

1 Mengen

1.1 Definition:

1. Eine Menge ist eine Ansammlung verschiedener Objekte
2. Die Objekte in einer Menge heißen Elemente
Notation: $a \in M$ heißt a ist Element der Menge M
 $a \notin M$ heißt a ist kein Element der Menge M
3. Sei M eine Menge. Eine Menge U heißt Teilmenge von M , von der jedes Element von U auch Element von M ist
Notation: $U \subseteq M$ heißt U ist Teilmenge von M
 $U \not\subseteq M$ heißt U ist keine Teilmenge von M

1.2 Beispiele

1. Sei M die Menge aller Studierenden in L1
 W die Menge aller weiblichen Studierenden in L1
 F die Menge aller Frauen
Dann gilt: $W \subseteq M$, $W \subseteq F$, $M \not\subseteq F$, $F \not\subseteq M$
2. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ G sei die Menge der geraden natürlichen Zahlen $G := \{n \in \mathbb{N} | n \text{ ist gerade}\} = \{2m | m \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ Es gilt $G \subseteq \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \not\subseteq G$
3. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$
4. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{a/b | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
5. Die Menge ohne Element heißt die leere Menge Symbol: $\emptyset = \{\}$

Bemerkung:

1. Für jede Menge M gilt $\emptyset \subseteq M$
2. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

1.3 Definition: Sei M eine Menge und $U, V \subseteq M$ Teilmengen

1. Die Vereinigung von U und V ist $U \cup V := \{x \in M | x \in U \text{ oder } x \in V\}$
2. Der Durchschnitt von U und V ist $U \cap V := \{x \in M | x \in U \text{ und } x \in V\}$ U und V heißen disjunkt, wenn $U \cap V = \emptyset$
3. Die Differenzmenge von U und V ist $U \setminus V := \{x \in U | x \notin V\}$
4. Das Komplement von U ist $U^C = M \setminus U = \{x \in M | x \notin U\}$ Bsp:
 $\{1, 3\} \cup \{3, 5\} = \{1, 3, 5\}$
 $\{1, 3\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$
 $\{1, 3\} \cap \{2, 4, 7\} = \emptyset \leftarrow \text{disjunkt}$
 $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$
 $\{1, 3, 5\}^C = \{2, 4, 6, 7, 8, \dots\}$

1.4 Satz (de Morgensche Regeln)

Sei M eine Menge, $U, V \subseteq M$ Teilmengen

Dann:

$$1. (U \cap V)^C = U^C \cup V^C$$

$$2. (U \cup V)^C = U^C \cap V^C$$

Beweis:

1. Sei $x \in M$

Es gilt: $x \in (U \cap V)^C \Leftrightarrow x \notin U \cap V \Leftrightarrow x \notin U \text{ oder } x \notin V \Leftrightarrow x \in U^C \text{ oder } x \in V^C \Leftrightarrow x \in U^C \cup V^C$

2. Sei $x \in M$

Es gilt: $x \in (U \cup V)^C \Leftrightarrow x \notin U \cup V \Leftrightarrow x \notin U \text{ und } x \notin V \Leftrightarrow x \in U^C \text{ und } x \in V^C \Leftrightarrow x \in U^C \cap V^C$

1.5 Prinzip der Vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben

Ziel: Beweisen, dass $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist dafür reicht es zu zeigen

1. Induktionsanfang (IA): $A(1)$ ist wahr

2. Induktionsschritt (IS): Wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr

1.6 Satz:

Für jede natürliche Zahl n gilt: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Probe:

n	1	2	3	4
1+2+3...+n	1	3	6	10
$\frac{n(n+1)}{2}$	1	3	6	10

Beweis des Satzes mit Induktion

Abkürzung: $S(n) := 1 + 2 + 3 + \dots + n$ Aussage: $A(n): S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

1. Induktionsanfang (IA): $n=1$ $S(1) = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$

ok!

2. Induktionsschritt (IS): $n \rightarrow n+1$

Annahme: $A(n)$ gilt: $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Zu zeigen: $A(n+1)$ gilt: $S(n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$

$$S(n+1) = S(n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$

Das beendet den Beweis

■

Zur Vereinfachung der Notation:

Seien $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ Zahlen $n \in \mathbb{N}$

Setze: $\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Allgemeiner: Sei $l, m \in \mathbb{N}, l \leq m \leq n$

$$\sum_{k=l}^m a_k = a_l + a_{l+1} + \dots + a_m$$

Aussage des Satzes:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Kombinatorik (mathematisches Zählen)

1.7 Definition:

Seien A, B Mengen. Das kartesische Produkt von A und B ist definiert als $A \times B := \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

Die Elemente von $A \times B$ heißen geordnete Paare

Bsp.: $\{1, 7\} \times \{2, 3\} = \{(1, 2), (1, 3), (7, 2), (7, 3)\}$

Allgemeiner: Gegeben seien Mengen A_1, \dots, A_k mit $k \in \mathbb{N}$. Das kartesische Produkt von A_1, \dots, A_k ist $A_1 \times \dots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k) | a_i \in A_i, \text{für } i = 1, \dots, k\}$

Elemente von $A_1 \times \dots \times A_k$ heißen k -Tupel

Falls $A_1 = A_2 = \dots = A_k = A$, schreibe $\underbrace{A \times \dots \times A}_{k\text{-mal}} = A^k$

1.8 Definition

Eine Menge A ist endlich, wenn A nur endlich viele Elemente hat. Dann bezeichnet $\#A = \{|A|\}$ die Anzahl der Elemente von A und somit dessen Kardinalität oder Mächtigkeit. Wenn A nicht endlich ist, so schreibe: $\#A = \infty$

Bsp.: $\#\emptyset = 0, \#\mathbb{N} = \infty, \#\{1, 3, 5\} = 3$

1.9 Bemerkung

1. Sei A endliche Menge. $U, V \subseteq A$ disjunkte Teilmengen

Dann $\#(U \cup V) = \#U + \#V$

2. Seien A_1, \dots, A_k endliche Mengen $k \in \mathbb{N}$

Dann: $\#(A_1 \times \dots \times A_k) = (\#A_1)(\#A_2)\dots(\#A_k)$

1.10 Definition

1. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k$ Setze $0! = 1$

2. Für $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$ sei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \leftarrow$ Binomialkoeffizient

n	0	1	2	3	4	5	6
$n!$	1	1	2	6	24	120	720

Beispiel:

$$\binom{5}{2} := \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

Bemerkung: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

Wiederholung

Angeordneter Körper:

Menge K mit $+, \cdot, <$

so dass gewisse Eigenschaften erfüllt sind

Beispiel:

\mathbb{Q} sind ein angeordneter Körper

Sei K angeordneter Körper, $M \subseteq K$ Teilmenge $a \in K$ ist obere Schranke von M , wenn $U \subseteq a$, d.h.:

$x \leq a \quad \forall x \in M$

$a \in K$ ist kleinste obere Schranke, wenn

1. $M \leq a$
 2. Wenn $b < a$, dann nicht $M \leq b$
- } Bezeichnung $a = \sup(M)$

Beispiel:

$$K = \mathbb{Q} \quad M = \left\{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots \right\}$$

Behauptung

$$\sup(M) = 0$$

Beweis:

1. Zeige: $M \leq 0$, d.h.: $\frac{1}{n} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$
2. Wenn $b = \mathbb{Q}$, $b < 0$, dann nicht $M \leq b$

Schreibe $b = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$b < 0$ heißt $m < 0$, $m \leq -1$

$$b = \frac{m}{n} \leq \frac{-1}{n} \leq \frac{-1}{n+1} \in M$$

$\Rightarrow M \not\leq b$ (nicht $M \leq b$)

✓

■