Wiederholung

Eine Abbildung $f : x \rightarrow y$

- ist injektiv wenn gilt:
  für alle $a, b \in X$ mit $f(a) = f(b)$ ist $a = b$
- ist surjektiv wenn für jedes $y \in Y$ ein $a \in X$ existiert mit $f(a) = y$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ Teilmenge. Eine Funktion auf D ist eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

Monotone Funktionen

Bemerkung:

Eine Funktion $(a_n)_{n \geq 0}$ reeler Zahlen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \rightarrow \Re$ d.h. eine Funktion auf $\mathbb{N}_0$

0.1 Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt:

1. monoton wachsend wenn gilt:
   Für alle $a, b \in D$ mit $a < b$ ist immer $f(a) \leq f(b)$
2. streng monoton wachsend: $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
3. monoton fallend: $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
4. streng monoton fallend: $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

Bemerkung:

Jede streng monotone Funktion f ist injektiv

Beweis:

Zeige: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
Wenn $a \neq b$ dann $a < b$ oder $b < a$
Wenn f streng monoton wachsend: Folgt $f(a) < f(b)$ oder $f(b) < f(a)$ also $f(a) \neq f(b)$
Wenn f streng monoton fällt: es folgt $f(a) > f(b)$ oder $f(b) > f(a)$ also $f(a) \neq f(b)$ ■

0.2 Beispiel

1. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto x^k =: f(x)$ mit $k \geq 1$
   f ist streng monoton wachsend/steigend
2. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = [x]$
   h ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton.
   Monoton wachsend: $x < y \Rightarrow [x] < [y]$
   $x < y \not\Rightarrow [x] < [y]$
   z. B.: $1,2 < 1,3, [1,2] = 1 = [1,3]$
3. Exponentialfunktion
   $exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
   Ist streng monoton wachsend.

Beweis:

a) $exp(0) = 1 + \frac{0}{1!} + \frac{0}{2!} + ... = 1$

b) Sei $a > 0$
$exp(a) == 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a}{2!} + ... > 1$

c) Sei $a > 0 exp(-a) \cdot exp(a) = exp(-a + a) = exp(0) = 1$
$\Rightarrow exp(-a) = \frac{1}{exp(a)} \Rightarrow 0 < exp(a) < 1$
$exp(b) > 0$ für alle $b \in \mathbb{R}$

d) Sei $a > b$
$exp(a) = exp(a - b + b) = exp(a - b) \cdot exp(b) >$ exp(b) $\Rightarrow$ exp streng monoton wachsend ■

1 Stetigkeit

Idee: Eine Funktion ohne sprünge heißt stetig

1.1 Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

1. f heißt stetig in $x \in D$ wenn gilt:
   Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass für jedes $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y) < \varepsilon$
2. f heißt stetig wenn f in jedem $x \in D$ stetig ist

1.2 Beispiel

1. Die Funktion $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ ist stetig
2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist stetig.

   Beweis:

   Sei $x, y \in \mathbb{R} \quad y = x + k.$

   $$f(y) - f(x) = (x + h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

   Wähle jedenfalls $\delta \leq 1$. Wenn $|h| = |x - y| > \delta$ dann $|h| < 1$

   $$|f(y) - f(x)| = |2xh + h^2| \leq |2x| \cdot |h| + |h|^2 < |2x| \cdot |h| + |h| = (|2x| + 1) \cdot |h|$$

   Gegeben sei $\varepsilon > 0$
   Wähle $\delta = min\left\{1, \frac{\varepsilon}{|2x|+1}\right\}$
   Wenn $|x - y| < \delta$ dann

   $$|f(x) - f(y)| < (2|x|+1) \cdot |h| < (2|x|+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2|x|+1} = \varepsilon$$

   Also f stetig in x
3. $g := \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \{x\}$
   g ist stetig an $x \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Z}$

   Beweis g nicht stetig an $x \in \mathbb{Z}$::

   Zeige: es gibt ein $\varepsilon > 0$ so dass kein $\delta > 0$ existiert mit: $|x - y| > \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$
   z.B. $\varepsilon = 1$ Sei $\delta > 0$. $y = x - \frac{\delta}{2} \quad |x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$
   aber $g(y) = \{x - \frac{\delta}{2}\} = x - 1$ (weil $x \in \mathbb{Z}$)
   $|g(x) - g(y)| = |x - (x - 1)| = 1 \not< \varepsilon$ ■

1.3 Satz

Die Exponentialfunktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis:

Verwende nur:

- Funktionalgleichung: $exp(x+y) = exp(x) \cdot exp(y)$
- exp ist streng monoton wachsend
- $\exp(0) = 1$

Behauptung

Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $exp(\frac{1}{n}) < 1 + \epsilon$
Angenommen, $exp(\frac{1}{n}) \geq 1 + \epsilon$
Dann $exp(1) = \frac{1}{n} + ... \frac{1}{n}$ $= exp(\frac{1}{n}) + ... + exp(\frac{1}{n}) = exp(\frac{1}{n})^n$
$\geq (1+\epsilon)^n \geq 1 + n\epsilon$
$exp(1) \geq 1 + n\epsilon$
$n \leq \frac{exp(1)-1}{\epsilon}$
Das gilt nur für endliche viele $n \in \mathbb{N}$
$Rarr$ Beh.
Zeige: exp ist stetig an 0. Gegeben sei $\epsilon > 0, OE? \epsilon < 1$
Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $exp(\frac{1}{n}) < 1 + \epsilon$

$$Rarr exp(-\frac{1}{n}) = exp(\frac{1}{n})^{-1} < \frac{1}{1+\epsilon} = \frac{1-\epsilon}{(1+\epsilon)(1-\epsilon)} = \frac{1-\epsilon}{1-\epsilon^2} > 1 - \epsilon$$

Sei $\delta \frac{1}{n}$
Sei $y \in \mathbb{R}, |0-y| < \delta = \frac{1}{n}$
$|y| < \frac{1}{n}$ d.h.
$-\frac{1}{n} < y < \frac{1}{n}$
exp streng monoton wachsend.

$$Rarr 1 - \epsilon < exp(-\frac{1}{n}) < \exp(y) < exp(\frac{1}{n}) < 1 + \epsilon$$

$Rarr |exp(y) - exp(0)| < \epsilon$ Also exp stetig in 0
Zeige: exp ist eine stetig in $x \in \mathbb{R}$. Gegeben sei $\epsilon >$
Sei $y = x + h$, $|h| < \delta$ (δ noch zu wählen)

$$|exp(y) - exp(x)| = |exp(x+h) - exp(x)| = |exp(x) \cdot exp(h) - exp(x)| = exp(x) \cdot exo(h) - 1$$

$|exp(y) - exp(x)| < \epsilon$

$$\Leftrightarrow exp(x) \cdot |exp(h) - 1| < \epsilon \Leftrightarrow exp(h) - 1 < \frac{\epsilon}{exp(x)} = \epsilon'$$

Weil exp stetig in 0 ist gibt es ein $\delta > 0$ mit $|h| < \delta \Rightarrow |exp(h) - 1| < \frac{\epsilon}{exp(x)}$
$Rarr$ exp ist stetig in x ∎

1.4 Satz (Folgenstetigkeit)

Sei $D \subseteq \mathbb{R},\ x \in D,\ f : D \to \mathbb{R}$ Funktion f ist genau dann stetig in x wenn gilt:

- Für jede Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ mit $x_n \in D,\ x_n \to x$ für $n \to \infty$ gilt auch $f(x_n) \to f(x)$ für $n \to \infty$

1.5 Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R},\ f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$
Dann gilt:

- $f + g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x
- $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ stetig in x
- Wenn $g(x) \neq 0$ für alle $x' \in D$

Dann ist $\dfrac{1}{f} : D \to \mathbb{R}$ stetig in x.

Beweis mit Folgenstetigkeit:

Sei $x_n \to x$ für $n \to \infty$
mit $x_n \in D$
f, g stetig $Rarr f(x_n) \to f(x)$
$g(x_n) \to g(x)$
$\Rightarrow f(x_n) + g(x_n) \to f(x) + g(x) \quad f(x_n) \cdot g(x_n) \to f(x) \cdot g(x)$
Wenn also $f(x) \neq 0$
$f(x_n)^{-1} \to f(x)^{-1}$
$\Rightarrow f + g, f) \cdot g, \frac{1}{f}$ stetig in x ■