ÔN TẬP LÍ THUYẾT

CHƯƠNG 1:

- Viết phương trình đường thẳng đi qua $A(x_0; y_0)$ khi biết hệ số góc k.

$$\boxed{y = k(x - x_0) + y_0}$$

- Tính chất của hai đường thẳng song song, với $k_1; k_2$ là hệ số góc.

$$\boxed{k_1 = k_2}$$

- Tính chất của hai đường thẳng vuông góc, với $k_1; k_2$ là hệ số góc.

$$\boxed{k_1.k_2 = -1}$$

- Các tính chất của hệ số góc:

+ Đường thẳng đi lên khi x tăng sẽ có hệ số góc dương.

+ Đường thẳng đi xuống khi x tăng sẽ có hệ số góc âm.

+ Đường thẳng nằm ngang khi có hệ số góc bằng 0.

+ Đường thẳng thẳng đứng không có hệ số góc hay hệ số góc không xác định.

- Hàm hợp:

+ $(f\ o\ g)(x) \leftrightarrow f[g(x)]; (g\ o\ f)(x) \leftrightarrow g[f(x)]$.

+ Lưu ý các dạng hàm $f; g$ được cho bởi nhiều hàm thì phải xét tập giá trị để tìm ra những miền tương ứng. Sau đó hợp các miền tương ứng với nhau.

VD: Giả sử $f(x) = \begin{cases} -3x\ khi\ x \le 0 \\ x + 2\ khi\ x > 0 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} sinx + 1\ khi\ x \le 0 \\ -1 \qquad khi\ x > 0 \end{cases}$.

Tìm $(f\ o\ g)(x)$

Giải:

Xét $x \le 0 \rightarrow g(x) = sinx + 1 \rightarrow 0 \le g(x) \le 2\ (vì -1 \le sinx \le 1)$

$\rightarrow g(x) > 0 \rightarrow (f\ o\ g)(x) = (sinx + 1) + 2\ với\ x > 0$

Xét $x > 0 \rightarrow g(x) = -1 < 0 \rightarrow (f\ o\ g)(x) = -3.-1\ với\ x < 0$

$$\rightarrow (f\ o\ g)(x) = \begin{cases} 3 & khi\ x \leq 0 \\ sinx + 3 & khi\ x > 0 \end{cases}$$

- Hàm ngược:

+ Lưu ý $\cos^{-1} a = b$ → $a = cosb$. Tương tự cho các hàm lượng giác ngược khác.

+ Khi giải phương trình có hàm lượng giác ngược phải đặt điều kiện tồn tại của x theo bảng sau. Sau khi giải ra nghiệm phải đối chiếu với điều kiện.

Hàm số	Miền xác định	Miền giá trị
1. $y = \cos^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
2. $y = \sin^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
3. $y = \tan^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
4. $y = \cot^{-1} x$	$-\infty < x < \infty$	$0 < y < \pi$
5. $y = \sec^{-1} x$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{\pi}{2}$
6. $y = \csc^{-1} x$	$\lvert x \rvert \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}, y \neq 0$

vit bng này ra giy
còn bit mà dùng

Viết bảng này ra giấy
để còn dùng đến

- Các công thức lượng giác thường gặp:

- $sin2x = 2sinxcosx$
- $cos2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$
- $\cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$ $\quad\quad\sin^2 x = \frac{(1-cos2x)}{2}$
- $sinx \pm cosx = \sqrt{2}sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} \mp x\right)$

Viết bảng này ra giấy
để còn dùng đến

- Tìm hiểu thêm các công thức nghiệm của phương trình lượng giác.

CHƯƠNG 2:

- Định lí kẹp:

> Nếu $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ với mọi $x \neq c$ trong khoảng chứa c và
> $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$ thì $\lim_{x\to c} f(x) = L$

VD: Tìm $\lim_{x\to 0} xsinx$.

Ta có: $-1 \leq sinx \leq 1 \leftrightarrow -x \leq xsinx \leq x$

Mà $\lim_{x\to 0} -x = \lim_{x\to 0} x = 0 \to \lim_{x\to 0} xsinx = 0$.

- Các giới hạn lưu ý: $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1;\ \lim_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x} = 0;\ \lim_{x\to 0} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

- Khi tính giới hạn việc đầu tiên làm là xác định giới hạn cần tính thuộc dạng nào. Nếu thuộc 1 trong 7 dạng vô định $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; \infty^0; 0^0; 1^\infty; 0.\infty$ thì phải biến đổi làm mất dạng vô định.

- Định lí giá trị trung bình (dùng để chứng minh phương trình có nghiệm):

> Nếu f liên tục trên $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất số c thuộc $[a; b]$ sao cho $f(c) = 0$

- Quy tắc thay tương đương (ưu tiên dùng khi tính giới hạn).

+ Bảng thay tương đương:

Khi $x \to 0$ thì:

1. $sinx \approx x, \quad arcsinx \approx x$
2. $tanx \approx x, \quad arctanx \approx x$
3. $1 - cosx \approx \frac{x^2}{2}$
4. $(1+x)^\alpha - 1 = \alpha x$
5. $e^x - 1 \approx x$
6. $\ln(1+x) \approx x$

VD: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x^2}-1}{7x^2}$

Giải:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x^2}-1}{7x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x^2)^{\frac{1}{5}}-1}{7x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{5}.3x^2}{7x^2} = \frac{3}{35}$$

+ Chú ý khi biểu thức ở dạng phân thức, nếu thay tương đương ra bằng 0 thì không được thay mà phải tính bằng quy tắc L'Hospital (nếu đúng dạng).

VD: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1-2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-2x}{3x^2} = 0\ (sai)$

- Khi giới hạn được cho có dạng $[f(x)]^{g(x)}$ và thuộc một trong các dạng vô định $\infty^0; 0^0; 1^\infty$ thì lấy $e^{\ln[f(x)]^{g(x)}} = e^{g(x).\ln[f(x)]}$.

VD: $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x\to 0} e^{ln(1+x)^{\frac{1}{4x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{4x}\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{x}{4x}} = e^{\frac{1}{4}}$

- Sự liên tục của hàm số:

+ <u>D1:</u> Cho hàm $f(x) = \begin{cases} -\,-\,-\,-\,-, khi\ x \neq a \\ -\,-\,-\,-\,-\,-, khi\ x = a \end{cases}$. Tính $\lim_{x\to a} f(x)$ và $f(a)$.

- Nếu $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \rightarrow$ Kết luận hàm số liên tục tại $x = a$.
- Nếu $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a) \rightarrow$ Kết luận hàm số không liên tục (gián đoạn) tại $x = a$.

+ <u>D2:</u> Cho hàm $f(x) = \begin{cases} -\,-\,-\,-\,-, khi\ x > a \\ -\,-\,-\,-\,-\,-, khi\ x < a. \\ -\,-\,-\,-\,-\,-, khi\ x = a \end{cases}$

Tính $\lim_{x\to a^-} f(x); \lim_{x\to a^+} f(x); f(a)$.

- Nếu $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \rightarrow$ Kết luận hàm số liên tục tại $x = a$.
- Nếu có 1 giá trị khác $\rightarrow$ Kết luận hàm số không liên tục (gián đoạn) tại $x = a$.

+ Lưu ý: nếu đề bài yêu cầu chứng minh liên tục với mọi x thì phải chứng minh thêm hàm số liên tục khi $x \neq a$ đối với dạng D1 và chứng minh hàm số liên tục khi $x > a; x < a$ đối với D2.

- Tính chất hàm liên tục:

Tổng, hiệu, tích, thương và hàm hợp của các hàm sơ cấp (đa thức, phân thức, lũy thừa, lượng giác, lượng giác ngược, mũ và logarit) sẽ liên tục trên miền xác định của nó

- Lưu ý đối với các dạng bài tìm tham số để cho hàm số liên tục.

VD: Tìm a để $\mathrm{I} = \lim_{x \to 0} \frac{a+x}{x} = 1$.

Giải: Để I hữu hạn thì $\lim_{x \to 0} a + x = 0 \leftrightarrow a = 0$, vì nếu $\lim_{x \to 0} a + x \neq 0$ thì $I = \lim_{x \to 0} \frac{số\ thực}{0} = \infty$ không thỏa yêu cầu bài toán.

CHƯƠNG 3:

- Phương trình tiếp tuyến của $f(x)$ với hệ số góc $k = f'(x_0)$ tại tiếp điểm $(x_0; y_0)$.

$$\boxed{y = k(x - x_0) + y_0}$$

- Phương trình pháp tuyến đi qua điểm $(x_0; y_0)$ với $k = f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.

$$\boxed{y = -\frac{1}{k}(x - x_0) + y_0}$$

- Tính đạo hàm theo định nghĩa (nếu $f'(x)$ tồn tại thì ta nói f khả vi tại x).

$$\boxed{f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

- Các dạng bài tính đạo hàm:

+ Nếu hàm $f(x)$ được cho bởi 1 hàm thì sử dụng các công thức đạo hàm ở cấp dưới để tính.

+ Cho hàm $f(x) = \begin{cases} ------, khi\ x \neq a \\ ------, khi\ x = a \end{cases}$. Tính $f'(a) = ?$

$$\to\ f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

+ Cho hàm $f(x) = \begin{cases} ------, khi\ x > a \\ ------, khi\ x < a \\ ------, khi\ x = a \end{cases}$. Tìm $f'(a) = ?$

Tính $f'(a^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$; $f'(a^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$

- Nếu $f'(a^+) = f'(a^-) = L \to f'(a) = L$
- Nếu $f'(a^+) \neq f(a^-) \to$ không tồn tại đạo hàm tại $x = a$.

- Hàm số có đạo hàm tại $x = a$ thì chắc chắn liên tục tại $x = a$. Hàm số liên tục tại $x = a$ thì chưa chắc có đạo hàm tại $x = a$

- Luật móc xích (có thể mở rộng cho nhiều hàm)

Nếu f là hàm khả vi theo u và u là hàm khả vi theo x thì $y = f[u(x)]$ là hàm khả vi theo x và ta có $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}$

- Đạo hàm hàm ẩn (sử dụng công thức đạo hàm của hàm hợp).

VD: Tìm đạo hàm của hàm ẩn $x^2 - 3xy + 2y^2 = -2$.

Giải: Đạo hàm 2 vế, ta được: $2x - 3(xy)' + 4y.\frac{dy}{dx} = 0$

$$\leftrightarrow 2x - 3(y + x.\frac{dy}{dx}) + 4y.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x+3y}{-3x+4y}$$

- Ý nghĩa của đạo hàm là tốc độ thay đổi (tăng hoặc giảm) của hàm số theo biến số.

- Bài toán tốc độ:

Cho $f(x)$ là hàm biểu diễn vị trí của vật thì: $v(x) = f'(x); a(x) = v'(x) = f''(x)$

- Mô tả chuyển động:

$v(x) > 0$: vật đang đi theo chiều dương.
$v(x) < 0$: vật đang đi ngược chiều dương.
$v(x) = 0$: vật đứng yên.
$a(x).v(x) > 0$: vật đang chuyển động nhanh dần.
$a(x).v(x) < 0$: vật đang chuyển động chậm dần.
$a(x) = 0$: vật chuyển động đều.

- Các bài toán tốc độ có liên quan (có 5 bước giải):

B1: Vẽ sơ đồ bài toán.
B2: Đặt tên các biến đã biết và các biến cần tìm.
B3: Viết phương trình liên quan giữa các biến.
B4: Đạo hàm 2 vế phương trình theo thời gian t.
B5: Tính toán theo yêu cầu đề bài.

CHƯƠNG 4:

- Điểm tới hạn (điểm dừng):

> Điểm c được gọi là điểm tới hạn của hàm f nếu c thuộc miền xác định của f và $f'(c) = 0$ hoặc $f'(c)$ không tồn tại.

- Tính chất của điểm tới hạn $A(x_0; y_0)$

> - A thuộc đồ thị hàm số $\leftrightarrow f(x_0) = y_0$.
>
> - Nếu A là điểm cực trị của hàm số thì $f'(x_0) = 0$.
>
> - Nếu A là điểm uốn của đồ thị hàm số thì $f''(x_0) = 0$.

- Các bước tìm cực trị tuyệt đối trên một đoạn:

> B1: Tìm điểm dừng (điểm tới hạn) của hàm số.
>
> B2: Tính giá trị của hàm số tại điểm dừng và các điểm đầu mút.
>
> B3: So sánh các giá trị để tìm cực đại toàn cục và cực tiểu toàn cục.

- Cực trị tương đối tìm bằng cách làm giống như ở cấp 3: đạo hàm, tìm điểm dừng, lập bảng biến thiên,…

- Tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai:

> Giả sử c là điểm tới hạn của hàm f. Khi đó:
>
> - Nếu $f''(c) < 0$ thì f đạt cực đại địa phương tại c.
> - Nếu $f''(c) > 0$ thì f đạt cực tiểu địa phương tại c.

- Quy tắc L'Hospital:

> - Giả sử f và g là hai hàm khả vi trên khoảng mở chứa c và thỏa mãn $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ tạo ra dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ và $\lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. Trong đó L có thể hữu hạn hoặc vô hạn. Khi đó $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$
>
> - **Lưu ý:**
>
> + Tính chất $A.B = \frac{B}{\frac{1}{A}} = \frac{A}{\frac{1}{B}}$
>
> + Lỗi sai thường gặp ở dạng bài này là không đúng dạng nhưng vẫn sử dụng quy tắc.

- Các bước giải bài toán tối ưu:

B1: Vẽ hình và đặt tên các đại lượng (biến số) có liên quan đến bài toán.
B2: Tìm công thức cho đại lượng cần tối ưu.
B3: Sử dụng các giả thuyết của bài toán để biểu diễn các đại lượng cần tối ưu.
B4: Tìm miền xác định thực tế cho biến số ở bước 3.
B5: Sử dụng các phương pháp toán học để tìm cực đại hoặc cực tiểu của đại lượng cần tối ưu theo yêu cầu của bài toán.

CHƯƠNG 5:

- Ôn tập kĩ các cách tính nguyên hàm, tích phân đã học ở cấp dưới.

- Đạo hàm của tích phân:

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt = b'(x)f[b(x)] - a'(x)f[a(x)]$$

- Xem lại cách tính tích phân bằng phương pháp đổi biến. Lưu ý khi tích tích phân xác định khi đổi biến thì phải đổi cận.

- Giải phương trình vi phân bằng phương pháp tách biến:

B1: Đưa các biểu thức cùng một biến về một bên như dạng $f(y)dy = g(x)dx$.

B2: Lấy nguyên hàm 2 vế và thực hiện các bước tính nguyên hàm.

B3: Kết luận.

- **Lưu ý:**

+ Nếu đề bài yêu cầu tìm nghiệm chung thì không cần tính cụ thể C. Nếu yêu cầu tìm nghiệm riêng thì phải tính ra C cụ thể.

+ Nếu hai vế của phương trình vi phân là hai nguyên hàm phải tính bằng nhiều bước thì nên đặt riêng từng nguyên hàm để tính sau đó gộp lại để kết luận (khuyến cáo nên học thêm cách tính tích phân bằng phương pháp vi phân).

- Tăng trưởng và suy tàn theo quy luật hàm mũ:

Một quá trình được gọi là thay đổi theo quy luật của hàm mũ nếu tốc độ thay đổi tương đối của nó là hằng số, nghĩa là

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} = k \to \frac{dQ}{dt} = k.Q(t) \to Q(t) = Q_0e^{kt}$$

- Tăng trưởng nếu $k > 0$.
- Suy tàn nếu $k < 0$.

- Mô hình nước nước chảy qua lỗ thủng:

Tốc độ nước chảy qua lỗ thủng được xác định bởi $$\frac{dV}{dt} = -4{,}8A_0\sqrt{h}$$ A_0: diện tích lỗ thủng h: chiều cao mực nước trên lỗ thủng tại thời điểm t (tính theo giây).

- Định lí giá trị trung bình:

Nếu hàm f liên tục trên $[a;b]$ thì giá trị trung bình của f trên $[a;b]$ được xác định bởi tích phân: $$AV = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

----- Chúc các bạn ôn tập thật tốt ! -----