

Wiederholung

Sei M Menge.

Wenn M endlich: $\#M = \text{Anzahl Elemente} \in M$

Wenn M unendlich: $\#M = \infty$

Für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \quad 0! = 1$$

Binomialkoeffizient: Für $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = 1$$

0.0.1 Lemma

Für $0 < k < n$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{k}$$

Beweis:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k)!} = \frac{k(n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!}$$

0.1 Geometrische Anordnung (Pascalsches Dreieck)

$$\begin{array}{ccccccc} & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & \binom{1}{0} \binom{1}{1} & & & & \\ & & \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} & & & & \\ & & \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} & & & & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \ 1 \\ & & & & & & 1 \ 2 \ 1 \\ & & & & & & 1 \ 3 \ 3 \ 1 \end{array}$$

Folge $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $0 \leq k \leq n$

0.2 Satz:

Sei A endliche Menge. $\#A = n$

Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$

$P_k(A) := \{U \subseteq A \mid \#U = k\}$ (Menge aller k -elementigen Teilmengen von A)

Dann gilt $\#P_k(A) = \binom{n}{k}$

Beispiel:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $n = 4$ $k = 2$

2-elementige Teilmengen von A : $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \rightarrow 6 \quad \binom{4}{2} = 6$

Beweis:

Vorüberlegung: Sei $k = 0 \vee k = n$

$P_0(A) = 1 = \binom{n}{0}$ $\#P_n(A) = 1 = \binom{n}{n}$

Jetzt: Induktionsbeweis nach n

IA: $n = 0$ Dann $k = 0$

IS: $n \rightarrow n+1$ Sei $\#A = n+1 \Rightarrow 0 \leq k \leq (n+1)$ Falls $k = 0 \vee k = n+1$

Sei also: $0 < k < n+1$

Wähle $a \in A$

Sei $B = A \setminus \{a\}$

Dann $A = B \cup \{a\}$, $\#B = n$

Man kann die Wahl einer k -elementigen Teilmenge von A so strukturieren

1. Entscheiden, ob $a \in U \vee a \notin U$
2. a) Wenn $a \notin U$: Wähle k Elemente aus B
 b) Wenn $a \in U$: Wähle $k-1$ Elemente aus B

$$\Rightarrow \#P_k(A) = \#P_k(B) + \#P_{k-1}(B) \stackrel{IV}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \stackrel{1.11}{=} \binom{n+1}{k}$$



0.3 Satz (Binomische Formel)

Seien a, b Zahlen, $n \in \mathbb{N}$

Dann $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$

Beispiel:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Beweis:

Schreibe $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n\text{-Faktoren}}$

Ausmultiplizieren

Halte Terme der Form $a^{n-k}b^k$ mit $0 \leq k \leq n$

Häufigkeit von $a^{n-k}b^k$ = Anzahl der Möglichkeiten aus n -Faktoren k mal b zu wählen.

Das ist $\binom{n}{k}$ (Satz 1.13)

Folgerung

Setze $a=b=1$ $a^{n-k}b^k = 1$

$$(a+b)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

Beispiel:

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

0.4 Definition

Sei A endliche Menge

Eine Anordnung von A ist ein n -Tupel

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$ mit $a_i \neq a_j$ wenn $i \neq j$

Beispiel:

Anordnung von $\{1, 2, 3\} = (1, 2, 3)(1, 3, 2)(2, 1, 3)(2, 3, 1)(3, 1, 2)(3, 2, 1) \rightarrow 6$

0.5 Satz

Sei A endliche Menge, $\#A = n \geq 1$

Dann ist die Anzahl der Anordnungen von A gleich $n!$

Beweis:

Induktion nach n IA:

IS: $n \rightarrow n+1$ Sei $\#A = n+1$

Wahl einer Anordnung von A kann man so unterteilen:

1. Wähle 1 Element $a_1 \in A$ ($n+1$ Möglichkeiten)



2. Wähle Anordnungen von $A \setminus \{a_1\}$
 $\#(A \setminus \{a_1\}) = n \Rightarrow n!$ Möglichkeiten bei 2
 Insgesamt $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$



Bemerkung:

(Zusammenhang zwischen Anordnung und Teilmengen)

Sei A endliche Menge, $\#A = n$, $0 \leq k \leq n$

Sei (a_1, \dots, a_n) Anordnung von A

\rightsquigarrow Teilmenge $U := \{a_1, \dots, a_n\}$

Dann $U \subseteq A$, $\#U = k$ $U \in P_k(A)$

Jedes $U \in P_k(A)$ entsteht so, aber mehrfach:

$$\begin{array}{ccc} k! & \cdot & (n-k)! \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Anordnungen von } U & & \text{Anordnungen von } A \setminus U \end{array} \quad \text{---mal}$$

$$\# \text{ Anordnungen von } A = n! = \#P_k(A) \cdot k! \cdot (n-k)! \Rightarrow \#P_k(A) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

1 Die reellen Zahlen

Was sind die reellen Zahlen?

Präzise Konstruktion ist umfangreich, daher Axiomatischer Zugang
Beschreibung der reellen Zahlen durch ihre Eigenschaften (Axiome):

1. Grundrechenarten \rightarrow Körper
2. Ungleichungen \rightarrow angeordneter Körper
3. Lückenlosigkeit \rightarrow Vollständigkeit

Körper

1.1 Definition:

Ein Körper ist eine Menge K mit 2 Rechenoperationen:

Addition (+) und Multiplikation (\cdot), so dass folgende 9 Eigenschaften erfüllt sind:

Addition

1. $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in K$ (Assotiativgesetz)
2. $a + b = b + a$ für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
3. Es gibt ein $0 \in K$ so dass $0 + a = a$
4. Für jedes $a \in K$ gibt es ein $b \in K$ mit $a + b = 0$

Bemerkung:

$0 \in K$ ist eindeutig

Beweis:

Wenn $0' \in K$ mit $0' + a = a$, dann $0 = 0' + 0 = 0 + 0' = 0'$ ■

Bemerkung:

Das b in 4. ist auch eindeutig.

Notation: $b = -a$ (Negatives von a)

Beweis:

Angenommen $b' + a = 0$

$$b = b + 0 = b + (a + b') = (b + a) + b' = 0 + b' = b'$$
 ■

Multiplikation

5. $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c \quad \forall$