Wiederholung

Sei M Menge.
Wenn M endlich: $\#M = Anzahl\ Elemente \in M$
Wenn M unendlich: $\#M = \infty$
Für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$

$$n! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}\ldots{\cdot}n \qquad 0! = 1$$

Binomialkoeffizient: Für $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = 1$$

0.0.1 Lemma

Für $0 < k < n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k)!} = \frac{k(n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

0.1 Geometrische Anordnung (Pascalsches Dreieck)

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\ \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\ \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \end{array}$$

Folge $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $0 \leq k \leq< n$

0.2 Satz:

Sei A endliche Menge. $\#A = n$

Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$

$P_k(A) := \{U \subseteq A | \#U = k\}$ (Menge aller k-elementigen Teilmengen von A)

Dann gilt $\#P_k(A) = \binom{n}{k}$

Beispiel:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $n = 4$ $k = 2$

2-elementige Teilmengen von A: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \rightarrow 6$ $\binom{4}{2} = 6$ ✓

Beweis:

Vorüberlegung: Sei $k = 0 \vee k = n$
$P_0(A) = 1 = \binom{n}{0}$ $\#P_n(A) = 1 = \binom{n}{n}$ ✓
Jetzt: Induktionsbeweis nach n

IA: $n = 0$ Dann $k = 0$ ✓
IS: $n \rightarrow n+1$Sei $\#A = n+1 \Rightarrow 0 \leq k \leq (n+1)$ Falls $k = 0 \vee k = n+1$
Sei also: $o < k < n+1$
Wähle $a \in A$
Sei $B = A \backslash \{a\}$
Dann $A = B \cup \{a\}, \#B = n$
Man kann die Wahl einer k-elementigen Teilmenge von A so strukturieren

1. Entscheiden, ob $a \in U \vee a \notin U$
2. a) Wenn $a \notin U$: Wähle k Elemente aus B
   b) Wenn $a \in U$: Wähle k-1 Elemente aus B

$$\Rightarrow \#P_k(A) = \#P_k(B) + \#P_{k-1}(B) \overset{IV}{=} \binom{n}{k} + \binom{e}{-1} \overset{1.11}{=} \binom{n+1}{k}$$

■

0.3 Satz (Binomische Formel)

Seien a, b Zahlen, $n \in \mathbb{N}$
Dann $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$

Beispiel:

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Beweis:

Schreibe $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n-Faktoren}$

Ausmultiplizieren

Halte Terme der Form $a^{n-k}b^k$ mit $0 \leq k \leq n$
Häufigkeit von $a^{n-k}b^k$ = Anzahl der Möglichkeiten aus n-Faktoren k mal b zu wählen.
Das ist $\binom{n}{k}$ (Satz 1.13)

Folgerung

Setze $a = b = 1$ $\quad a^{n-k}b^k = 1$
$(a+b)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$

Beispiel:

$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

0.4 Definition

Sei A endliche Menge
Eine Anordnung von A ist ein n-Tupel
$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$ mit $a \in A$ für alle i und $a_i \neq a_j$ wenn $i \neq j$

Beispiel:

Anordnung von $\{1,2,3\} = (1,2,3)(1,3,2)(2,1,3)(2,3,1)(3,1,2)(3,2,1) \rightarrow 6$

0.5 Satz

Sei A endliche Menge, $\#A = n \geq 1$
Dann ist die Anzahl der Anordnungen von A gleich $n!$

Beweis:

Induktion nach n IA: $n=1$ ✓
IS: $n \rightarrow n+1$ Sei $\#A = n+1$
Wahl einer Anordnung von A kann man so unterteilen:

1. Wähle 1 Element $a_1 \in A$ (n+1 Möglichkeiten)

2. Wähle Anordnungen von $A \backslash \{a_1\}$
   $\#(A\backslash\{a_1\}) = n \Rightarrow n!$ Möglichkeiten bei 2
   Insgesamt $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$

$\blacksquare$

Bemerkung:

(Zusammenhang zwischen Anordnung und Teilmengen)
Sei A endliche Menge, $\#A = n,\ 0 \leq k \leq n$
Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ Anordnung von A
$\rightsquigarrow$ Teilmenge $U := \{a_1, \ldots, a_n\}$
Dann $U \subseteq A,\ \#U = k \qquad U \in P_k(A)$
Jedes $U \in P_k(A)$ entsteht so, aber mehrfach:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Anordnungen von } U}}{k!} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Anordnungen von } A\backslash U}}{(n-k)!} - mal$$