COVOMOSA

2021

CUADERNO DE TRABAJO

MATEMÁTICA

10° NIVEL

COLEGIO VOCACIONAL MONSEÑOR SANABRIA

DESAMPARADOS

ora et labora

Elaborado por Prof. Esteban Bermúdez Moya y Prof. Luis Diego Jiménez Calvo

COLEGIO VOCACIONAL MONSEÑOR SANABRIA

UNIDAD 1. GEOMETRÍA ANALÍTICA

Círculo y Circunferencia

Décimo año

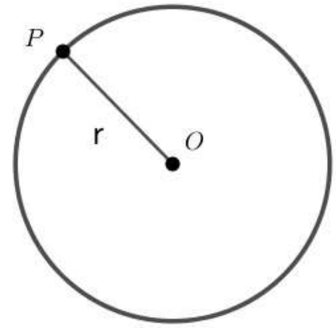
Elaborado por Prof. Esteban Bermúdez, Luis Diego Jiménez, con aportes del Profesor Jafeth Arias

Octubre 2019

Definición de Circunferencia

Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos en el plano que equidistan (misma distancia) de un punto fijo llamado centro. Dicha distancia entre los puntos de la circunferencia y el centro se denomina radio.

En la figura de la derecha se tiene que $OP = r$ para cualquier punto P sobre la circunferencia.

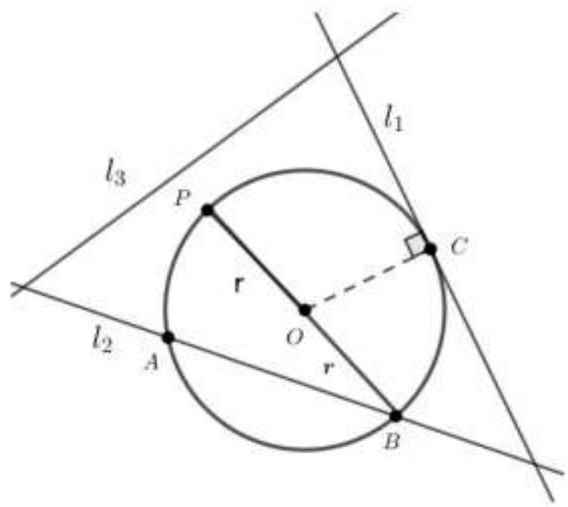


Definición de Círculo

Un círculo corresponde a la unión de una circunferencia con su interior.

Elementos de una circunferencia

De acuerdo con la figura de la derecha se define:



O es el centro de la circunferencia

$\overline{PO} = r$ es un radio de la circunferencia

El diámetro es el segmento que une dos puntos de la circunferencia, pasando por el centro. Para la representación de la derecha, $\overline{PB}$ corresponde a un diámetro de la circunferencia.

$d = \overline{PB} = 2r$

l_1 es una recta tangente a la circunferencia en el punto C. C corresponde al punto de tangencia de l_1 con la circunferencia

l_2 es una recta secante a la circunferencia en los puntos A y B

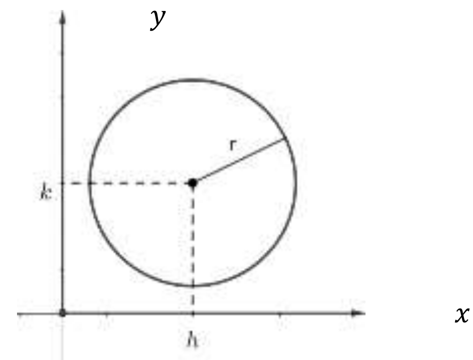
l_3 es una recta exterior a la circunferencia, es decir l_3 no interseca a la circunferencia

Video de apoyo
Ecuación de la circunferencia

Ecuación ordinaria de la circunferencia

Sea C una circunferencia con centro en el punto (h, k) y cuyo radio es r

La ecuación ordinaria de la circunferencia "C" corresponde a $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$



- **Ecuación de la Circunferencia dados el centro y el radio**

Ejemplo 1

Determine la ecuación ordinaria de la circunferencia cuyo centro es el punto $(2\,,5)$ y cuyo radio es 3.

En este caso, se tiene que $h=2$, $k=5$ y que $r=3$, entonces se sustituyen dichos valores en la ecuación ordinaria

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x-2)^2+(y-5)^2=3^2$

Finalmente, la ecuación ordinaria es $(x-2)^2+(y-5)^2=9$

Ejemplo 2

Determine la ecuación ordinaria de la circunferencia cuyo centro es el punto $(-1,-7)$ y cuyo radio es $\sqrt{2}$.

En este caso, se tiene que $h=-1$, $k=-7$ y que $r=\sqrt{2}$, entonces se sustituyen dichos valores en la ecuación ordinaria

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$(x--1)^2+(y--7)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$

Finalmente, la ecuación ordinaria es $(x+1)^2+(y+7)^2=2$

Ejemplo 3

Determine la ecuación ordinaria de la circunferencia cuyo centro es el origen y cuyo radio es 1.

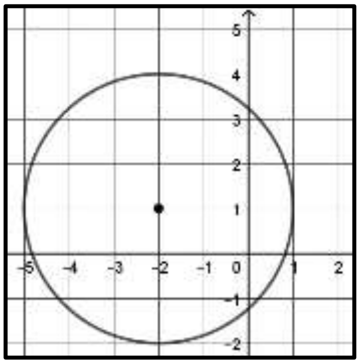
Al ser el origen el par ordenado $(0,0)$, se tiene que $h=0$ y $k=0$. Además $r=1$, entonces se sustituyen dichos valores en la ecuación ordinaria

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

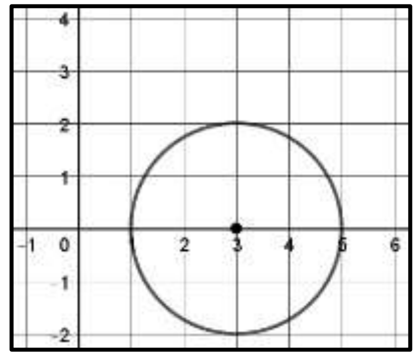
$(x-0)^2+(y-0)^2=1^2$

Por lo tanto, se tiene que la ecuación ordinaria es $x^2+y^2=1$

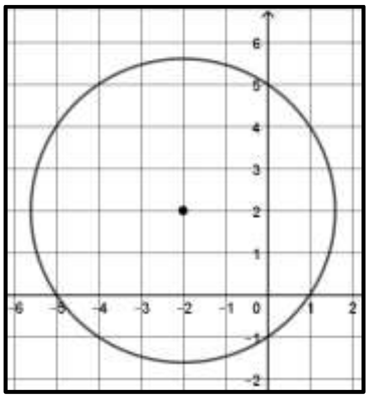
Ejemplo 4
Determine la ecuación ordinaria de las siguientes circunferencias



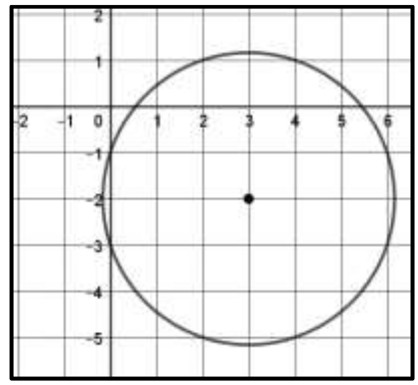
Ecuación:



Ecuación:



Ecuación:



Ecuación:

- **Ecuación dados el centro y un punto que pertenece a la circunferencia.**

Ejemplo 5
Determine la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $(-1{,}2)$ y cuyo centro es el punto $(-3{,}1)$
En este caso, ya se cuenta con el centro, es decir se sabe que $h = -3$ y que $k = 1$
Para averiguar el radio (que por definición es la distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro) se puede utilizar la fórmula de la distancia entre dos puntos

Dados los puntos en el plano (x_1 , y_1) y (x_2 , y_2) la distancia está dada por $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

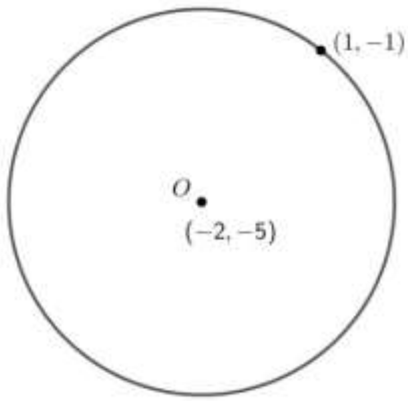
Puntos
$(-1{,}2)$ y $(-3{,}1)$

Distancia
$r = \sqrt{(-1 - -3)^2 + (2 - 1)^2}$
$r = \sqrt{5}$

Finalmente, la ecuación de la circunferencia es:
$(x - -3)^2 + (y - 1)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$
$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$

Ejemplo 6

Determine la ecuación de la circunferencia con centro en O que se muestra en la siguiente imagen



Se sabe que $h = -2$ y que $k = -5$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos se tiene:

$r = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (-5 - -1)^2}$

$r = 5$

Finalmente, la ecuación de la circunferencia es

$(x - -2)^2 + (y - -5)^2 = 5^2$

$(x + 2)^2 + (y + 5)^2 = 25$

➢ Ecuación de la circunferencia dados los extremos del diámetro

Ejemplo 7

Determine la ecuación de la circunferencia cuyos extremos del diámetro son $(-2{,}0)$ y $(2{,}2)$

De forma similar a como se trabajó en los ejemplos 5 y 6, con la fórmula de la distancia entre puntos, en este caso se se averigua la medida del diámetro

Diámetro $= \sqrt{(-2 - 2)^2 + (0 - 2)^2}$

$d = 2\sqrt{5}$

Como se sabe que la medida del radio es la mitad de la medida del diámetro, entonces $r = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

Por otro lado, en cualquier circunferencia, el centro corresponde al punto medio de cualquier diámetro, por lo que se utilizará la conocida formula del punto medio de un segmento para determinar dicho centro.

$P_m = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Centro $= \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (0{,}1)$

Finalmente, la ecuación de la circunferencia es

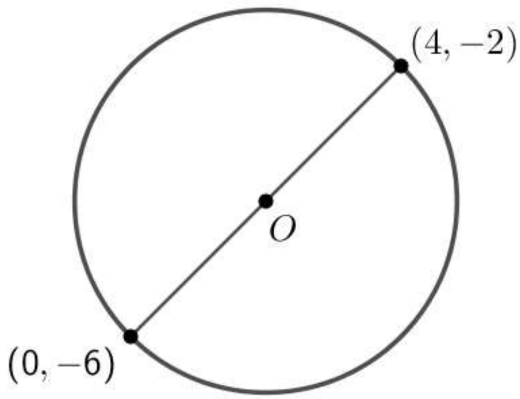
$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2$

$x^2 + (y - 1)^2 = 5$

Video de apoyo. Ecuación de la circunferencia dados los extremos del diámetro

Ejemplo 8

Determine la ecuación de la circunferencia con centro en O que se muestra en la siguiente imagen



Se tienen los puntos $(0,-6)$ y $(4,-2)$, los cuales corresponden a los extremos del diámetro.

Diámetro $= \sqrt{(0-4)^2 + (-6 - -2)^2}$

$d = 4\sqrt{2}$

$r = 2\sqrt{2}$

Centro $= \left(\frac{0+4}{2}, \frac{-6-2}{2}\right) = (2,-4)$

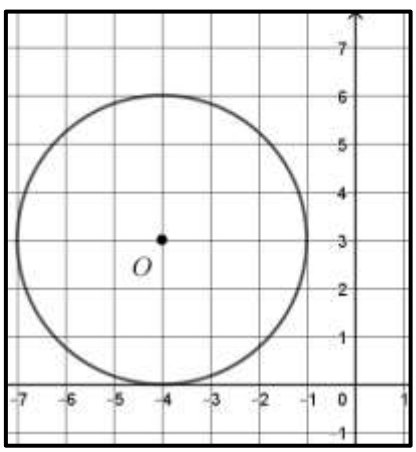
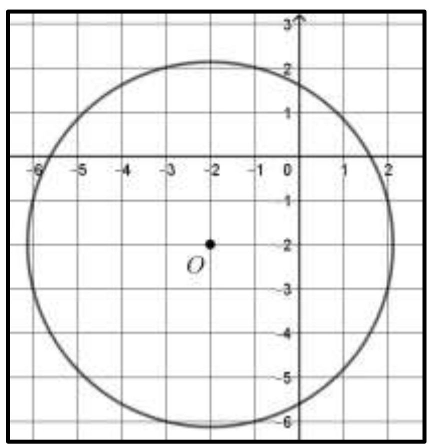
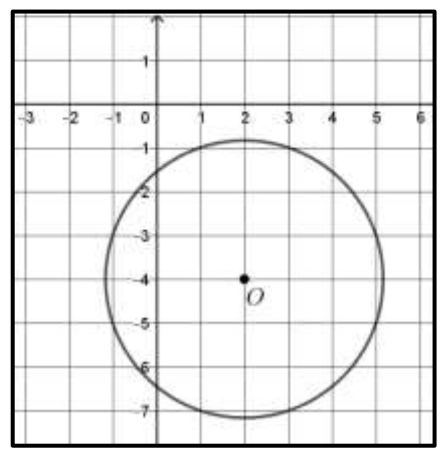
Finalmente, la ecuación de la circunferencia es

$(x-2)^2 + (y - -4)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$

$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 8$

Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes circunferencias determine el centro y el radio.

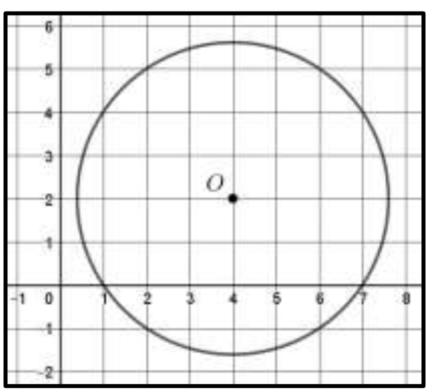
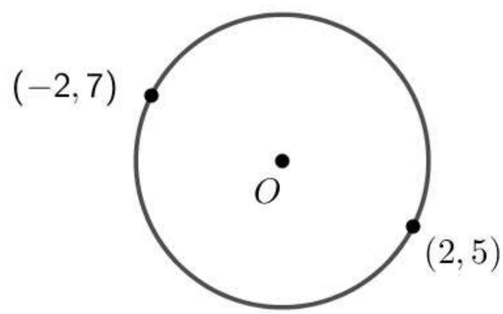
 Centro _______________ Radio _______________	 Centro _______________ Radio _______________	 Centro _______________ Radio _______________
$(x-17)^2 + y^2 = 144$ Centro _______________ Radio _______________	$\left(x-\frac{1}{5}\right)^2 + (y-11)^2 = 49$ Centro _______________ Radio _______________	$(x+32)^2 + \left(y+\frac{1}{3}\right)^2 = 18$ Centro _______________ Radio _______________

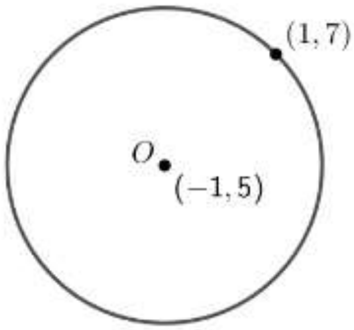
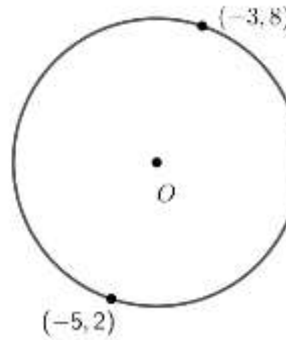
2. Determine la ecuación de la circunferencia dado su centro y su radio.

$C: (-3,5) \quad r = 4$	$C: (6,0) \quad r = 6$	$C: (0,-4) \quad r = 4\sqrt{2}$	$C: (-4,-2) \quad r = \frac{2}{3}$
Ecuación:	Ecuación:	Ecuación:	Ecuación:

$C: (5,-7) \quad r = 7$	$C: (0,0) \quad r = 2\sqrt{2}$	$C: \left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right) \quad r = \sqrt{5}$	$C: \left(0,-\frac{1}{4}\right) \quad r = 1$
Ecuación:	Ecuación:	Ecuación:	Ecuación:

3. Determine la ecuación de cada una de las siguientes circunferencias cuyo centro es el punto O

 Ecuación: ***R/*** $\boldsymbol{(x-4)^2+(y-2)^2=13}$	 Ecuación: ***R/*** $\boldsymbol{x^2+(y-6)^2=5}$

 $\boldsymbol{R/}\ \ \boldsymbol{(x+1)^2+(y-5)^2=8}$	 $\boldsymbol{R/}\ \ \boldsymbol{(x+4)^2+(y-5)^2=10}$
Determine la ecuación de la circunferencia centrada en el origen y que pasa por el punto $\left(\frac{1}{2},4\right)$ $\boldsymbol{R/}\ \ \boldsymbol{x^2+y^2=\frac{65}{4}}$	Determine la ecuación de la circunferencia centrada en $(0,-9)$ y que pasa por el punto $(-1{,}8)$ $\boldsymbol{R/}\ \ \boldsymbol{x^2+(y+9)^2=290}$

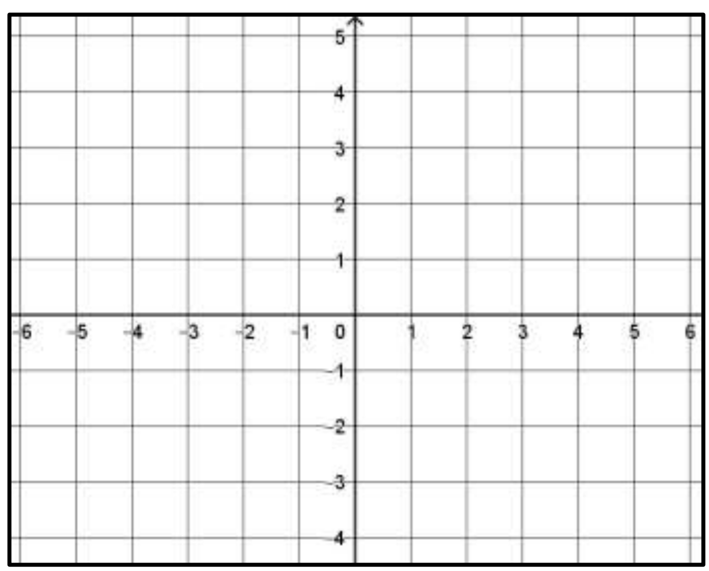
4. Represente en el plano las siguientes circunferencias

$x^2+y^2=1$

$(x+2)^2+(y-2)^2=9$

$(x+3)^2+(y+2)^2=4$

$(x-4)^2+(y-3)^2=1$



1) A partir de un volcán se colocaron dos antenas de radio que emiten ondas. La primera antena (A) se ubicó un km al este y 2 km al norte del volcán. La segunda antena (B) se encuentra a 6km al este y 10 km al norte del volcán. Cada onda emitida por las antenas cubre una distancia máxima de 20km.

Tomando el volcán como el centro del sistema coordenado cartesiano, ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia que describe el máximo alcance en sus ondas?

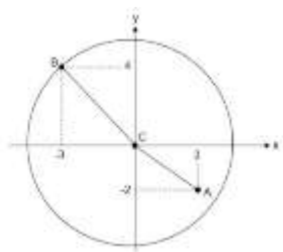
R/ $\boldsymbol{(x-6)^2+(y-10)^2=400}$

2) Según la Red Sismológica Nacional, el 5 de abril en Parísmina, ocurrió un sismo de magnitud 3,4 grados en la escala de Richter. Si las coordenadas exactas del lugar donde ocurrió el sismo son $(10\,,83)$ y se sabe que el sismo tuvo un radio de 3 km de alcance donde se apreció el movimiento.

Determine la ecuación que representa la zona de alcance de la onda para dicho sismo

R/ $\boldsymbol{(x-10)^2+(y-83)^2=9}$

3) Adrián (A), Bianca (B) y César (C) son guardaparques de una reserva forestal. Cada uno está a cargo de una estación de monitoreo, las cuales se ubican según el siguiente eje de coordenadas donde las medidas se dan en kilómetros



Los guardaparques usan transmisores de largo alcance para reportar su ubicación entre sí:

Si Bianca explora un lugar de la reserva, ubicado en la posición (6, -3), y aun así logra comunicarse con César, utilizando el transmisor, entonces, ¿cuál es una posible ecuación que representa el alcance del transmisor de la nueva posición de Bianca con relación a César? **R/** $\boldsymbol{(x-6)^2+(y+3)^2=45}$

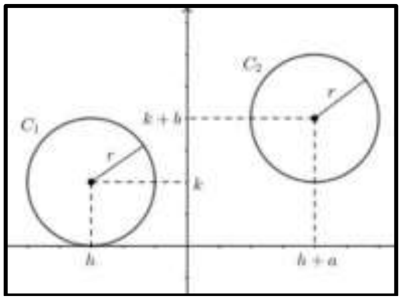
Traslaciones de Circunferencias

Una traslación es una transformación isométrica (que mantiene la forma y el tamaño) que sufre una figura en la cual todos los puntos que la forman son trasladados en una misma dirección, es decir, tomando como referencia un vector director $\vec{v}(a, b)$.

En el caso de las circunferencias, se aplica la traslación al centro y se mantiene su radio, al hacer esto, con la nueva ecuación se garantiza la traslación de toda la figura.

Dada una circunferencia con centro en el punto $O\ (h, k)$ en el plano cartesiano, si se decide trasladar en la dirección $\vec{v}\ (a, b)$ entonces la nueva posición del centro será $O'\ (h \pm a\ ,\ \ k \pm b)$

Es importante hacer énfasis en que al aplicar una traslación a una circunferencia se obtiene una figura congruente a la original pero ubicada en una posición distinta a la de la figura original, es decir, el radio es invariante.

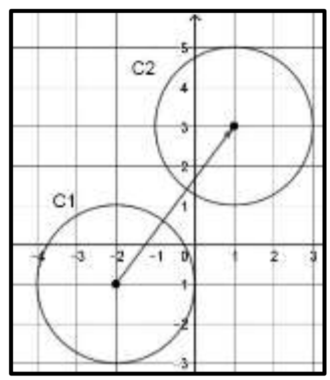


Video de apoyo. Traslación de Circunferencias

Ejemplo 1

Dada la circunferencia con ecuación $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Si se le aplica una traslación con el vector director $\vec{V}(3,4)$ determine la nueva ecuación de la circunferencia.

Gráficamente



Se tiene que el centro de la circunferencia dada es $(-2, -1)$

Al aplicar la traslación se tiene el nuevo centro es $(-2 + 3, -1 + 4) = (1,3)$

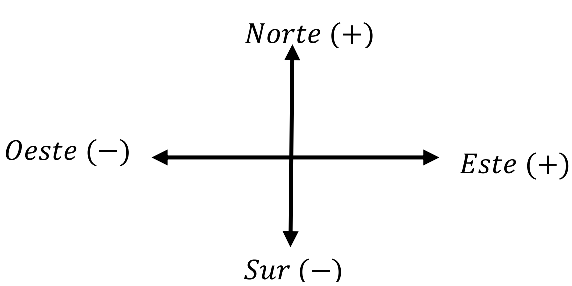
Finalmente: la nueva ecuación de la circunferencia es

$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

Ejemplo 2

Dada una circunferencia cuya ecuación ordinaria es $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 4$. Determine la ecuación que resulta al aplicarle una traslación de doce unidades al oeste y 5 unidades al norte.

En primera instancia se debe recordar que al hablarse de un movimiento en la dirección al este o al norte, este representa una magnitud positiva y en el caso de los movimientos al sur y al oeste serán magnitudes negativas



En este caso, el vector director es $\vec{v}\ (-12,5)$

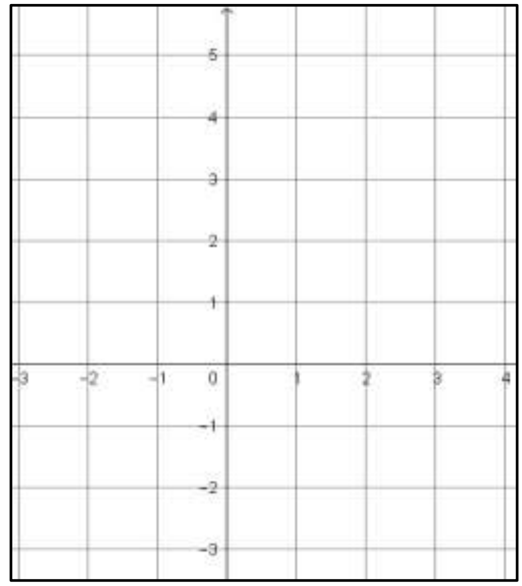
Al aplicar la traslación se tiene el nuevo centro es $(-1 - 12\ ,\ 4 + 5) = (-13,9)$

Finalmente: la nueva ecuación de la circunferencia es

$(x + 13)^2 + (y - 9)^2 = 4$

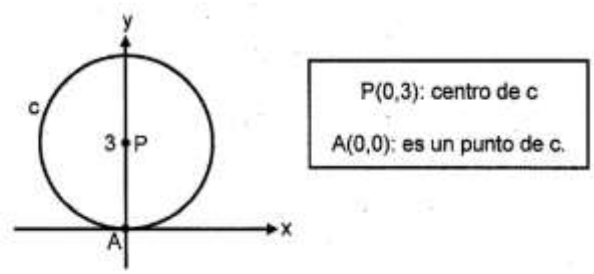
Ejemplo 3

Dada la ecuación de la circunferencia $(x-1)^2+(y+1)^2=4$, sí al sufrir una traslación la nueva ecuación de la circunferencia es $x^2+(y-3)^2=4$. Dibuje ambas circunferencias y determine el vector que se tomó como referencia al efectuarse la traslación.



Ejercicios

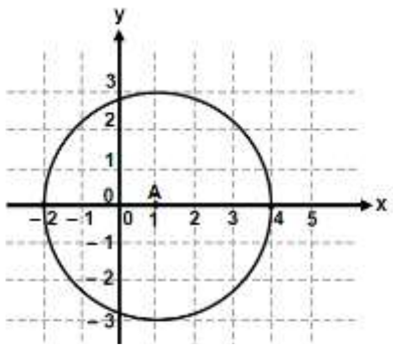
1. De acuerdo con la gráfica siguiente, si se traslada su centro hasta el punto $(3,0)$ ¿Cuál es la ecuación de la nueva circunferencia trasladada? **R/** $(x-3)^2+y^2=9$



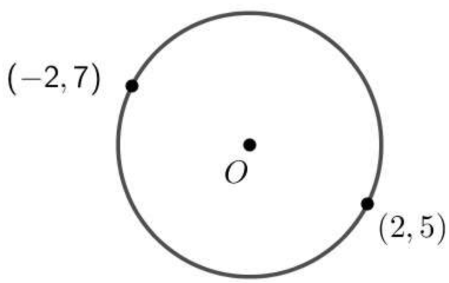
2. Sea C una circunferencia cuyo centro es $C(-1,1)$ y $r=4$. Si se le aplica una traslación en 4 unidades hacia la derecha ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia trasladada? **R/**$(x-3)^2+(y-1)^2=16$

3. Sea la circunferencia con ecuación $(x+5)^2+(y+1)^2=32$ y se traslada su centro utilizando el vector $\vec{V}:(-2\,,1)$. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia trasladada? **R/**$(x+7)^2+y^2=32$

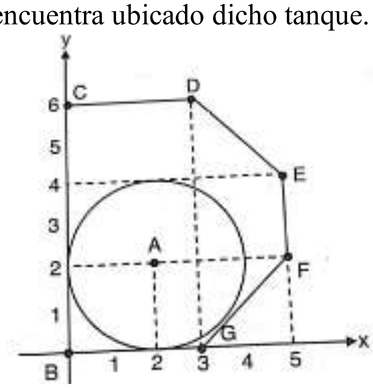
4. De acuerdo con la siguiente imagen que corresponde a una circunferencia, determine la ecuación de dicha circunferencia después de haberle aplicado una traslación utilizando el vector $\vec{V}: (-7\,,3)$ **R/**$(x+6)^2+(y-3)^2=9$



5. Determine la ecuación de la circunferencia dada después de haberle aplicado una traslación de 5 unidades al sur y 8 unidades al oeste. **R/**$(x+8)^2+(y-1)^2=5$



6. Se tiene un tanque para agua cuya base circular tiene centro en A y un diámetro de 4 metros según se muestra en la siguiente figura. El polígono BCDEFG representa la forma de las paredes perimetrales del lote donde se encuentra ubicado dicho tanque.



Tomado de Prueba Faro C1D 2019

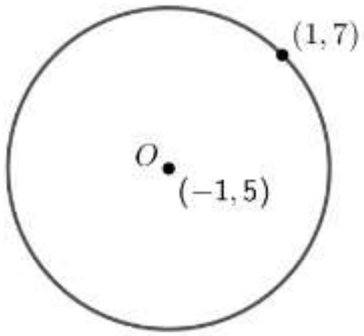
Si se desea colocar un lavatorio de forma circular de 1 metro de radio, en el mismo lote donde se encuentra el tanque de agua, por lo que el tanque se debe trasladar de tal manera que el centro del lavatorio quede en el punto $(2{,}1)$.

a) Determine las nuevas coordenadas donde se debe ubicar el centro del tanque. **R/ (2,4)**

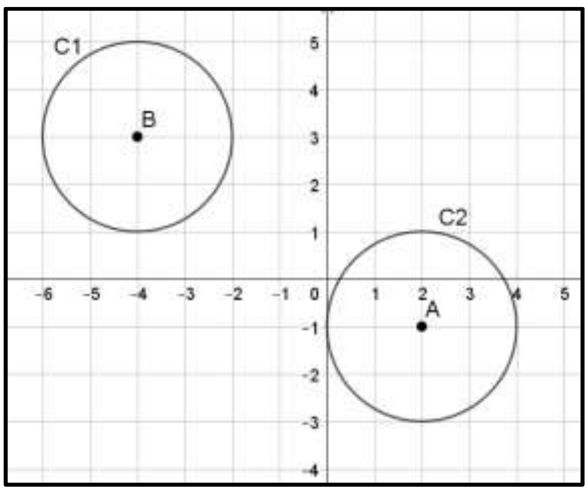
b) Determine las ecuaciones que representan las circunferencias del tanque y del lavatorio

R/ Tanque:$(x-2)^2+(y-4)^2=4$ **Lavatorio R/**$(x-2)^2+(y-1)^2=1$

7. Determine la ecuación de la circunferencia dada después de haberle aplicado una traslación de 4 unidades al norte y 3 unidades al oeste. **R/**$(x+4)^2+(y-9)^2=8$



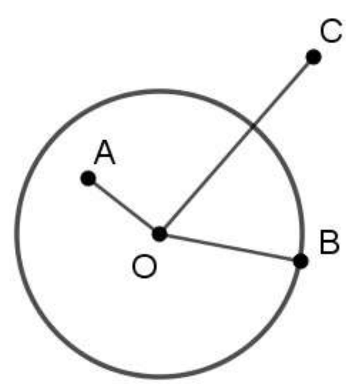
8. De acuerdo con la siguiente imagen. Si a la circunferencia C2 se le aplica una traslación para obtener la circunferencia C1 entonces el vector director de dicha traslación corresponde a: **R /**$\vec{V}(-6,4)$



Puntos en el interior o el exterior de una Circunferencia.

Dada una circunferencia con ecuación $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ y sea un punto $P(x,y)$.

Para determinar la posición relativa de dicho punto respecto a la circunferencia se debe sustituir las coordenadas del punto en la ecuación de la circunferencia y comparar los resultados de la siguiente manera:

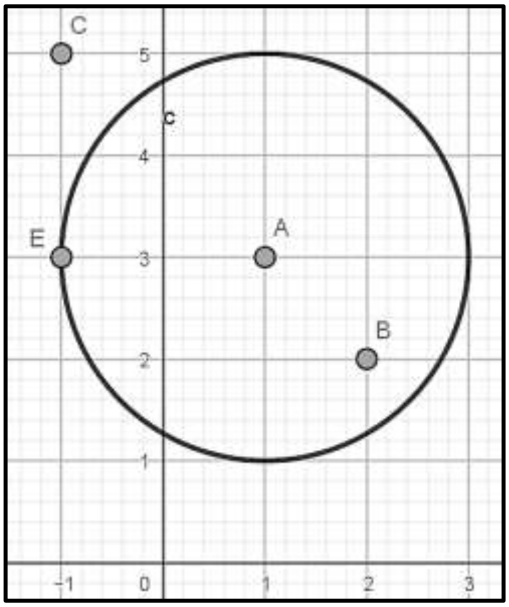


- Si $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ entonces el punto pertenece a la circunferencia. Según la figura de la derecha B pertenece a la circunferencia.
- Si $(x-h)^2+(y-k)^2>r^2$ entonces el punto está en el exterior de la circunferencia. Según la figura de la derecha C está en el exterior de la circunferencia.
- Si $(x-h)^2+(y-k)^2<r^2$ entonces el punto está en el interior de la circunferencia. Según la figura de la derecha A está en el interior de la circunferencia.

Ejemplo 1

Sea la circunferencia $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ indique la posición de los puntos $B(2,2), C(-1,5)\ y\ E(-1,3)$ con respecto a dicha circunferencia.

Gráficamente



Algebraicamente

Sustituimos en la ecuación los valores de "x" y "y" por las coordenadas de cada punto:

1) Para $B(2,2)$

$(x-1)^2+(y-3)^2=4$

$(2-1)^2+(2-3)^2$

$1+1$

$2<4$

por lo tanto, el punto es interior

2) Para $C(-1,5)$

$(x-1)^2+(y-3)^2=4$

$(-1-1)^2+(5-3)^2$

$4+4$

$8>4$

por lo tanto, el punto es exterior

3) Para $E(-1,3)$

$(x-1)^2+(y-3)^2=4$

$(-1-1)^2+(3-3)^2$

$4+0$

$4=4$

por lo tanto, el punto forma parte de la circunferencia.

Ejercicios

1. Sea la circunferencia con ecuación $(x-4)^2+(y+5)^2=4$ .Clasifique los siguientes puntos de acuerdo con su posición relativa en interiores, exteriores o propiamente de la circunferencia

$\left(\frac{7}{3},-4\right)$	$(-1,-2)$	$(6,-2)$
$(6,-5)$	$(3,-6)$	$\left(\frac{3}{2},-7\right)$

2. Sea la circunferencia con ecuación $(x + 3)^2 + y^2 = 5$. Clasifique los siguientes puntos de acuerdo con su posición relativa en interiores, exteriores o propiamente de la circunferencia

$E(-1, 3)$	$F(4, 0)$	$G(5, -1)$

3. Considere el siguiente contexto "Lámpara con sensor de movimiento"

"Lámpara con sensor de movimiento"

Una lámpara ubica en una zona verde posee un sensor de movimiento con un alcance de 3 metros a la redonda.

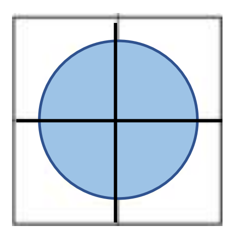
Si dicha lámpara se ubica en el punto (3,4) determine si una persona que se ubica en el punto $(-1,3)$ hará que el sensor se active y la lámpara se encienda. Justifique su respuesta. **R/ No**

4. Una antena situada en la cima de una montaña emite señales de radio con un alcance de 2580 metros a la redonda. Tomando dicha antena como el centro del sistema, determine si una persona ubicada 1950 metros al norte y 450 al este captará señales con su radio. Justifique su respuesta. **R/ Sí**

5. Considere la siguiente información:

Juego Tiro al Blanco

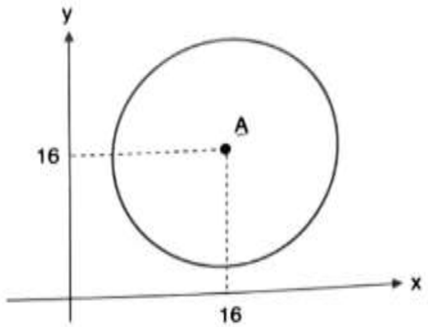
En un centro recreativo, tienen un tablero de madera, con un círculo en el centro representado por la ecuación ordinaria $x^2 + y^2 = 289$. El tablero se dispone para jugar tiro al blanco con dardos. Ana, es una jugadora que en su primer lanzamiento impacta en el punto A (4,7) del tablero, Luis impactó en el punto L (17,0) y Nicole impactó el dardo en el punto N $(25, -5)$



Determine cual jugador impactó dentro del tablero, en el borde, o si definitivamente no le atinó. **R/ Ana dentro, Luis en el borde y Nicole fuera**

6. Por medio de un sistema de coordenadas (con unidades en kilómetros) se logra visualizar la intersección de una calle y la avenida central de una comunidad, la intersección se denomina punto A. Se instala una antena en el punto A cuya ubicación está dada por el punto $(16,16)$y tiene una señal con un alcance máximo de 12 kilómetros como se muestra en la siguiente figura. Si Ana y Luis viven en esa comunidad y sus casas se ubican en los puntos $(16,20)$ y $(2,10)$ respectivamente determine cuales de los dos reciben en su casa señal de esa antena.

R/ Solo Ana recibe señal



Tomado de Prueba Faro C3D 2019

7. El comportamiento del huracán Luis, a partir de la primera hora y hasta las cuatro horas de su formación, se mantuvo con un diámetro constante de afectación de $20km$ y cada hora su centro tiene un desplazamiento de 10km al este y $20km$ al norte.

Tomado de Prueba Faro C3D 2019

La siguiente tabla representa el comportamiento de las primeras dos horas.

Hora	Desplazamiento al este (km)	Desplazamiento al norte (km)
1	10	20
2	20	40
3	30	60
4	40	80

Se considera que donde inició el huracán es el punto $(0,0)$. La isla R está ubicada 48km al este y 72km al norte del lugar donde se formó el huracán y la isla W está ubicada 22 km al este y 30 al norte del mismo punto.

a) Determine si a las 4 horas del desplazamiento alguna de las dos islas sigue dentro del diámetro de afectación.
b) Determine la ecuación de la circunferencia que representa el huracán a las dos horas de haberse formado

Video de Apoyo. Puntos exteriores, interiores o de la circunferencia

Rectas Exteriores, Secantes o Tangentes a una circunferencia

Caso 1.

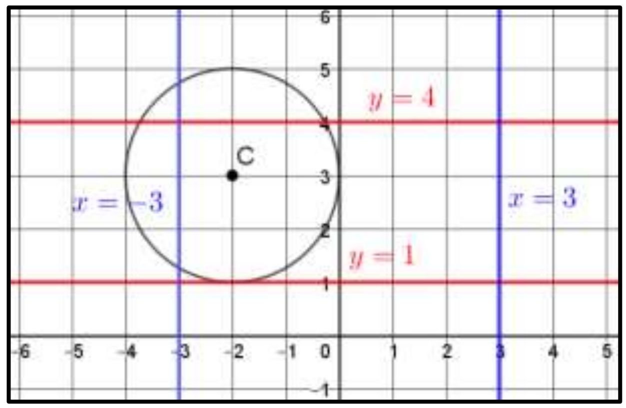
Recta Vertical (su ecuación es de la forma $x = \#$) y Recta Horizontal (su ecuación es de la forma $y = \#$)

En este caso, se recomienda determinar la posición de forma gráfica

Ejemplo 1

Dada la circunferencia con ecuación C: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$. Determine si las rectas $y = 1$, $y = 4$ $x = -3$, $x = 3$ son tangentes, secantes o exteriores a C

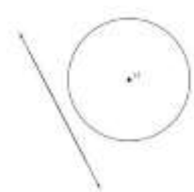
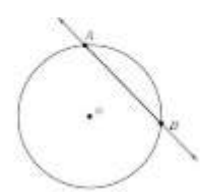
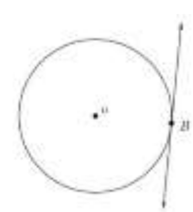
$\boldsymbol{y = 1\ (tangente)}$
$\boldsymbol{y = 4\ (secante)}$
$\boldsymbol{x = -3\ (secante)}$
$\boldsymbol{x = 3\ (exterior)}$



Caso 2. Rectas Oblicuas

Sean una circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y una recta con ecuación $y = mx + b$ $m, b \in IR$. Para determinar la posición relativa de dicha recta respecto a la circunferencia se aplicará la siguiente fórmula

$$P_r = \frac{|m \cdot h - k + b|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Si $\frac{\lvert m \cdot h - k + b \rvert}{\sqrt{m^2+1}} > r$	La recta es exterior a la circunferencia	
Si $\frac{\lvert m \cdot h - k + b \rvert}{\sqrt{m^2+1}} < r$	La recta es secante a la circunferencia	
Si $\frac{\lvert m \cdot h - k + b \rvert}{\sqrt{m^2+1}} = r$	La recta es tangente a la circunferencia	

Ejemplo 2
Dada la circunferencia C_1con ecuación $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 7$ determine si las siguientes rectas son tangentes, secantes o exteriores a C_1

Para resolver este ejercicio se tiene que $h = -4$, $k = 1$ y $r = \sqrt{7}$

a) $l_1: y = -2x + 1$

Se tiene que $m = -2$ y $b = 1$

$$P_r = \frac{|m \cdot h - k + b|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|-2 \cdot -4 - 1 + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1}} \approx 3{,}58 > r$$

Finalmente, l_1 es exterior a la circunferencia

b) $l_2: y = -4 - x$

Se tiene que $m = -1$ y $b = -4$

$$P_r = \frac{|m \cdot h - k + b|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|-1 \cdot -4 - 1 + \ -4|}{\sqrt{(-1)^2 + 1}} \approx 0{,}70 < r$$

Finalmente, l_2 es secante a la circunferencia

c) $l_3: -2{,}45x + y = 3{,}8$

En este caso se debe despejar la ecuación de la recta a la forma $y = mx + b$

$y = 2{,}45x + 3{,}8$

$$m = \frac{49}{20}x \qquad b = \frac{19}{5}$$

$$P_r = \frac{|m \cdot h - k + b|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{\left|\frac{49}{20} \cdot -4 - 1 + \frac{19}{5}\right|}{\sqrt{\left(\frac{49}{20}\right)^2 + 1}} \approx \sqrt{7} = r$$

Finalmente, l_3 es tangente a la circunferencia.

Ejercicios

1. Dada la circunferencia C_1con ecuación $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ determine si las siguientes rectas son tangentes, secantes o exteriores a C_1

a) $y = -1 + x$ **R/ Exterior**	c) $y = \frac{-x}{\sqrt{3}} + \frac{6-3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ **R/ Tangente**
b) $y + x + 3 = 0$ **R/ Secante**	d) $y = -1$ **R/ Tangente**

2. Determine para cuál de las siguientes circunferencias la recta $y = x - 3$ es secante

a) $C_1: (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 4$ **R/Si**	$C_2: (x - 9)^2 + y^2 = 18$ **R/No**	$C_{3:} (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 5$ **R/Si**

3. Determine para cuál de las siguientes circunferencias la recta $y + 5x = 0$ es exterior

$C_1:\ (x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 2$ **R/Si**	$C_2: x^2 + y^2 = 1$ **R/No**	$C_{3:}\ (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 5$ **R/Si**

Considere el siguiente texto “Los senderos”

Un parque de forma circular, con 20 metros de diámetro tiene un árbol en el centro. Desde un punto M situado 15 metros al oeste y 10 metros al norte del árbol se trazan dos senderos rectos A y B, de tal manera que tomando como referencia el árbol:

- ✓ El sendero A termine 10 metros al este y 25 metros al norte.
- ✓ El sendero B termine 25 metros al este y 5 metros al sur

De acuerdo con el contexto determine cuales de las siguientes afirmaciones son verdaderas

I) El sendero A atraviesa el parque y el sendero B es exterior.

II) Tanto el sendero A como el sendero B atraviesan el parque.

III) El sendero A es exterior al parque y el sendero B lo atraviesa.

IV) Tanto el sendero A como el sendero B son exteriores al parque

UNIDAD 3. RELACIONES Y ÁLGEBRA

Funciones

Décimo año

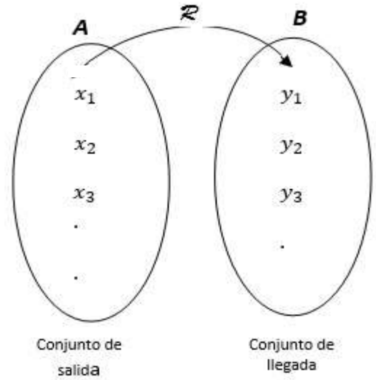
Elaborado por Prof. Esteban Bermúdez, Luis Diego Jiménez. Octubre 2019

Funciones

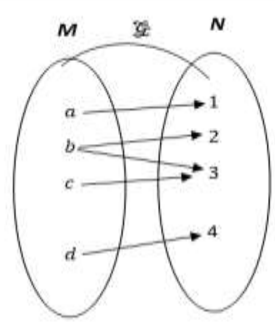
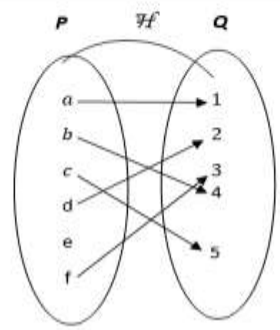
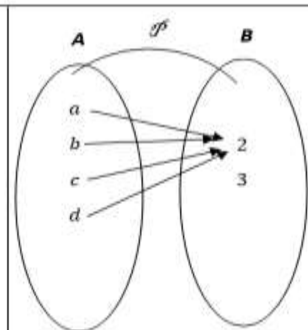
Una función es una relación entre los elementos de dos conjuntos A y B no vacíos que cumple las siguientes condiciones

1. Cada elemento del conjunto de salida debe estar asociado con un único elemento en el conjunto de llegada.

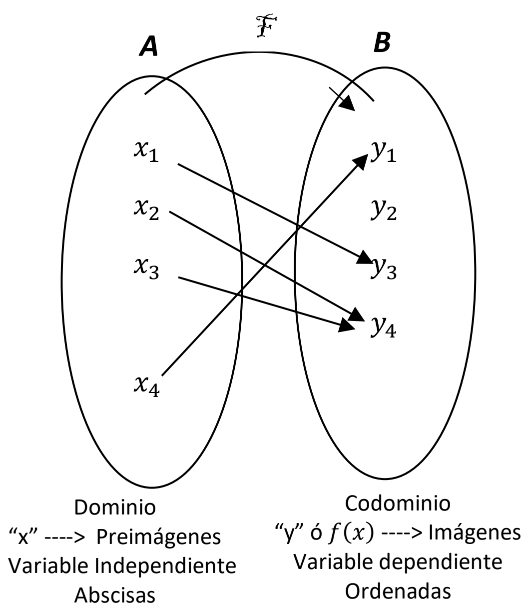
2. Ningún elemento del conjunto de salida puede estar sin asociar.



Ejemplo 1

		
$\mathcal{G}$ no corresponde a una función ya que el elemento "b" del conjunto de salida está asociado con dos elementos distintos del conjunto de llegada	$\mathcal{H}$ no representa una función ya que el elemento "e" del conjunto de salida no está asociado con ningún elemento del conjunto de llegada	$\mathcal{F}$ si representa una función

Notación de Funciones



Algunas afirmaciones

x_1 es preimagen de y_3, o bien y_3, es imagen de x_1

x_2 es preimagen de y_4, o bien, y_4 es imagen de x_2

y_4 es imagen de x_2 y x_3

y_2 no es imagen de ningún elemento del dominio

Por notación se tiene que $f: A \rightarrow B$

Definición: Ámbito

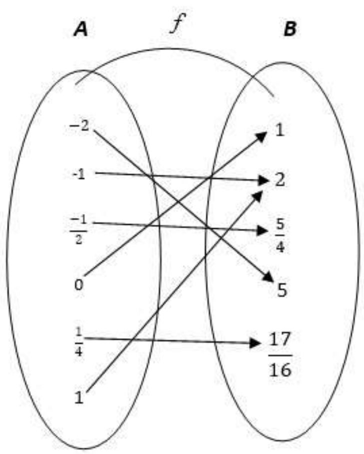
El ámbito de una función $"f"$ corresponde al conjunto de todas las imágenes, es decir, todos los elementos del codominio que **SI** están asociados con al menos un elemento del dominio. El ámbito siempre es un subconjunto del codominio $A_f \subseteq C_f$. Para el diagrama anterior se tiene que

Codominio: $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$
Ámbito: $\{y_1, y_3, y_4\}$ Observe que y_2 no es parte del ámbito ya que no está asociada con ningún elemento del dominio

Criterio de una función

Corresponde a la fórmula Matemática que permite la asociación de los elementos del dominio con los del codominio.

Ejemplo 1. Sea f una función tal que $f: A \to B$ y $f(x) = x^2 + 1$



Representación Tabular

x	$f(x)$
-2	5
-1	2
$\frac{-1}{2}$	$\frac{5}{4}$
0	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{17}{16}$
1	2

Cálculo de las imágenes

$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{5}{4}$

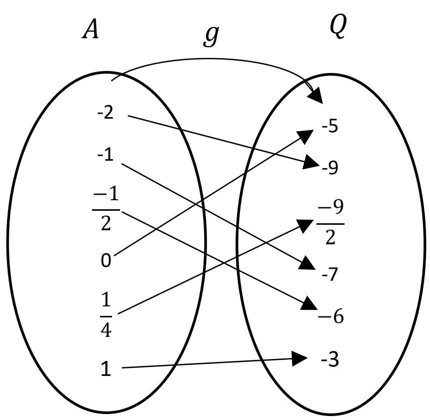
$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 1 = \frac{17}{16}$

$f(1) = (1)^2 + 1 = 2$

Ejemplo 2. Sea g una función tal que $g: A \to Q$ y $g(x) = 2x - 5$

Se puede observar que se tienen los mismos valores de “x” (dominio) que en el ejemplo 1 pero con un criterio o fórmula distinta al anterior.



Representación Tabular

x	$g(x)$
-2	-9
-1	-7
$\frac{-1}{2}$	-6
0	-5
$\frac{1}{4}$	$\frac{-9}{2}$
1	-3

Cálculo de las imágenes

$g(-2) = 2 \cdot -2 - 5 = -9$

$g(-1) = 2 \cdot -1 - 5 = -7$

$g\left(\frac{-1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{-1}{2} - 5 = -6$

$g(0) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$

$g\left(\frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} - 5 = \frac{-9}{2}$

$g(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3$

Con el ejemplo anterior, se observa que si se cambia el criterio o fórmula de la función, y se eligen los mismos los valores de $"x"$, son los valores de $"y"$ los que si cambian, es por eso que, como se mencionó anteriormente, a las $"x"$ se les llama variables independientes y a las “y” ó $f(x)$ se les llama variables dependientes, porque dependen del valor de “x” y del criterio con el que se esté trabajando

Cálculo de Imágenes y Preimágenes dado el criterio.

Para calcular imágenes y preimágenes se utilizará la siguiente palabra como guía para recordar el procedimiento a seguir

P I S

Para averiguar una preimagen hay que **I**GUALAR, es decir resolver una ecuación con el criterio. Para averiguar una imagen hay que **S**USTITUIR

Ejemplo 2

$Sea\ f(x) = x^3 + 2x - 5$

Determine $f(-1)$

$f(-1) = (-1)^3 + 2 \cdot -1 - 5$

$f(-1) = -8$ La imagen de -1 bajo la función f es -8

Ejemplo 2

Si $f(x) = 3x - \frac{1}{5}$, determine la preimagen de -1

$$3x - \frac{1}{5} = -1$$

$$3x = \frac{-4}{5}$$

$$x = \frac{-4}{5} \div 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-4}{15}$$

Finalmente se tiene que la preimagen de -1 es $\frac{-4}{15}$

Ejemplo 3

Si $h(x) = \frac{-x-4}{6}$

Determine la preimagen de 8

$$\frac{-x-4}{6} = 8$$

$$-x - 4 = 48$$

$$-x = 52$$

$$x = -52$$

Resolviendo la ecuación se tiene que la preimagen de 8 es -52

Ejemplo 4

Si $f(x) = x - 16$, determine el valor numérico de la expresión $f(3) - 4f(8) + 1$

$f(3) = 3 - 16 = -13$

$f(8) = 8 - 16 = -8$

$\boldsymbol{f(3) - 4f(8) + 1} = -13 - 4 \cdot -8 + 1 = 20$

Ejercicios.

1. Considere la función f, tal que $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$; con $f(x) = -3x - 4$ y determine:

Dominio	Codominio	Criterio	Imagen de 7	Preimagen de 10

2. Considere la función f, tal que $f: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$; con $f(x) = -5x + 10$ y determine:

Dominio	Codominio	Criterio	Imagen de -4	Preimagen de 9

3. Considere la función f, tal que $f: [3, 5[\to \mathbb{R}$; con $f(x) = \frac{12-x}{4}$ y determine:

Dominio	Codominio	Criterio	Imagen de -3	Preimagen de $\frac{1}{4}$

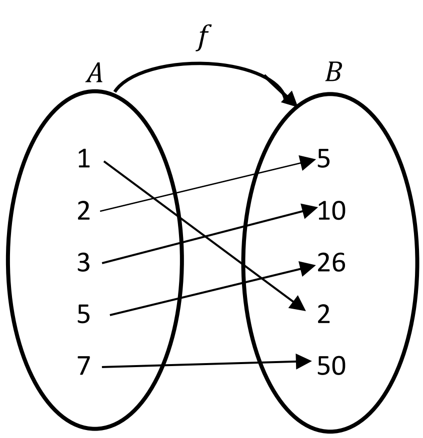
4. Considere la función f, tal que $f:]-4, 2[\to \mathbb{R}$; con $f(x) = x^3$ y determine:

Dominio	Codominio	Criterio	Imagen de 2	Preimagen de 8

5. Para cada una de las siguientes funciones determine el dominio, codominio y criterio.

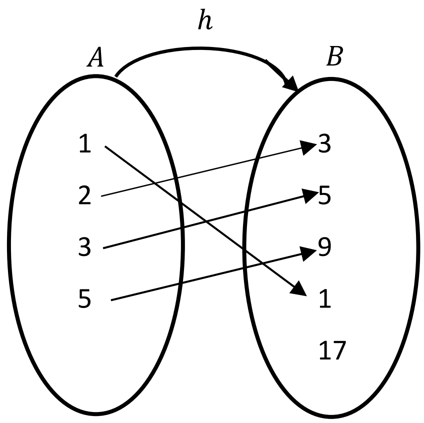
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = 2x - 3$ Dominio: __________ Codominio: _________ Criterio: ____________	$f: \left]0, \frac{21}{3}\right[\to \mathbb{R}$ $f(x) = x + 3$ Dominio: _________ Codominio: _________ Criterio: _____________
$f: \{-3, -2, -1, 0\} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ Dominio: _________ Codominio: _________ Criterio: _________	$f:]-10,10[\to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{2-x}{3}$ Dominio: _________ Codominio: _________ Criterio: _________

6. De acuerdo con el siguiente diagrama de Venn, que corresponde a una función f determine:



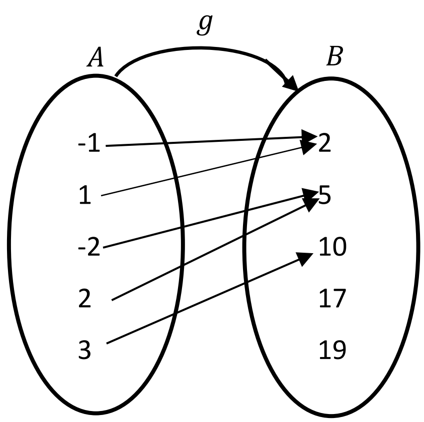
Dominio	
Codominio	
Ámbito	
Criterio	
Preimagen de 2	
Imagen de 7	

7. De acuerdo con el siguiente diagrama de Venn, que corresponde a una función h determine:



Dominio	
Codominio	
Ámbito	
Criterio	
Preimagen de 3	
Imagen de 5	

8. De acuerdo con el siguiente diagrama de Venn, que corresponde a una función g determine:



Dominio	
Codominio	
Ámbito	
Criterio	
Preimagen de 2	
Imagen de -1	

9. Complete cada uno de los siguientes cuadros con el valor de la respectiva preimagen o imagen, de acuerdo con la función dada:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x+1}{2}$		$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{3-x}{3}$	
Preimagenes	**Imágenes**	**Preimagenes**	**Imágenes**
-3		-7	
3		-1	
	2	2	
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 - 3x$		$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = -2x + 5$	
Preimagenes	**Imágenes**	**Preimagenes**	**Imágenes**
	-7	2	
	-1		0
	2		-2

10. Para la función dada por $f(x) = \frac{x+1}{5}$ determine:

$a)$ $f(-2)$

$b)$ $f(0)$

$c)$ $-4f(-5) + 2f(-1)$

$d)$ La preimagen de 4

$e)$ La preimagen de $\frac{-3}{2}$

11. Para la función dada por $g(x) = \sqrt{2x+1}$ determine:

$a)$ $g(4)$

$b)$ $g(0)$

$c)$ $\dfrac{-4g(5)}{3} + g(9)$

$d)$ La preimagen de $\sqrt{15}$

$e)$ La preimagen de 0

12. Para la función dada por $h(x) = 8x - 4$ determine:

$a)\ h\left(\frac{1}{4}\right)$

$b)\ -h(-5) - 7h(-1) - h(-3)$

$c)$ La preimagen de 20

Respuestas a algunos ejercicios

Ejercicio 10	Ejercicio 11	Ejercicio 12
$a)\frac{-1}{5}$	$a)\ 3$	$a) -2$
$b)\ \frac{1}{5}$	$b)\ 1$	$b)\ 156$
$c)\frac{16}{5}$	$c)\ \ -0{,}06$	$c)\ 3$
$d)\ 19$	$d)\ 7$	
$e)\frac{-17}{2}$	$e)\frac{-1}{2}$	

¿Cómo determinar si un criterio corresponde o no una función dados el dominio y el codominio?

Basta con verificar que para TODOS los valores "x" del dominio exista un único valor de "y" (imagen) bajo el criterio dado, es decir, que se cumplan las siguientes condiciones:

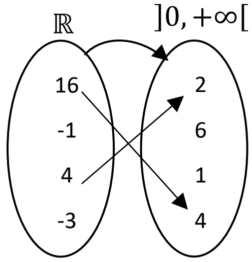
I. La función no se indefina para ningún elemento del dominio
II. Todas las imágenes de los elementos del dominio estén incluidas en el codominio de la función.

Ejemplo 1

$f: \mathbb{R} \to]0, +\infty[\qquad f(x) = \sqrt{x}$

f no corresponde a una función ya que se tiene que el dominio son todos los números reales (positivos, negativos y el cero), sin embargo, también se sabe que la raíz cuadrada no existe para valores negativos, por lo que quedarán valores en el dominio sin asociar y por definición de función eso no se puede dar.

En el siguiente diagrama se puede observar algunos de los valores del dominio que quedan sin asociar

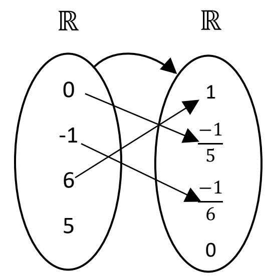


¿Cuál podría ser el dominio para que f si corresponda a una función?

Ejemplo 2

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad h(x) = \frac{1}{x-5}$

h no corresponde a una función ya que el dominio son todos los números reales pero existe un número $(x = 5)$ que no posee imagen pues $h(5) = \frac{1}{5-5} = \frac{1}{0}$ y $\frac{1}{0}$ no está determinado, y por definición de funciones, ningún valor de "x" puede quedar sin asociar. En el siguiente diagrama se puede observar algunos de los valores del dominio y sus respectivas asociaciones.

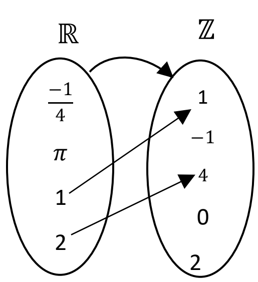


¿Cuál podría ser el dominio para que h si corresponda a una función?

Ejemplo 3

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \qquad g(x) = x^2$

g no corresponde a una función ya que se tiene que el dominio son todos los números reales (racionales, irracionales), pero al calcular la imagen por ejemplo de un número irracional esta sigue siendo irracional y no habría un valor de "y" en el codominio para asociar, ya que el codominio es Z, es decir, solamente los números enteros. En el siguiente diagrama se puede observar algunos de los valores del dominio que quedan sin asociar



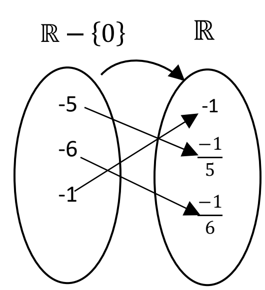
¿Cuál podría ser el codominio para que g si corresponda a una función?

Ejemplo 4

$f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{x}$

f si corresponde a una función ya que a pesar de que cero no posee imagen pues $f(0) = \frac{1}{0}$ y $\frac{1}{0}$ es indeterminado, el cero ya está excluido del dominio, por lo tanto, el resto de los valores si poseen una imagen en el codominio el cual está definido en IR

En el siguiente diagrama se puede observar algunos de los valores del dominio y sus respectivas asociaciones



Ejercicios

1. Determine cuales de las siguientes relaciones corresponden a una función. En el caso de que no sean funciones justifique por qué.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{x-1}{x-9}$ **R/No**	$g: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ $g(x) = \sqrt{x-2}$ **R/No**	$h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{Z}$ $h(x) = \sqrt{x+1}$ **R/No**
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ $g(x) = x^2$ **R/No**	$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(x) = x - 5$ **R/No**	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x + 1$ **R/Si**
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = x^5$ **R/Si**	$g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{Q}$ $g(x) = \sqrt{x}$ **R/No**	$f: \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{8x-1}{2-x}$ **R/Si**

Definición: Par ordenado

Un par ordenado es una expresión de la forma (x, y) con la cual se representa la asociación de un valor de "x" con un valor de "y" por medio de una determinada función.

Para el ejemplo 2 de la página 2 se tiene:

Representación Tabular de la función g

x	$g(x)$
-2	-9
-1	-7
$\frac{-1}{2}$	-6
0	-5
$\frac{1}{4}$	$\frac{-9}{2}$
1	-3

Pares Ordenados

$(-2, -9)$

$(-1, -7)$

$\left(-\frac{1}{2}, -6\right)$

$(0, -5)$

$\left(\frac{1}{4}, \frac{-9}{2}\right)$

$(1, -3)$

De la misma manera que se hizo con los diagramas o las representaciones tabulares, de los pares ordenados se pueden obtener las mismas afirmaciones. Por ejemplo:

- ✓ Del par ordenado $(-2, -9)$ se puede afirmar que -2 es la preimagen de -9 o bien, que -9 es la imagen de -2
- ✓ Del par ordenado $(0, -5)$ se puede afirmar que 0 es la preimagen de -5 o bien, que -5 es la imagen de 0

Gráfico de una Función.

El gráfico de una función corresponde al conjunto de TODOS los pares ordenados que pertenecen a una función. Para el ejemplo anterior se tiene que $G_g = \left\{ \ (-2,-9), (-1,-7), \left(-\frac{1}{2}, -6\right), (0,-5), \left(\frac{1}{4}, -\frac{9}{2}\right), (1,-3) \ \right\}$

¿Cómo determinar si un conjunto de pares ordenados corresponde o no al gráfico de una función?
Para determinar si un grupo de pares ordenados corresponden o no al gráfico de una función basta con verificar que no existan dos o más pares con el mismo valor de "x", ya que por definición una "x" no puede estar asociada a dos o más valores de "y", es decir, una preimagen solamente puede tener una imagen.

Ejemplos

$G_f = \{(-1,9), (-5,6), (-6,-1), (4,-1), (0,14), (-1,1)\}$

$G_h = \{(1,17), (0,16), (6,-10), (7,-1), (-20,3), (-11,13)\}$

$G_g = \left\{\left(-\frac{1}{3}, 4\right), (-8,1), \left(\frac{-3}{5}, 19\right), \left(4, -\frac{1}{9}\right), (0,14), (1,81)\right\}$

De los anteriores, solamente G_f no corresponde al gráfico de una función, ya que hay dos pares ordenados que tienen el mismo valor de "x", específicamente $x = -1$ está asociado con dos valores distintos de "y" y por definición de función, esto no se puede dar.

$$\begin{tikzcd} & y = 9 \\ x = -1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & y = 1 \end{tikzcd}$$

Con la misma idea del gráfico de una función, se puede determinar si un grupo de pares ordenados dados en forma tabular corresponden o no a una función

Ejemplos

x	-1	-2	-3	-4	-5	-6
$f(x)$	0	1	2	3	4	5

f si representa una función, ya que no hay ningún valor de "x" que se repita

x	5	6	5	8	-3	5
$g(x)$	3	10	12	3	4	15

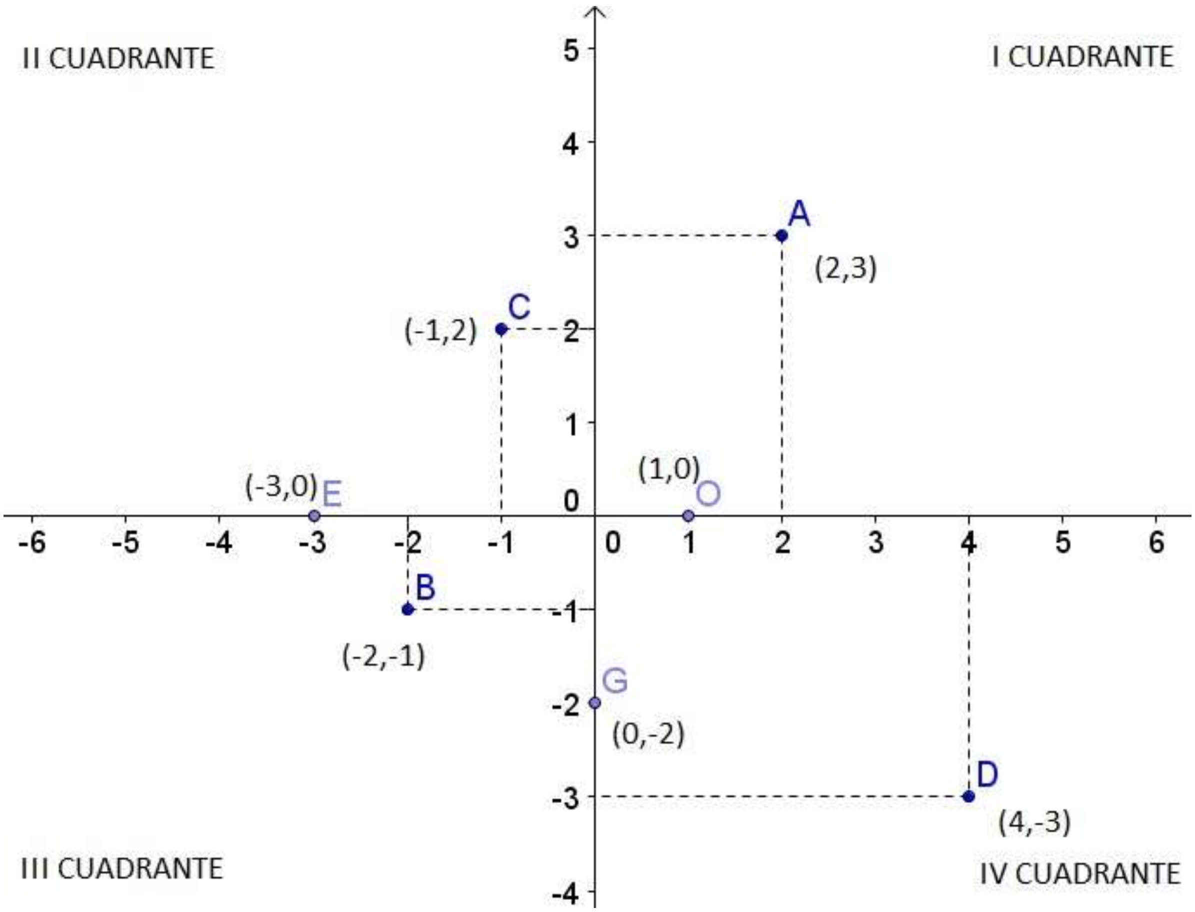
g no representa una función ya que hay tres valores distintos de "y" asociados al mismo valor de "x" y por definición de funciones, eso no es posible

x	-5	6	-7	8	-3	17
$h(x)$	-3	-3	0	3	4	-3

h si representa una función

Gráfica de una Función

Corresponde a la representación en el plano de una función

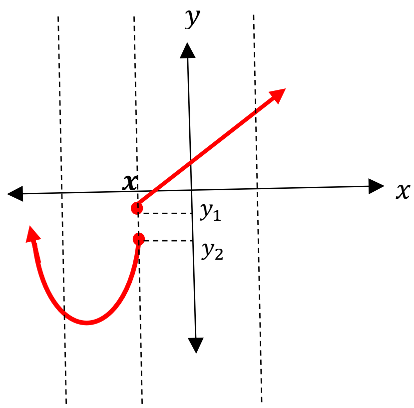
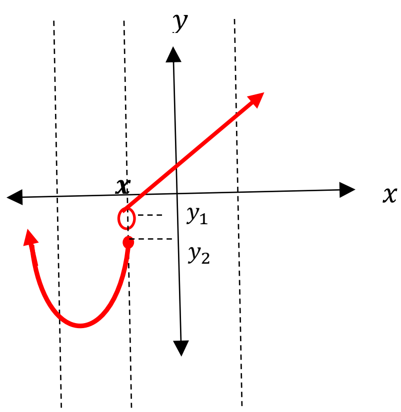
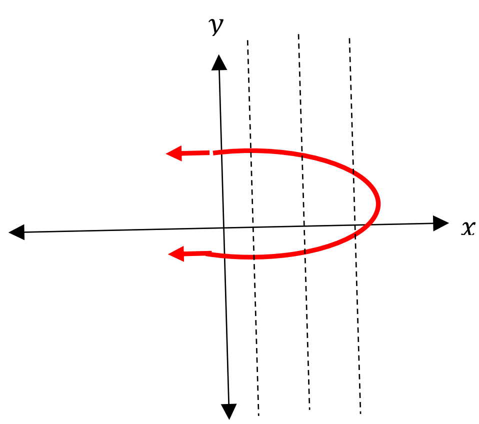


Pares Ordenados en el plano
Expresión de la forma (x, y)

- Si el punto está ubicado dentro de cualquiera de los cuadrantes tiene la forma (x, y)
- Si el punto está ubicado sobre el eje "x" el par ordenado tiene la forma $(x, 0)$, es decir su valor en "y" es cero.
- Si el punto está ubicado en el eje "y", el par ordenado tiene la forma $(0, y)$, es decir su valor en "x" es cero

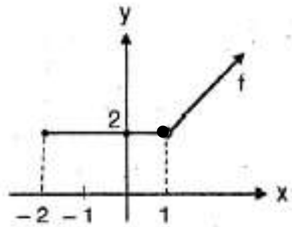
¿Cómo determinar si una gráfica corresponde o no a la gráfica de una función?

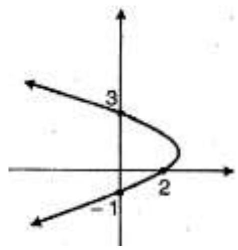
Para ello se deben trazar líneas verticales (cortando al eje "x") sobre el trazo de la gráfica, si alguna de estas líneas corta en dos o más puntos a dicha gráfica entonces se dirá que no corresponde a una función, ya que a ese valor de "x" se le estarían asociando dos o más valores de "y" y como ya se sabe, según la definición de función, eso no es posible.

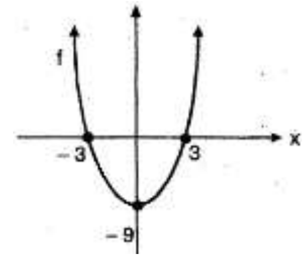
Ejemplo 1 	Esta gráfica no corresponde a una función ya que el elemento "x" del dominio está asociado con dos elementos distintos del codominio y_1 , y_2, y se puede visualizar por que la línea punteada que pasa por "x" toca en dos puntos distintos a la función.
Ejemplo 2 	Esta gráfica si corresponde a una función, ya que, aunque al elemento "x" del dominio se le están asociando dos elementos del codminio hay uno que está abierto, lo que quiere decir que realmente no está asociado con y_1.
Ejemplo 3 	Esta gráfica no corresponde a una función ya que al trazar líneas verticales se observa que para cuanquier valor de "x" hay dos valores de "y" asociados, y eso por definición de función, no es posible

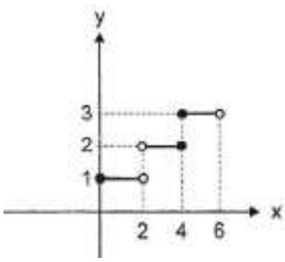
Ejercicios

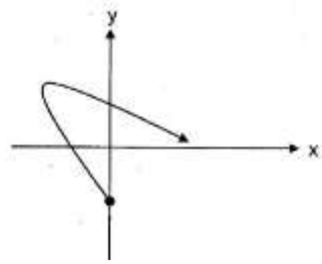
1. Para cada una de las siguientes representaciones de relaciones, determine cuales corresponden a una función. De no ser así indique el porqué

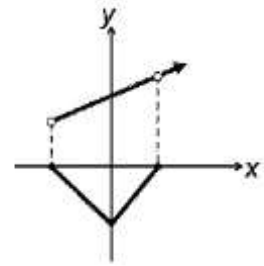












$G_f = \{(-2,1),(-1,3),(0,1),(-2,-5)\}$

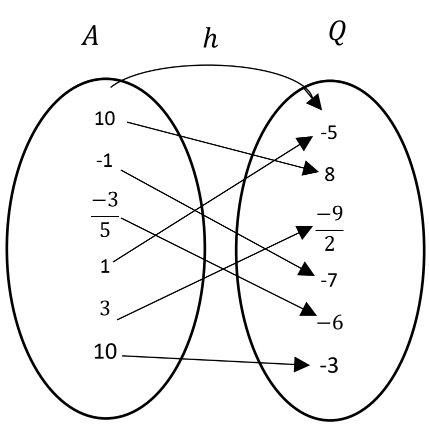
$G_h = \{(2,-2),(1,-13),(1,-2),(2,14)\}$

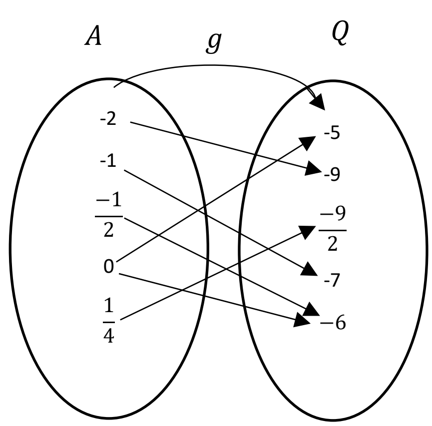
$G_g = \{(0,1),(-1,1),(0,1),(-2,-9)\}$

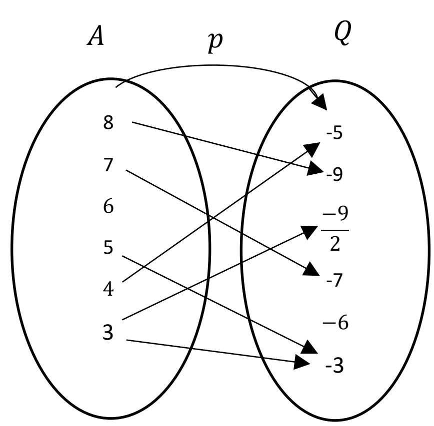
x	-3	-2	-1	0	7
$f(x)$	9	4	1	0	

x	11	-1	-1	0	1
$h(x)$	9	8	9	6	-4

x	4	16	32	64	128
$g(x)$	2	4	2	0	1

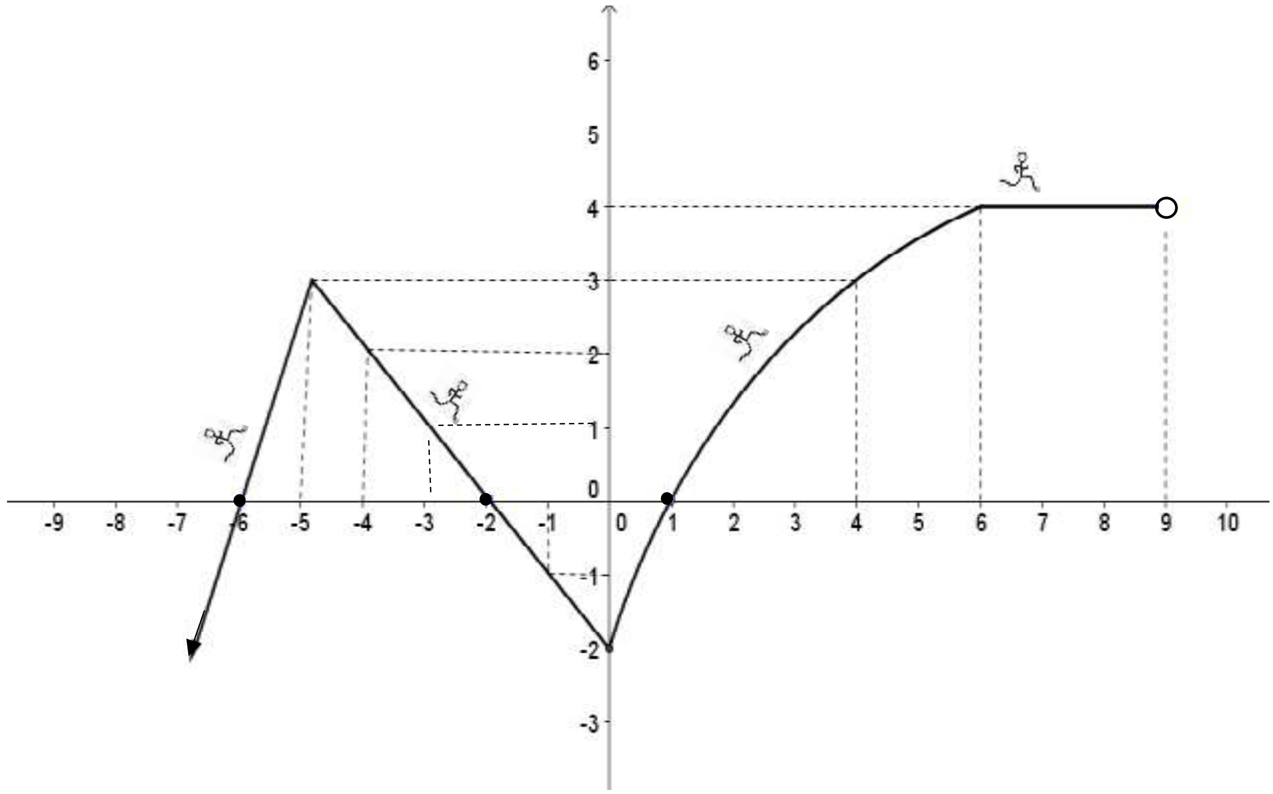






Análisis de una Función a partir de su Gráfica.

Para presentar el análisis de una función dada su gráfica se tomará como Ejemplo 1 la siguiente gráfica



Los elementos que se analizarán son:

Dominio: Como ya se indicó anteriormente, el dominio de una función corresponde al conjunto de todas las preimagenes de una función. Al hablarse de una gráfica, el dominio se determinará tomando como referencia el eje "x". Aquí es de mucha importancia recordar la notación de intervalos reales vista en décimo año

Para la gráfica anterior $D_f =]-\infty, 9]$

Ámbito: Al ser el ámbito el conjunto de TODAS las imágenes de una función, en una gráfica este se analizará en el eje "y" de abajo hacia arriba, recordando de igual manera la notación de intervalos reales.

Para la gráfica anterior $A_f =]-\infty, 4]$

Intersección con el eje "y". Corresponde al punto donde la función corta al eje "y". Para la gráfica anterior la intersección con el eje "y" es $(0, -2)$. Cabe mencionar que, por la definición de función, en el caso de que exista, solamente habrá una y sólo una intersección con el eje "y"

Intersección con el eje "x". Corresponde al punto(s) donde la función corta al eje "x". Para la gráfica anterior las intersecciones con el eje "x" son $(-6,0), (-2,0)\ y\ (1,0)$. Cabe mencionar que, por la definición de función, si puede existir más de una intersección con el eje "x"

Ceros o Raíces de la Función. Los ceros de una función corresponden a los valores de "x" donde la imagen es cero, es decir $f(x) = 0$. En una gráfica corresponden a las intersecciones o cortes en el eje "x"

Para la gráfica anterior los ceros de la función corresponden a $x = -6$, $x = -2$, $x = 1$

Punto Críticos y Monotonía de la función.
El crecimiento o monotonía de una función (creciente, decreciente o constante) se analiza en el eje "x" de izquierda a derecha, también respetando de antemano la notación de los intervalos reales.

Un punto crítico de una función corresponde a un punto donde la función cambia de comportamiento. Al analizar la monotonía de una función los puntos críticos siempre irán abiertos en la notación de intervalos.

Es importante aclarar que una función no necesariamente posee los tres comportamientos, existen funciones que son crecientes, decrecientes o constantes en todo su dominio, o bien funciones que combinen dos tipos de comportamiento.

Para la gráfica anterior:

f es creciente $]-\infty,-5[\ \cup\ ]0,6[$ 5,0,6 se ponen abiertos ya que son puntos críticos.

f es decreciente $]-5,0[$ 0 se pone abierto porque es un punto crítico.

f es constante $]6,9]$ 6 se pone abierto porque es un punto crítico.

Imágenes y preimágenes dada la Gráfica

Desde la gráfica de una función se pueden determinar imágenes y preimagenes. Tomando como referencia la gráfica anterior conteste lo siguiente

1. $f(-6) =$ ______
2. $f(-4) =$ ______
3. Una preimagen de -2 es ________
4. Una preimagen de 1 es ________
5. $f(8) =$ _______
6. La preimagen de 5 es __________
7. 9 es preimagen de _____________
8. La imagen de -5 es _____________
9. Una preimagen de 4 es ___________
10. $f\left(\frac{15}{2}\right)=$_______________

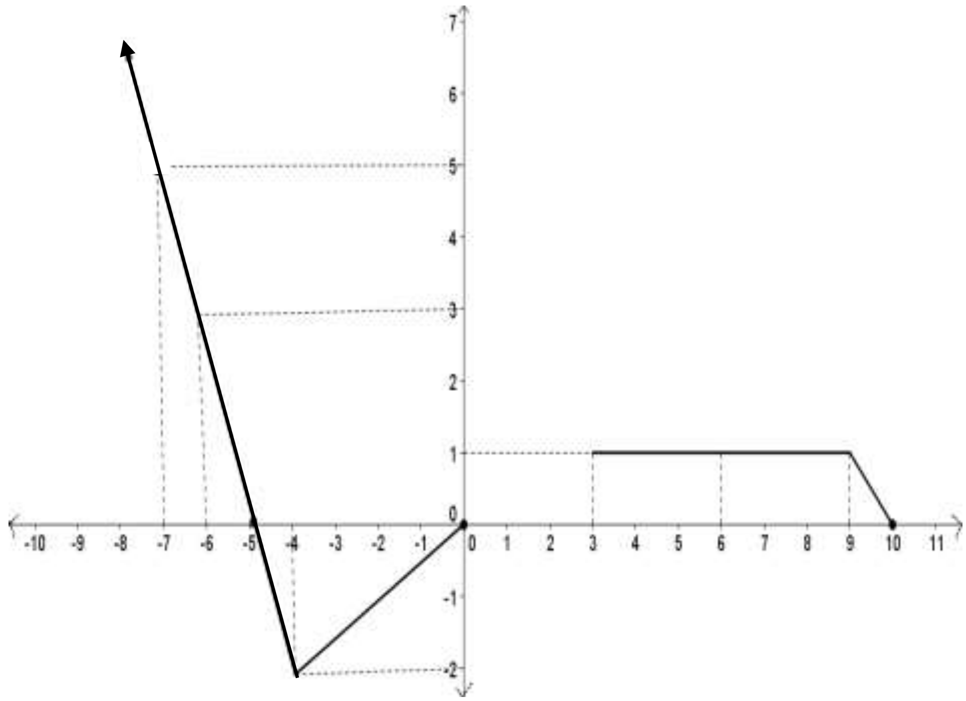
Nota importante:

1. En cualquier función, cuando se habla de $f(0)$ "imagen de cero" siempre se tomará el valor donde la función corta al eje "y". Para la gráfica anterior $f(0) = -2$

2. En cualquier función, cuando se habla de las preimagenes de cero, se tomará el o "los" valores donde la función corta al eje "x". Para la gráfica anterior, las preimágenes de cero son $x = -6$, $x = -2$, $x = 1$

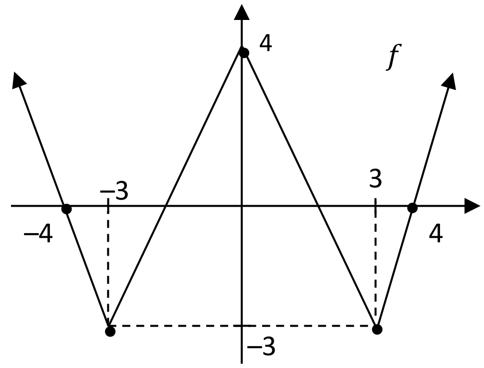
Ejercicios

1. Dada la siguiente gráfica que corresponde a una función "h" determine lo que se le solicita:



1. Dominio de “h”______________
2. Ámbito de “h”______________
3. Ceros de “h”______________
4. $\cap_x$ ______________
5. $\cap_y$ ______________
6. Puntos Críticos de “h"______________
7. Un intervalo donde “h” es creciente________
8. Un intervalo donde “h” es decreciente______
9. Un intervalo donde “h” es constante________
10. $h(-5)$ ______________
11. La preimagen de 3 ______________
12. Una preimagen de cero ______________
13. $h(0)$ ______________
14. Preimagen de 5 ______________
15. $h\left(\frac{11}{2}\right)$ ______________
16. -2 es imagen de ______________
17. -6 es preimagen de ______________

2. Para cada una de las siguientes gráficas conteste lo que se le solicita



Dominio: ___________ Imagen de 0: _____

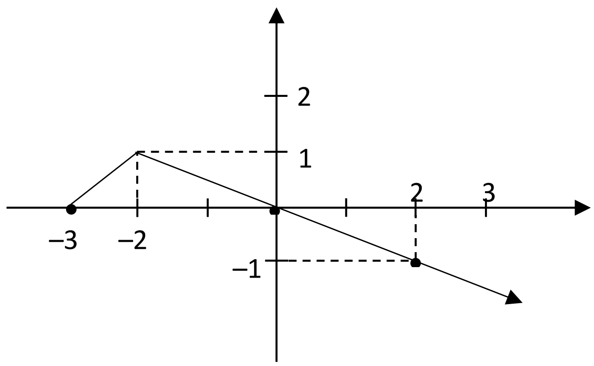
Ámbito: ____________ Un cero de f: _____

f es creciente en: __________ Preimagen de 0: _____

f es decreciente en: ________ Preimagen de -3: ____

Intersección con el eje “x”: ___________

Intersección con el eje “y”: ___________



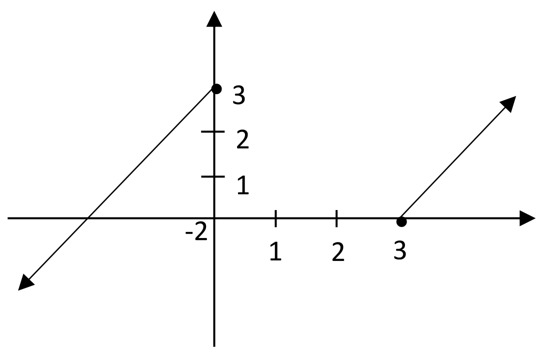
Dominio: ___________ Imagen de -3: _____

Ámbito: ____________ Imagen de 0: _____

f es creciente en: __________ Preimagen de -1:_____

f es decreciente. en: ________ Preimagen de 1: _____

Un punto crítico de la función es : ___________



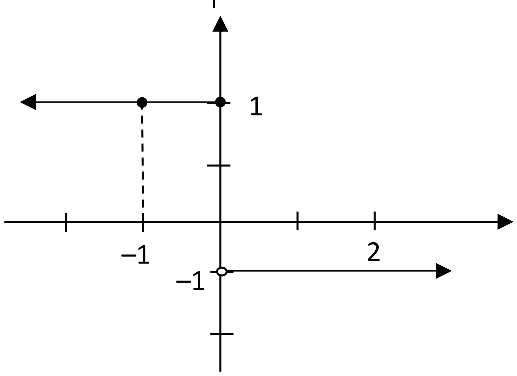
Dominio: ___________ Imagen de -2: _____

Ámbito: ____________ Imagen de 3: _____

f es creciente: __________ Preimagen de 0: _____

f es decreciente: __________

La función interseca al eje “y” en el punto: ___________



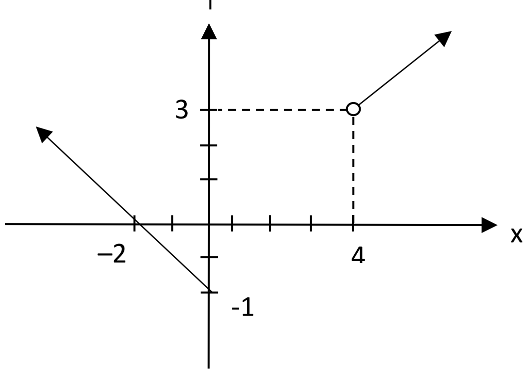
Dominio: ___________ Imagen de 2: _____

Ámbito: ____________ Imagen de -2: _____

f es creciente: __________ Preimagen de -1:_____

f es constante: ________ Preimagen de 2: _____

La función interseca al eje “y” en el punto: ___________



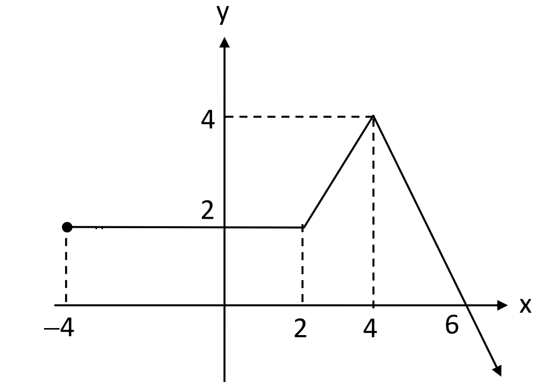
Dominio: ___________ Imagen de -2: _____

Ámbito: ____________ Imagen de 4: _____

f es creciente: __________ Preimagen de -2:_____

f es decreciente: ________ Preimagen de 3: _____

f interseca al eje “x” en el punto: ___________



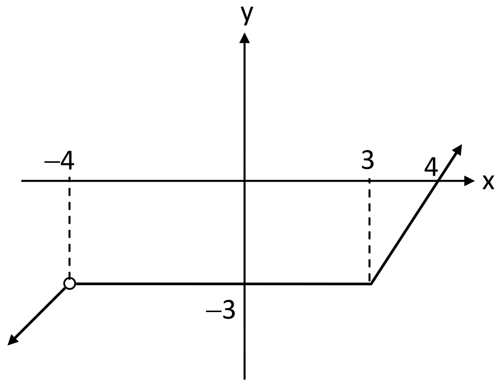
Dominio: ___________ Imagen de 2: _____

Ámbito: ____________ Imagen de 6: _____

f es creciente: ________ Preimagen de 0: _____

f es decreciente: _______ Preimagen de 4: _____

Un punto crítico de la función: __________Imagen de -3: _____



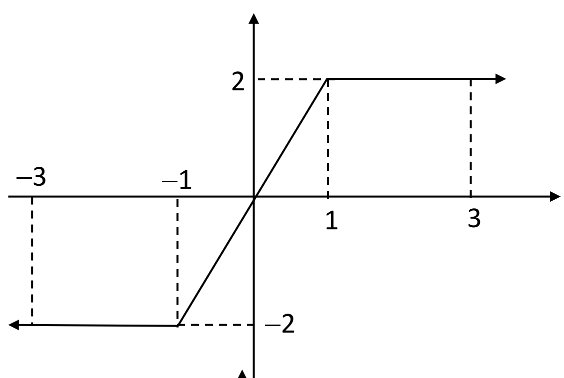
Dominio: ___________ Un punto crítico: _____

Ámbito: ____________ Imagen de 3: _____

f es creciente: __________ Preimagen de -3:_____

f es decreciente: ________ Preimagen de 0: _____

f es constante en: ___________ Imagen de -1________



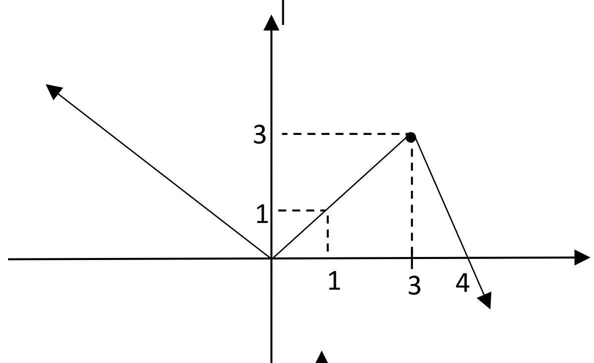
Dominio: ___________ Imagen de 3: _____

Ámbito: ____________ Imagen de -3: _____

f es creciente: __________ Preimagen de 0: _____

f es decreciente: ________ Preimagen de 2: _____

f es constante en: ___________ Un cero de la función__________



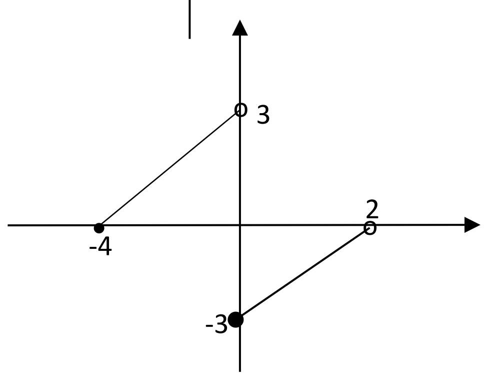
Dominio: ___________ Imagen de 0: _____

Ámbito: ____________ Preimagen de 3: _____

f es creciente: __________ Preimagen de 1: _____

f es decreciente: ________ Imagen de 4: _____

Un punto crítico de la función: ___________



Dominio: ___________ Imagen de 2: _____

Ámbito: ____________ Imagen de -4: _____

f es creciente: __________ Preimagen de -3:_____

f es decreciente: ________ Preimagen de 3: _____

Un cero de la función: ___________

Composición de Funciones

Para un mayor entendimiento del concepto de composición de funciones se va a analizar el siguiente ejemplo

Ejemplo 1

Sean las funciones

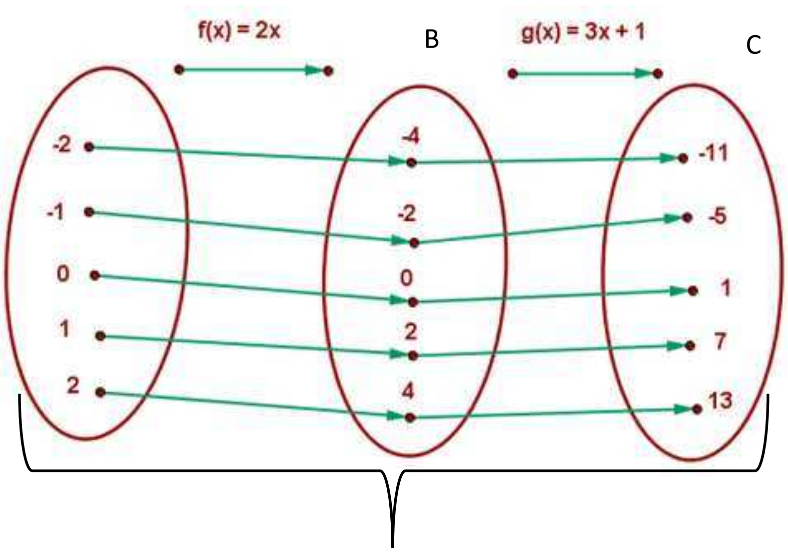
$f:\{-2,-1,0,1,2\} \to B$ tal que $f(x) = 2x$

$g: B \to C$ tal que $g(x) = 3x + 1$

Al conjunto $\{-2,-1,0,1,2\}$ (dominio de f) se le va a aplicar la función f y a los resultados obtenidos se les va a aplicar la función g. Al emplear simultáneamente dichas funciones en el orden indicado, se logra obtener la composición de g con f, es decir $gof(x)$ tal y como se muestra en la siguiente tabla

Dominio de f	**Sustitución 1** **Aplicar la función** $f(x) = 2x$	**Sustitución 2** **Aplicar la función** $g(x) = 3x + 1$	**Por lo tanto**
-2	$f(-2) = 2 \cdot -2 = -4$	$g(-4) = 3 \cdot -4 + 1 = -11$	$gof(-2) = -11$
-1	$f(-1) = 2 \cdot -1 = -2$	$g(-2) = 3 \cdot -2 + 1 = -5$	$gof(-2) = -5$
0	$f(0) = 2 \cdot 0 = 0$	$g(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1$	$gof(0) = 1$
1	$f(1) = 2 \cdot 1 = 2$	$g(2) = 3 \cdot 2 + 1 = 7$	$gof(1) = 7$
2	$f(2) = 2 \cdot 2 = 4$	$g(4) = 3 \cdot 4 + 1 = 13$	$gof(2) = 13$

Lo anterior también se puede ver representado con diagramas de Venn



$gof(x)$

Definición

Sean $f\colon \underbrace{X}_{\text{Domino}} \to \underbrace{Y}_{\text{Codominio}}$ y $g\colon \underbrace{Y}_{\text{Domino}} \to \underbrace{Z}_{\text{Codominio}}$ dos funciones.

Se define la composición de "g" con "f" $(gof)(x)$ como $g(f(x))$.

Análogamente se puede definir $(fog)(x)$ como $f(g(x))$

Ejemplo 2

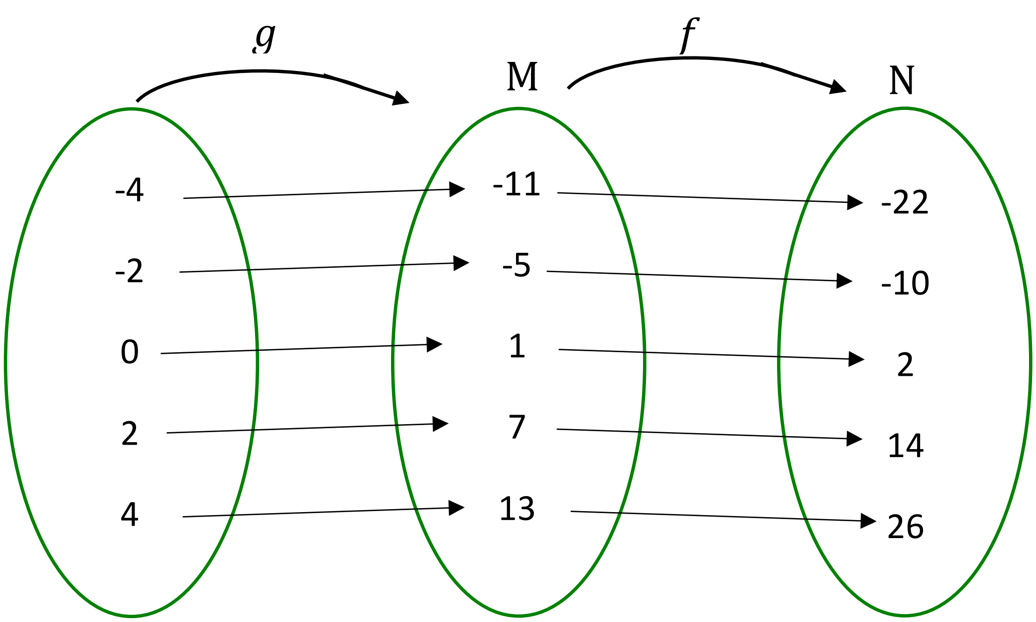
Sean las funciones

$g\colon\{-4,-2,0,2,4\} \to M$ tal que $f(x) = 3x + 1$

$f\colon M \to N$ tal que $g(x) = 2x$

Realice un diagrama de Venn que represente $fog(x)$

Dominio de g	**Sustitución 1 Aplicar la función** $g(x) = 3x + 1$	**Sustitución 2 Aplicar la función** $f(x) = 2x$	**Por lo tanto**
$\mathbf{-4}$	$g(-4) = 3 \cdot \mathbf{-4} + 1 = \mathbf{-11}$	$f(\mathbf{-11}) = 2 \cdot \mathbf{-11} = -22$	$fog(-4) = -22$
$\mathbf{-2}$	$g(-2) = 3 \cdot \mathbf{-2} + 1 = \mathbf{-5}$	$f(\mathbf{-5}) = 2 \cdot \mathbf{-5} = -10$	$fog(-2) = -10$
$\mathbf{0}$	$g(0) = 3 \cdot \mathbf{0} + 1 = \mathbf{1}$	$f(\mathbf{1}) = 2 \cdot \mathbf{1} = 2$	$fog(0) = 2$
$\mathbf{2}$	$g(2) = 3 \cdot \mathbf{2} + 1 = \mathbf{7}$	$f(\mathbf{7}) = 2 \cdot \mathbf{7} = 14$	$fog(2) = 14$
$\mathbf{4}$	$g(4) = 3 \cdot \mathbf{4} + 1 = \mathbf{13}$	$f(\mathbf{13}) = 2 \cdot \mathbf{13} = 26$	$fog(4) = 26$



¿Cómo determinar el criterio de la composición de dos funciones?

Sean f, g dos funciones que cumplen con las condiciones antes mencionadas se definen:

- $(fog)(x) = f(g(x))$, es decir se sustituye el criterio de g en las "x" de la función f y se realizan las operaciones que surjan.

- $(gof)(x) = g(f(x))$, es decir se sustituye el criterio de f en las "x" de la función g y se realizan las operaciones que surjan.

Para las funciones "f" y "g" de los diagramas anteriores se tiene:

$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = 2(3x+1) = 6x+2$

Finalmente se tiene que $fog : C \to A$
$(fog)(x) = 6x + 2$

$(gof)(x) = g(f(x)) = 3(2x) + 1 = 6x + 1$

Finalmente se tiene que $gof : A \to C$
$(fog)(x) = 6x + 1$

Ejemplo 1

Dadas $f(x) = 3x - 1$ $\quad y \quad$ $g(x) = \sqrt{x-4}$

Determine $gof(x)$

$(gof)(x) = g\big(f(x)\big)$

$= \sqrt{f(x) - 4}$

$= \sqrt{3x - 1 - 4}$

$= \sqrt{3x - 5}$

Finalmente $(gof)(x) = \sqrt{3x-5}$

Ejemplo 2

Dadas $f(x) = 2x^2 + x \;\; y \;\; h(x) = 1 - 2x$

a) Determine $foh(x)$

$(foh)(x) = f\big(h(x)\big)$

$= 2[h(x)]^2 + h(x)$

$= 2(1-2x)^2 + (1-2x)$

$= 2(1 - 4x + 4x^2) + 1 - 2x$

$= 2 - 8x + 8x^2 + 1 - 2x$

$= 8x^2 - 10x + 3$

Recordar
$(1-2x)^2 = (1-2x)(1-2x)$
$(1-2x)^2 = (1-2x)(1-2x) = 1 - 2x - 2x + 4x^2 =$
$1 - 4x + 4x^2$

b) Determine $hof(x)$

$h\big(f(x)\big) = 1 - 2f(x)$

$1 - 2(2x^2 + x) = 1 - 4x^2 - 2x$

¿Cómo calcular imágenes bajo la composición de dos funciones?

Ejemplo 1

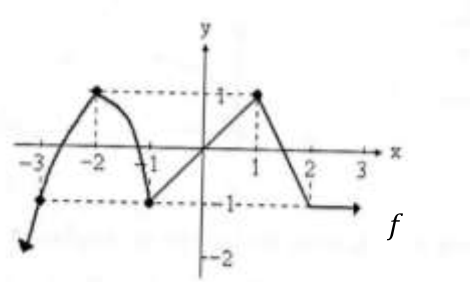
Dadas las siguientes funciones f (ver gráfica de la derecha) y $g(x) = 4x + 1$

Determine:

$fog(-1) = f\big(g(-1)\big) = f(-3) = -1$

$gof(3) = g\big(f(3)\big) = g(-1) = -3$

$fog(0) = f\big(g(0)\big) = f(1) = 1$



Ejemplo 2

Las siguientes corresponden a la representación tabular de la función f y el gráfico de la función g.

$\boldsymbol{x}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{f(x)}$	1	2	5	10	17	26

$G_g = \{(1,3), (2,5), (5,11), (10,21), (17,35), (26,53)\}$

De acuerdo con la información anterior determine:

$gof(2) = g(f(2)) = g(5) = 11$

$fof(0) = f(f(0)) = f(1) = 2$

$fog(1) = f(g(1)) = f(3) = 10$

Ejercicios

1. Dadas $f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = -3x^2$

$a)$ $fog(x)$

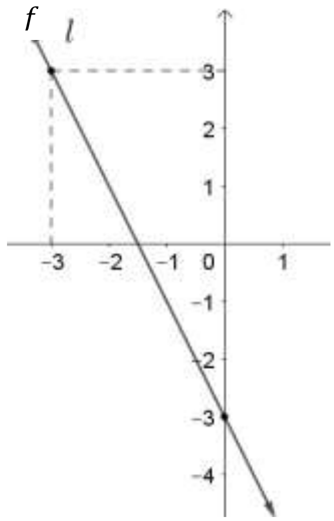
$b)$ $gof\ (x)$

$c)$ $fof\ (x)$

$d)$ $gof\ (1)$

$h)$ Determine: $gof(2) - 4 \cdot fof(9) + 1$

2. Dadas las funciones f (ver gráfica), $g(x) = 3x - 5$ y $h(x) = 1 - x$ determine:



$a)\ \ fog\left(\frac{5}{3}\right)$

$b)\ \ gof\ (-3)$

$c)\ \ hoh\ (x)$

$d)\ \ hog\ (x)$

$e)\ \ hoh\ (-1)$

$f)\ \ goh\ (-3)$

$g)\ \ 6\ hog(2) - gog(9) + 12$

3. Las siguientes corresponden a la representación tabular de la función f y el gráfico de la función g.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	2	5	10	17	26

$G_g = \{(1,3), (2,5), (5,11), (10,21), (17,35), (26,53)\}$

El valor de $gof(2)$ corresponde a

El valor de $fof(0)$ corresponde a

El valor de $fog(2)$ corresponde a

El valor de $gof(3)$ corresponde a

4. Dadas las funciones $f(x) = 3 - 2x$ y $g(x) = x^2 - 2x + 1$ determine:

$fog(x)$

$gof(x)$

$fof(x)$

$gofog(x)$

$fog(-2)$

$gof(3)$

$fof(-11)$

5. Dadas las funciones $f(x) = -2x + 3$ y $h(x) = x - 5$ determine:

$foh(x)$

$hof(x)$

$fof(x)$

$hofoh(x)$

$foh(3)$

$hof(-5)$

$fof(1)$