Wiederholung

Eine Folge reeler Zahlen (a_n) konvergiert uneigentlich gegen ∞ wenn gilt:
Für jedes $C \in \mathbb{R}$ gilbt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

(a_n) konvergiert uneigentlich gegen $-\infty$ wenn $(-a_n)$ gegen ∞ konvergiert.
Notation: $a_n \to \infty$ für $n \to \infty$
$a_n \to -\infty$ für $n \to \infty$

Beispiel:

$a_n = n^2 \to \infty$
$a_n = -n^2 \to -\infty$
$a_n = (-1)^n \cdot n^2$
$(0, -1, 4, -9)$ *konvergiert weder gegen* ∞ *noch gegen* $-\infty$

Rechenregeln:

Angenommen $(a_n), (b_n)$ *sind konvergente Folgen.*

1. $(a_n + b_n) \to a + b$
2. $(a_n \cdot b_n) \to ab$
3. $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$
4. $c \cdot a_n \to c \cdot a$
5. $a_n - b_n \to a - b$
6. $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

Beweis 6:

3) $\Rightarrow \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$
$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b}$
2) $\Rightarrow a_n \cdot displaystyle\frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ *q.e.d.*

Beispiel:

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*10*	*100*
a_n	*0*	*0*	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{19}$	$\frac{90}{201}$	$\frac{9900}{20001}$

Vermutung: $a_n \to \frac{1}{2}$ *für* $n \to \infty$

Rechenregel 6 anwenden:

1. *Versuch:*
   $a_n = \frac{b_n}{c_n}$

   $b_n = n^2 - n; c_n = 2n^2 + 1$
   $(b_n) und (c_n)$ *sind divergend. Schlecht.*

2. *Versuch:*
   $$\frac{n^2 - n}{2n^2 + 1} = \frac{n^2(1 - \frac{1}{n})}{n^2(2 + \frac{1}{n^2}} \text{ für } n \geq 1$$
   $$= \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{b_n}{c_n} \text{ mit } b_n := 1 - \frac{1}{n}; c_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$
   $\frac{1}{n} \to 0$ *für* $n \to \infty$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{n} \to 1-0=1 \textit{ für } n\to\infty$$
$$\Rightarrow 2+\frac{1}{n^2} \to 2+0=2 \textit{ für } n\to\infty$$

$\Rightarrow a_n \to \frac{1}{2}$ *für* $n \to \infty$

3.10 Satz

Seien $a_n \to a$, $b_n \to b$ *zwei konvergente Folgen reeler Zahlen.*
wenn $a_n \leq b_n$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$ *dann ist* $a \leq b$.

Beweis:

Angenommen: $a > b$

Wähle $\epsilon := \dfrac{a-b}{2} > 0$

Es gibt $N \in \mathbb{N}$ *so dass:* $\left.\begin{array}{l} |\ a_n - a\ | < \epsilon \\ |\ b_n - b\ | < \epsilon \end{array}\right\}$ *für* $n \geq N$

$\Rightarrow a_n > a - \epsilon$

$= a - \frac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2} = b + \dfrac{a-b}{2}$

$= b + \epsilon > b_n \Rightarrow a_n > b_n$ *für* $n \geq \mathbb{N}$
Widerspruch zur Annahme.
$a_n \leq b_n$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$ *q.e.d.*

3.11 Definition: Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge reeler Zahlen.*
Bilde eine Folge:

$$s_0 = a_0$$
$$s_1 = a_0 + a_1$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$
$$\vdots s_n = a_0 + a_1 + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ *heißt Reihe mit den Gliedern* a_n.
s_n *heißen die* <u>*Partialsummen*</u> *der Reihe.*
Bezeichnung:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *oder* $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ...$

Wenn $s_n \to s \in \mathbb{R}$ *für* $n \to \infty$ *dann schreiben wir:*
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = s$
Summe der Reihe.

<u>*Achtung:*</u> *Symbol* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *hat* <u>*zwei*</u> *Bedeutungen:*

1. *die Folge* (s_n)
   oder

2. *deren Grenzwert*

Beispiel:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + ...$
   ist die Folge $(1, 2, 3, 4, ...) = (n+1)_{n \in \mathbb{N}_0}$

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k = 0 + 1 + 2 + 3 + ...$
   ist die Folge $(1, 3, 6, 10, ...) = (\frac{n(n-1)}{2})_{n \in \mathbb{N}}$

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ...$
   ist die Folge $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$

Vorüberlegung:
$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
$s_n := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$
$= 1 - \frac{1}{n+1}$
Teleskopsumme

$\frac{1}{n+1} \to 0$ *für* $n \to \infty$

Summe der Reihe:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1 \qquad$ *q.e.d.*

Bemerkung:

Jede Folge kann man auch als Reihe Schreiben. (Differenzen bilden)
z.B.: die Folge der Primzahlen:
$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19)$
ist die Reihe:
$(2 + 1 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + ...)$
Goldbachsche Vermutung: in dieser Reihe kommt die Zahl 2 unendlich oft vor.

3.12 Satz, Die geometrische Reihe

Sei $x \in \mathbb{R}$
a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$ *wenn* $\mid x \mid < 1$
b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ *divergiert wenn* $\mid x \mid \geq 1$

a *wenn* $|x| < 1$
   dann folgt $\sum k = 0\infty a_k = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \cdot x^n) = \frac{1}{1-x}$

b *wenn* $|x| > 1$
   dann (x^n) *divergent* $\Rightarrow (\frac{x}{1-x} \cdot x^n)$ *divergent*
   denn $\frac{x}{1-x} \neq 0$
   $\Rightarrow (\frac{?}{?})$

Beweis:

$x = 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1+1+1+...)$ *divergiert, ok*
Sei nun $x \neq$
Bekannt aus der Übung: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \cdot x^n$
Potenzenwachstum
$x^n \to 0$ *für* $n \to \infty$ *<u>wenn</u>* $|x| < 1$
(x^n) *divergiert, wenn* $(|x| \geq 1$ *und* $x \neq 1)$

3.13 Satz

Wenn die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *kovergiert, dann ist* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

Beweis:

Gegeben sei $\epsilon > 0$
Sei $a = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}(s_n)$ *mit* $s_n = a_0 + ... + a_n$
Es gibt N *in*$\mathbb{N}$ *mit* $|s_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ *für* $n \geq N$

$$\begin{aligned} |a_n| &= |s_n - s_{n-1}| \\ &= |s_n - a + a - s_{n-1}| \\ &\leq |s_n - a| + |a - s_{n-1}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

für $n \geq N+1$
$\Rightarrow a_n \to 0$ *für* $n \to \infty$

3.14 Satz, die harmonische Reihe

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ *divergiert*

<u>Beweisidee:</u>

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... \\ &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... \\ &1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + ... \\ &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = \infty \end{aligned}$$