Wiederholung

Eine folge reeller Zahlen (a_n) ist eine Cauchy-Folge wenn gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so dass für $m, n \geq \mathbb{N}$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$
(a_n) konvergiert $\Leftrightarrow (a_n)$ ist Cauchy-Folge
Für Reihen: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow$Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für $m, n \geq \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ ist $\left|\sum_{k=n}^{m} a_n\right| < \varepsilon$

Absolute Konvergenz

0.1 Definition

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ heißt absolut konvergent wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert

0.2 Satz

Jede absolut konvergente Reihe konvergiert

Beweis:

Verwende Cauchy-Kriterium für Reihen
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut von konvergent.
$\Rightarrow$Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit:
Für $n \geq m \geq N$ gilt $\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| \underset{\underset{Dreiecksungleichung}{\uparrow}}{\leq} \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=m}^{n} a_k konvergiert$ ■

Bemerkung:

Umkehrung gilt nicht. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$
konvergiert (Leibnitz)
denn $\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert

0.3 Definition

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt Majorante der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, wenn $|a_k| \leq b_k$ für alle k
(schon gewesen wenn $a_k \geq 0$)

0.4 Satz (Majorantenkriterium)

Wenn eine Reihe eine konvergente Majorante hat, dann konvergiert sie absolut. Beweis von Satz 4.5 ■

Umordnung von Reihen

0.5 Definition

Eine Umordnung einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}$ wobei $(n_0, n_1, n_2 \dots)$ eine Folge natürlicher Zahlen ist, in der jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau einmal vorkommt.

0.6 Satz

Jede Umordnung einer <u>absolut</u> konvergenten Reihe ist wieder absolut konvergent und hat den gleichen Grenzwert.
Im Gegensatz dazu gilt:

0.7 Satz

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente, nicht absolut konvergente, Reihe. Für jedes $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ hat $\sum a_k$ eine Umordnung, die gegen c konvergiert.

<u>Beispiel:</u>

Eine Reihe $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \ldots$ konvergiert gegen 0. Konvergiert aber nicht absolut:
Folge: $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \ldots \to 0)$ $\quad \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 1/k = \infty$
Produziere Umordnung, die gegen ∞ konvergiert:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} - \frac{1}{5} + \ldots$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{\frac{1}{6}} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}_{\frac{3}{10}} + \ldots = \infty \qquad \frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{3}{10}$$

Beweise von 4.24, 4.25 eventuell später.

<u>Produkte von Reihen</u>

Frage: was ist $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$?

0.8 Definition

Das Cauchy-Produkt von zwei reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b_{n-k} = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + a_2 \cdot b_{n-2} + \ldots + a_n \cdot b_0$
2-dimensionale Anordnung der $a_k \cdot b_l$

0.9 Satz

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, mindestens eine von ihnen absolut konvergent. Dann konvergiert ihr Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a, \sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ $\sum_{k=0}^{\infty} c_k = a \cdot b$

<u>Beweis</u> von 4.27:

Sei $\sum a_k$ absolut konvergent, $\sum b_k$ konvergent, so zeige $\sum c_k$ konvergent, $c_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b_{n-k}$ Schreibe:
$s_n = a_0 + \ldots + a_n$
$t_n = b_0 + \ldots + b_n$

$u_n = c_0 + \ldots + c_n$
$s_n \to a, t_n \to b$ (*)

Zeige $u_n \to a \cdot b$

(*)$\Rightarrow s_n \cdot b \to a \cdot b$ Zeige $s_n \cdot b - u_n \to 0$

$u_n = a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0) + \ldots + a_n \cdot b_0 = a_1 \cdot t_{n-1} + a_2 \cdot t_{n-2} + \ldots + a_n \cdot t_0$

$s_n \cdot b = a_0 \cdot b + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b + a_3 \cdot b + \ldots + a_n \cdot b$

$s_n \cdot b - u = a_0 \cdot (b - t_n) + a_1 \cdot (b - t_{n-1}) + a_2 \cdot (b - t_{n-2}) + a_3 \cdot (b - t_{n-3}) + \ldots + a_n \cdot (b - t_0) \underset{?}{\to} 0$

Sei $C \in \mathbb{R}$ mit $|b| \leq C$ und $|b - t_n| \leq C$ für alle n

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| = a^*$.

Gegeben sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $C \cdot (|a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots) < \frac{\varepsilon}{2}$
(geht weil $\sum |a_k|$ konvergiert)
und $|b - t_n| < \frac{\varepsilon}{2a^*}^{(2)}$ für alle $n \geq N$
(geht weil $b - t_n \to 0$ für alle $m \to \infty$)

Bemerkung:

Wenn $a^* = 0$ dann $a_n = 0$ für alle k. Dann alles klar. Für alle $n \geq 2N$ gilt:
$|a_0(b - t_n) + a_1(b - t_{n-1}) + \ldots + a_n(b - t_0)| \leq |a_0| \cdot |(b - t_n)| + |a_1| \cdot |(b - t_{n-1})| + \ldots + |a_n| \cdot |(b - t_0)|$
$\leq (|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots |a_N|) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ wegen(2)}}{\frac{\varepsilon}{2a^*}} + (|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \ldots |a_n|) \cdot C \leq a^* \cdot \frac{\varepsilon}{2a^*} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Also gilt: $s_n - u \to 0$ für $n \to \infty$ ■

Zusatz: Wenn $\sum a_k$ und $\sum b_k$ beide absolut konvertieren, dann auch das Cauchy-Produkt $\sum c_k$

Beweis:

Sei $\sum a_k^*$ das Cauchy-Produkt von $\sum |a_k|$ und $\sum |b_k|$. Beide konvergieren $\Rightarrow \sum_n c_n^*$ konvergiert

d.h. $c_n^* = |a_0 \cdot b_n| + |a_1 \cdot b_{n-1}| + \ldots + |a_n \cdot b_0| \geq |a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_0| = |c_n|$

Also $\sum_n c_n^*$ ist konvergente Majorante von $\sum_n c_n \Rightarrow \sum_n c_n$ konvergent absolut ■

Beispiel:

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 - + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \ldots$ konvergiert (Leibnitz)
Das Cauchy-Produkt der Reihe von $\sum a_k$ und $\sum a_k$ konvergiert nicht.

0.10 Beispiel

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe $exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut konvergent.

Es gilt $\boxed{exp(x) - exp(y) = exp(x + y)}$ Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

Beweis:

Betrag von $\sum_{k=0}^{\infty} |\frac{x^k}{k!}| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = exp(|x|)$ konvergiert (bekannt, Quotientenkriterium)

Berechne Cauchy-Produkt $exp(x) \cdot exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$

$$c_k = \frac{x^0}{0!} \cdot \frac{x^n}{n!} + \frac{x^1}{1!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{y^0}{0!} = \frac{1}{n!} \cdot \left(\frac{n!}{0! \cdot n!} \cdot x^0 y^n + \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} \cdot x^1 y^{n-1} + \ldots + \frac{n!}{n! \cdot 0!} \cdot x^n y^0 + \right) =$$
$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \underset{binomischeFormel}{=} \frac{1}{n!} (x+y)^n \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k = exp(x+y)$$ ■