1 Mengen

1.1 Definition:

1. Eine Menge ist eine Ansammlung verschiedener Objekte
2. Die Objekte in einer Menge heißen <u>Elemente</u>
   Notation: $a \in M$ *heißt a ist Element der Menge M*
   $a \notin M$ *heißt a ist kein Element der Menge M*
3. Sei M eine Menge. Eine Menge U heißt Teilmenge von M, von der jedes Element von U auch Element von M ist
   Notation: $U \subseteq M$ *heißt U ist Teilmenge von M*
   $U \nsubseteq M$ *heißt U ist keine Teilmenge von M*

1.2 Beispiele

1. Sei M die Menge aller Studierenden in L1
   W die Menge aller weiblichen Studierenden in L1
   F die Menge aller Frauen

   Dann gilt: W $\subseteq$ M, W $\subseteq$ F, M $\nsubseteq$ F, F $\nsubseteq$ M
2. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$ G sei die Menge der geraden natürlichen Zahlen $G := \{n \in \mathbb{N}|\text{n ist gerade}\} = \{2m|m \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8 \dots\}$ Es gilt G $\subseteq \mathbb{N}, \mathbb{N} \subseteq$ G
3. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$
4. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{a/b|a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
5. Die Menge ohne Element heißt die leere Menge Symbol: $\emptyset = \{\}$

<u>**Bemerkung:**</u>

1. Für jede Menge M gilt $\setminus \subseteq M$
2. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

1.3 Definition: Sei M eine Menge und U,V $\subseteq$ M Teilmengen

1. Die Vereinbarung von U und V ist $U \cup V := \{x \in M \mid x \in U oder x \in V\}$
2. Der Durchschnitt von U und V ist $U \cap V := \{x \in M \mid x \in U oder x \in V\}$ U und V heißen disjunkt, wenn $U \cap V = \emptyset$
3. Die Differenzmenge von U und V ist $U \setminus V := \{x \in U \mid x \in V\}$
4. Das Komplement von U ist $U^C = M \setminus U = \{x \in M \mid x \notin U\}$ Bsp:
   Sei $M = \mathbb{N}$
   $\{1, 3\} \cup \{3, 5\} = \{1, 3, 5\}$
   $\{1, 3\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$
   $\{1, 3\} \cap \{2, 4, 7\} = \emptyset \leftarrow$ disjunkt
   $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$
   $\{1, 3, 5\}^C = \{2, 4, 6, 7, 8, \dots\}$

1.4 Satz (de Morjensche Regeln)

Sei M eine Menge, U,V $\subseteq$ M Teilmengen
Dann:

1. $(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$
2. $(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$

Beweis:

1. Sei x$\in M$
   Es gilt: x $\in (U \cap V)^C \Leftrightarrow x \notin U \cap V \Leftrightarrow x \notin$U oder x$\notin$V$\Leftrightarrow x \in U^C$ oder x$\in V^C \Leftrightarrow x \in U^C \cup V^C$
2. Sei x$\in M$
   Es gilt: x $\in (U \cup V)^C \Leftrightarrow x \notin U \cup V \Leftrightarrow x \notin$U und x$\notin$V$\Leftrightarrow x \in U^C$ und x$\in V^C \Leftrightarrow x \in U^C \cap V^C$

1.5 Prinzip der Vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage A(n) gegeben
Ziel: Beweisen, Dass A(n) für jedes $n \in \mathbb{N}$ mehr ist dafür reicht es zu zeigen

1. Induktionsanfang (IA): A(1) ist wahr
2. Induktionsschrit (IS): Wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ A(n) wahr ist, dann ist auch A(n+1) wahr

1.6 Satz:

Für jede natürliche Zahl n gilt: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
Probe:

n	1	2	3	4
1+2+3...+n	1	3	6	10
$\frac{n(n+1)}{2}$	1	3	6	10

Beweis des Satzes mit Induktion

Abkürzung: $S(n) := 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ Aussage: A(n): $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

1. Induktionsanfang (IA): n=1 $S(1) = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ok!
2. Induktionsschritt (IS): $n \rightarrow n+1$
   Annahme: A(n) gilt: $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   Zu zeigen: A(n+1) gilt: $S(n+1) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$
   $S(n+1) = S(n) + n + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$
   Das beendet den Beweis ■

Zur Vereinfachung der Notation:
Seien $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ Zahlen $n \in \mathbb{N}$
Setze: $\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Allgemeiner: Sei $l, m \in \mathbb{N}$, $l \leq m \leq n$
$\sum_{k=l}^{m} a_k = a_l + a_{l+1} + \ldots + a_m$

Aussage des Satzes:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>Kombinatorik</u> (mathematisches Zählen)

1.7 Definition:

Seien A, B Mengen. Das kartesische Produkt von A und B ist definiert als $A \times B := \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$
Die Elemente von $A \times B$ heißen geordnete Paare
Bsp.: $\{1,7\} \times \{2,3\} = \{(1,2),(1,3),(7,2),(7,3)\}$
Allgemeiner: Gegeben seien Mengen $A_1, \ldots, A_k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Das kartesische Produkt von $A_1, \ldots, A_k$ ist $A_1 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k)|a \in A,$für $i = 1, \ldots, k\}$
Elemente von $A_1 \times \ldots \times A_k$ heißen k-Tupel
Falls $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$, schreibe $\underbrace{A \times \ldots \times A}_{k-mal} = A^k$

1.8 Definition

Eine Menge A ist endlich, wenn A nur endlich viele Elemente hat. Dann bezeichnet $\#A = \{|A|\}$ die Anzahl der Elemente von A und somit dessen Kardinalität oder Mächtigkeit. Wenn A nicht endlich ist, so schreibe: $\#A = \infty$
Bsp.: $\#\emptyset = 0, \#\mathbb{N} = \infty, \#\{1,3,5\} = 3$

1.9 Bemerkung

1. Sei A endliche Menge. $U, V \subseteq A$ disjunkte Teilmengen
   Dann $\#(U \cup V) = \#U + \#V$

2. Seien $A_1, ..., A_k$ endliche Mengen $k \in \mathbb{N}$
   Dann: $\#(A_1 \times ... \times A_k) = (\#A_1)(\#A_2)...(\#A_k)$

1.10 Definition

1. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = \prod_{k=i}^{n} k$ Setze $0! = 1$

2. Für $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$ sei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-1)!}$ ← Binomialkoeffizient

n	0	1	2	3	4	5	6
n!	1	1	2	6	24	120	720

Beispiel:

$\binom{5}{2} := \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{20}{2} = 10$
Bemerkung: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

Wiederholung

Angeordneter Körper:
Menge K mit $+, \cdot, <$
so dass gewisse Eigenschaften erfüllt sind

Beispiel:

$\mathbb{Q}$ sind ein angeordneter Körper
Sei K angeordneter Körper, $M \subseteq K$ Teilmenge $a \in K$ ist obere Schranke von M, wenn $U \subseteq a$, d.h.: $x \leq a \quad ?\, x \in M$
$a \in K$ ist kleinste obere Schranke, wenn

1. $M \leq a$
2. Wenn $b < a$, dann nicht $M \leq b$

$\Big\}$ Bezeichnung $a = sup(M)$

Beispiel:

$K = \mathbb{Q} \qquad M = \{-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, ?\}$

Behauptung

$sup(M) = 0$

Beweis:

1. Zeige: $M \leq 0$, d.h.: $\frac{1}{n} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ✓
2. Wenn $b = \mathbb{Q},\ b < 0$, dann nicht $M \leq b$

Schreibe $b = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$
$b < 0$ heißt $m < 0,\ m \leq -1$
$b = \frac{m}{n} \leq \frac{-1}{n} \leq \frac{-1}{n+1} \in M$
$\Rightarrow M \not\leq b$ (nicht $M \leq b$) ∎

Vollständigkeit

1.11 Definition:

Ein angeordneter Körper K heißt Dedekind-vollständig, wenn jede nach oben beschränkte Teilmenge von K eine kleinste obere Schranke hat.

1.12 Satz:

Es gibt genau einen Dedekind-vollständigen, angeordneten Körper K
Dieser heißt Körper der reellen Zahlen
Bezeichnung: $\mathbb{R}$
(Beweis ausgelassen)

1.13 Satz:

Die Teilmenge $\mathbb{N}$ von $\mathbb{R}$ ist unbeschränkt

Beweis:

(verwende nur die Axiome)
Indirekter Beweis: Angenommen, $\mathbb{N}$ ist beschränkt
Vollständigkeit:

$\mathbb{N}$ hat eine kleinste obere Schranke $a \in \mathbb{R}$
Es gilt $a-1 < a \Rightarrow a-1$ ist kleinste obere Schranke von $\mathbb{N}$ $n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n+1 \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n \leq a-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Widerspruch!
Also Annahme falsch, d.h. $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt ■

beschränkt	=	nach oben beschränkt und nach unten beschränkt
unbeschränkt	=	nicht nach oben beschränkt oder nicht nach unten beschränkt

1.14 Folgerung (Prinzip des Archimedes)

Seien $x, y \in \mathbb{R},\ x > 0$, Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$
SKIZZE

Beweis:

$nx > y \Leftrightarrow n > \frac{y}{x}$ (weil $x > 0$)
$\mathbb{N}$ unbeschränkt und nicht nach oben beschränkt $\Rightarrow \frac{y}{x}$ ist keine obere Schranke von $\mathbb{N}$
$\Rightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{y}{x}$ ■

1.15 Folgerung

Sei $x \in \mathbb{R},\ x > 0$ Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$
SKIZZE

Beweis:

$\frac{1}{n} < x \Leftrightarrow 1 < n \cdot x \Leftrightarrow \frac{1}{x} < n$ (weil x positiv)
$\frac{1}{x}$ keine obere Schranke von $\mathbb{N} \Rightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{x} < n$ ■

1.16 Satz:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$
Dann gibt es $a \in \mathbb{Q}$ mit $x < a < y$, man sagt $\mathbb{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$
SKIZZE

Beweis:

$y - x > 0$ Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < y - x$
Ansatz: $a = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$
Sei $M := \{m \in \mathbb{Z} | x < \frac{m}{n}\} = \{m \in \mathbb{Z} | nx < m\}$
M ist nach unten beschränkt und nicht leer (wegen Archimedes)
M hat Minimum
Sei $m = min(M)$
$m \in M \Rightarrow x < \frac{m}{n}$
$m - 1 \notin M \Rightarrow x \geq \frac{m-1}{n}$
$y - \frac{m}{n} = y - x + x - \frac{m}{n} > \frac{1}{n} + x - \frac{m}{n} = x - \frac{m-1}{n} \geq 0$
$y > \frac{m}{n}$ ■

Wurzeln

1.17 Satz:

Es gibt kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$

Beweis:

Angenommen $a\frac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ a^2 = 2,\ m, n \in \mathbb{N}$
Kürze den Bruch $\Rightarrow \frac{m}{n}$ teilerfremd

$$a^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow \quad m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ gerade } \Rightarrow m \text{ gerade } \Rightarrow m = 2q,\ q \in \mathbb{N}$$

$$(2q)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4q^2 = 2n^2 \Rightarrow 2q^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ gerade } \Rightarrow n \text{ gerade}$$

Widerspruch zur Annahme m, n teilerfremd ■