Analysis Vorlesung

Stefan Heid, Christopher Jordan

November 16, 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen

1.1 Definition:

1. Eine Menge ist eine Ansammlung verschiedener Objekte
2. Die Objekte in einer Menge heißen <u>Elemente</u>
   Notation: $a \in M$ *heißt a ist Element der Menge M*
   $a \notin M$ *heißt a ist kein Element der Menge M*
3. Sei M eine Menge. Eine Menge U heißt Teilmenge von M, von der jedes Element von U auch Element von M ist
   Notation: $U \subseteq M$ *heißt U ist Teilmenge von M*
   $U \nsubseteq M$ *heißt U ist keine Teilmenge von M*

1.2 Beispiele

1. Sei M die Menge aller Studierenden in L1
   W die Menge aller weiblichen Studierenden in L1
   F die Menge aller Frauen

   Dann gilt: W ⊆ M, W ⊆ F, M ⊈ F, F ⊈ M
2. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ G sei die Menge der geraden natürlichen Zahlen $G := \{n \in \mathbb{N}|$n ist gerade$\} = \{2m|m \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8 \ldots\}$ Es gilt G ⊆ $\mathbb{N}, \mathbb{N} \subseteq$ G
3. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$
4. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{a/b|a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
5. Die Menge ohne Element heißt die leere Menge Symbol: $\emptyset = \{\}$

<u>Bemerkung:</u>

1. Für jede Menge M gilt $\setminus \subseteq M$
2. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

1.3 Definition: Sei M eine Menge und U,V ⊆ M Teilmengen

1. Die Vereinbarung von U und V ist $U \cup V := \{x \in M \mid x \in U oder x \in V\}$
2. Der Durchschnitt von U und V ist $U \cap V := \{x \in M \mid x \in U oder x \in V\}$ U und V heißen disjunkt, wenn $U \cap V = \emptyset$
3. Die Differenzmenge von U und V ist $U \setminus V := \{x \in U \mid x \in V\}$
4. Das Komplement von U ist $U^C = M \setminus U = \{x \in M \mid x \notin U\}$ Bsp:
   Sei M = N
   $\{1, 3\} \cup \{3, 5\} = \{1, 3, 5\}$
   $\{1, 3\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$
   $\{1, 3\} \cap \{2, 4, 7\} = \emptyset \leftarrow$ disjunkt
   $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$
   $\{1, 3, 5\}^C = \{2, 4, 6, 7, 8, \ldots\}$

1.4 Satz (de Morjensche Regeln)

Sei M eine Menge, U,V $\subseteq$ M Teilmengen
Dann:

1. $(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$
2. $(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$

Beweis:

1. Sei x$\in M$
   Es gilt: x $\in (U \cap V)^C \Leftrightarrow x \notin U \cap V \Leftrightarrow x \notin$U oder x$\notin$V$\Leftrightarrow x \in U^C$ oder x$\in V^C \Leftrightarrow x \in U^C \cup V^C$
2. Sei x$\in M$
   Es gilt: x $\in (U \cup V)^C \Leftrightarrow x \notin U \cup V \Leftrightarrow x \notin$U und x$\notin$V$\Leftrightarrow x \in U^C$ und x$\in V^C \Leftrightarrow x \in U^C \cap V^C$

1.5 Prinzip der Vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage A(n) gegeben
Ziel: Beweisen, Dass A(n) für jedes $n \in \mathbb{N}$ mehr ist dafür reicht es zu zeigen

1. Induktionsanfang (IA): A(1) ist wahr
2. Induktionsschrit (IS): Wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ A(n) wahr ist, dann ist auch A(n+1) wahr

1.6 Satz:

Für jede natürliche Zahl n gilt: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
Probe:

n	1	2	3	4
1+2+3...+n	1	3	6	10
$\dfrac{n(n+1)}{2}$	1	3	6	10

Beweis des Satzes mit Induktion

Abkürzung: $S(n) := 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ Aussage: A(n): $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

1. Induktionsanfang (IA): n=1 $S(1) = 1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$ ok!
2. Induktionsschritt (IS): $n \rightarrow n+1$
   Annahme: A(n) gilt: $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   Zu zeigen: A(n+1) gilt: $S(n+1) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$
   $S(n+1) = S(n) + n + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$
   Das beendet den Beweis $\blacksquare$

Zur Vereinfachung der Notation:
Seien $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ Zahlen $n \in \mathbb{N}$
Setze: $\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Allgemeiner: Sei $l, m \in \mathbb{N}$, $l \leq m \leq n$
$\sum_{k=l}^{m} a_k = a_l + a_{l+1} + \ldots + a_m$

Aussage des Satzes:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>Kombinatorik</u> (mathematisches Zählen)

1.7 Definition:

Seien A, B Mengen. Das kartesische Produkt von A und B ist definiert als $A \times B := \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$
Die Elemente von $A \times B$ heißen geordnete Paare
Bsp.: $\{1,7\} \times \{2,3\} = \{(1,2),(1,3),(7,2),(7,3)\}$
Allgemeiner: Gegeben seien Mengen $A_1, \ldots, A_k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Das kartesische Produkt von $A_1, \ldots, A_k$ ist $A_1 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k)|a \in A, \text{für } i = 1, \ldots, k\}$
Elemente von $A_1 \times \ldots \times A_k$ heißen k-Tupel
Falls $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$, schreibe $\underbrace{A \times \ldots \times A}_{k-mal} = A^k$

1.8 Definition

Eine Menge A ist endlich, wenn A nur endlich viele Elemente hat. Dann bezeichnet $\#A = \{|A|\}$ die Anzahl der Elemente von A und somit dessen Kardinalität oder Mächtigkeit. Wenn A nicht endlich ist, so schreibe: $\#A = \infty$
Bsp.: $\#\emptyset = 0, \#\mathbb{N} = \infty, \#\{1,3,5\} = 3$

1.9 Bemerkung

1. Sei A endliche Menge. $U, V \subseteq A$ disjunkte Teilmengen
   Dann $\#(U \cup V) = \#U + \#V$

2. Seien $A_1, ..., A_k$ endliche Mengen $k \in \mathbb{N}$
   Dann: $\#(A_1 \times ... \times A_k) = (\#A_1)(\#A_2)...(\#A_k)$

1.10 Definition

1. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = \prod_{k=i}^{n} k$ Setze $0! = 1$

2. Für $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$ sei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-1)!} \leftarrow$ Binomialkoeffizient

n	0	1	2	3	4	5	6
n!	1	1	2	6	24	120	720

Beispiel:

$\binom{5}{2} := \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{20}{2} = 10$
Bemerkung: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

Wiederholung

Sei M Menge.
Wenn M endlich: $\#M = Anzahl\ Elemente \in M$
Wenn M unendlich: $\#M = \infty$
Für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \qquad 0! = 1$$

Binomialkoeffizient: Für $0 \le k \le n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = 1$$

1.10.1 Lemma

Für $0 < k < n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k)!} = \frac{k(n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

1.11 Geometrische Anordnung (Pascalsches Dreieck)

$$\begin{matrix} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{matrix}$$

Folge $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $0 \le k \le< n$

1.12 Satz:

Sei A endliche Menge. $\#A = n$

Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \le k \le n$

$P_k(A) := \{U \subseteq A | \#U = k\}$ (Menge aller k-elementigen Teilmengen von A)

Dann gilt $\#P_k(A) = \binom{n}{k}$

Beispiel:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $n = 4$ $k = 2$

2-elementige Teilmengen von A: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \rightarrow 6$ $\quad \binom{4}{2} = 6$ ✓

Beweis:

Vorüberlegung: Sei $k = 0 \vee k = n$
$P_0(A) = 1 = \binom{n}{0}$ $\#P_n(A) = 1 = \binom{n}{n}$ ✓
Jetzt: Induktionsbeweis nach n

IA: $n = 0$ Dann $k = 0$ ✓
IS: $n \rightarrow n + 1$Sei $\#A = n + 1 \Rightarrow 0 \le k \le (n + 1)$ Falls $k = 0 \vee k = n + 1$
Sei also: $o < k < n + 1$
Wähle $a \in A$
Sei $B = A \backslash \{a\}$
Dann $A = B \cup \{a\}, \#B = n$
Man kann die Wahl einer k-elementigen Teilmenge von A so strukturieren

1. Entscheiden, ob $a \in U \vee a \notin U$

2. a) Wenn $a \notin U$: Wähle k Elemente aus B
   b) Wenn $a \in U$: Wähle k-1 Elemente aus B

$$\Rightarrow \#P_k(A) = \#P_k(B) + \#P_{k-1}(B) \overset{IV}{=} \binom{n}{k} + \binom{e}{-1} \overset{1.11}{=} \binom{n+1}{k}$$

■

1.13 Satz (Binomische Formel)

Seien a, b Zahlen, $n \in \mathbb{N}$
Dann $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$

Beispiel:

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Beweis:

Schreibe $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n-Faktoren}$

Ausmultiplizieren

Halte Terme der Form $a^{n-k}b^k$ mit $0 \leq k \leq n$
Häufigkeit von $a^{n-k}b^k$ = Anzahl der Möglichkeiten aus n-Faktoren k mal b zu wählen.
Das ist $\binom{n}{k}$ (Satz 1.13)

Folgerung

Setze $a = b = 1$ $\quad a^{n-k}b^k = 1$
$(a+b)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$

Beispiel:

$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

1.14 Definition

Sei A endliche Menge
Eine Anordnung von A ist ein n-Tupel
$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$ mit $a \in A$ für alle i und $a_i \neq a_j$ wenn $i \neq j$

Beispiel:

Anordnung von $\{1,2,3\} = (1,2,3)(1,3,2)(2,1,3)(2,3,1)(3,1,2)(3,2,1) \rightarrow 6$

1.15 Satz

Sei A endliche Menge, $\#A = n \geq 1$
Dann ist die Anzahl der Anordnungen von A gleich $n!$

Beweis:

Induktion nach n IA: $n=1$ ✓
IS: $n \rightarrow n+1$ Sei $\#A = n+1$
Wahl einer Anordnung von A kann man so unterteilen:

1. Wähle 1 Element $a_1 \in A$ (n+1 Möglichkeiten)
2. Wähle Anordnungen von $A \backslash \{a_1\}$
   $\#(A \backslash \{a_1\}) = n \Rightarrow n!$ Möglichkeiten bei 2
   Insgesamt $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$

■

Bemerkung:

(Zusammenhang zwischen Anordnung und Teilmengen)
Sei A endliche Menge, $\#A = n,\ 0 \leq k \leq n$
Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ Anordnung von A
$\rightsquigarrow$ Teilmenge $U := \{a_1, \ldots, a_n\}$
Dann $U \subseteq A,\ \#U = k \qquad U \in P_k(A)$
Jedes $U \in P_k(A)$ entsteht so, aber mehrfach:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ Anordnungen\ von\ U}}{k!} \quad \cdot \quad \underset{\substack{\uparrow \\ Anordnungen\ von\ A \backslash U}}{(n-k)!} \quad -mal$$

$\#$ Anordnungen von $A = n! = \#P_k(A) \cdot k!\,(n-k)! \Rightarrow \#P_k(A) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!)} = \binom{n}{k}$

2 Die reellen Zahlen

Was sind die reellen Zahlen?
Präzise Konstruktion ist umfangreich, daher Axiomatischer Zugang
Beschreibung der reellen Zahlen durch ihre Eigenschaften (Axiome):

1. Grundrechenarten $\rightarrow$ Körper
2. Ungleichungen $\rightarrow$ angeordneter Körper
3. Lückenlosigkeit $\rightarrow$ Vollständigkeit

Körper

2.1 Definition:

Ein Körper ist eine Menge K mit 2 Rechenoperationen:
Addition $(+)$ und Multiplikation $(\cdot)$, so dass folgende 9 Eigenschaften erfüllt sind:

Addition

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ für alle $a, b, c \in K$ (Assotiativgesetz)
2. $a+b = b+a$ für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
3. Es gibt ein $0 \in K$ so dass $0+a = a$
4. Für jedes $a \in K$ gibt es ein $b \in K$ mit $a+b = 0$

   ### Bemerkung:

   $0 \in K$ ist eindeutig

   ### Beweis:

   Wenn $0' \in K$ mit $0'+a = a$, dann $0 = 0'+0 = 0+0' = 0'$ ■

   ### Bemerkung:

   Das b in 4. ist auch eindeutig.
   Notation: $b = -a$ *(Negatives von a)*

   ### Beweis:

   Angenommen $b'+a = 0$
   $b = b+0 = b+(a+b') = (b+a)+b' = 0+b' = b'$ ■

Multiplikation

5. $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c \qquad \forall a, b, c \in K$
6. $a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \in K$
7. Es gibt ein $1 \in K$ mit $1 \neq 0$, so dass $1 \cdot a = a \qquad \forall a \in K$
8. Für alle $a \in K,\ a \neq 0$, gibt es ein $b \in K$ mit $a \cdot b = 1$

   ### Bemerkung:

   $1 \in K$ ist eindeutig, b in 8. ist eindeutig
   Beziehung $b = a^{-1}$

Beweis:

Wie eben ■

9. $a(a+c) = a{\cdot}b + a{\cdot}c \qquad \forall a,b,c \in K$ (Distributivgesetz)

Weitere Bezeichnungen:
$a - b := a + (-b)$, $\frac{a}{b} = a{\cdot}b^{-1}$, wenn $b{\neq}0$

Bemerkung:

Die üblichen Rechenregeln folgen aus diesen Axiomen 1.-9.

Beispiel:

$$-(-a) = a,\ a(b-c) = a{\cdot}b + a{\cdot}c,\ a(-b) = -(a{\cdot}b)$$

2.2 Beispiele

$\mathbb{Q}$ist ein Körper
$\mathbb{Z}$ist kein Körper (8. nicht erfüllt)

2.3 Beispiel

$\mathbb{F}_z = \{0,1\}$
Definitionen von $+$ und $\cdot$:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$1 + 1 = 0$

Übung: Prüfe alle Körperaxiome

Bemerkung:

Sei K endlicher Körper
Dann gilt $\#K = p^r$ wobei p Primzahl, $r \in \mathbb{N}$
Für jede solche Zahl $q = p^r$ gibt es genau einen Körper

Wiederholung

Ein Körper K ist eine Menge mit + und ·, sodass gewisse Eigenschaften erfüllt sind:

Beispiel:

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$
$F_1 = \{0, 1\} \qquad 1 + 1 = 0$
Notation: Setze $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-Faktoren}$

$$\left.\begin{array}{lcl} a^0 & = & 1 \\ a^{-n} & = & (a^{-1})^n \end{array}\right\} \text{wenn } a \neq 0$$

Daraus folgt a^n ist definiert, wenn $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$
Regeln der Potenzgleichung:
$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$
$a^{n \cdot m} = (a^n)^m$

Beweis:

Übung

2.4 Definition

Ein angeordneter Körper ist ein Körper K für dessen Elemente eine "Kleiner als Beziehung" < definiert ist, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Für alle $a, b \in K$ gilt genau eine von drei Notationen:
   $a < b oder a = b oder a > b$
2. Für alle $a, b, c \in K$ gilt wenn $a < b$ und $b < c$ dann $a < c$
   (Transitivität)
3. Für alle $a, b, c \in K$ gilt wenn $a < b$ dann $a + c < b + c$
4. für $a, b, c \in K$ gilt, wenn $a < b$ und $c \neq 0$ dann $a \cdot c < b \cdot c$

Weitere Beziehungen:
$a > b$ heißt $b < a$

1. Wenn $a < 0$ dann $-a > 0$:
   $a < 0 \Rightarrow a + (-a) > 0 + (-a) \Rightarrow 0 > -a$
2. Für jedes $a \in K$ gilt wenn $a \neq 0$, dann $a^2 > 0$
   (a) $a > 0$
       $a \cdot a > 0 \cdot a$
       $a^2 > 0$ ■
   (b) $a < 0$
       $-a > 0$
       $a^2 = (-a)^2 > 0$ ■
3. $1 > 0$ denn $1 = 1^2$

Sei K ein Angeordneter Körper:
$0 < 1 \Rightarrow 1 < 1 + 1 \Rightarrow 1 + 1 < 1 + 1 + 1$ etc.
$0 < 1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1$ etc. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $underbracen := 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$

Wiederholung

Angeordneter Körper:
Menge K mit $+, \cdot, <$
so dass gewisse Eigenschaften erfüllt sind

Beispiel:

$\mathbb{Q}$ sind ein angeordneter Körper
Sei K angeordneter Körper, $M \subseteq K$ Teilmenge $a \in K$ ist obere Schranke von M, wenn $U \subseteq a$, d.h.: $x \leq a \quad ?\, x \in M$
$a \in K$ ist kleinste obere Schranke, wenn

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ M \leq a \\ 2.\ \text{Wenn } b < a, \text{ dann } \underline{\text{nicht}}\ M \leq b \end{array}\right\} \text{Bezeichnung } a = sup(M)$$

Beispiel:

$K = \mathbb{Q} \qquad M = \{-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\} = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, ?\}$

Behauptung

$sup(M) = 0$

Beweis:

1. Zeige: $M \leq 0$, d.h.: $\frac{1}{n} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ✓
2. Wenn $b = \mathbb{Q},\ b < 0$, dann nicht $M \leq b$

Schreibe $b = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$
$b < 0$ heißt $m < 0,\ m \leq -1$
$b = \frac{m}{n} \leq \frac{-1}{n} \leq \frac{-1}{n+1} \in M$
$\Rightarrow M \not\leq b$ (nicht $M \leq b$) ■

Vollständigkeit

2.5 Definition:

Ein angeordneter Körper K heißt Dedekind-vollständig, wenn jede nach oben beschränkte Teilmenge von K eine kleinste obere Schranke hat.

2.6 Satz:

Es gibt genau einen Dedekind-vollständigen, angeordneten Körper K
Dieser heißt Körper der reellen Zahlen
Bezeichnung: $\mathbb{R}$
(Beweis ausgelassen)

2.7 Satz:

Die Teilmenge $\mathbb{N}$ von $\mathbb{R}$ ist unbeschränkt

Beweis:

(verwende nur die Axiome)
Indirekter Beweis: Angenommen, $\mathbb{N}$ ist beschränkt
Vollständigkeit:

$\mathbb{N}$ hat eine kleinste obere Schranke $a \in \mathbb{R}$
Es gilt $a-1 < a \Rightarrow a-1$ ist kleinste obere Schranke von $\mathbb{N}$ $n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n+1 \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n \leq a-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Widerspruch!
Also Annahme falsch, d.h. $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt ■

beschränkt = nach oben beschränkt und nach unten beschränkt
unbeschränkt = nicht nach oben beschränkt oder nicht nach unten beschränkt

2.8 Folgerung (Prinzip des Archimedes)

Seien $x, y \in \mathbb{R},\ x > 0$, Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$
SKIZZE

Beweis:

$nx > y \Leftrightarrow n > \frac{y}{x}$ (weil $x > 0$)
$\mathbb{N}$ unbeschränkt und nicht nach oben beschränkt $\Rightarrow \frac{y}{x}$ ist keine obere Schranke von $\mathbb{N}$
$\Rightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{y}{x}$ ■

2.9 Folgerung

Sei $x \in \mathbb{R},\ x > 0$ Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$
SKIZZE

Beweis:

$\frac{1}{n} < x \Leftrightarrow 1 < n \cdot x \Leftrightarrow \frac{1}{x} < n$ (weil x positiv)
$\frac{1}{x}$ keine obere Schranke von $\mathbb{N} \Rightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{x} < n$ ■

2.10 Satz:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$
Dann gibt es $a \in \mathbb{Q}$ mit $x < a < y$, man sagt $\mathbb{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$
SKIZZE

Beweis:

$y - x > 0$ Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < y - x$
Ansatz: $a = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$
Sei $M := \{m \in \mathbb{Z} | x < \frac{m}{n}\} = \{m \in \mathbb{Z} | nx < m\}$
M ist nach unten beschränkt und nicht leer (wegen Archimedes)
M hat Minimum
Sei $m = min(M)$
$m \in M \Rightarrow x < \frac{m}{n}$
$m - 1 \notin M \Rightarrow x \geq \frac{m-1}{n}$
$y - \frac{m}{n} = y - x + x - \frac{m}{n} > \frac{1}{n} + x - \frac{m}{n} = x - \frac{m-1}{n} \geq 0$
$y > \frac{m}{n}$ ■

Wurzeln

2.11 Satz:

Es gibt kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$

Beweis:

Angenommen $a \frac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ a^2 = 2,\ m, n \in \mathbb{N}$
Kürze den Bruch $\Rightarrow \frac{m}{n}$ teilerfremd

$$a^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ gerade } \Rightarrow m \text{ gerade } \Rightarrow m = 2q,\ q \in \mathbb{N}$$

$$(2q)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4q^2 = 2n^2 \Rightarrow 2q^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ gerade } \Rightarrow n \text{ gerade}$$

Widerspruch zur Annahme m, n teilerfremd ■
SKIZZE WURZEL 2 $\Rightarrow\sqrt{2}$ sollte existieren

Bemerkung:

Wenn $n \in \mathbb{N}$, keine Quadratzahl, dann gibt es kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = n$ (ähnlicher Beweis)

2.12 Satz:

Sei $x \in \mathbb{R}, x \geq 0, n \in \mathbb{N}$
Dann gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}, x \geq 0$ mit $y^n = x$
Bezeichnung: $x = \sqrt[n]{x}$

Beweis:

später
Ansatz: $sup\{a \in \mathbb{Q} | a^n \leq x\} =: y$ (sup existiert weil $\mathbb{R}$ Dedekind-vollständig)

2.13 Definition:

Sei $x \in \mathbb{R},\ x > 0 \qquad \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$
$n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \qquad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Potenzrechnung:

$$x^{(a+b)} = x^a \cdot x^b,\ x^{a \cdot b} = (x^a)^b$$

für $x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ a, b \in \mathbb{Q}$

Bemerkung:

Später wir definiert: x^a für $x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ a \in \mathbb{R}$

3 Folgen und Reihen reeller Zahlen

Wiederholung

Eine Folge reeller Zahlen (a_n) konvergiert uneigentlich gegen ∞ wenn gilt:
Für jedes $C \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

(a_n) konvergiert uneigentlich gegen $-\infty$ wenn $(-a_n)$ gegen ∞ konvergiert.
Notation: $a_n \to \infty$ *für* $n \to \infty$
$a_n \to -\infty$ *für* $n \to \infty$

Beispiel:

$a_n = n^2 \to \infty$
$a_n = -n^2 \to -\infty$
$a_n = (-1)^n \cdot n^2$
$(0, -1, 4, -9)$ konvergiert weder gegen ∞ noch gegen $-\infty$

Rechenregeln:

Angenommen $(a_n), (b_n)$ sind konvergente Folgen.

1. $(a_n + b_n) \to a + b$
2. $(a_n \cdot b_n) \to ab$
3. $\dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$
4. $c \cdot a_n \to c \cdot a$
5. $a_n - b_n \to a - b$
6. $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$

Beweis 6:

$3) \Rightarrow \dfrac{1}{b_n} \to \dfrac{1}{b}$
$\dfrac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \dfrac{1}{b}$
$2) \Rightarrow a_n \cdot displaystyle\frac{1}{b_n} \to a \cdot \dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b}$ *q.e.d.*

Beispiel:

n	0	1	2	3	10	100
a_n	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{19}$	$\frac{90}{201}$	$\frac{9900}{20001}$

Vermutung: $a_n \to \dfrac{1}{2}$ für $n \to \infty$

Rechenregel 6 anwenden:

1. Versuch:
   $a_n = \frac{b_n}{c_n}$

   $b_n = n^2 - n; c_n = 2n^2 + 1$
   $(b_n) und (c_n)$ sind divergend. Schlecht.

2. Versuch:
   $$\frac{n^2 - n}{2n^2 + 1} = \frac{n^2(1 - \dfrac{1}{n})}{n^2(2 + \dfrac{1}{n^2}} \text{ für } n \geq 1$$
   $$= \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{b_n}{c_n} \text{ mit } b_n := 1 - \frac{1}{n}; c_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$
   $\dfrac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \to 1 - 0 = 1 \text{ für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 + 0 = 2 \text{ für } n \to \infty$$

$\Rightarrow a_n \to \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$

3.10 Satz

Seien $a_n \to a$, $b_n \to b$ zwei konvergente Folgen reeler Zahlen.
wenn $a_n \leq b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ dann ist $a \leq b$.

Beweis:

Angenommen: $a > b$

Wähle $\epsilon := \dfrac{a-b}{2} > 0$

Es gibt $N \in \mathbb{N}$ so dass: $\left.\begin{array}{l} | a_n - a | < \epsilon \\ | b_n - b | < \epsilon \end{array}\right\}$ für $n \geq N$

$\Rightarrow a_n > a - \epsilon$

$= a - \frac{a-b}{2} = \dfrac{a+b}{2} = b + \dfrac{a-b}{2}$

$= b + \epsilon > b_n \Rightarrow a_n > b_n$ für $n \geq \mathbb{N}$
Widerspruch zur Annahme.
$a_n \leq b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ *q.e.d.*

3.11 Definition: Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeler Zahlen.
Bilde eine Folge:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ \vdots s_n &= a_0 + a_1 + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \end{aligned}$$

Die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ heißt Reihe mit den Gliedern a_n.
s_n heißen die <u>Partialsummen</u> der Reihe.
Bezeichnung:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ oder $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ...$
Wenn $s_n \to s \in \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ dann schreiben wir:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = s$
Summe der Reihe.

<u>Achtung:</u> Symbol $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ hat <u>zwei</u> Bedeutungen:

1. die Folge (s_n)
   oder

2. deren Grenzwert

Beispiel:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + ...$
   ist die Folge $(1, 2, 3, 4, ...) = (n+1)_{n \in \mathbb{N}_0}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} k = 0 + 1 + 2 + 3 + ...$
   ist die Folge $(1, 3, 6, 10, ...) = (\frac{n(n-1)}{2})_{n \in \mathbb{N}}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ...$
   ist die Folge $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$

Vorüberlegung:
$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
$s_n := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$
$= 1 - \frac{1}{n+1}$
Teleskopsumme

$\frac{1}{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$

Summe der Reihe:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$ *q.e.d.*

Bemerkung:

Jede Folge kann man auch als Reihe Schreiben. (Differenzen bilden)
z.B.: die Folge der Primzahlen:
$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19)$
ist die Reihe:
$(2 + 1 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + ...)$
Goldbachsche Vermutung: in dieser Reihe kommt die Zahl 2 unendlich oft vor.

3.12 Satz, Die geometrische Reihe

Sei $x \in \mathbb{R}$
a) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$ wenn $\mid x \mid < 1$
b) $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ divergiert wenn $\mid x \mid \geq 1$

a wenn $|x| < 1$
  dann folgt $\sum k = 0 \infty a_k = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \cdot x^n) = \frac{1}{1-x}$

b wenn $|x| > 1$
  dann (x^n) divergent $\Rightarrow (\frac{x}{1-x} \cdot x^n)$ divergent
  denn $\frac{x}{1-x} \neq 0$
  $\Rightarrow (\frac{?}{?})$

Beweis:

$x = 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1+1+1+...)$ divergiert, ok
Sei nun $x \neq$
Bekannt aus der Übung: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 ... + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \cdot x^n$
Potenzenwachstum
$x^n \to 0$ für $n \to \infty$ wenn $|x| < 1$
(x^n) divergiert, wenn $(|x| \geq 1$ und $x \neq 1)$

3.13 Satz

Wenn die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kovergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Beweis:

Gegeben sei $\epsilon > 0$
Sei $a = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty}(s_n)$ mit $s_n = a_0 + ... + a_n$
Es gibt $N\ in \mathbb{N}$ mit $|s_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N$

$$\begin{aligned} |a_n| &= |s_n - s_{n-1}| \\ &= |s_n - a + a - s_{n-1}| \\ &\leq |s_n - a| + |a - s_{n-1}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

für $n \geq N + 1$
$\Rightarrow a_n \to 0$ für $n \to \infty$

3.14 Satz, die harmonische Reihe

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ divergiert

Beweisidee:

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... \\ &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... \\ &1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + ... \\ &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = \infty \end{aligned}$$