Лекция 03. Работа и мощность силы. Энергия. Кинетическая и потенциальная энергия. Потенциальная энергия частицы во внешнем силовом поле. Потенциальная энергия взаимодействия системы частиц. Закон сохранения полной механической энергии системы

Штыгашев А.А.

Новосибирск, НГТУ

Определения

Тела, образующие систему, могут взаимодействовать между собой и внешними телами.
Тогда в соответствии с этим, силы подразделяются на

- внутренние
- внешние.

- Если внешние силы отсутствуют, то система называется изолированной системой.

  Отметим, что результирующая внутренних сил равна нулю и внутренние силы не могут вызвать движения тела.

- Если результирующая всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то система является замкнутой системой.

  Отметим, что изолированная система является замкнутой системой, но замкнутая система не является изолированной.

Барон Мюнхгаузен в болоте

Для замкнутых систем можно указать функции координат и импульсов частиц, которые не изменяют со временем своих значений и называются эти функции интегралами движения.
Мы будем изучать три таких интеграла: энергия, импульс и момент импульса замкнутой системы, соответственно будем изучать три закона сохранения:

- 1. закон сохранения энергии;
- 2. закон сохранения импульса;
- 3. закон сохранения момента импульса.

Эти законы связаны с основными свойствами Пространства-Времени, которые установила в свое время Эмми Нетер в виде теоремы:

Всякому непрерывному преобразованию координат в ИСО соответствует сохраняющаяся величина.

Закон сохранения энергии связан с однородностью времени – замена момента времени t моментом времени t', $t' = t + \tau$ без изменения значений координат и скоростей тел системы не изменяет механических свойств системы.

Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства – неизменностью свойств системы во всех точках пространства, т.е. параллельный перенос $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}$ всех тел системы из одного места пространства в другое не изменяет механических свойств системы.

Закон сохранения момента импульса связан с изотропностью пространства – неизменностью свойств системы по всем направлениям в пространстве.

Это означает, что поворот системы как целого на произвольный угол β: $\alpha' = \alpha + \beta$ не отражается на механических свойствах системы.

Работа и мощность

Энергетические характеристики движения тела вводятся на основе понятия работы силы

Работа - это скалярная величина, характеризующая действие силы $\boldsymbol{F}$ на тело при его перемещении $d\boldsymbol{r}$ в пространстве

- $$dA = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} \tag{1}$$
- $$dA = F dr \cos\alpha \tag{2}$$
- $$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Работа и мощность

- $$dA = F_\tau ds$$

где проекция вектора силы $\boldsymbol{F}$ на направление перемещения

$$F_\tau = F\cos\alpha$$

$$ds \equiv |d\boldsymbol{r}|$$

Работа A_{12} силы $\boldsymbol{F}$ на участке от 1 до 2 равна

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} \tag{3}$$

Мощность N_F силы $\boldsymbol{F}$

Мощность N_F силы $\boldsymbol{F}$ - физическая величина, равная отношению произведенной работы или изменения энергии к промежутку времени, в течении которого была произведена работа или произошло изменение энергии

$$N_F \equiv \frac{dA}{dt}. \tag{4}$$

$$N_F \equiv \frac{d}{dt}\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = \frac{d\boldsymbol{F}}{dt}d\boldsymbol{r} + \boldsymbol{F}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}. \tag{5}$$

Если сила $\boldsymbol{F}$ не зависит от времени и учитывая $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$, запишем цепочку

$$dA = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}dt \tag{6}$$

$$N_F = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v} \tag{7}$$

Измеряется мощность в ваттах (Вт) 1 Вт=1 кг м^2/с$^{-3}$, размерность мощности $[N_F] = L^2MT^{-3}$.

Энергия есть общая количественная мера различных форм движения материи.

В соответствии с различными формами движения материи условно различают

- механическую энергию
- внутренюю (тепловую) энергию
- электромагнитную энергию
- химическую энергию
- ядерную энергию
- т.д.

Энергия тела связана с массой $E = mc^2$, где c - скорость света в вакууме

Таблица: Масштабы энергии

Пример	Энергия, Дж
Распад ядра урана	1.0×10^{-11}
Взмах крыла комара	1.0×10^{-7}
100 Вт эл. лампа в течении 1 мин	6.0×10^{3}
Старт ракеты	1.0×10^{12}
Первая атомная бомба	1.0×10^{18}
Сильное замлятресение	1.0×10^{14}
Энергия Солнца, получаемая Землей	1.0×10^{25}
Энергия при вспышке сверхновой	1.0×10^{42}

Закон сохранения энергии

Закон сохранения энергии - энергия не возникает из ничего и не исчезает, энергия может переходить из одной формы в другую (в изолированной системе) или переходить между системами (телами).

Механической энергией системы будем называеть способность системы совершать работу.

В механике рассматривается кинетическая и потенциальная энергия. Измеряется энергия в Дж (джоулях) 1 Дж=1 кг·м^2/с^2, размерность энергии $[E_k] = L^2MT^{-2}$.

Кинетическая энергия

Рассмотрим движение частицы (материальной точки). Согласно второму закону Ньютона
$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}, \tag{8}$$
умножим на $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}dt$
$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\boldsymbol{v}dt = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}, \tag{9}$$
$$m\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}, \tag{10}$$

Запишем математическое соотношение

$$\boldsymbol{a} d\boldsymbol{a} = \frac{1}{2} da^2 = d\left(\frac{1}{2}a^2\right), \tag{11}$$

тогда для соотношения $m\boldsymbol{v}d\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}$ получаем

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r}, \tag{12}$$

Если система замкнута (т.е. $\boldsymbol{F} = 0$), то правая часть (12) равна нулю, тогда

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 0 \;\; \rightarrow \;\; \frac{1}{2}mv^2 = \text{const} \tag{13}$$

В механике такой закон сохранения очень важен и поэтому левую часть последнего соотношения назвали кинетической энергией E_k

$$E_k \equiv \frac{1}{2}mv^2 \tag{14}$$

Кинетическая энергия - это энергия зависящая от масс и скоростей тел, составляющих систему

$$E_k = \sum_n m_n \frac{v_n^2}{2}$$

Учитывая

$$\boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

в правой части стоит под интегралом полный дифференциал, поэтому можно сразу записать

$$A_{12} = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2. \tag{15}$$

Работа A_{12} силы $\boldsymbol{F}$ по перемещению частицы из 1 в 2 идет на приращение кинетической энергии

$$A_{12} = E_{k2} - E_{k1}. \tag{16}$$

Определения

Пространственное расположение тел системы называется конфигурацией системы.

Все силы, встречающиеся в механике, разделяются на

- консервативные
- неконсервативные

Определения

Если силы взаимодействия между телами зависят только от конфигурации системы и работа сил по перемещению системы из начальной в конечное состояние не зависит от пути перехода и определяется только начальной и конечной конфигурациями системы, то такие силы консервативны.

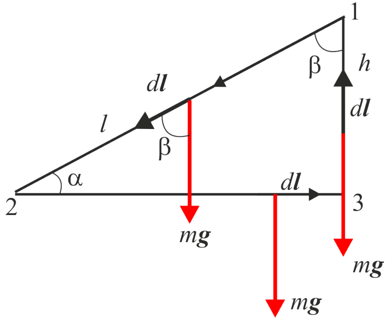
Работа консервативных сил по замкнутому пути равна нулю

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{l} = 0 \tag{17}$$

Все остальные силы неконсервативные.

Пример 3.1.

Найти работу силы тяжести при перемещении тела по замкнутому пути.



Покажем, что

$$\oint_{1231} m\boldsymbol{g}d\boldsymbol{l} = 0 \qquad (18)$$

или

$$\int_1^2 m\boldsymbol{g}d\boldsymbol{l} + \int_2^3 m\boldsymbol{g}d\boldsymbol{l} + \int_3^1 m\boldsymbol{g}d\boldsymbol{l} = 0$$

$$mg\cos\beta l + 0 + mgh\cos\pi = mgh - mgh = 0$$

Таким образом, работа силы тяжести по замкнутому пути равна нулю и поэтому является консервативной.

Поле

Силовое воздействие одних тел на другие тела можно описывать через так называемое силовое поле.
Общее определение силового поля такое:

Поле – это особая форма материи, представляющая собой систему, характеризуемую непрерывным распределением физических величин в пространстве и обладающее бесконечным числом степеней свободы.

Для нас достаточно определить силовое поле, как часть пространства, в которой действуют силы на внесенные в неё тела.

Поле

Все поля разбиваются на:

- однородные (во всех точках поля силы, действующие на частицу одинаковы по величине и направлению);
- центральные (направление сил, действующих на частицы проходят через одну и туже точку (центр), а величина силы зависит только от расстояния до этого центра;
- стационарные (поля не изменяются со временем), в противном случае поля нестационарные.

Потенциальная энергия

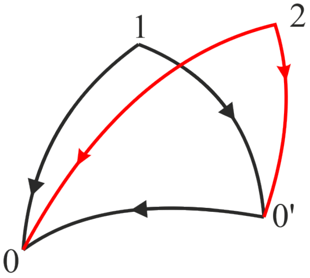
Для поля консервативных сил можно ввести энергетическую характеристику по следующему алгоритму:

- 1. Произвольную конфигурацию системы примем условно за нулевое положение системы, обозначенное за 0.
- 2. Работа, совершаемая консервативными силами при переходе из конфигурации 1 в конфигурацию 0, называется потенциальной энергией U_1 системы в конфигурации 1

$$U = U(\boldsymbol{r}) \tag{19}$$

Итак, потенциальная энергия системы зависит от фиксированной начальной конфигурации.

При замене начальной конфигурации системы 0 другой конфигурацией 0', потенциальная система изменяется на постоянную величину



$$U_1 = A_{10}, \;\; U_{1'} = A_{10'}$$

$$U_1 = A_{10'} + A_{0'0}$$

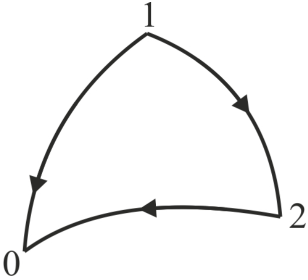
$$U_1 = U_{1'} + A_{0'0}$$

$$U_2 = A_{20}, \;\; U_{2'} = A_{20'}$$

$$U_2 = A_{20'} + A_{0'0}$$

$$U_2 = U_{2'} + A_{0'0}$$

Рассмотрим работу по перемещению системы из конфигурации 1 в 0, а также из конфигурации 1 в 2 и из 2 в 0, тогда согласно определению потенциальной энергии



$$U_1 = A_{10}, \quad U_2 = A_{20},$$

$$A_{10} = A_{12} + A_{20}$$

Произведя замену, получаем

$$U_1 = A_{12} + U_2$$

$$A_{12} = U_1 - U_2 \qquad (20)$$

Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии.

Потенциальная энергия характеризует запас (некоторое количество) энергии который может обеспечить производство (выполнение) системой механической работы.

Работа характеризуется убылью потенциальной энергии

$$A_{12} = U_1 - U_2 \tag{21}$$

и она же характеризуется приращением кинетической энергии

$$A_{12} = E_{k2} - E_{k1} \tag{22}$$

Раз равны левые части выражения, то равны и правые, т.е.

$$U_1 - U_2 = E_{k2} - E_{k1} \tag{23}$$

и

$$E_{k1} + U_1 = E_{k2} + U_2 \tag{24}$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий называется полной механической энергией

$$E = E_k + U(\boldsymbol{r}) \tag{25}$$

Тогда, согласно (24), в системе с консервативными силами, полная механическая энергия остается постоянной

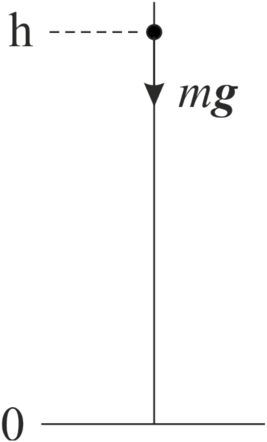
$$E = E_k + U(\boldsymbol{r}) = \mathrm{const} \tag{26}$$

Закон сохранения механической энергии

В системе с консервативными силами полная механическая энергия остается постоянной, могут лишь происходить только превращения кинетической энергии в потенциальную и наоборот, но полный запас энергии системы измениться не может.

Пример 3.2

Найти потенциальную энергию тела в однородном поле тяжести.



За нулевую конфигурацию примем горизонтальную плоскость. Пусть $h = 0$ на нулевой высоте, тогда на некоторой высоте h потенциальная энергия равна

$$U(h) = A_{10} = \int_{10} m\boldsymbol{g}d\boldsymbol{l} = \int_{10} mgdl \tag{27}$$

где $m\boldsymbol{g}$ - сила тяжести, $d\boldsymbol{l}$ вектор перемещения, вектора $\boldsymbol{g}$ и $d\boldsymbol{l}$ сонаправлены.

$$U(h) = mgh \tag{28}$$

Пример 3.3.

Потенциальная энергия упруго деформированной пружины.

- Конфигурация 0 — пружина не деформирована
- Конфигурация 1 — пружина деформирована на $x = l - l_0$.

Упругая сила F зависит только от величины деформации:

$$F = -k(l - l_0).$$

При возвращении пружины из конфигурации 1 в основное состояние - конфигурацию 0 сила совершает работу

$$A = \int_{l}^{l_0} -k(l - l_0)dl = -\int_{x}^{0} kxdx \tag{29}$$

где проведена замена переменных: $x = l - l_0$, $dx = dl$, $x' = l - l_0 \equiv x$, $x'' = l_0 - l_0 = 0$, тогда:

$$A = k\frac{x^2}{2} \text{ или } U(x) = k\frac{x^2}{2} \tag{30}$$

Пример 3.4.Потенциальная энергия массивного шарообразного тела

$$U(r) = \int_r^{\infty} \boldsymbol{F} d\boldsymbol{r}$$

$$U(r) = -\int_r^{\infty} \gamma \frac{Mm}{r^3} \boldsymbol{r} d\boldsymbol{r} = -\int_r^{\infty} \gamma \frac{Mm}{r^2} \boldsymbol{e}_r d\boldsymbol{r} = -\int_r^{\infty} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr$$

$$U(r) = -\gamma \frac{Mm}{r}$$

Связь потенциальной энергии с силой

Знание потенциальной энергии $U(\boldsymbol{r})$ позволяет определить силу, действующую на тело в любой точке поля.
Рассмотрим работу силы $\boldsymbol{F}$ по перемещению частицы на $d\boldsymbol{r}$

$$dA = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} \tag{31}$$

С другой стороны, эта работа равна убыли потенциальной энергии

$$dA = -dU \tag{32}$$

Следовательно, получаем следующее выражение

$$\boldsymbol{F}d\boldsymbol{r} = -dU \tag{33}$$

Раскрывая левую и правую части, мы получаем

$$\boldsymbol{F} d\boldsymbol{r} = (F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k})(dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (34)$$

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz \quad (35)$$

Сравнивая левую и правую части, мы получаем выражения для компонент вектора силы

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{36}$$

или

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\boldsymbol{k} \equiv -\mathrm{grad} U \equiv -\nabla U. \tag{37}$$

Градиент

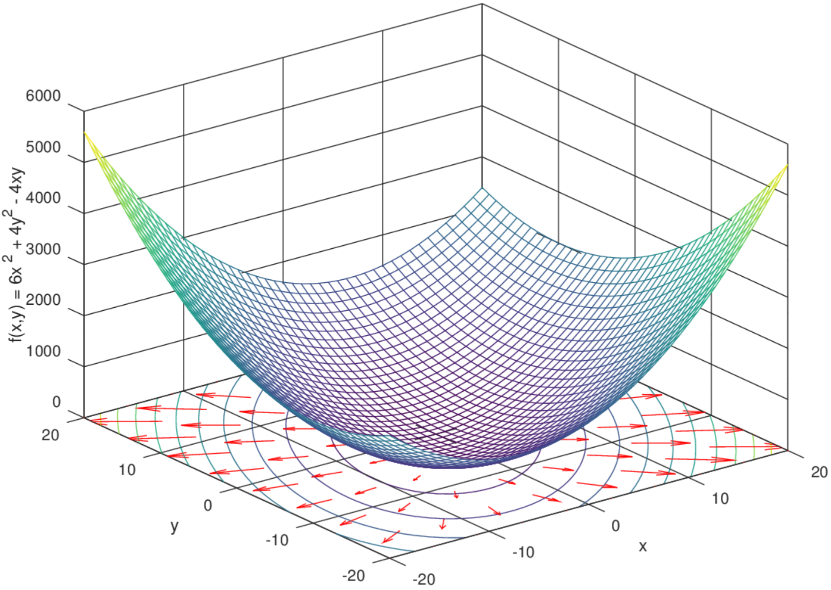
Градиент (лат. gradiens- растущий, шагающий) вектор, направленный в сторону наибольшего возрастания некоторой скалярной величины (поля), а длина этого вектора равна скорости возрастания скалярной величины в этом направлении.

Градиент функции $f(x,y) = 6x^2 + 4y^2 - 4xy$

$$\boldsymbol{F} \equiv -\mathrm{grad} U \equiv -\nabla U = -\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x - 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8y - 4x$$



6000
5000
4000
3000
2000
1000
0
f(x,y) = 6x 2 + 4y2 - 4xy
20
10
0
y
-10
-20
-20
-10
0
10
20
x

Пример 3.5.

Найти силу тяжести действующую на тело в поле тяготения, потенциальная энергия которого равна $U = mgh$

Пусть ось y направлена вертикально вверх, а начало координат поместим на поверхность Земли (тело отсчета), тогда потенциальная энергия запишется $U = mgz$.

Используя связь $\boldsymbol{F} = -\nabla U$ получим

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\partial mgz}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial mgz}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial mgz}{\partial z}\boldsymbol{k} = -mg\boldsymbol{k} = m\boldsymbol{g} \qquad (38)$$

где

$$\boldsymbol{g} \equiv -g\boldsymbol{k}$$

Пример 3.6.

Найти силу тяжести действующую на тело в поле тяготения, потенциальная энергия которого равна $U(r) = -\gamma\frac{Mm}{r}$
Используя связь $\boldsymbol{F} = -\nabla U$ и $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ получим

$$\boldsymbol{F} = \gamma Mm\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\boldsymbol{k}\right) \tag{39}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = -\frac{z}{r^3}$$

$$\boldsymbol{F} = -\gamma Mm\left(\frac{x\boldsymbol{i}}{r^3} + \frac{y\boldsymbol{j}}{r^3} + \frac{z\boldsymbol{k}}{r^3}\right) = -\gamma\frac{Mm}{r^3}\boldsymbol{r}$$

Закон сохранения механической энергии

Рассмотрим систему из N взаимодействующих частиц

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{p}_1}{dt} = \boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{13} + ... + \boldsymbol{F}_{1N} + \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_1^*, \\ \dfrac{d\boldsymbol{p}_2}{dt} = \boldsymbol{F}_{21} + \boldsymbol{F}_{23} + ... + \boldsymbol{F}_{2N} + \boldsymbol{\Phi}_2 + \boldsymbol{\Phi}_2^*, \\ ... \\ \dfrac{d\boldsymbol{p}_N}{dt} = \boldsymbol{F}_{N1} + \boldsymbol{F}_{N2} + ... + \boldsymbol{F}_{N,N-1} + \boldsymbol{\Phi}_N + \boldsymbol{\Phi}_N^*. \end{cases} \tag{40}$$

где $\boldsymbol{\Phi}_i$, $\boldsymbol{\Phi}_i^*$ - консервативные и неконсервативные внешние силы. Умножим скалярно на $d\boldsymbol{r}$. В левой части получили приращение кинетической энергии, для i-той частицы

$$m_i \boldsymbol{v}_i d\boldsymbol{v}_i = d\left(m_i \frac{v_i^2}{2}\right) \tag{41}$$

Найдем суммарное изменение кинетической энергии системы

$$d\sum_{i=1}^{N}\left(m_i\frac{v_i^2}{2}\right)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,i\neq j}^{N}(\boldsymbol{F}_{ij}d\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{F}_{ji}d\boldsymbol{r}_j)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\Phi}_i d\boldsymbol{r}_i+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\Phi}_i^* d\boldsymbol{r}_i \quad (42)$$

В правой части работа внутренних сил определяет изменение потенциальной энергии взаимодействия dU_{ij} i-той и j-той частицы так

$$-dU_{ij}=\boldsymbol{F}_{ij}d\boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{F}_{ji}d\boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{F}_{ij}d\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{F}_{ij}d\boldsymbol{r}_j=\boldsymbol{F}_{ij}(d\boldsymbol{r}_i-d\boldsymbol{r}_j)=\boldsymbol{F}_{ij}d\boldsymbol{r}_{ij} \quad (43)$$

где $d\boldsymbol{r}_{ij}=d\boldsymbol{r}_i-d\boldsymbol{r}_j$.

Для потенциальной энергии взаимодействия частиц системы получается следующее выражение

$$-dU = -\sum_{i,j=1,i\neq j}^{N} dU_{ij} = \sum_{i,j=1,i\neq j}^{N} \boldsymbol{F}_{ij} d\boldsymbol{r}_{ij} \qquad (44)$$

Потенциальная энергия системы в поле консервативных внешних сил равна

$$-d\tilde{U} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\Phi}_i d\boldsymbol{r}_i \tag{45}$$

Работа внешних неконсервативных сил равна

$$dA^* = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\Phi}_i^* d\boldsymbol{r}_i \tag{46}$$

Таким образом, для полной механической системы получаем

$$dE_k = -d\tilde{U} - dU + dA^* \quad \rightarrow \quad dE_k + d\tilde{U} + dU = dA^* \tag{47}$$

$$d(E_k + \tilde{U} + U) = dA^* \tag{48}$$

Изменение полной механической системы

$$E = E_k + \tilde{U} + U \tag{49}$$

равно работе неконсервативных внешних сил

$$dE = dA^* \tag{50}$$

Если внешние неконсервативные силы отсутствуют, то $dA^* = 0$ и

$$E = \mathrm{const} \tag{51}$$

При отсутствии внешних неконсервативных сил полная механическая энергия системы тел остается постоянной — закон сохранения полной механической энергии.

Для замкнутой системы, на которые действуют только консервативные силы $\mathbf{\Phi}_i$,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{\Phi}_i = 0, \tag{52}$$

то механическая энергия системы тел, между которыми действуют только консервативные силы, остается постоянной

$$E = E_k + U = \text{const} \tag{53}$$

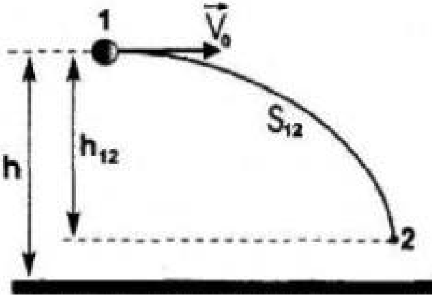
Если же на систему тел действует внешняя неконсервативная сила, то убыль полной механической системы равна работе неконсервативных сил.

Механическая энергия не сохраняется при действии неконсервативных (диссипативных) сил, при этом часть механической энергии переходит во внутреннюю тепловую энергию и/или излучение.

Диссипация - переход энергии упорядоченных процессов в энергию неупорядоченных процессов

ТЕСТ 3

Тело брошено с некоторой высоты h. Отчего завистит работа силы тяжести при движении тела из точки 1 в точку 2?



- 1 От длины пути S_{12}
- 2 От разности высот h_{12}
- 3 От высоты начальной точки h
- 4 От начальной скорости V_0