1 Mengen

1.1 Definition:

1. Eine Menge ist eine Ansammlung verschiedener Objekte
2. Die Objekte in einer Menge heißen Elemente

   Notation:

   a ∈ M heißt a ist Element der Menge M
   a ∉ M heißt a ist kein Element der Menge M

3. *Sei M eine Menge. Eine Menge U heißt Teilmenge von M, von der jedes Element von U auch Element von M ist*

   Notation:

   U ⊆ M heißt U ist Teilmenge von M
   U ⊈ M heißt U ist keine Teilmenge von M

1.2 ~~Beispiele~~

1. Sei M die Menge aller Studierenden in L1
   W die Menge aller weiblichen Studierenden in L1
   F die Menge aller Frauen

   Dann gilt: W ⊆ M, W ⊆ F, M ⊈ F, F ⊈ M
2. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$ G sei die Menge der geraden natürlichen Zahlen $G := \{n \in \mathbb{N}|$n ist gerade$\} = \{2m|m \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8 \dots\}$ Es gilt G ⊆ ℕ, ℕ ⊆ G
3. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$
4. Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{a/b|a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$
5. Die Menge ohne Element heißt die leere Menge Symbol: $\emptyset = \{\}$

Bemerkung:

1. Für jede Menge M gilt $\setminus \subseteq M$
2. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

1.3 Definition: Sei M eine Menge und U,V ⊆ M Teilmengen

1. Die Vereinbarung von U und V ist $U \cup V := \{x \in M \mid x \in Uoderx \in V\}$
2. Der Durchschnitt von U und V ist $U \cap V := \{x \in M \mid x \in Uoderx \in V\}$ U und V heißen disjunkt, wenn $U \cap V = \emptyset$
3. Die Differenzmenge von U und V ist $U \setminus V := \{x \in U \mid x \in V\}$
4. Das Komplement von U ist $U^C = M \setminus U = \{x \in M \mid x \notin U\}$

   Bsp: Sei M = N
   $\{1, 3\} \cup \{3, 5\} = \{1, 3, 5\}$
   $\{1, 3\} \cap \{3, 5\} = \{3\}$
   $\{1, 3\} \cap \{2, 4, 7\} = \emptyset \leftarrow$ disjunkt
   $\{1, 2, 3\} \setminus \{3, 4, 5\} = \{1, 2\}$
   $\{1, 3, 5\}^C = \{2, 4, 6, 7, 8, \dots\}$

1.4 Satz (de Morjensche Regeln)

Sei M eine Menge, U,V $\subseteq$ M Teilmengen
Dann:

1. $(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$
2. $(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$

<u>**Beweis:**</u>

1. Sei x$\in M$
   Es gilt: x $\in (U \cap V)^C \Leftrightarrow x \notin U \cap V \Leftrightarrow x \notin$U oder x$\notin$V$\Leftrightarrow x \in U^C$ oder x$\in V^C \Leftrightarrow x \in U^C \cup V^C$
2. Sei x$\in M$
   Es gilt: x $\in (U \cup V)^C \Leftrightarrow x \notin U \cup V \Leftrightarrow x \notin$U und x$\notin$V$\Leftrightarrow x \in U^C$ und x$\in V^C \Leftrightarrow x \in U^C \cap V^C$

1.5 Prinzip der Vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage A(n) gegeben
Ziel: Beweisen, Dass A(n) für jedes $n \in \mathbb{N}$ mehr ist dafür reicht es zu zeigen

1. Induktionsanfang (IA): A(1) ist wahr
2. Induktionsschrit (IS): Wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ A(n) wahr ist, dann ist auch A(n+1) wahr

1.6 Satz:

Für jede natürliche Zahl n gilt: $1+2+3+4+5+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
Probe:

n	1	2	3	4
1+2+3...+n	1	3	6	10
$\dfrac{n(n+1)}{2}$	1	3	6	10

<u>**Beweis des Satzes mit Induktion**</u>

Abkürzung: $S(n) := 1+2+3+\ldots+n$ Aussage: A(n): $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$

1. Induktionsanfang (IA): n=1 $S(1) = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ok!
2. Induktionsschrit (IS): $n \rightarrow n+1$
   Annahme: A(n) gilt: $S(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   Zu zeigen: A(n+1) gilt: $S(n+1) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$
   $S(n+1) = S(n) + n + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2} + \dfrac{2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$
   Das beendet den Beweis ■

Zur Vereinfachung der Notation:
Seien $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ Zahlen $n \in \mathbb{N}$
Setze: $\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Allgemeiner: Sei $l, m \in \mathbb{N}$, $l \leq m \leq n$
$\sum_{k=l}^{m} a_k = a_l + a_{l+1} + \ldots + a_m$

Aussage des Satzes:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>Kombinatorik</u> (mathematisches Zählen)

1.7 Definition:

Seien A, B Mengen. Das kartesische Produkt von A und B ist definiert als $A \times B := \{(a, b)|a \in A, b \in B\}$
Die Elemente von $A \times B$ heißen geordnete Paare
Bsp.: $\{1, 7\} \times \{2, 3\} = \{(1, 2), (1, 3), (7, 2), (7, 3)\}$
Allgemeiner: Gegeben seien Mengen $A_1, \ldots, A_k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Das kartesische Produkt von $A_1, \ldots, A_k$ ist $A_1 \times \ldots \times A_k = \{(a_1, \ldots, a_k)|a \in A,$für $i = 1, \ldots, k\}$
Elemente von $A_1 \times \ldots \times A_k$ heißen k-Tupel
Falls $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = A$, schreibe $\underbrace{A \times \ldots \times A}_{k-mal} = A^k$

1.8 Definition

Eine Menge A ist endlich, wenn A nur endlich viele Elemente hat. Dann bezeichnet $\#A = \{|A|\}$ die Anzahl der Elemente von A und somit dessen Kardinalität oder Mächtigkeit. Wenn A nicht endlich ist, so schreibe: $\#A = \infty$
Bsp.: $\#\emptyset = 0, \#\mathbb{N} = \infty, \#\{1, 3, 5\} = 3$

1.9 Bemerkung

1. Sei A endliche Menge. $U, V \subseteq A$ disjunkte Teilmengen
   Dann $\#(U \cup V) = \#U + \#V$

2. Seien $A_1, ..., A_k$ endliche Mengen $k \in \mathbb{N}$
   Dann: $\#(A_1 \times ... \times A_k) = (\#A_1)(\#A_2)...(\#A_k)$

1.10 Definition

1. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = \prod_{k=i}^{n} k$ Setze $0! = 1$

2. Für $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$ sei $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-1)!}$ ← Binomialkoeffizient

n	0	1	2	3	4	5	6
n!	1	1	2	6	24	120	720

Beispiel:

$\binom{5}{2} := \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{20}{2} = 10$
Bemerkung: $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$