Analysis Vorlesung

Stefan Heid, Christopher Jordan

November 13, 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen

1.1 Definition

1. Eine Menge ist eine Ansammlung verschiedener Objekte
2. Die Objekte in einer Menge heißen Elemente

   Notation:

   a $\in$ M heißt a ist Element der Menge M
   a $\notin$ M heißt a ist kein Element der Menge M

3. *Sei M eine Menge. Eine Menge U heißt Teilmenge von M, von der jedes Element von U auch Element von M ist*

   Notation:

   $U \subseteq M$ heißt U ist Teilmenge von M
   $U \nsubseteq M$ heißt U ist keine Teilmenge von M

1.2 ~~Beispiele~~

1. Sei M die Menge aller Studierenden in L1
   W die Menge aller weiblichen Studierenden in L1
   F die Menge aller Frauen

   Dann gilt: W $\subseteq$ M, W $\subseteq$ F, M $\nsubseteq$ F, F $\nsubseteq$ M

2. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \ldots\}$ G sei die Menge der geraden natürlichen Zahlen $G := \{n \in \mathbb{N}|\text{n ist gerade}\} = \{2m|m \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8 \ldots\}$ Es gilt G $\subseteq \mathbb{N}, \mathbb{N} \subseteq$ G
3. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$
4. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{a/b|a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
5. Die Menge ohne Element heißt die leere Menge Symbol: $\emptyset = \{\}$

Bemerkung:

1. Für jede Menge M gilt $\setminus \subseteq M$
2. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

1.3 Definition: Sei M eine Menge und U,V $\subseteq$ M Teilmengen

1. Die Vereinbarung von U und V ist $U \cup V := \{x \in M \mid x \in U oder x \in V\}$
2. Der Durchschnitt von U und V ist $U \cap V := \{x \in M \mid x \in U oder x \in V\}$ U und V heißen disjunkt, wenn $U \cap V = \emptyset$
3. Die Differenzmenge von U und V ist $U \setminus V := \{x \in U \mid x \in V\}$
4. Das Komplement von U ist $U^C = M \setminus U = \{x \in M \mid x \notin U\}$

   Bsp: Sei M = N
   $\{1, 3\} \cup \{3, 5\} = \{1, 3, 5\}$
   $\{1, 3\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$
   $\{1, 3\} \cap \{2, 4, 7\} = \emptyset \leftarrow$ disjunkt
   $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$
   $\{1, 3, 5\}^C = \{2, 4, 6, 7, 8, \ldots\}$

1.4 Satz (de Morjensche Regeln)

Sei M eine Menge, U,V $\subseteq$ M Teilmengen
Dann:

1. $(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$
2. $(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$

Beweis:

1. Sei x$\in M$
   Es gilt: x $\in (U \cap V)^C \Leftrightarrow x \notin U \cap V \Leftrightarrow x \notin$U oder x$\notin$V$\Leftrightarrow x \in U^C$ oder x$\in V^C \Leftrightarrow x \in U^C \cup V^C$
2. Sei x$\in M$
   Es gilt: x $\in (U \cup V)^C \Leftrightarrow x \notin U \cup V \Leftrightarrow x \notin$U und x$\notin$V$\Leftrightarrow x \in U^C$ und x$\in V^C \Leftrightarrow x \in U^C \cap V^C$

1.5 Prinzip der Vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage A(n) gegeben
Ziel: Beweisen, Dass A(n) für jedes $n \in \mathbb{N}$ mehr ist dafür reicht es zu zeigen

1. Induktionsanfang (IA): A(1) ist wahr
2. Induktionsschrit (IS): Wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ A(n) wahr ist, dann ist auch A(n+1) wahr

1.6 Satz

Für jede natürliche Zahl n gilt: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
Probe:

n	1	2	3	4
1+2+3...+n	1	3	6	10
$\dfrac{n(n+1)}{2}$	1	3	6	10

Beweis des Satzes mit Induktion

Abkürzung: $S(n) := 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ Aussage: A(n): $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

1. Induktionsanfang (IA): n=1 $S(1) = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ok!
2. Induktionsschrit (IS): $n \rightarrow n+1$
   Annahme: A(n) gilt: $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   Zu zeigen: A(n+1) gilt: $S(n+1) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$
   $S(n+1) = S(n) + n + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$
   Das beendet den Beweis ■

Zur Vereinfachung der Notation:
Seien $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ Zahlen $n \in \mathbb{N}$
Setze: $\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Allgemeiner: Sei $l, m \in \mathbb{N}$, $l \leq m \leq n$
$\sum_{k=l}^{m} a_k = a_l + a_{l+1} + \ldots + a_m$

$$\text{Aussage des Satzes: } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Kombinatorik (mathemathisches Zählen)

1.7 Definition

$Seien A, B Mengen. Das kartesische Produkt von A und B ist definiert als$ A $\times$ B := {(a,b)|a$\in A, b \in B\}$ Die Elemente von $A{\times}B$ heißen geordnete Paare
Bsp.: $\{1,7\} \times \{2,3\} = \{(1,2),(1,3),(7,2),(7,3)\}$
Allgemeiner: Gegeben seien Mengen $A_1,\ldots,A_k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Das kartesische Produkt von $A_1,\ldots,A_k$ ist $A_1 \times \ldots \times A_k = \{(a_1,\ldots,a_k)|a \in A$,für $i = 1,\ldots,k\}$
Elemente von $A_1{\times}\ldots{\times}A_k$ heißen k-Tupel
Falls $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$, schreibe $\underbrace{A \times \ldots \times A}_{k-mal} = A^k$

1.8 Definition

Eine Menge A ist endlich, wenn A nur endlich viele Elemente hat. Dann bezeichnet $\#A = \{|A|\}$ die Anzahl der Elemente von A und somit dessen Kardinalität oder Mächtigkeit. Wenn A nicht endlich ist, so schreibe: $\#A = \infty$
Bsp.: $\#\emptyset = 0, \#\mathbb{N} = \infty, \#\{1,3,5\} = 3$

1.9 Bemerkung

1. Sei A endliche Menge. $U, V \subseteq A$ disjunkte Teilmengen
   Dann $\#(U \cup V) = \#U + \#V$

2. Seien $A_1, ..., A_k$ endliche Mengen $k \in \mathbb{N}$
   Dann: $\#(A_1 \times ... \times A_k) = (\#A_1)(\#A_2)...(\#A_k)$

1.10 Definition

1. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = \prod_{k=i}^{n} k$ Setze $0! = 1$

2. Für $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$ sei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-1)!}$ ← Binomialkoeffizient

n	0	1	2	3	4	5	6
n!	1	1	2	6	24	120	720

Beispiel:

$\binom{5}{2} := \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3 \cdot 2} \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$
Bemerkung: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$

Wiederholung:

Sei M Menge.
Wenn M endlich: $\#M = Anzahl\ Elemente \in M$
Wenn M unendlich: $\#M = \infty$
Für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ $0! = 1$
Binomialkoeffizient: Für $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = 1$$

1.10.1 Lemma

Für $0 < k < n$ gilt:
$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{k}$

Beweis:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k)!} = \frac{k(n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

1.10.2 Geometrische Anordnung (Pascalsches Dreieck)

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0}\binom{1}{1} \\ \binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\ \binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \end{array}$$

Folge $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$ für alle $0 \leq k \leq< n$

1.10.3 Satz

Sei A endliche Menge.
$\#A = n$
Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$
$P_k(A) := \{U \subseteq A | \#U = k\}$ (Menge aller k-elementigen Teilmengen von A)
Dann gilt $\#P_k(A) = \binom{n}{k}$

Beispiel:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $n = 4$ $k = 2$
2-elementige Teilmengen von A:
$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \to 6$
$\binom{4}{2} = 6$ ✓

Beweis:

Vorüberlegung: Sei $k = 0 \vee k = n$
$P_0(A) = 1 = \binom{n}{0}$ $\#P_n(A) = 1 = \binom{n}{n}$ ✓
Jetzt: Induktionsbeweis nach n
IA: $n = 0$ Dann $k = 0$ ✓

IS: $n \to n + 1$
Sei $\#A = n + 1 \Rightarrow 0 \leq k \leq (n + 1)$
Falls $k = 0 \vee k = n + 1$
Sei also: $o < k < n + 1$
Wähle $a \in A$
Sei $B = A \backslash \{a\}$
Dann $A = B \cup \{a\}, \#B = n$
Man kann die Wahl einer k-elementigen Teilmenge von A so strukturieren

1. Entscheiden, ob $a \in U \vee a \notin U$
2. a) Wenn $a \notin U$: Wähle k Elemente aus B
   b) Wenn $a \in U$: Wähle k-1 Elemente aus B

$\Rightarrow \#P_k(A) = \#P_k(B) + \#P_{k-1}(B) \overset{IV}{=} \binom{n}{k} + \binom{e}{-1} \overset{1.11}{=} \binom{n+1}{k}$ ■

1.11 Satz (Binomische Formel)

Seien a, b Zahlen, $n \in \mathbb{N}$
Dann $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$

Beispiel:

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Beweis:

Schreibe $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n-Faktoren}$

Ausmultiplizieren

Halte Terme der Form $a^{n-k}b^k$ mit $0 \leq k \leq n$
Häufigkeit von $a^{n-k}b^k$ = Anzahl der Möglichkeiten aus n-Faktoren k mal b zu wählen.
Das ist $\binom{n}{k}$ (Satz 1.13)

Folgerung

Setze $a = b = 1$ $\quad a^{n-k}b^k = 1$
$(a+b)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$

Beispiel:

$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

1.12 Definition

Sei A endliche Menge
Eine Anordnung von A ist ein n-Tupel
$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n)$ mit $a \in A$ für alle i und $a_i \neq a_j$ wenn $i \neq j$

Beispiel:

Anordnung von $\{1,2,3\} = (1,2,3)(1,3,2)(2,1,3)(2,3,1)(3,1,2)(3,2,1) \rightarrow 6$

1.13 Satz

2 Angeordneter Körper

3 Folgen

4 Konvergenzsätze

Wiederholung / Ergänzung

Eine Folge reeler Zahlen (a_n) konvergiert uneigentlich gegen ∞ wenn gilt:
Für jedes $C \in \mathbb{R}$ gilbt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

(a_n) konvergiert uneigentlich gegen $-\infty$ wenn $(-a_n)$ gegen ∞ konvergiert.

Notation:
$a_n \to \infty$ für $n \to \infty$
$a_n \to -\infty$ für $n \to \infty$

Beispiel:

$a_n = n^2 \to \infty$
$a_n = -n^2 \to -\infty$
$a_n = (-1)^n \cdot n^2$
$(0, -1, 4, -9)$ *konvergiert weder gegen* ∞ *noch gegen* $-\infty$

Rechenregeln:

Angenommen $(a_n), (b_n)$ *sind konvergente Folgen.*

1. $(a_n + b_n) \to a + b$
2. $(a_n \cdot b_n) \to ab$
3. $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$
4. $c \cdot a_n \to c \cdot a$
5. $a_n - b_n \to a - b$
6. $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

Beweis 6):
3) $\Rightarrow \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$
$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b}$
2) $\Rightarrow a_n \cdot displaystyle\frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ *q.e.d.*

Beispiel

n	0	1	2	3	10	100
a_n	0	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{19}$	$\frac{90}{201}$	$\frac{9900}{20001}$

Vermutung: $a_n \to \frac{1}{2}$ *für* $n \to \infty$
Rechenregel 6 anwenden:

1. *Versuch:*
   $a_n = \frac{b_n}{c_n}$

   $b_n = n^2 - n; c_n = 2n^2 + 1$
   $(b_n) und (c_n)$ *sind divergend. Schlecht.*

2. *Versuch:*

$$\frac{n^2-n}{2n^2+1} = \frac{n^2(1-\frac{1}{n})}{n^2(2+\frac{1}{n^2}} \textit{ für } n \geq 1$$

$$= \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{b_n}{c_n} \textit{ mit } b_n := 1-\frac{1}{n}; c_n = 2+\frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n} \to 0 \textit{ für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow 1-\frac{1}{n} \to 1-0 = 1 \textit{ für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow 2+\frac{1}{n^2} \to 2+0 = 2 \textit{ für } n \to \infty$$

$\Rightarrow a_n \to \frac{1}{2}$ *für* $n \to \infty$

3.10 Satz

Seien $a_n \to a$, $b_n \to b$ *zwei konvergente Folgen reeler Zahlen.*
wenn $a_n \leq b_n$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$ *dann ist* $a \leq b$.
Beweis:
Angenommen: $a > b$

$$\textit{Wähle } \epsilon := \frac{a-b}{2} > 0$$

Es gibt $N \in \mathbb{N}$ *so dass:* $\left.\begin{array}{l} |\, a_n - a \,| < \epsilon \\ |\, b_n - b \,| < \epsilon \end{array}\right\}$ *für* $n \geq N$

$\Rightarrow a_n > a - \epsilon$

$$= a - \tfrac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2}$$

$= b + \epsilon > b_n \Rightarrow a_n > b_n$ *für* $n \geq \mathbb{N}$
Widerspruch zur Annahme.
$a_n \leq b_n$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$ *q.e.d.*

3.11 Definition: Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge reeler Zahlen.*
Bilde eine Folge:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ \vdots s_n &= a_0 + a_1 + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \end{aligned}$$

Die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ *heißt Reihe mit den Gliedern* a_n.
s_n *heißen die* <u>*Partialsummen*</u> *der Reihe.*
Bezeichnung:
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *oder* $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + ...$

Wenn $s_n \to s \in \mathbb{R}$ *für* $n \to \infty$ *dann schreiben wir:*
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = s$
Summe der Reihe.

<u>*Achtung:*</u> *Symbol* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *hat* <u>*zwei*</u> *Bedeutungen:*

1. *die Folge* (s_n)
   oder
2. *deren Grenzwert*

Beispiele:

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + ...$
   ist die Folge $(1, 2, 3, 4, ...) = (n+1)_{n \in \mathbb{N}_0}$
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k = 0 + 1 + 2 + 3 + ...$
   ist die Folge $(1, 3, 6, 10, ...) = (\frac{n(n-1)}{2})_{n \in \mathbb{N}}$
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ...$
   ist die Folge $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$

Vorüberlegung:
$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
$s_n := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$
$= 1 - \frac{1}{n+1}$
Teleskopsumme

$\frac{1}{n+1} \to 0$ *für* $n \to \infty$

Summe der Reihe:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n+1}) = 1$ *q.e.d.*

Bemerkung: Jede Folge kann man auch als Reihe Schreiben. (Differenzen bilden)
z.B.: die Folge der Primzahlen:
$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19)$
ist die Reihe:
$(2 + 1 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + ...)$
Goldbachsche Vermutung: in dieser Reihe kommt die Zahl 2 unendlich oft vor.

3.12 Satz, Die geometrische Reihe

Sei $x \in \mathbb{R}$
a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$ *wenn* $\mid x \mid < 1$
b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ *divergiert wenn* $\mid x \mid \geq 1$

a *wenn* $|x| < 1$
  dann folgt $\sum k = 0\infty a_k = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \cdot x^n) = \frac{1}{1-x}$

b *wenn* $|x| > 1$
  dann (x^n) *divergent* $\Rightarrow (\frac{x}{1-x} \cdot x^n)$ *divergent*
  denn $\frac{x}{1-x} \neq 0$
  $\Rightarrow (\frac{?}{?})$

Beweis:

$x = 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1+1+1+...)$ *divergiert, ok*
Sei nun $x \neq$
Bekannt aus der Übung: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \cdot x^n$

Potenzenwachstum
$x^n \to 0$ *für* $n \to \infty$ *wenn* $|x| < 1$
(x^n) *divergiert, wenn* $(|x| \geq 1$ *und* $x \neq 1)$

3.13 Satz

Wenn die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *kovergiert, dann ist* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Nullfolge.*

Beweis: *Gegeben sei* $\epsilon > 0$
Sei $a = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} (s_n)$ *mit* $s_n = a_0 + ... + a_n$
Es gibt N *in*$\mathbb{N}$ *mit* $|s_n - a| < \dfrac{\epsilon}{2}$ *für* $n \geq N$

$$\begin{aligned} |a_n| &= |s_n - s_{n-1}| \\ &= |s_n - a + a - s_{n-1}| \\ &\leq |s_n - a| + |a - s_{n-1}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

für $n \geq N + 1$
$\Rightarrow a_n \to 0$ *für* $n \to \infty$

3.14 Satz, die harmonische Reihe

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ *divergiert*

Beweisidee:

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... \\ &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... \\ &1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + ... \\ &1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = \infty \end{aligned}$$