Wiederholung

Sei M Menge.
Wenn M endlich: $\#M = Anzahl\ Elemente \in M$
Wenn M unendlich: $\#M = \infty$
Für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$

$$n! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}\ldots{\cdot}n \qquad 0! = 1$$

Binomialkoeffizient: Für $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = 1$$

0.0.1 Lemma

Für $0 < k < n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k)!} = \frac{k(n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

0.1 Geometrische Anordnung (Pascalsches Dreieck)

$$\begin{matrix} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{matrix}$$

Folge $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $0 \leq k \leq< n$

0.2 Satz:

Sei A endliche Menge. $\#A = n$

Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$

$P_k(A) := \{U \subseteq A | \#U = k\}$ (Menge aller k-elementigen Teilmengen von A)

Dann gilt $\#P_k(A) = \binom{n}{k}$

Beispiel:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $n = 4$ $k = 2$

2-elementige Teilmengen von A: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \rightarrow 6$ $\binom{4}{2} = 6$ ✓

Beweis:

Vorüberlegung: Sei $k = 0 \vee k = n$
$P_0(A) = 1 = \binom{n}{0}$ $\#P_n(A) = 1 = \binom{n}{n}$ ✓
Jetzt: Induktionsbeweis nach n

IA: $n = 0$ Dann $k = 0$ ✓
IS: $n \rightarrow n + 1$Sei $\#A = n + 1 \Rightarrow 0 \leq k \leq (n + 1)$ Falls $k = 0 \vee k = n + 1$
Sei also: $o < k < n + 1$
Wähle $a \in A$
Sei $B = A \backslash \{a\}$
Dann $A = B \cup \{a\}, \#B = n$
Man kann die Wahl einer k-elementigen Teilmenge von A so strukturieren

1. Entscheiden, ob $a \in U \vee a \notin U$
2. a) Wenn $a \notin U$: Wähle k Elemente aus B
   b) Wenn $a \in U$: Wähle k-1 Elemente aus B

$$\Rightarrow \#P_k(A) = \#P_k(B) + \#P_{k-1}(B) \overset{IV}{=} \binom{n}{k} + \binom{e}{-1} \overset{1.11}{=} \binom{n+1}{k}$$

■

0.3 Satz (Binomische Formel)

Seien a, b Zahlen, $n \in \mathbb{N}$
Dann $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$

Beispiel:

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Beweis:

Schreibe $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n-Faktoren}$

Ausmultiplizieren

Halte Terme der Form $a^{n-k}b^k$ mit $0 \leq k \leq n$
Häufigkeit von $a^{n-k}b^k$ = Anzahl der Möglichkeiten aus n-Faktoren k mal b zu wählen.
Das ist $\binom{n}{k}$ (Satz 1.13)

Folgerung

Setze $a = b = 1$ $\quad a^{n-k}b^k = 1$
$(a+b)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$

Beispiel:

$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

0.4 Definition

Sei A endliche Menge
Eine Anordnung von A ist ein n-Tupel
$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$ mit $a \in A$ für alle i und $a_i \neq a_j$ wenn $i \neq j$

Beispiel:

Anordnung von $\{1, 2, 3\} = (1,2,3)(1,3,2)(2,1,3)(2,3,1)(3,1,2)(3,2,1) \rightarrow 6$

0.5 Satz

Sei A endliche Menge, $\#A = n \geq 1$
Dann ist die Anzahl der Anordnungen von A gleich $n!$

Beweis:

Induktion nach n IA: $n=1$ ✓
IS: $n \rightarrow n+1$ Sei $\#A = n+1$
Wahl einer Anordnung von A kann man so unterteilen:

1. Wähle 1 Element $a_1 \in A$ (n+1 Möglichkeiten)

2. Wähle Anordnungen von $A\backslash\{a_1\}$
   $\#(A\backslash\{a_1\}) = n \Rightarrow n!$ Möglichkeiten bei 2
   Insgesamt $(n+1)\cdot n! = (n+1)!$

$\blacksquare$

Bemerkung:

(Zusammenhang zwischen Anordnung und Teilmengen)
Sei A endliche Menge, $\#A = n,\ 0 \leq k \leq n$
Sei $(a_1, \dots, a_n)$ Anordnung von A
$\rightsquigarrow$ Teilmenge $U := \{a_1, \dots, a_n\}$
Dann $U \subseteq A,\ \#U = k \qquad U \in P_k(A)$
Jedes $U \in P_k(A)$ entsteht so, aber mehrfach:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ Anordnungen\ von\ U}}{k!} \quad \cdot \quad \underset{\substack{\uparrow \\ Anordnungen\ von\ A\backslash U}}{(n-k)!} \quad -mal$$

$\#$ Anordnungen von $A = n! = \#P_k(A)\cdot k!\,(n-k)! \Rightarrow \#P_k(A) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!)} = \binom{n}{k}$

1 Die reellen Zahlen

Was sind die reellen Zahlen?
Präzise Konstruktion ist umfangreich, daher Axiomatischer Zugang
Beschreibung der reellen Zahlen durch ihre Eigenschaften (Axiome):

1. Grundrechenarten $\rightarrow$ Körper
2. Ungleichungen $\rightarrow$ angeordneter Körper
3. Lückenlosigkeit $\rightarrow$ Vollständigkeit

Körper

1.1 Definition:

Ein Körper ist eine Menge K mit 2 Rechenoperationen:
Addition $(+)$ und Multiplikation $(\cdot)$, so dass folgende 9 Eigenschaften erfüllt sind:

Addition

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ für alle $a, b, c \in K$ (Assotiativgesetz)
2. $a+b = b+a$ für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
3. Es gibt ein $0 \in K$ so dass $0+a = a$
4. Für jedes $a \in K$ gibt es ein $b \in K$ mit $a+b = 0$

   Bemerkung:

   $0 \in K$ ist eindeutig

   Beweis:

   Wenn $0' \in K$ mit $0'+a = a$, dann $0 = 0'+0 = 0+0' = 0'$ ■

   Bemerkung:

   Das b in 4. ist auch eindeutig.
   Notation: $b = -a$ (Negatives von a)

   Beweis:

   Angenommen $b'+a = 0$
   $b = b+0 = b+(a+b') = (b+a)+b' = 0+b' = b'$ ■

Multiplikation

5. $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c \qquad \forall a, b, c \in K$
6. $a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \in K$
7. Es gibt ein $1 \in K$ mit $1 \neq 0$, so dass $1 \cdot a = a \qquad \forall a \in K$
8. Für alle $a \in K,\ a \neq 0$, gibt es ein $b \in K$ mit $a \cdot b = 1$

   Bemerkung:

   $1 \in K$ ist eindeutig, b in 8. ist eindeutig
   Beziehung $b = a^{-1}$

Beweis:

Wie eben ■

9. $a(a+c) = a{\cdot}b + a{\cdot}c \qquad \forall a, b, c \in K$ (Distributivgesetz)

Weitere Bezeichnungen:
$a - b := a + (-b)$, $\frac{a}{b} = a{\cdot}b^{-1}$, wenn $b \neq 0$