la forme $C \sqsubseteq D$ (relations d'inclusion) ou $C \equiv D$ (relations d'équivalence entre concepts).

- Une interprétation I satisfait un axiome $C \sqsubseteq D$ ssi $C^I \subseteq D^I$.
- Une interprétation I satisfait un axiome $C \equiv D$ ssi $C^I = D^I$.
- Une interprétation satisfait une TBox (est un modèle de TBox) ssi l'interprétation satisfait tous les axiomes de la TBox.

63 LOGIQUE DE DESCRIPTION

- **Niveau factuel (ABox)**

- Une ABox contient un ensemble d'assertions sur les individus :
 - (1) des assertions d'appartenance et
 - (2) des assertions de rôle.
- Chaque ABox doit être associée à une TBox, car les assertions s'expriment en terme des concepts et des rôles de la TBox.
- Une ABox désigne des individus dans ses assertions par des noms qu'elle leur donne, dans le tableau I : Anne, David, Robert et Sophie.
- On utilise le terme *individu nommé* pour référer à ces noms : représente par les lettres a, b.
- Une fonction d'interprétation assigne à chacun de ces noms a, un individu a^I tel que $a^I \in \Delta_I$.

64 LOGIQUE DE DESCRIPTION LOGIQUE MINIMALE AL

On décrit une logique minimale nommée dans le sens où une logique moins expressive représente peu d'intérêt.

- **Les constructeurs d' AL**

Les constructeurs offerts AL par pour l'édification de concepts composés.

$C, D \rightarrow$	A	(concept atomique)
	\top	(le concept universel)
	\perp	(le concept le plus spécifique)
	$\neg A$	(la négation atomique)
	$C \sqcap D$	(l'intersection)
	$\exists R. \top$	(quantification existentielle limitée)
	$\forall R. C$	(quantification universelle complète)

- Le constructeur $C \sqcap D$ permet de faire la conjonction de 2 concepts composés, i.e. représente l'ensemble des individus, membres des concept C et D pour une interprétation.

65 LOGIQUE DE DESCRIPTION LOGIQUE MINIMALE AL

- Le quantificateur existentiel non typé $\exists R.T$ désigne l'ensemble des individus, membres du domaine d'un rôle R pour une interprétation donnée.

Exemple: pour une interprétation I qui est un modèle de l'ABox et de la TBox du tableau 1, $\exists relationParentEnfant.T$ équivaut l'ensemble des individus $\{Sophie^I, Robert^I\}$.

- Le quantificateur universel $\forall R.C$ évoque l'ensemble des individus du domaine d'un rôle R qui sont en relation, par le biais de R , avec un individu du concept C , pour une interprétation donnée.

Exemple: pour une interprétation I qui est un modèle de l'ABox et de la TBox du tableau 1, $\forall relationParentEnfant.Homme$ équivaut l'ensemble des individus $\{Robert\}$.

- AL ne permet pas la spécification de rôles à l'aide de constructeurs (rôles composés).

66 LOGIQUE DE DESCRIPTION LOGIQUE MINIMALE AL

- La sémantique formelle d' AL**

Afin de supporter la notion de concepts composés, la fonction d'interprétation est étendue par les règles décrites ci-dessous.

- Deux concepts C et D d'une TBox T s'équivalent si et seulement si $C^I = D^I$ pour toute interprétation I modèle de T .

$$\begin{array}{ll} \top^I & = \Delta^I \\ \perp^I & = \emptyset \\ (\neg A)^I & = \Delta^I \setminus A^I \\ (C \sqcap D)^I & = C^I \cap D^I \\ (\forall R.C)^I & = \{a \in \Delta^I \mid \forall b. (a, b) \in R^I \rightarrow b \in C^I\} \\ (\exists R.T)^I & = \{a \in \Delta^I \mid \exists b. (a, b) \in R^I\} \end{array}$$

67 LOGIQUE DE DESCRIPTION LOGIQUE MINIMALE *AL*

- **L'inférence**

L'inférence s'effectue au niveau terminologique ou factuel.

- **L'inférence au niveau terminologique**

Quatre principaux problèmes d'inférence se présentent au niveau terminologique : Satisfiabilité, Subsumption, Équivalence, Disjonction

- *Un concept C est satisfiable ou cohérent si et seulement s'il existe une interprétation \mathcal{I} telle que $C^{\mathcal{I}} \neq \emptyset$; C est non satisfiable ou incohérent sinon.*
- *Deux concepts C et D sont dits équivalents, ce qui se note $C \equiv D$, si et seulement si $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$ pour toute interprétation \mathcal{I} .*
- *Deux concepts C et D sont incompatibles ou disjoints si et seulement si $C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$ pour toute interprétation \mathcal{I} .*

68 LOGIQUE DE DESCRIPTION LOGIQUE MINIMALE *AL*

- les quatre types de problèmes d'inférence peuvent être réduits à des problèmes de subsumption ou à des problèmes de satisfiabilité.
 - Réduction des problèmes d'inférence d'une TBox à des problèmes de subsumption

C est insatisfiable	\iff	C est subsumé par \perp
C et D sont équivalents	\iff	C est subsumé par D , et D par C
C et D sont disjoints	\iff	$C \sqcap D$ est subsumé par \perp

- Réduction des problèmes d'inférence d'une TBox à des problèmes de satisfiabilité

C est subsumé par D	\iff	$C \sqcap \neg D$ est insatisfiable
C et D sont équivalents	\iff	$C \sqcap \neg D$ et $\neg C \sqcap D$ sont insatisfiables
C et D sont disjoints	\iff	$C \sqcap D$ est insatisfiable

69 LOGIQUE DE DESCRIPTION LOGIQUE MINIMALE *AL*

- **L'inférence au niveau factuel**

Le niveau factuel comprend quatre principaux problèmes d'inférence :

- **Cohérence** : Une ABox A est cohérente par rapport à une TBox T si et seulement s'il existe un modèle I de A et T .
- **Vérification d'instance** : Vérifier par inférence si une assertion $C(a)$ est vraie pour tout modèle I d'une ABox A et d'une TBox T .
- **Vérification de rôle** : Vérifier par inférence si une assertion $R(a, b)$ est vraie pour tout modèle I d'une ABox A et d'une TBox T .
- **Problème de récupération** : Pour une ABox A , un concept C d'une terminologie T , inférer les individus $a_1^I \dots a_n^I \in CI$ pour tout modèle I de T .

