Лекция 06. Неинерциальные системы отсчета. Силы инерции. Сила Кориолиса. Движение тел переменной массы, реактивная сила

Штыгашев А.А.

Новосибирск, НГТУ

Уравнение движения материальной точки относительно ИСО записывается так

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{1}$$

Однако для многих важных случаев системы отсчета K' движутся с ускорением (НИСО).

В таких НИСО законы Ньютона НЕ выполняются.

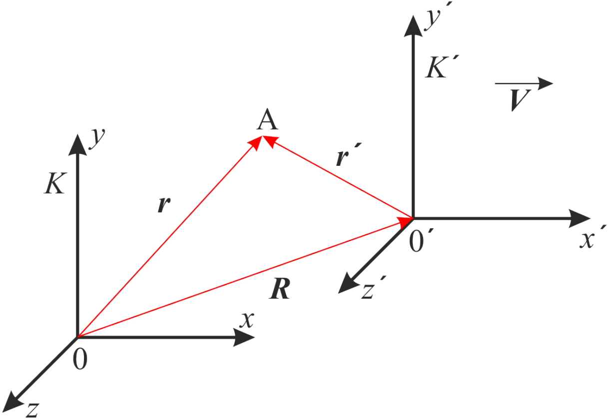
Поэтому исключительно важным становится необходимость изучения законов движения относительно НИСО.

Задача сводится к установлению законов преобразования сил и ускорений тел при переходе от ИСО к НИСО.

Для простоты обсуждения выделим «неподвижную» ИСО K и будем считать абсолютным скорость и ускорение относительно этой выделенной ИСО.

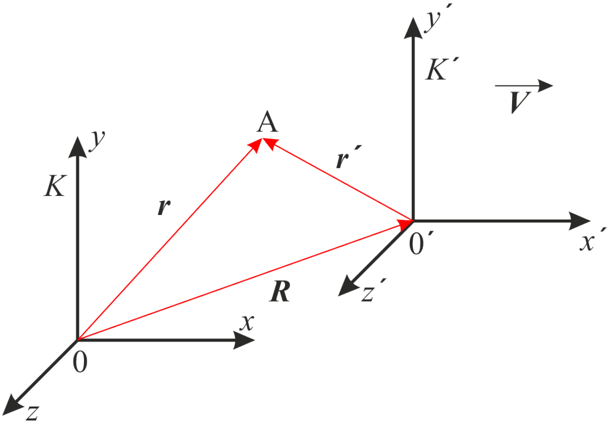
Пусть система K' движется относительно системы K с ускорением.

- Будем считать движение тела относительно K' относительным.
- Если тело покоится в системе K', то движение этого тела относительно K будем называть переносным движением.



Поступательное движение НИСО

Найдем закон движения в неинерциальной системе отсчета (НИСО).



«Неподвижная ИСО» K и движущееся поступательно НИСО K'

Поступательное движение НИСО

Пусть $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ радиус-векторы материальной точки A

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{r}' &= x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}', \\ \boldsymbol{R} &= X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{3}$$

В ИСО выполняется закон Ньютона $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$
Продифференцируем

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R}$$

по времени, тогда

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V} \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} &= v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{v}' &= v'_x\boldsymbol{i}' + v'_y\boldsymbol{j}' + v'_z\boldsymbol{k}', \\ \boldsymbol{V} &= V_x\boldsymbol{i} + V_y\boldsymbol{j} + V_z\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{5}$$

Если тело неподвижно в K', то движение системы K' «переносит» тело относительно K, то скорость $\boldsymbol{V}$ называется переносной скоростью.

Если тело движется со скоростью $\boldsymbol{v}'$ относительно K', то такая скорость называется относительной скоростью.

Скорость $\boldsymbol{v}$ относительно системы K называется абсолютной скоростью.

Дифференцируем

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}$$

и получаем

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{A} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= a_x \boldsymbol{i} + a_y \boldsymbol{j} + a_z \boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{a}' &= a'_x \boldsymbol{i}' + a'_y \boldsymbol{j}' + a'_z \boldsymbol{k}', \\ \boldsymbol{A} &= A_x \boldsymbol{i} + A_y \boldsymbol{j} + A_z \boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{A}$$

- $\boldsymbol{a}$ - абсолютное ускорение относительно ИСО;
- $\boldsymbol{a}'$ - относительное ускорение относительно НИСО;
- $\boldsymbol{A}$- переносное ускорение относительно ИСО.

Из $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{A} \tag{8}$$

умножаем на m и, учитывая $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$, запишем

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{a} - m\boldsymbol{A}$$

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{A}$$

Уравнение движение в НИСО отличается от уравнения (1) тем, что в правой части появляется добавочное слагаемое, которое обозначим как

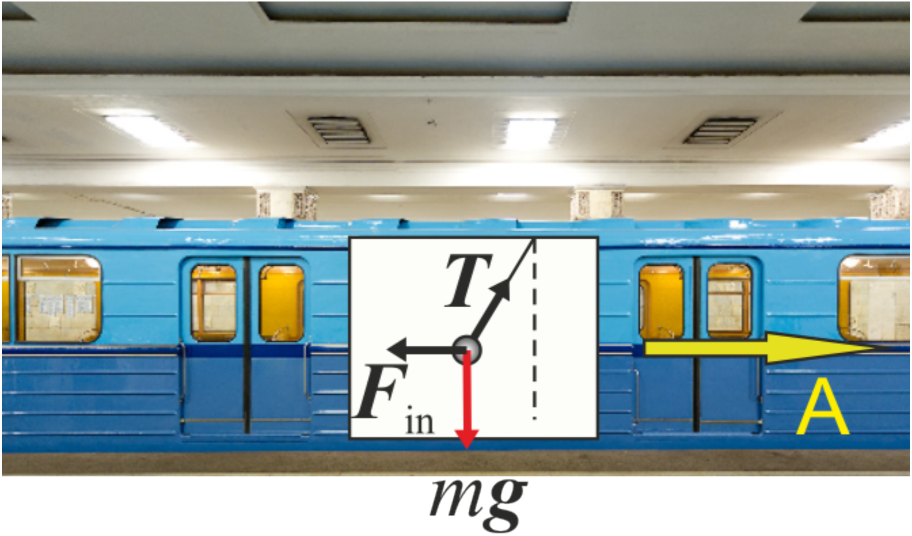
$$\boldsymbol{F}_{in} = -m\boldsymbol{A} \tag{9}$$

и искомое уравнение движения запишется в виде второго закона Ньютона

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_{in} \tag{10}$$

Сила $\boldsymbol{F}_{in}$ называется поступательной силой инерции, которая является пространственно-однородной (имеет одно и то же значение во всех точках системы).

Появление такой добавочной силы при рассмотрении движения тела относительно НИСО является формальным следствием преобразования координат $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R}$ и не отражает появления какого-нибудь нового взаимодействия тела с внешними телами.


T
F in
A
mg

Произвольное движение НИСО

Найдем закон движения тела в неинерциальной системе отсчета (НИСО), которая движется произвольно, т.е. композиции поступательного и вращательного движения НИСО.

В этом случае движение системы НИСО представим как поступательное движение начала координат $0'$ и одновременного вращения с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ относительно мгновенной оси вращения, проходящей через начало координат $0'$.

Для вектора фиксированной длины и вращающегося с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ производная по времени есть:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{b} \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}' = \frac{dx'}{dt}\boldsymbol{i}' + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{j}' + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{k}' + x'\frac{d\boldsymbol{i}'}{dt} + y'\frac{d\boldsymbol{j}'}{dt} + z'\frac{d\boldsymbol{k}'}{dt}$$
$$= \boldsymbol{v}' + x'\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \qquad (12)$$

С учетом вращения системы K' преобразование скоростей:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{r} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}' + \frac{d}{dt}\boldsymbol{R}$$
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V} \qquad (13)$$

Вычислим ускорения

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}' + \frac{d}{dt}\boldsymbol{V}$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{v}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}' + \frac{d}{dt}\boldsymbol{V} \tag{14}$$

Учитывая, что

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}' = \frac{dv'_x}{dt}\boldsymbol{i}' + \frac{dv'_y}{dt}\boldsymbol{j}' + \frac{dv'_z}{dt}\boldsymbol{k}' + v'_x\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}' + v'_y\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}' + v'_z\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}'$$

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt}\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' \tag{16}$$

Итого:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{A} \tag{17}$$

Представим вектор $\boldsymbol{r}'$ в проекциях на ось вращения и в плоскости перпендикулярной оси $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}'_{\parallel} + \boldsymbol{r}'_{\perp}$, тогда двойное векторное произведение запишем

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r}'_{\parallel} + \boldsymbol{r}'_{\perp}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_{\parallel} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_{\perp} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_{\perp}, \quad (18)$$

последнее произведение раскрываем по мнемоническому правилу

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}'_{\perp} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}'_{\perp}) - \boldsymbol{r}'_{\perp}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}) = -\omega^2 \boldsymbol{r}'_{\perp}. \quad (20)$$

Итак:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' - \omega^2 \boldsymbol{r}'_{\perp} + \boldsymbol{A} \quad (21)$$

Умножаем на массу материальной точки

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{a}' + 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' + m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' - m\omega^2\boldsymbol{r}'_\perp + m\boldsymbol{A} \tag{22}$$

Перекомпонуем

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' - m\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}' + m\omega^2\boldsymbol{r}'_\perp - m\boldsymbol{A} \tag{23}$$

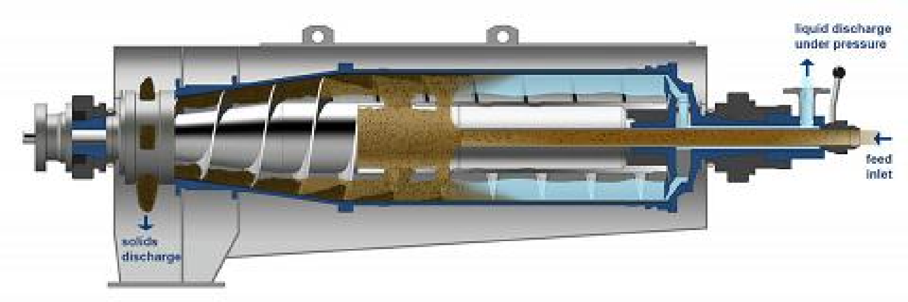
Здесь:

- $\boldsymbol{F}$ - ньютоновская сила;
- $\boldsymbol{F}_{cor} \equiv -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \equiv 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega}$ -кориолисова сила;
- $\boldsymbol{F}_\varepsilon \equiv -m\boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r}'$- сила инерции, связанная с угловым ускорением;
- $\boldsymbol{F}_c \equiv m\omega^2\boldsymbol{r}'_\perp$ – центробежная сила
- $\boldsymbol{F}_{in} \equiv -m\boldsymbol{A}$ - сила инерции обусловленная поступательным ускорением $\boldsymbol{A}$ системы K' относительно K.

Центробежная сила

Центробежная сила инерции широко используется в науке и технике: в центрифугах, сепараторах, насосах и т.д. Её необходимо учитывать при проектировании высокоскоростных вращающихся деталей машин.

$$\boldsymbol{F}_c = -m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' = m\omega^2 \boldsymbol{r}'_\perp \tag{24}$$



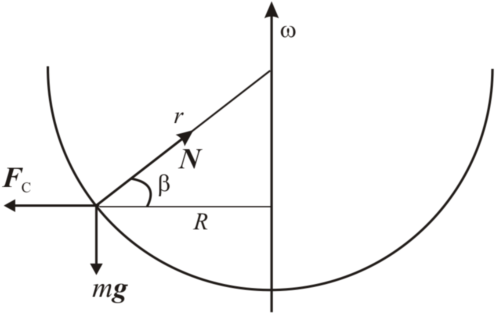
Разделение изотопов урана в газовой фазе

Разделение изотопов урана в газовой фазе

Разделение жидких и твердых сред

Пример 6.1.

Определить положение (высоту над дном чаши) шарика, помещенного в шарообразную вращающуюся чашку, радиуса $r = 0.2$ м и пусть угловая скорость чашки равна $\omega = 10$ рад/с.



С точки зрения НИСО (чашка) шарик находится в покое и на шарик действуют три силы

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_c \qquad (25)$$

Здесь $a' = 0$, $r'_{\perp} \equiv R$:
$\boldsymbol{F}_c = m\omega^2 \boldsymbol{r}'_{\perp}$, т.е. $F_c = m\omega^2 R$
При равновесии относительное ускорение шарика $a' = 0$.

Проектируем $m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_c$ на оси x и y, получаем систему

$$\begin{cases} 0 & = N\cos\beta - F_c, \\ 0 & = N\sin\beta - mg. \end{cases}$$

$$N = \frac{mg}{\sin\beta},$$

$$F_c = N\cos\beta,$$

$$F_c = mg\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$$

Учитывая $F_c = m\omega^2 R$ и $F_c = mg\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}$, получаем

$$m\omega^2 R = mg\frac{\cos\beta}{\sin\beta},$$

$$R = r\cos\beta,$$

$$\omega^2 r = \frac{g}{\sin\beta}$$

$$\sin\beta = \frac{g}{\omega^2 r},$$

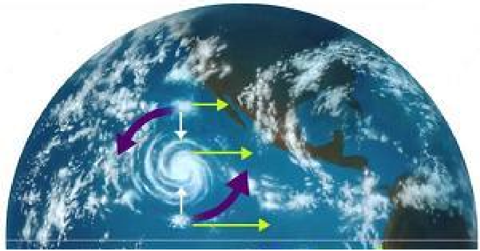
Высота шарика относительно дна есть:
$h = r - r\sin\beta = r(1 - g/\omega^2 r)$, тогда $h \approx 0.10$ м.

Кориолисова сила

Кориолисова сила инерции возникает при соблюдении двух условий – система отсчета вращается, а тело движется во вращающейся СО.

$$\boldsymbol{F}_{cor} \equiv -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \equiv 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega} \tag{26}$$

Например, кориолисова сила инерции действует на снаряд, пулю и отклоняет их в сторону от направления движения.



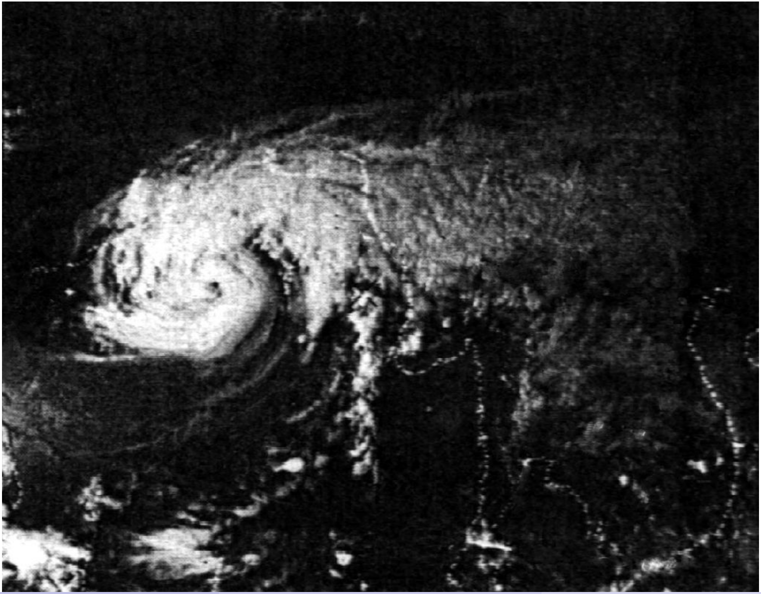
В северном полушарии из-за кориолисовой силы в циклонах массы воздуха участвуют в двух движениях:

- поперечное движение воздуха к центру циклона
- во вращательном движении (под действием силы Кориолиса) воздушных масс против часовой стрелки

В северном полушарии из-за кориолисовой силы в антициклонах воздушные массы перемещаются по:

- радиальному направлению от центра антициклона
- вращаются по часовой стрелке

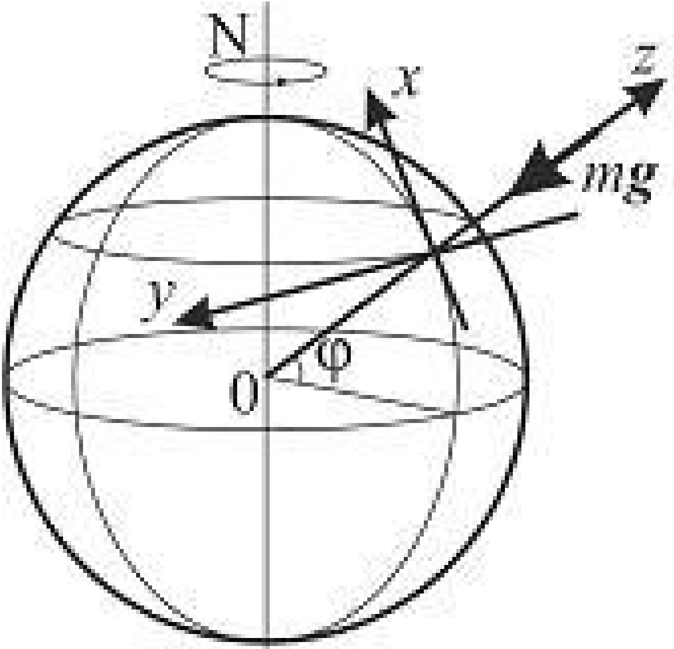
Циклон Бхола 11 ноября 1970 года



Пример 6.2.

Написать в координатном виде уравнения движения для падающего тела в глубокой шахте с учетом влияния вращения Земли.

Впервые эту задачу поставил в 1679 году И. Ньютон в его знаменитом письме Р. Гуку, который незамедлительно поставил серию опытов и получил при высоте 8.3 м отклонение на юго-восток от отвесной линии около четверти дюйма.
Географическая широта Лондона $\varphi = 51^\circ 40'$.


N
x
z
mg
y
φ
0

Математическую модель движения легко записать, считая, что основное воздействие на падающее тело оказывают две силы – сила тяжести и кориолисова сила, остальные воздействия сравнительно малы.

$$m\boldsymbol{a}' = m\boldsymbol{g} + 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega} \tag{27}$$

Далее штрихи не выписываем, т.к. работаем только в НИСО!

Угловая скорость вращения Земли в системе координат, показанной на рисунке равна $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_z \boldsymbol{k}$, где $\omega_x = \omega \cos\varphi$, $\omega_z = \omega \sin\varphi$, тогда

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z \end{vmatrix} = \omega_z v_y \boldsymbol{i} + (\omega_z v_x - \omega_x v_z)\boldsymbol{j} - \omega_x v_y \boldsymbol{k}$$

Начальное состояние тела $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, h)$ и $\boldsymbol{v}_0 = (0, 0, 0)$, тогда уравнение движения записывается так

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} &= v_x, \\
\dfrac{dy}{dt} &= v_y, \\
\dfrac{dz}{dt} &= v_z, \\
m\dfrac{dv_x}{dt} &= 2m\omega_z v_y, \\
m\dfrac{dv_y}{dt} &= 2m(\omega_z v_x - \omega_x v_z), \\
m\dfrac{dv_z}{dt} &= -mg - 2m\omega_x v_y.
\end{cases}
$$

Эту систему дифференциальных уравнений можно решить приближенно или численно.

Численное моделирование в условиях опытов Гука, показало, что отклонение на восток 0.324 мм, на юг – 0.012 мкм. Понятно, что измерительная точность инструментов тех лет не позволяет измерить это отклонение, но удивляет то, что Гук правильно указал (угадал) направление отклонения.

- 1802 Гамбург (собор) $\varphi = 53°46'$, $h = 76$ м, $\Delta y = 9$ мм.
- 1833 Фрайбург (шахта) $\varphi = 48°00'$, $h = 158$ м, $\Delta y = 28.3$ мм.

Движение тел переменной массы, реактивная сила

Второй закон Ньютона записывается так

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F} \tag{28}$$

Если масса изменяется со временем, уравнение движения тела с переменной массы записывается так

$$m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\frac{d}{dt}m = \boldsymbol{F}$$

$$
m\frac{d}{dt}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{v}\frac{d}{dt}m. \tag{29}
$$

Это уравнение можно использовать, когда пренебрегается импульсом теряемой или приобретаемой массы.

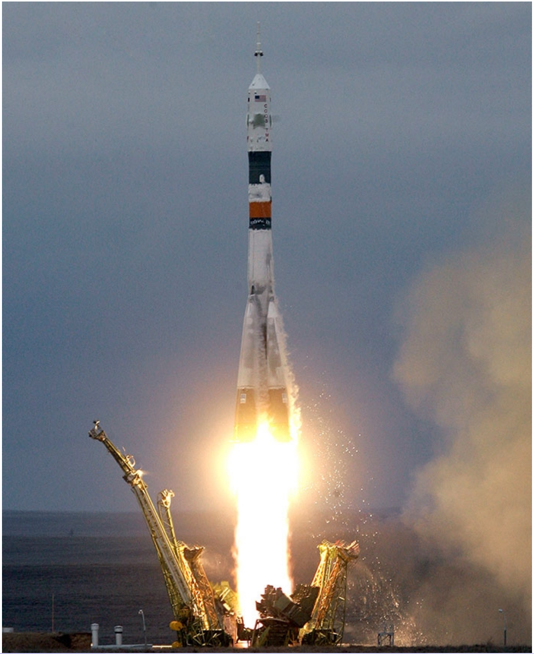
Примерами систем с переменной массы являются: дождевая капля падающая в облаке, ракета, якорная цепь при падении в воду и т.п.

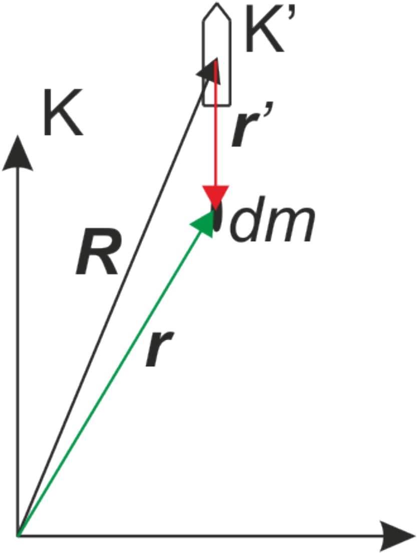
Рассмотрим случай, когда необходим учет импульса теряемой или приобретаемой массы.

Рассмотрим ракету как малое тело, тогда вся масса ракеты сосредоточена в центре масс ракеты.

Ракета с большой скоростью отбрасывает назад вещество горячие газы, воздействуя на них с большой силой (характерные скорости потока газов от 1000 до 3000 м/с).

Согласно третьему закону Ньютона, сами газы действуют на ракету с той же, но противоположно направленной силой, сообщая ракете ускорение.





Пусть K неподвижная система, а подвижная система отсчета K' связана с ракетой, тогда отбрасываемая ракетой частица газа массой dm' (причем $dm' > 0$), будет иметь координату относительно K, равную

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{R}$,

соответственно ее скорость равна

$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{V}$.

Пусть $m(t)$ - масса ракеты в некоторый момент времени, $V(t)$ - ее скорость в тот же момент времени.

Для системы «ракета+частицы газа» выполняется закон сохранения массы:

$$dm + dm' = 0,$$

т.е. $dm < 0$.
В момент времени $t + dt$ масса ракеты и скорость равна $m + dm$ и $V + dV$, тогда изменение импульса системы есть импульс силы:

$$(m + dm)(\boldsymbol{V} + d\boldsymbol{V}) + dm'\boldsymbol{v} - m\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}dt$$

$$(m + dm)(\boldsymbol{V} + d\boldsymbol{V}) - \boldsymbol{v}dm - m\boldsymbol{V} = \boldsymbol{F}dt$$

Приводим подобные члены и отбрасываем слагаемое $dmd\boldsymbol{V}$, получаем

$$md\boldsymbol{V} - dm\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{F}dt$$

Здесь $dm < 0$!!!

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} - \boldsymbol{v}'\frac{dm}{dt} = \boldsymbol{F}$$

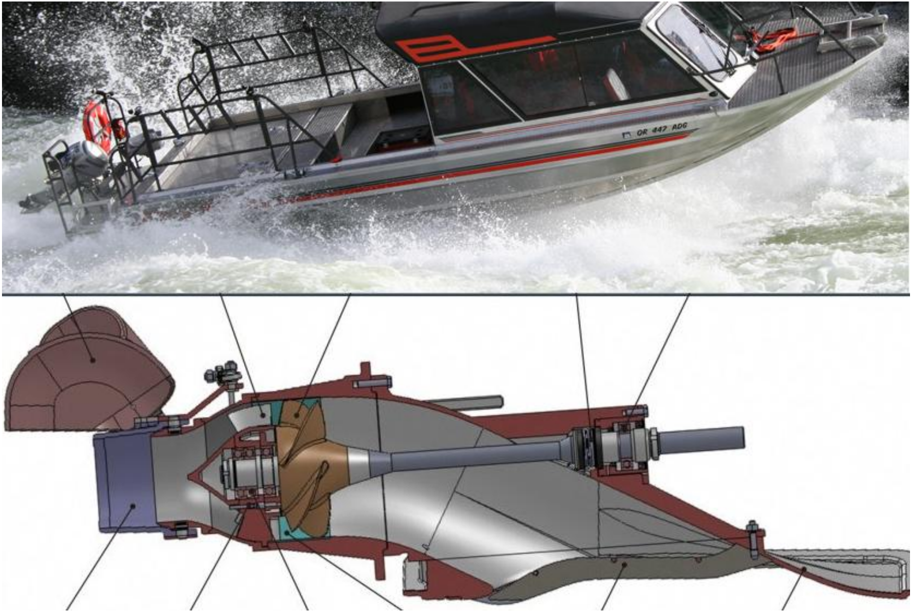
где $\boldsymbol{v}'$ - относительная скорость газовой струи, второе слагаемое есть реактивная сила $\boldsymbol{F}_r \equiv \boldsymbol{v}' dm/dt$.

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{v}'\frac{dm}{dt} \tag{30}$$

Полученное уравнение называется уравнением Мещерского.

Реактивная сила

Реактивная сила всегда противоположна относительной скорости $\boldsymbol{v}'$ истечения газов, следовательно, управляя направлением газовой струи, можно управлять движением тела (ракетой).
Реактивное движение не обязательно связано с ракетами, например, катер с водометным двигателем, паровая машина Герона и т.д.



Формула Циолковского

Рассмотрим случай, когда на ракету не действуют внешние силы

$$F = 0,$$

тогда

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{v}'\frac{dm}{dt} \tag{31}$$

проектируем векторы на ось z, получаем

$$m\frac{dV}{dt} = -v'\frac{dm}{dt} \tag{32}$$

Интегрируем от начального состояния до текущего, тогда

$$\frac{dV}{v'} = -\frac{dm}{m} \tag{33}$$

$$\int_{V_0}^{V} \frac{dV}{v'} = \int_{m}^{m_0} \frac{dm}{m},$$

$$\frac{V - V_0}{v'} = \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

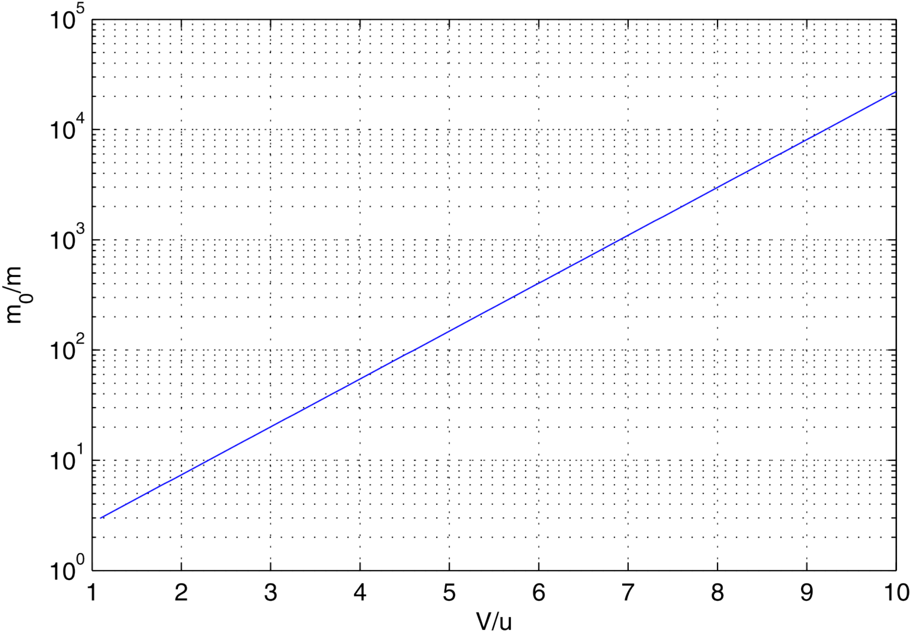
$$V = V_0 + v' \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

При нулевой начальной скорости тела $V_0 = 0$ получаем формулу Циолковского для нерелятивистского движения

$$\frac{m_0}{m} = \exp\left(\frac{V}{v'}\right) \tag{34}$$

Конечная скорость ракеты при отсутствии внешних сил, не зависит от закона изменения массы и ограничена только отношением начальной и конечной масс ракеты.

Для достижения первой космической скорости $V \approx 8$ км/с и при скорости газовой струи $v' \equiv u$ в 1 км/с, отношение $m_0/m \sim 3000$ (см. график)



10^5
10^4
10^3
10^2
10^1
10^0
m_0/m
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
V/u

Старт ракеты в поле тяжести планеты

$$m\frac{dV}{dt} = -v'\frac{dm}{dt} - mg$$

Решение данного динамического уравнения движение такое

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{v'}{m}\frac{dm}{dt} - g$$

$$\frac{dV}{v'} = -\frac{dm}{m} - \frac{gdt}{v'}$$

$$\frac{V - V_0}{v'} = \ln\left(\frac{m_0}{m}\right) - \frac{gt}{v'}$$

$$\frac{V + gt}{v'} = \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Старт ракеты в поле тяжести планеты

Пусть время подъема ракеты в космос составляет $t = 400$ с.
Пусть полезная масса $m = 100$ т.
Конечная скорость ракеты-носителя $V = 8$ км/с.
Скорость истечения газов $v' = 4$ км/с.
Какая стартовая масса системы

$$\frac{V + gt}{v'} = \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

$$m_0 = m \exp\left(\frac{V + gt}{v'}\right)$$

$$m_0 = 1000 \exp\left(\frac{8000 + 4000}{4000}\right) \approx 2000\text{т}$$

Космические скорости

Космические скорости - минимальные скорости движения космических тел в гравитационных полях небесных тел и их систем

Первая космическая скорость

$$m\frac{v_1^2}{R} = \gamma\frac{mM}{R^2}, \quad v_1 = \sqrt{\gamma\frac{M}{R}} \quad v_1 = 7.9 \text{ км/с}$$

Вторая космическая скорость

$$m\frac{v_2^2}{2} = \gamma\frac{mM}{R}, \quad v_1 = \sqrt{2\gamma\frac{M}{R}} = \sqrt{2}v_1, \quad v_2 = 11.2 \text{ км/с}$$

Третья космическая скорость $v_3 = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 v_1^2 + v_2^2}, v_3 = 16.7$ км/с

ТЕСТ 7

А. Скорость продуктов сгорания реактивного двигателя уменьшилась в 2 раза. Во скорлько раз нужно изменить массу продуктов сгорания, вылетающих в единицу времени, чтобы сила тяги двигателя не изменилась?
В. Для тех кто пользовался двумя программами - рейтинга. Оцените в шкале от 0 до 10 баллов эти программы.