# Analysis Vorlesung

Stefan Heid, Christopher Jordan

7. Dezember 2014

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Mengen

## 1.1 Definition Mengen

1. Eine Menge ist eine Ansammlung verschiedener Objekte
2. Die Objekte in einer Menge heißen Elemente

   ***Notation:***
   
   $a \in M$ *heißt a ist Element der Menge* $M$
   
   $a \notin M$ *heißt a ist kein Element der Menge* $M$
3. Sei $M$ eine Menge. Eine Menge $U$ heißt Teilmenge von $M$, von der jedes Element von $U$ auch Element von $M$ ist

   ***Notation:***
   
   $U \subseteq M$ *heißt* $U$ *ist Teilmenge von* $M$
   
   $U \nsubseteq M$ *heißt* $U$ *ist keine Teilmenge von* $M$

## 1.2 Beispiele

1. Sei

   $M$ die Menge aller Studierenden in L1
   
   $W$ die Menge aller weiblichen Studierenden in L1
   
   $F$ die Menge aller Frauen

   Dann gilt: $W \subseteq M,\ W \subseteq F,\ M \nsubseteq F,\ F \nsubseteq M$
2. Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4 \dots\}$ $G$ sei die Menge der geraden natürlichen Zahlen

   $$G := \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist gerade}\} = \{2m \mid m \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, 8 \dots\}$$

   Es gilt $G \subseteq \mathbb{N},\ \mathbb{N} \subseteq G$
3. Die Menge der ganzen Zahlen

   $$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$
4. Die Menge der rationalen Zahlen

   $$\mathbb{Q} = \{a/b \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$$
5. Die Menge ohne Element heißt die leere Menge Symbol: $\emptyset = \{\}$

### Bemerkung:

1. Für jede Menge $M$ gilt $\setminus \subseteq M$
2. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$

## 1.3 Definition Mengenoperatoren

Sei $M$ eine Menge und $U, V \subseteq M$ Teilmengen

1. Die Vereinigung von $U$ und $V$ ist $U \cup V := \{x \in M \mid x \in U \text{ oder } x \in V\}$
2. Der Durchschnitt von $U$ und $V$ ist $U \cap V := \{x \in M \mid x \in U \text{ und } x \in V\}$

   $U$ und $V$ heißen disjunkt, wenn $U \cap V = \emptyset$
3. Die Differenzmenge von $U$ und $V$ ist $U \setminus V := \{x \in U \mid x \in V\}$
4. Das Komplement von $U$ ist $U^C = M \setminus U = \{x \in M \mid x \notin U\}$

**Beispiel:**

Sei $M = N$

$$\{1,3\} \cup \{3,5\} = \{1,3,5\}$$
$$\{1,3\} \cap \{3,5\} = \{3\}$$
$$\{1,3\} \cap \{2,4,7\} = \emptyset \leftarrow \text{ disjunkt}$$
$$\{1,2,3\} \setminus \{3,4,5\} = \{1,2\}$$
$$\{1,3,5\}^C = \{2,4,6,7,8,\dots\}$$

## 1.4 Satz (de Morgan'sche Regeln)

Sei $M$ eine Menge, $U, V \subseteq M$ Teilmengen
Dann:

1. $(U \cap V)^C = U^C \cup V^C$
2. $(U \cup V)^C = U^C \cap V^C$

**Beweis:**

1. Sei $x \in M$
   Es gilt: $x \in (U \cap V)^C \Leftrightarrow x \notin U \cap V \Leftrightarrow x \notin U$ oder $x \notin V \Leftrightarrow x \in U^C$ oder $x \in V^C \Leftrightarrow x \in U^C \cup V^C$
2. Sei $x \in M$
   Es gilt: $x \in (U \cup V)^C \Leftrightarrow x \notin U \cup V \Leftrightarrow x \notin U$ und $x \notin V \Leftrightarrow x \in U^C$ und $x \in V^C \Leftrightarrow x \in U^C \cap V^C$

## 1.5 Prinzip der Vollständigen Induktion

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben
Ziel: Beweisen, Dass $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mehr ist dafür reicht es zu zeigen

1. Induktionsanfang (IA): $A(1)$ ist wahr
2. Induktionsschrit (IS): Wenn für ein $n \in \mathbb{N}$ A(n) wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr

## 1.6 Satz Summe der Zahlen bis $n$

Für jede natürliche Zahl $n$ gilt:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Probe:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1+2+3…+n | 1 | 3 | 6 | 10 |
| $\frac{n(n+1)}{2}$ | 1 | 3 | 6 | 10 |

**Beweis des Satzes mit Induktion**

Abkürzung: $S(n) := 1 + 2 + 3 + \dots + n$
Aussage A(n): $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$

1. Induktionsanfang (IA): $n = 1 \quad S(1) = 1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ ✓

2. Induktionsschritt (IS): $n \to n+1$
   Annahme: $A(n)$ gilt:
   $$S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$
   Zu zeigen: A(n+1) gilt:
   $$S(n+1) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}$$
   $$S(n+1) = S(n) + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$$
   Das beendet den Beweis / quod erat demonstrandum / q.e.d. ■

Zur Vereinfachung der Notation:
Seien $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ Zahlen $n \in \mathbb{N}$
Setze: $\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Allgemeiner:
Sei $l, m \in \mathbb{N}$, $l \leq m \leq n$
$\sum_{k=l}^{m} a_k = a_l + a_{l+1} + \dots + a_m$

Aussage des Satzes:
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

[1]

## 1.7 Definition (Kartesisches Produkt)

Seien $A, B$ Mengen. Das kartesische Produkt von $A$ und $B$ ist definiert als $A \times B := \{(a,b) \mid |a \in A, b \in B\}$ Die Elemente von $A \times B$ heißen geordnete Paare
Bsp.: $\{1,7\} \times \{2,3\} = \{(1,2),(1,3),(7,2),(7,3)\}$
Allgemeiner: Gegeben seien Mengen $A_1, \dots, A_k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Das kartesische Produkt von $A_1, \dots, A_k$ ist $A_1 \times \dots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a \in A$,für $i = 1, \dots, k\}$
Elemente von $A_1 \times \dots \times A_k$ heißen k-Tupel
Falls $A_1 = A_2 = \dots = A_k = A$, schreibe $\underbrace{A \times \dots \times A}_{k-mal} = A^k$

## 1.8 Definition Mächtigkeit

Eine Menge $A$ ist endlich, wenn $A$ nur endlich viele Elemente hat. Dann bezeichnet $\#A = \{|A|\}$ die Anzahl der Elemente von $A$ und somit dessen Kardinalität oder Mächtigkeit. Wenn $A$ nicht endlich ist, so schreibe: $\#A = \infty$
Bsp.: $\#\emptyset = 0, \#\mathbb{N} = \infty, \#\{1,3,5\} = 3$

## 1.9 Bemerkung

1. Sei $A$ endliche Menge. $U, V \subseteq A$ disjunkte Teilmengen
   Dann $\#(U \cup V) = \#U + \#V$

2. Seien $A_1, \dots, A_k$ endliche Mengen $k \in \mathbb{N}$
   Dann: $\#(A_1 \times \dots \times A_k) = (\#A_1)(\#A_2)\dots(\#A_k)$

## 1.10 Definition Fakultät

1. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=i}^{n} k$ Setze $0! = 1$

2. Für $k, n \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$ sei
   $binonk := \frac{n!}{k!\cdot(n-1)!} \Rightarrow$ Binomialkoeffizient

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n! | 1 | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 |

[1] Kombinatorik (mathematisches Zählen)

**Beispiel:**

$bino52 = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} := \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{20}{2} = 10$

Bemerkung: $binon0 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = 1 = binonn = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!}$

## Wiederholung

Sei $M$ Menge.
Wenn $M$ endlich: $\#M = Anzahl\ Elemente \in M$
Wenn $M$ unendlich: $\#M = \infty$
Für $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n \qquad 0! = 1$$

Binomialkoeffizient: Für $0 \leq k \leq n$

$$binonk = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \qquad binon0 = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = binonn = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = 1$$

## 1.11 Lemma

Für $0 < k < n$ gilt:

$$binonk = binon - 1k - 1 + binon - 1k$$

**Beweis:**

$$binon - 1k - 1 + binon - 1k = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k)!} = \frac{k(n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

## 1.12 Geometrische Anordnung (Pascalsches Dreieck)

bino00

bino10
bino11

bino20
bino21
bino22

bino30
bino31
bino32
bino33

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

Folge
$binonk \in \mathbb{N}$ für alle $0 \leq k \leq n$

## 1.13 Satz: Anzahl von Teilmengen

Sei $A$ endliche Menge. $\#A = n$

Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq k \leq n$

$P_k(A) := \{U \subseteq A \mid \#U = k\}$ (Menge aller $k$-elementigen Teilmengen von $A$)

Dann gilt $\#P_k(A) =$
$binonk$

**Beispiel:**

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $n = 4$ $k = 2$

2-elementige Teilmengen von $A$: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \rightarrow 6$
$bino42 = 6$ ✓

### Beweis:

Vorüberlegung: Sei $k = 0 \vee k = n$
$P_0(A) = 1 =$
$binon0$ $\#P_n(A) = 1 =$
$binonn$ ✓
Jetzt: Induktionsbeweis nach $n$

IA:
$n = 0$
$n = 0$ Dann $k = 0$ ✓

IS:
$n \to n + 1$
Sei $\#A = n + 1 \Rightarrow 0 \leq k \leq (n + 1)$ Falls $k = 0 \vee k = n + 1$
Sei also: $o < k < n + 1$
Wähle $a \in A$
Sei $B = A \backslash \{a\}$
Dann $A = B \cup \{a\}, \#B = n$
Man kann die Wahl einer $k$-elementigen Teilmenge von $A$ so strukturieren:

1. Entscheiden, ob $a \in U \vee a \notin U$
2. a) Wenn $a \notin U$: Wähle $k$ Elemente aus $B$
   b) Wenn $a \in U$: Wähle $k - 1$ Elemente aus $B$

$$\Rightarrow \#P_k(A) = \#P_k(B) + \#P_{k-1}(B) \stackrel{IV}{=} binonk + binoe{-}1 \stackrel{1.11}{=} binon + 1k$$

■

## 1.14 Satz (Binomische Formel)

Seien $a, b$ Zahlen, $n \in \mathbb{N}$
Dann $(a + b)^n = a^n +$
$binon1a^{n-1}b +$
$binon2a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n$

### Beispiel:

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

### Beweis:

Schreibe $(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b)(a + b)(a + b)\ldots(a + b)}_{n-Faktoren}$

### Ausmultiplizieren

Halte Terme der Form $a^{n-k}b^k$ mit $0 \leq k \leq n$
Häufigkeit von $a^{n-k}b^k$ = Anzahl der Möglichkeiten aus n-Faktoren $k$ mal $b$ zu wählen.
Das ist
$binonk$ (Satz 1.13)

### Folgerung

Setze $a = b = 1$ $\quad a^{n-k}b^k = 1$
$(a + b)^n = 2^n =$
$binon0 +$
$binon1 +$
$binon2 + \ldots +$
$binonn$

**Beispiel:**

$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

## 1.15 Definition: Anordnung

Sei $A$ endliche Menge
Eine Anordnung von $A$ ist ein $n$-Tupel
$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$ mit $a \in A$ für alle $i$ und $a_i \neq a_j$ wenn $i \neq j$

**Beispiel:**

Anordnung von $\{1, 2, 3\} = (1, 2, 3)(1, 3, 2)(2, 1, 3)(2, 3, 1)(3, 1, 2)(3, 2, 1) \rightarrow 6$

## 1.16 Satz: Anzahl von Anordnungen

Sei $A$ endliche Menge, $\#A = n \geq 1$
Dann ist die Anzahl der Anordnungen von $A$ gleich $n!$

**Beweis:**

Induktion nach $n$

IA:

$n = 0$
n=1 ✓

IS:

$n \rightarrow n + 1$
Sei $\#A = n + 1$
Wahl einer Anordnung von $A$ kann man so unterteilen:

1. Wähle 1 Element $a_1 \in A$ ($n + 1$ Möglichkeiten)
2. Wähle Anordnungen von $A \backslash \{a_1\}$
   $\#(A \backslash \{a_1\}) = n \Rightarrow n!$ Möglichkeiten bei 2
   Insgesamt $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$

■

**Bemerkung:**

(Zusammenhang zwischen Anordnung und Teilmengen)
Sei $A$ endliche Menge, $\#A = n,\ 0 \leq k \leq n$
Sei $(a_1, \dots, a_n)$ Anordnung von $A$
$\rightsquigarrow$ Teilmenge $U := \{a_1, \dots, a_n\}$
Dann $U \subseteq A,\ \#U = k \qquad U \in P_k(A)$
Jedes $U \in P_k(A)$ entsteht so, aber mehrfach:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ Anordnungen\ von\ U}}{k!} \quad \cdot \quad \underset{\substack{\uparrow \\ Anordnungen\ von\ A\backslash U}}{(n-k)!} \quad -mal$$

# Anordnungen von $A = n! = \#P_k(A) \cdot k!\,(n-k)! \Rightarrow \#P_k(A) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!)} =$
$binonk$

# 2 Die reellen Zahlen

Was sind die reellen Zahlen?
Präzise Konstruktion ist umfangreich, daher Axiomatischer Zugang
Beschreibung der reellen Zahlen durch ihre Eigenschaften (Axiome):

1. Grundrechenarten → Körper
2. Ungleichungen → angeordneter Körper
3. Lückenlosigkeit → Vollständigkeit

## Körper

## 2.1 Definition Körper

Ein Körper ist eine Menge $K$ mit 2 Rechenoperationen:
Addition (+) und Multiplikation (·), so dass folgende 9 Eigenschaften erfüllt sind:

### Addition

1. $(a+b)+c = a+(b+c)$ für alle $a, b, c \in K$ (Assotiativgesetz)
2. $a+b = b+a$ für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
3. Es gibt ein $0 \in K$ so dass $0+a = a$
4. Für jedes $a \in K$ gibt es ein $b \in K$ mit $a+b = 0$

#### Bemerkung:

$0 \in K$ ist eindeutig

#### Beweis:

Wenn $0' \in K$ mit $0' + a = a$, dann $0 = 0' + 0 = 0 + 0' = 0'$ ■

#### Bemerkung:

Das $b$ in 4. ist auch eindeutig.
***Notation:***
$b = -a$ *(Negatives von a)*

#### Beweis:

Angenommen $b' + a = 0$
$b = b + 0 = b + (a + b') = (b + a) + b' = 0 + b' = b'$ ■

### Multiplikation

5. $a(b \cdot c) = (a \cdot b)c \qquad \forall a, b, c \in K$
6. $a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall a, b \in K$
7. Es gibt ein $1 \in K$ mit $1 \neq 0$, so dass $1 \cdot a = a \qquad \forall a \in K$
8. Für alle $a \in K,\ a \neq 0$, gibt es ein $b \in K$ mit $a \cdot b = 1$

   **Bemerkung:**

   $1 \in K$ ist eindeutig, $b$ in 8. ist eindeutig
   Beziehung $b = a^{-1}$

   **Beweis:**

   Wie eben ■

9. $a(a + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad \forall a, b, c \in K$ (Distributivgesetz)

Weitere Bezeichnungen:
$a - b := a + (-b)$, $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$, wenn $b \neq 0$

### Bemerkung:

Die üblichen Rechenregeln folgen aus diesen Axiomen 1.-9.

### Beispiel:

$$-(-a) = a,\ a(b - c) = a \cdot b - a \cdot c,\ a(-b) = -(a \cdot b)$$

## 2.2 Beispiele bekannter Körper

$\mathbb{Q}$ ist ein Körper
$\mathbb{Z}$ ist kein Körper (8. nicht erfüllt)

## 2.3 Beispiel für einen Körper

$\mathbb{F}_z = \{0, 1\}$

### Definitionen von + und ·

| + | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

| · | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

$1 + 1 = 0$

$\boxed{\text{Übung Prüfe alle Körperaxiome}}$

### Bemerkung:

Sei $K$ endlicher Körper
Dann gilt $\#K = p^r$ wobei $p$ Primzahl, $r \in \mathbb{N}$
Für jede solche Zahl $q = p^r$ gibt es genau einen Körper

## Wiederholung

Ein Körper $K$ ist eine Menge mit $+$ und $\cdot$, sodass gewisse Eigenschaften erfüllt sind:

### Beispiel:

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$
$F_1 = \{0, 1\} \qquad 1 + 1 = 0$

***Notation:***

*Setze* $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-Faktoren}$

$$\left.\begin{array}{lcl} a^0 & = & 1 \\ a^{-n} & = & (a^{-1})^n \end{array}\right\} \textit{wenn } a \neq 0$$

Daraus folgt $a^n$ ist definiert, wenn $a \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$
Regeln der Potenzgleichung:
$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$
$a^{n \cdot m} = (a^n)^m$

### Beweis:

Übung

## 2.4 Definition angeordneter Körper

Ein angeordneter Körper ist ein Körper $K$ für dessen Elemente eine "Kleiner als Beziehung" $<$ definiert ist, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1. Für alle $a, b \in K$ gilt genau eine von drei Notationen:
   $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$

2. Für alle $a, b, c \in K$ gilt wenn $a < b$ und $b < c$ dann $a < c$
   (Transitivität)

3. Für alle $a, b, c \in K$ gilt wenn $a < b$ dann $a + c < b + c$

4. für $a, b, c \in K$ gilt, wenn $a < b$ und $c \neq 0$ dann $a \cdot c < b \cdot c$

Weitere Beziehungen:
$a > b$ heißt $b < a$

1. Wenn $a < 0$ dann $-a > 0$:
   $a < 0 \Rightarrow a + (-a) > 0 + (-a) \Rightarrow 0 > -a$

2. Für jedes $a \in K$ gilt wenn $a \neq 0$, dann $a^2 > 0$

   (a) $$\begin{array}{ccc} a & > & 0 \\ a \cdot a & > & 0 \cdot a \\ a^2 & > & 0 \end{array} \qquad \blacksquare$$

   (b) $$\begin{array}{ccc} a & < & 0 \\ -a & > & 0 \cdot a \\ a^2 & = & (-a)^2 > 0 \end{array} \qquad \blacksquare$$

3. $1 > 0$ denn $1 = 1^2$

Sei $K$ ein Angeordneter Körper:

$$0 < 1 \Rightarrow 1 < 1 + 1 \Rightarrow 1 + 1 < 1 + 1 + 1 \text{ etc.}$$

$$0 < 1 < 1 + 1 < 1 + 1 + 1 \text{ etc.}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ setze $\underbrace{n := 1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n-Faktoren}$

Dann $0 < 1 < 2 < 3 \ldots$ in $K$

Folge Verschiedene natürliche Zahlen bleiben in $K$ verschieden.
Fasse $\mathbb{N}$ als Teilmenge von $K$ auf.

Dann

$$\mathbb{Z} = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N}\} \subseteq K$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{N} \right\} \subseteq K$$

Insbesondere ist $K$ unendlich.

z.B. hat $F_z$ keine Anordnung.

## 2.5 Definition Absolutbetrag

Sei $K$ ein angeordneter Körper mit $a \in K$
Der Absolutbetrag von $a$ ist definiert als

$$|a| = \begin{cases} a & \text{wenn} \quad a > 0 \\ -a & \text{wenn} \quad a < 0 \end{cases}$$

## 2.6 Satz (Dreiecksungleichung)

Sei $K$ ein angeordneter Körper $a, b, c \in K$
Dann gilt:

1. $a = 0$ wenn $|a| = 0$
2. $-|a| \leq a \leq |a|$
3. Dreiecksungleichung: $|a + b| \leq |a| + |b|$
4. untere Dreiecksunglebraceichung: $|a - b| \geq |a| - |b|$

**Beweis:**

1. klar.
2. wenn $a \geq 0$:
   $|a| \geq 0$
   $\Rightarrow \ -|a| \leq 0 \leq a \leq |a|$
   wenn $a \leq 0$: $-|a| \leq a \leq 0 \leq |a|$
3. Es gilt: $-|a| \leq a \leq |a|, -|b| \leq b \leq |b|$
   wenn $a + b \geq 0$
   $|a + b| = a + b \leq |a| + b \leq |a| + |b|$ wenn $a + b < 0$
   $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$
4. $(a - b) + b = a$
   $\Rightarrow |a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + b$
   $|a - b| \leq |a - b|$

## 2.7 Satz Bernoulli'sche Ungleichungen

Sei $K$ ein angeordneter Körper $a, b \in K, a > -1$ und $n \in \mathbb{N}\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
Dann gilt:

$$(1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a$$

Beweis durch vollständige Induktion:

IA:
$n = 0$

$$n = 0 \qquad (1 + a)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot a$$

✓

IS:
$n \to n + 1$
Annahme:

$$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + n \cdot a)$$

weil $1 + a > 0$
$= 1 + a + n \cdot a + n \cdot a^2$
$= 1 + (n + 1) \cdot a + n \cdot a^2$
weil $a^2 \geq 0 \Rightarrow n \cdot a^2 \geq 0$ ■

## 2.8 Definition Beschränktheit

Sei $K$ ein angeordneter Körper, $M \subseteq K$ eine Teilmenge, $a \in K$.

1. $M \leq a$ bedeutet: $x \leq a$ für jedes $x \in M$
2. $a$ heißt ",obere Schranke"' von $M$, wenn $M \leq a$.
   $a$ heißt ",untere Schranke"' wenn $M \geq a$
3. $M$ heißt nach oben beschränkt wenn $M$ eine obere Schranke hat.
   Analog: nach unten beschränkt wenn $M$ eine untere Schranke hat.
4. $a$ heißt Maximum von $M$, wenn $M \leq a$ <u>und</u> $a \in M$. $a = max(M)$
   $a$ heißt Minimum von $M$, wenn $M \geq a$ <u>und</u> $a \in M$. $a = min(M)$

### Beweis:

Sei $a, b \in M$
$M \leq a, M \leq b$
Dann $b \leq a$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$ ■

### Beispiel:

$K = \mathbb{Q}$

1. $M = \mathbb{N}$
   Sei $a \in \mathbb{Q}$
   $a \leq N$
   $\Leftrightarrow a \leq n$ für alle $n \in N$
   $\Leftrightarrow a \leq 1$
   Wenn $N$ nach unten beschränkt $1 = min(N)$
2. $M = \left\{-\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\right\} \qquad 0 \notin M$

   $-1 = min(M) \Rightarrow M$ ist nach unten beschränkt.
   $M \leq 0 \qquad \Rightarrow M$ ist nach oben beschränkt.

   $M$ hat kein Maximum.
   Sei $a \in M$ dann $a = -\frac{1}{n}, n \in N, -\frac{1}{n+1} \in M$
   $n + 1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n+1} > -\frac{1}{n}$
   $M \nleq -\frac{1}{n}$ $a$ ist keine obere Schranke.
3. $M = \left\{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$
   $min(M) = -1$
   $max(M) = 0$
4. $M = \emptyset$ hat weder ein $min(M)$ noch ein $max(M)$
   Jedes $a \in \mathbb{Q}$ erfüllt $a \leq M$ und $M \leq a$

## 2.9 Satz

1. Sei $K$ ein angeordneter Körper.
   Wenn $M$ endlich und nicht leer, dann hat $M$ auch ein $max$ und ein $min$
2. Wohlordnungsprinzip
   Jede nicht leere Teilmenge $M \in \mathbb{N}$ hat ein Minimum.

**Beweis:**

1. klar.
2. $M$ ist nicht leer, wähle $n \in M$
   $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots n\}$, endlich aber nicht leer.
   Dann $min(\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots n\} \cap M) = min(M)$ ■

## 2.10 Definition Infimum Supremum

Sei $K$ ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$, $a \in K$
$a$ heißt kleinste obere Schranke von $M$ oder Supremum.

1. $M \leq a$

   und

2. kein $b \in K$ mit $b < a$ erfüllt $M \leq b$

$a$ ist größte untere Schranke oder Infimum vom $M$, wenn

1. $a \leq M$

   und

2. Kein $b \in M$ mit $a < b$ erfüllt $b \leq M$

***Notation:***
$a = sup(M)$
$a = inf(M)$

**Bemerkung:**

Wenn $a = max(M) \Rightarrow a = sup(M)$

**Beweis:**

Sei $a, b \in M$ und $a \nleq b$
$\Rightarrow M \nleq b \Rightarrow a$ ist Supremum

**Bemerkung:**

Wenn ein Supremum existiert, ist es eindeutig.

**Beweis:**

$a, b$ sind Supremum von $M$
$M \leq a$, $M \leq b \Rightarrow a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$ ■

**Beispiel:**

$sup(\{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\})$

# Wiederholung

Angeordneter Körper:
Menge $K$ mit $+, \cdot, <$
so dass gewisse Eigenschaften erfüllt sind

### Beispiel:

$\mathbb{Q}$ sind ein angeordneter Körper
Sei $K$ angeordneter Körper, $M \subseteq K$ Teilmenge $a \in K$ ist <u>obere Schranke</u> von $M$, wenn $M \leq a$, d.h.: $x \leq a \quad \forall x \in M$

$a \in K$ ist <u>kleinste obere Schranke</u>, wenn $\left\{ \begin{array}{l} 1.\ M \leq a \\ 2.\ \text{Wenn } b < a \text{, dann } \underline{\text{nicht}}\ M \leq b \end{array} \right\}$ Bezeichnung $a = sup(M)$

### Beispiel:

$K = \mathbb{Q} \qquad M = \left\{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, ? \right\}$

### Behauptung

$sup(M) = 0$

### Beweis:

1. Zeige: $M \leq 0$, d.h.: $\frac{1}{n} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ✓
2. Wenn $b = \mathbb{Q},\ b < 0$, dann nicht $M \leq b$

Schreibe $b = \frac{m}{n},\ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$
$b < 0$ heißt $m < 0,\ m \leq -1$
$b = \frac{m}{n} \leq \frac{-1}{n} \leq \frac{-1}{n+1} \in M$
$\Rightarrow M \nleq b$ (nicht $M \leq b$) ∎

# Vollständigkeit

## 2.11 Definition Vollständigkeit

Ein angeordneter Körper $K$ heißt Dedekind-vollständig, wenn jede nach oben beschränkte Teilmenge von $K$ eine kleinste obere Schranke hat (die Element $K$ ist).

## 2.12 Satz ($\mathbb{R}$ einziger vollständiger Körper)

Es gibt genau einen Dedekind-vollständigen, angeordneten Körper $K$
Dieser heißt Körper der reellen Zahlen
<u>Bezeichnung</u> $\mathbb{R}$
(Beweis ausgelassen)

## 2.13 Satz (Unbeschränktheit von $\mathbb{N}$)

Die Teilmenge $\mathbb{N}$ von $\mathbb{R}$ ist unbeschränkt

**Beweis:**

(verwende nur die Axiome)
Indirekter Beweis: Angenommen, $\mathbb{N}$ ist beschränkt

Vollständigkeit

$\mathbb{N}$ hat eine kleinste obere Schranke $a \in \mathbb{R}$
Es gilt $a - 1 < a \Rightarrow a - 1$ ist kleinste obere Schranke von $\mathbb{N}$ $n \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n + 1 \leq a \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow n \leq a - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Widerspruch!
Also Annahme falsch, d.h. $\mathbb{N}$ ist unbeschränkt ■

| | | |
|---|---|---|
| beschränkt | = | nach oben beschränkt und nach unten beschränkt |
| unbeschränkt | = | nicht nach oben beschränkt oder nicht nach unten beschränkt |

## 2.14 Folgerung (Prinzip des Archimedes)

Seien $x, y \in \mathbb{R},\ x > 0$, Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot x > y$
SKIZZE

**Beweis:**

$n \cdot x > y \Leftrightarrow n > \frac{y}{x}$ (weil $x > 0$)
$\mathbb{N}$ unbeschränkt und nicht nach oben beschränkt $\Rightarrow \frac{y}{x}$ ist keine obere Schranke von $\mathbb{N}$
$\Rightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{y}{x}$ ■

## 2.15 Folgerung

Sei $x \in \mathbb{R},\ x > 0$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$
SKIZZE

**Beweis:**

$\frac{1}{n} < x \Leftrightarrow 1 < n \cdot x \Leftrightarrow \frac{1}{x} < n$ (weil $x$ positiv)
$\frac{1}{x}$ keine obere Schranke von $\mathbb{N} \Rightarrow$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{x} < n$ ■

## 2.16 Satz

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$
Dann gibt es $a \in \mathbb{Q}$ mit $x < a < y$, man sagt $\mathbb{Q}$ liegen dicht in $\mathbb{R}$
SKIZZE

**Beweis:**

$y - x > 0$ Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < y - x$
Ansatz: $a = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$
Sei $M := \{m \in \mathbb{Z} | x < \frac{m}{n}\} = \{m \in \mathbb{Z} | nx < m\}$
$M$ ist nach unten beschränkt und nicht leer (wegen Archimedes)
$M$ hat Minimum
Sei $m = min(M)$
$m \in M \Rightarrow x < \frac{m}{n}$
$m - 1 \notin M \Rightarrow x \geq \frac{m-1}{n}$
$y - \frac{m}{n} = y - x + x - \frac{m}{n} > \frac{1}{n} + x - \frac{m}{n} = x - \frac{m-1}{n} \geq 0$
$y > \frac{m}{n}$ ■

# Wurzeln

## 2.17 Satz (Wurzel 2 nicht real)

Es gibt kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = 2$

### Beweis:

Angenommen $a\frac{m}{n} \in \mathbb{Q},\ a^2 = 2,\ m, n \in \mathbb{N}$
Kürze den Bruch $\Rightarrow \frac{m}{n}$ teilerfremd

$$a^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow m^2 \text{ gerade } \Rightarrow m \text{ gerade } \Rightarrow m = 2q,\ q \in \mathbb{N}$$

$$(2q)^2 = 2n^2 \Rightarrow 4q^2 = 2n^2 \Rightarrow 2q^2 = n^2 \Rightarrow n^2 \text{ gerade } \Rightarrow n \text{ gerade}$$

Widerspruch zur Annahme $m, n$ teilerfremd ■
SKIZZE WURZEL 2 $\Rightarrow \sqrt{2}$ sollte existieren

### Bemerkung:

Wenn $n \in \mathbb{N}$, keine Quadratzahl, dann gibt es kein $a \in \mathbb{Q}$ mit $a^2 = n$ (ähnlicher Beweis)

## 2.18 Satz

Sei $x \in \mathbb{R}, x \geq 0, n \in \mathbb{N}$
Dann gibt es genau ein $y \in \mathbb{R}, x \geq 0$ mit $y^n = x$
Bezeichnung: $x = \sqrt[n]{y}$

### Beweis:

später
Ansatz $sup\{a \in \mathbb{Q} \mid a^n \leq x\} =: y$ (sup existiert weil $\mathbb{R}$ Dedekind-vollständig)

## 2.19 Definition Potentzrechnung

Sei $x \in \mathbb{R},\ x > 0$ $\quad \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$
$n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ $\quad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

### Potenzrechnung

$x^{(a+b)} = x^a \cdot x^b,\ x^{a \cdot b} = (x^a)^b$ für $x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ a, b \in \mathbb{Q}$

### Bemerkung:

Später wir definiert: $x^a$ für $x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ a \in \mathbb{R}$

# 3 Folgen und Reihen reeller Zahlen

Grundbegriff der Analysis: Konvergenz

**Beispiel:**

Wenn $n \in \mathbb{N}$ immer größer wird, geht $\frac{1}{n}$ immer näher an Null.
Sei $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$

## 3.1 Definition Folge

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ d.h. jeder natürliche Zahl $n \geq 0$ wird eine reelle Zahl $a_n$ zugeordnet.

***Notation:***

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ *oder* $(a_n)_{\mathbb{N} \geq 0}$ *oder* $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$

**Variante**

Folgen, die bei $k \in \mathbb{Z}$ anfangen: $(a_n)_{\mathbb{N} \geq 0} = (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$

**Beispiel:**

1. konstante Folge: $a_n = a,\ a \in \mathbb{R}$ fest: $(a, a, a, a, a, \ldots)$
2. $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$
   $(a_n)_{n \geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots)$
3. $a_n = (-1)^n \qquad n > 0$
   $(1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$
4. $(\frac{n}{n+1})_{n \geq 0} n = (0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

## 3.2 Definition Konvergenz

Sei $(a_n)_{n \geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen

1. Eine Folge $(a_n)$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ wenn gilt: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$
   Dann heißt $a$ Grenzwert der Folge $(a_n)$

   ***Notation:***

   $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ *oder* $a_n \rightarrow a$ *für* $n \rightarrow \infty$
2. Die Folge $(a_n)$ heißt <u>Nullfolge</u>, wenn $a_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$
3. Die Folge $(a_n)$ ist divergent, wenn sie keinen Grenzwert hat.

**Beispiel:**

1. $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$

   **Behauptung**

   $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ SKIZZE

## Beweis:

Sei $\epsilon > 0$ wähle $N = 0$ für $n \geq N$ gilt $|a_k - a| = 0 < \epsilon$ ■

2. $a_n = (-1)^n = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$ SKIZZE

## Behauptung

$(a_n)$ ist divergent.

## Beweis:

Angenommen, $a \in \mathbb{R}$ ist Grenzwert der Folge.
Wähle $\epsilon = 1$. Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$
Wenn $n$ gerade: $a_n = 1$ $\quad |1 - a| < 1$ Wenn $n$ ungerade: $a_n = -1$ $\quad |-1 - a| < 1 \Rightarrow |1 + a| < 1$
$2 = |2| = |1 - a + 1 + a| \leq |1 - a| + |1 + a| < 2 \Rightarrow 2 < 2$
Widerspruch: Also ist $(a_n)$ divergent ■

## Wiederholung

Eine Folge $(a_n)_{n\in \mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen konvergiert gegen $a\in \mathbb{R}$ wenn gilt:
Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $N\in \mathbb{N}$ so dass $|a_1 \cdot a| < \epsilon$ für alle $n \geq \mathbb{N}$.
Bezeichnung $a_n \to a$ für $n \to \infty$ oder $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = a$

### Beispiel:

$\frac{1}{n} \to 0$ für $n \to \infty$ $\qquad (-1)^n$ divergiert
$(a_n)$ ist divergent, wenn sie gegen kein $a\in \mathbb{R}$ konvergiert

### Beispiel:

$(1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \dots)$ konvergiert gegen 0

## 3.3 Satz: (Eindeutigkeit der Grenzwerte)

Sei $(a_n)$ Folge reeller Zahlen und $a, b\in \mathbb{R}$ mit $a_n \to a$ und $a_n \to b$ für $n \to \infty$. Dann ist $a = b$

### Bemerkung:

Darum ist Bezeichnung $a = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ sinnvoll

### Beweis:

Angenommen $a \neq b$
Sei $\epsilon := \dfrac{|a-b|}{2}$ SKIZZE
Konvergenz: es gibt $N_1\in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \epsilon$, $N_2\in \mathbb{N}$ mit $|a_n - b| < \epsilon$ für $n \geq N_2$
Sei $n = max(N_1, N_2)$
$|a-b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \epsilon + \epsilon = |a-b|$
$\Rightarrow |a+b| < |a-b|$ Widerspruch
$\Rightarrow$nicht $a \neq b$, d.h. $a = b$ ■

## 3.4 Definition Beschränktheit von Folgen

Eine Folge $(a_n)$ reeller Zahlen heißt $\left\{\begin{array}{c}\text{nach oben beschränkt}\\ \text{nach unten beschränkt}\\ \text{beschränkt}\end{array}\right\}$ wenn die Menge $\{a_n \mid n\in \mathbb{N}_0\}$ dieselbe Eigenschaft hat.

## 3.5 Satz

Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist beschränkt.

### Beweis:

Angenommen $a_n \to a$ für $n \to \infty$
Wähle $\epsilon = 1$, Es gibt $N\in \mathbb{N}$ so dass $|a_n - a| < 1$ für $n \geq N$
Sei $C := max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|, |a| + 1\}$
Dann $|a_n| \leq C$ für $n \leq N - 1$
Für $n \geq N$ gilt:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \leq C$$

Somit $|a_n| \leq C$ für alle $n$
$-C \leq a_n \leq C$ für alle $n$
$\Rightarrow$Folge $(a_n)$ ist beschränkt.

**Bemerkung:**

Nicht jede beschränkte Folge konvergiert.
z.B. $((-1)^n)_{n\in \mathbb{N}_0}$ ist beschränkt, aber konvergiert nicht.

## 3.6 Definition Uneigentliche Konvergenz

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty$ wenn gilt:
Für jedes $C\in \mathbb{R}$ gibt es $N\in \mathbb{R}$ mit $a_m > C$ für alle $n \geq N$ SKIZZE

**Bemerkung:**

Alternative Terminologie:
"konvergiert uneigentlich"="divergiert bestimmt"

**Beispiel:**

1. $a_n = n$. $a_n \to \infty$
2. $a_n = (-1)^n$. $(0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots)$ konvergiert <u>nicht</u> uneigentlich gegen $\infty$

***Notation:***

$a_n \to \infty$ *für* $n \to \infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \infty$

## 3.7 Satz (Potenzwachstum)

Sei $x\in \mathbb{R}$, betrachte Folge $(x^n)_n \geq 0$

1. wenn $|x| > 1$ dann ist $(x^n)$ divergent
2. wenn $x > 1$ dann $x^n \to \infty$ für $n \to \infty$
3. wenn $|x| < 1$ dann ist $x^n \to 0$ für $n \to \infty$

**Beweis:**

2. Sei $x > 1$

   Schreibe $x = 1 + a$. Dann $a > 0$ Gegeben $C\in \mathbb{R}$
   $\underset{\text{Satz 2.9}}{\Rightarrow} \quad x^n = (1 + a)^n \geq 1 + n \cdot a$
   Archimedes: $\exists N\in \mathbb{N}$ mit $N \cdot a > C$ ✓

1. Sei $|x| > 1$ Dann $|x^n| = |x|^n$, $|x| > 1 \underset{2)}{\Rightarrow} |x^n|$ ist nicht beschränkt für $n \in \mathbb{N} \Rightarrow (x^n)$ divergiert

3. Sei $|x| < 1$ Wenn $x = 0 \Rightarrow x^n = 0$ für alle $n$ ✓
   Sei $0 < |x| < 1$
   Dann $\frac{1}{|x|} > 1$
   Gegeben sei $\epsilon > 0$
   Setze $C = \frac{1}{\epsilon}$
   $\underset{2)}{\Rightarrow}$ es gibt $N\in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{|x|^n} > C$ für $n \geq N \Rightarrow |x|^n < \epsilon$ für $n \geq N$ ■

## 3.8 Satz (Rechenregeln)

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen

Sei

$a_n \to a$ für $n \to \infty$
$b_n \to b$ für $n \to \infty$

Dann gilt:

1. $(a_n + b_n) \to a + b$ für $n \to \infty$
2. $(a_n \cdot b_n) \to a \cdot b$ für $n \to \infty$
3. Angenommen $b \neq 0$
Dann ist $b_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ für $n \to \infty$

## Definition

"fast alle"="alle bis auf endlich viele".

## Beweis:

1. Gegeben sei $\epsilon > 0$
Es gibt $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N_1$
Es gibt $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N_2$
Sei $N = max(N_1, N_2)$ für $n \geq N$ gilt:
$$|a_n + b_n - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \Rightarrow 1)$$
2. $(a_n)$ konvergiert $\Rightarrow$ ist beschränkt.
Es gibt $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
ohne Einschränkungen sei $C > |b|$
Rechne:
$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a_n \cdot b + a_n \cdot b - a \cdot b| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \geq |a_n| \cdot |b_n - b| + |b| \cdot |a_n - a|$$
Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $\left.\begin{array}{l} |a_n - a| < \frac{1}{2C} \cdot \epsilon \\ |b_n - b| < \frac{1}{2C} \cdot \epsilon \end{array}\right\}$ für $n \geq N$
Für $n \geq N$ gilt:
$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| < |a_n|\frac{1}{2c}\epsilon + |b|\frac{1}{2c}\epsilon \leq c \cdot \frac{1}{2c}\epsilon + c \cdot \frac{1}{2c}\epsilon = \epsilon \Rightarrow 2) \text{ gilt}$$
3. Sei $b \neq 0$
Wähle $\epsilon = \frac{1}{2}|b| > 0$ SKIZZE
Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$ für $n \geq N$
Dann gilt für $n \geq N$:
$$|b_n| = |b_n - b + b| = |b - b + b_n| = |b - (b - b_n)| \geq |b| - |b - b_n| > |b| - \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{2}|b|$$
Insbesondere $|b_n| \neq 0$ für $n \geq N$
Rechne:
$$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b \cdot b_n}\right| = \frac{1}{|b| \cdot |b_n|} \cdot |b_n - b| < \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b| \text{ für } n \geq N^1$$
Gegeben sei $\epsilon > 0$
Es gibt $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2}\epsilon$ für $n \geq N_1 \Rightarrow$ für $n \geq max(N_1, N_2)$ gilt:
$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} < \frac{2}{|b|^2} \cdot \frac{|b|^2}{2}\epsilon = \epsilon \Rightarrow 3) \text{ gilt}$$

■

<u>Zusatz</u> Wenn a_n $\to a$ und b_n $\to b$ für $n \to \infty$ dann gilt:

4. Für $C \in \mathbb{R}$ ist $C \cdot a_n \to C \cdot a$ für $n \to \infty$
5. $(a_n - b_n) \to a - b$ für $n \to \infty$
6. Wenn $b \neq 0$ dann $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ für $n \to \infty$

## Beweis:

Übung

[1] NR: $|b_n| > \frac{1}{2}|b| \Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b_n|}$

## Wiederholung

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)$ konvergiert uneigentlich gegen $\infty$ wenn gilt:
Für jedes $C \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > C$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

$(a_n)$ konvergiert uneigentlich gegen $-\infty$ wenn $(-a_n)$ gegen $\infty$ konvergiert.

***Notation:***

$a_n \to \infty \qquad$ *für* $n \to \infty$
$a_n \to -\infty \qquad$ *für* $n \to \infty$

### Beispiel:

$a_n = n^2 \to \infty$
$a_n = -n^2 \to -\infty$
$a_n = (-1)^n \cdot n^2$
$(0, -1, 4, -9)$ konvergiert weder gegen $\infty$ noch gegen $-\infty$

### Rechenregeln

Angenommen $(a_n), (b_n)$ sind konvergente Folgen.

1. $(a_n + b_n) \to a + b$
2. $(a_n \cdot b_n) \to ab$
3. $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$
4. $c \cdot a_n \to c \cdot a$
5. $a_n - b_n \to a - b$
6. $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$

### Beweis:

6. $3) \Rightarrow \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$
   $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b}$
   $2) \Rightarrow a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ ■

### Beispiel:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 10 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 0 | 0 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{6}{19}$ | $\frac{90}{201}$ | $\frac{9900}{20001}$ |

Vermutung: $a_n \to \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$

Rechenregel 6 anwenden:

1. Versuch:
   $a_n = \frac{b_n}{c_n}$
   $b_n = n^2 - n; c_n = 2n^2 + 1$
   $(b_n)$ und $(c_n)$ sind divergend. Schlecht.

2. Versuch:

$$\frac{n^2 - n}{2n^2 + 1} = \frac{n^2(1 - \frac{1}{n})}{n^2(2 + \frac{1}{n^2})} \quad \text{für } n \geq 1 = \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{b_n}{c_n} \quad \text{mit } b_n := 1 - \frac{1}{n},\ c_n = 2 + \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \to 1 - 0 = 1 \qquad \text{für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 + 0 = 2 \qquad \text{für } n \to \infty$$

$$\Rightarrow a_n \to \frac{1}{2} \qquad \text{für } n \to \infty$$

## 3.9 Satz

Seien $a_n \to a$, $b_n \to b$ zwei konvergente Folgen reeller Zahlen.
wenn $a_n \leq b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ dann ist $a \leq b$.

### Beweis:

Angenommen: $a > b$

Wähle $\epsilon := \dfrac{a-b}{2} > 0$

Es gibt $N \in \mathbb{N}$ so dass: $\left.\begin{array}{l} |a_n - a| < \epsilon \\ |b_n - b| < \epsilon \end{array}\right\}$ für $n \geq N \Rightarrow a_n > a - \epsilon$

$$= a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = b + \frac{a-b}{2} = b + \epsilon > b_n \Rightarrow a_n > b_n \qquad \text{für } n \geq \mathbb{N}$$

Widerspruch zur Annahme.
$a_n \leq b_n$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ ■

## 3.10 Definition Reihen

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge reeller Zahlen.
Bilde eine Folge:

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \end{aligned}$$

Die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ heißt Reihe mit den Gliedern $a_n$.
$s_n$ heißen die <u>Partialsummen</u> der Reihe.
Bezeichnung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ oder } a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Wenn $s_n \to s \in \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ dann schreiben wir:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$$

Summe der Reihe.

<u>Achtung</u> Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ hat <u>zwei</u> Bedeutungen:

1. die Folge $(s_n)$

   oder

2. deren Grenzwert

**Beispiel:**

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots \text{ ist die Folge } (1, 2, 3, 4, \ldots) = (n + 1)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots \text{ ist die Folge } (1, 3, 6, 10, \ldots) = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

3.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots \text{ ist die Folge } \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

Vorüberlegung
$$\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$
$$s_n := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Teleskopsumme
$\frac{1}{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$
Summe der Reihe:
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

■

**Bemerkung:**

Jede Folge kann man auch als Reihe Schreiben. (Differenzen bilden)
z.B.: die Folge der Primzahlen:
$$(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19)$$
ist die Reihe:
$$(2 + 1 + 2 + 4 + 2 + 4 + 2 + \ldots)$$
Goldbachsche Vermutung: in dieser Reihe kommt die Zahl 2 unendlich oft vor.

## 3.11 Satz (Die geometrische Reihe)

Sei $x \in \mathbb{R}$

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$ wenn $\mid x \mid < 1$

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ divergiert wenn $\mid x \mid \geq 1$

a wenn $|x| < 1$
dann folgt $\sum k = 0\infty a_k = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x} \cdot x^n) = \frac{1}{1-x}$

b wenn $|x| > 1$
dann $(x^n)$ divergent $\Rightarrow$ $(\frac{x}{1-x} \cdot x^n)$ divergent
denn $\frac{x}{1-x} \neq 0 \Rightarrow \binom{?}{?}$

**Beweis:**

$$x = 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (1 + 1 + 1 + \ldots) \text{ divergiert, ok}$$

Sei nun $x \neq 1$
Bekannt aus der Übung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x}{1 - x} \cdot x^n$$

Potenzenwachstum
$x^n \to 0$ für $n \to \infty$ wenn $|x| < 1$
$(x^n)$ divergiert, wenn $(|x| \geq 1$ und $x \neq 1)$

## 3.12 Satz

Wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert, dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

**Beweis:**

Gegeben sei $\epsilon > 0$
Sei $a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} (s_n)$ mit $s_n = a_0 + \ldots + a_n$
Es gibt $N \; in \mathbb{N}$ mit $|s_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N$

$$\begin{aligned}
|a_n| &= |s_n - s_{n-1}| \\
&= |s_n - a + a - s_{n-1}| \\
&\leq |s_n - a| + |a - s_{n-1}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

für $n \geq N + 1$
$\Rightarrow a_n \to 0$ für $n \to \infty$

## 3.13 Satz, die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \text{ divergiert}$$

**Beweisidee**

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \ldots$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots = \infty$$

# Wiederholung

Sei $(n_n)$ eine Folge reeller Zahlen.
Die Reihe mit den Gliedern $a_n$ ist die Folge $s_n = a_0 + a_1 + ... + a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Bezeichnung: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

Wenn $S_n \to a$ für $n \to \infty$

Schreibe: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$

## Beispiel: Geometrische Reihe

$|x| = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ für $x = 0$ setzte $0^0 = 1$

Harmonische Reihe

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ Konvergiert nicht.

# 3.14 Satz Rechenregeln für Reihen

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ zwei konvergente Reihen. Dann:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = a + b$

2. Für $c \in \mathbb{R}$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot a$

## Beweis:

folgt aus 3.9.

## Bemerkung:

Produkte von Reihen sind komplizierter.
Korrektur Primzahlen-Vermutung: es gibt $\infty$ viele Primzahlen $p$ so dass $p + 2$ auch Prim ist.
Goldbach-Vermutung: Jede gerade natürliche Zahl ist die Summe von zwei Primzahlen.

# 4 Konvergenzsätze

Erinnerung: $\mathbb{R}$ ist Dedekind-vollständig. Das heißt, jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge $M \subset R$ hat eine kleinste obere Schranke $sup(M) \Rightarrow$ Existenz von Grenzwerten

## 4.1 Definition Monotone Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt
monoton wachsend, wenn $an + 1 \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
monoton fallend, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
streng monoton wachsend, wenn $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$
streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

### Beispiel:

$a_n = n$ ist streng monoton wachsend
$a_n = \frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend

## 4.2 Satz

1. Jede nach oben beschränkte monoton wachsende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent
   BILD
2. Jede nach unten beschränkte monoton fallende Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent
   BILD

### Beweis:

Sei $(a_n)$ nach oben beschränkt, monoton wachsend
Setze $a := sup(\{a_n | n \in \mathbb{N}\})$
dann

1. $a_n \leq a$ für alle $n$
2. Für jedes $\epsilon > 0$ ist $a - \epsilon$ <u>keine</u> obere Schranke, d.h. es gibt $N \in N$ so dass $a_N > a - \epsilon$
   Für $n \geq N$ gilt
   $a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a$
   weil $(a_n)$ monoton wachsend
   $\Rightarrow a - \epsilon < a_N \leq a_n \leq a \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$
   Somit $a_n \to a$ für $n \to \infty$ $\quad q.e.d.$
   Monoton fallend: analog

## Reihen mit nicht-negativen Gliedern

### Bemerkung:

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ Reihe reeller Zahlen
Die Folge der Partialsummen ist monoton wachsend $\Leftrightarrow a_n \geq 0$ für $n \geq 1$

## 4.3 Satz

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k$ konvergiert, genau dann, wenn sie beschränkt ist (Das heißt die Folge der Partialsummen ist beschränkt) ■

## 4.4 Definition Majorante

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_n \geq 0$ für alle $k$

Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt <u>Majorante</u> von $\sum a_k$ wenn $a_k \leq b_k$ für alle $k$

## 4.5 Satz Majorantenkriterium

Wenn eine Reihe mit nicht-negativen Gliedern eine konvergente Majorante hat, dann konvergiert sie.

### <u>Beweis:</u>

Sei $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle $k \geq 0$
Es gilt $a_0 + ... + a_n \leq b_0 + ... + b_n$
$\sum b$ konvergiert $\Rightarrow (b_0 + ... + b_n)_{n \geq 0}$ beschränkt
$\Rightarrow ((a_0 + ... + a_n)_{n \geq 0})$ beschränkt $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert.

### <u>Beispiel:</u> 4.6

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k \cdot (k+1)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} \text{ ist Majorante von } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} \text{ konvergiert (bekannt)}$$

## 4.6 Satz Quotientenkriterium

Sei $C \in \mathbb{R}$, $(a_n)$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ für alle $n$ <u>und</u> $a_{n+1} \leq C \cdot a_n$ für fast alle $n$
$0 \leq C < 1$
Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

**Beweis:**

Konvergenz ändert sich nicht, wenn endlich viele $a_n$ geändert werden.
Also kann man annehmen, dass $a_{n+1} \leq C \cdot a_n$ für alle $n$ gilt.
Dann gilt $a_1 < C \cdot a_0$
$a_2 < C \cdot a_1 \leq C \cdot C \cdot a_0 = C^2 \cdot a_0$
$a_3 < C \cdot a_2 \leq C \cdot C \cdot a_1 = C^3 \cdot a_0$
etc. $\Rightarrow a_n \leq C^n \cdot a_0$
Somit ist $\sum_{k=0}^{\infty} C^k \cdot a_0$ konvergente Majorante von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (Geometrische Reihe)

## 4.7 Beispiel Die Exponentialreihe

$$exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \text{ für } x \in \mathbb{R}, x \geq 0$$

Setze $a_k = \frac{x^k}{k!}$

$$a_n + 1 = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \cdot \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n+1} \cdot a_n \leq \frac{1}{2} a_n$$

$\Rightarrow$ Quotientenregel ist erfüllt.
Reihe $exp(x)$ konvergiert.
Bezeichnung:

$$exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \in \mathbb{R}$$

## Bezeichnung

$$exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e \text{ (Eulerische Zahl)}$$

## 4.8 Leibnitz-Kriterium

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge[1] mit $a_n \geq 0$ für alle $n$
Dann konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$$

**Beispiel:**

$$a_k = \frac{1}{k+1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = log(2)$$

**Beweis:**

Sei $s_n = a_0 + ... + a_n$

## Behauptung:

$S_{2n+1} \leq S_{2n+3} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$
Rechne
$S_{2n+2} - S_{2n} = -a_{2n+1} + a_{2n+2} \leq 0 \Rightarrow (3)$
$S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+3} \leq 0 \Rightarrow (2)$
$S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+2} - a_{2n+3} \leq 0 \Rightarrow (1)$

[1] $a_n \to 0$ für $n \to \infty$

Die Folge

$b_n = S_{2n}$
$c_n = S_{2n+1}$

sind beschränkt und monoton (fallend bzw. steigend)
$\Rightarrow b_n$ und $c_n$ konvergieren
Sei

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n \qquad c = \lim_{n\to\infty} c_n$$

$$c - b = \lim_{n\to\infty} (c_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} (a_{2n+1}) = 0$$

weil $(a_n)$ Nullfolge

## 4.9 Behauptung

$S_n \to b$ für $n \to \infty$

Gegeben sei $\epsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N}$ so dass für $n \leq N$:
$|b_n - b| < \epsilon, |c_n - c| < \epsilon$
Somit für $n \geq 2N + 1$
$|S_n - b| < \epsilon$ also $S_n \to b$ ∎

## Wiederholung Konvergenzsätze

- Eine monoton wachsende und beschränkte Folge konvergiert zwangsläufig.
- Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k$ konvergiert $\Leftrightarrow$die Folge der Partialsummen $(S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt

**Beispiel:**

$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \ldots$ ist unbeschränkt

**Beispiel:**

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$

**Leibnitz**

Sei $(a_n)$ monoton fallende Nullfolge.
Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot a_k$

**Beispiel:**

$(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}) \ldots$ konvergiert.

## 4.10 Satz Verdichtungslemma von Cauchy

Sei $(a_n)$ monoton fallende Nullfolge.
Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn die verdichtete Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k \cdot a_{2^k} = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 \ldots$ konvergiert.

**Beispiel:**

$a_k = \frac{1}{k} \qquad (k \geq 1)$
$2^k \cdot a_{2^k} = 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = 1$

## Satz

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$ konvergent $\Leftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{\infty} 1$ konvergent (ist nicht der Fall.)

**Beweis:**

Sei $b_n = \sum\limits_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k$
Für $2^n \leq k \leq 2^{n+1} - 1$ ist $a_{2^n} \geq a_k \geq a_{2^{n+1}-1} \geq a_{2^{n+1}} \Rightarrow 2^n \cdot a_{2^n} \geq b_n \geq 2^n \cdot a_{2^{n+1}}$
Wenn $\sum\limits_{k\geq 0} 2^k \cdot a_2^k$ beschränkt $\Rightarrow \sum\limits_{k\geq 0} b_k$ beschränkt $\Rightarrow \sum\limits_{k\geq 0} a_k$ beschränkt
Hier immer beschränkt $\Leftrightarrow$konvergent
Wenn $\sum\limits_{k\geq 0} 2^k \cdot a_k$ beschränkt $\Rightarrow \sum\limits_{k\geq 0} b_k$ beschränkt $\Rightarrow \sum\limits_{k\geq 0} 2^k \cdot a_2^{k+1}$ beschränkt $\Leftrightarrow \sum\limits_{k\geq 0} 2^{k+1} \cdot a_2^{k+1}$ beschränkt $\Leftrightarrow \sum\limits_{k\geq 0} 2^k \cdot a_2^k$ beschränkt
Das zeigt den Satz.

**Anwendung**

**Erinnerung**

Für $x \geq 0$ und $a \in \mathbb{R}$ wird später $x^a \in R$ definiert
Wenn $a = \frac{n}{m}$ mit $m \geq 1$ d.h. $a \in \mathbb{Q}$ dann $x^a = \sqrt[m]{x^n}$.
Wenn $x > 1$ dann gilt:

$$x^a = \begin{cases} > 1 \text{ wenn } a > 0 \\ = 1 \text{ wenn } a = 0 \\ < 1 \text{ wenn } a < 0 \end{cases}$$

## 4.11 Satz

Sei $a \in \mathbb{R}$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konvergiert genau dann, wenn $a > 1$

**Beweis:**

Wenn $a \leq 0$ dann $\frac{1}{k^a} \geq 1 \Rightarrow$Reihe divergiert.
Sei $a > 0$, sei $a_n = \frac{1}{n^a}$
$n < n+1 \Rightarrow n^a < (n+1)^a \Rightarrow a_n > a_{n+1}$ Somit $(a_n)$ monoton fallend.
$\lim_{n\to\infty} n^a = \infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0 \Rightarrow$Verdichtungslemma ist anwendbar.
Bilde $2^n \cdot a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^a} = 2^n \cdot 2^{-n\cdot a} = 2^{n(1-a)} = (2^{1-a})^n = x^n$
mit $x := 2^{1-a}$
Erhalte: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$ konvergiert $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergiert $\Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow x < 1 \Leftrightarrow 2^{1-a} < 1$
$\Leftrightarrow 1 - a < 0 \Leftrightarrow a > 1$ ■

Beziehung: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} = \zeta(a)$ für $a > 1$
Riemannsche Zetafunktion Spezielle Werte:
$\zeta(2) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
$\zeta(4) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$
$\zeta(6) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$
Frage: Für welche z ist $\zeta(z) = 0$?

# Teilfolgen

## 4.12 Definition Teilfolge

Sei $(a_n)$ eine Folge reeller Zahlen.
Eine Teilfolge von $(a_n)$ ist eine Folge der Form $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ wobei $n_0, n_1, n_2, \dots$ streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{N}_0$ ist.

**Beispiel:**

$(a_n) = (1, x, x^2, x^3, x^4 \dots)$
$(n_k) = (1, 4, 9, 16) \rightsquigarrow$ Teilfolge $(x, x^4, x^9, x^{16}, \dots)$

## 4.13 Bemerkung

Wenn $a_n \to a$ für alle $n \to \infty$ dann konvergiert jede Teilfolge von $(a_n)$ gegen $a$ (Präsenzübung Nr. 9)

## Schlüsselsatz

## 4.14 Lemma

Jede Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\geq 0}$ hat eine monotone Teilfolge.

### Beweis:

Wir nennen $n \in \mathbb{N}_0$ extrem wenn $a_n \geq a_m$ für alle $m \geq n$
Unterscheide zwei Fälle:

- Es gibt unendlich viele extreme $n \in \mathbb{N}$
  Dies seien $n_0, < n_1, n_2 \dots$
  Dann $a_{n_0} \geq a_{n_1} \geq a_{n_2} \dots$
  Weil $n_0$ extrem … weil $n_1$ extrem.
  $\rightarrow$ monoton fallende Teilfolge gefunden
- Es gibt nur endlich viele extreme $n$
  Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ s.d. gilt: $m \geq n_0 \Rightarrow m$ nicht extrem.
  $n_0$ nicht extrem $\Rightarrow$ es gibt $n_1 \geq n_0$ mit $a_{n_1} > a_{n_0}$ insbesondere $n_1 > n_0$
  $n_1 \quad \Rightarrow \quad n_2 \geq n_1$ mit $a_{n_2} > a_{n_1}$ insbesondere $n_2 > n_1$
  $n_2 \quad \Rightarrow \quad n_3 \geq n_2$ mit $a_{n_3} > a_{n_2}$ insbesondere $n_3 > n_2$
  usw.
  Erhalte $n_0 < n_1 < n_3 < \dots$ mit $a_{n_0} < a_{n_1} < a_{n_2} < \dots$
  $\rightarrow$ streng monoton wachsende Teilfolge gefunden. ■

## 4.15 Satz Bolzano-Weierstraß

Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergernte Teilfolge.

### Beweis:

Es gibt ein monotone Teilfolge (Lemma 4.14)
Diese ist beschränkt $\Rightarrow$konvergent.

## 4.16 Definition Cauchyfolge

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\geq 0}$ heißt Cauchyfolge wenn gilt:
Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ sodass für $m, n \geq N$ gilt: $|a_n - a_m| < \epsilon$

## 4.17 Satz Cauchykriterium

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

### Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$
Gegeben sei $\epsilon > 0$. Es gilt $N \in \mathbb{N}$ so dass $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für $n \geq N$
Für $n, m \geq N$ gilt:
$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
$\Rightarrow(a_n)$ ist eine Cauchyfolge

"$\Leftarrow$" Sei $(a_n)$ eine Cauchyfolge

#### Behauptung

$(a_n)$ ist beschränkt

### Beweis:

Wähle $\epsilon = 1$ Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < 1$ für $m, n \geq N$
Sei $C = max\{|a_0|, |a_1|, |a_2| \dots |a_N|, |a_N| + 1\}$
Dann $|a_n| \leq C$ für alle $\mathbb{N}$
$(n \geq N \Rightarrow |a_n - a_N| < 1 \Rightarrow |a_n| < |a_N| + 1)$
Also ist $(a_n)$ beschränkt
$\underset{Lemma}{\Rightarrow}$ $(a_n)$ hat eine monotone Teilfolge $(a_{n_k})_{k \geq 0}$ diese ist beschränkt $\Rightarrow$konvergent.
Sei $\lim\limits_{k \to \infty} (a_{n_k})$

### Behauptung

$a_n \to a$ für $n \to \infty$
Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Es gibt $n \in \mathbb{N}$ so dass

1. $n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\epsilon}{2}$
2. $k \geq N \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}$

Sei $k \geq N$

### Bemerkung:

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist $n_k \geq k$
$|a_k - a| = |a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
Also $a_k \to a$ für $n \to \infty$ ■

## Umformulierung für Reihen

## 4.18 Satz (Cauchy-Kriterium für Reihen)

Eine reelle Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn gilt:
Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n, m \geq N,\ n \leq m$

$$\left| \sum_{k=n}^{m} \right| < \epsilon$$

### Beweis: Partialsummen

$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$
$\sum\limits_{k=n}^{m} = s_m - s_{n-1}$
Damit ist 4.19 äquivalent zu 4.18

## Wiederholung

Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)$ ist eine Cauchyfolge wenn gilt:
Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so dass für $m, n \geq \mathbb{N}$ gilt $|a_n - a_m| < \epsilon$
$(a_n)$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $(a_n)$ ist Cauchyfolge
Für Reihen: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert $\Leftrightarrow$ Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für $m, n \geq \mathbb{N}$ mit $m \geq n$ ist $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_n\right| < \epsilon$

## Absolute Konvergenz

## 4.19 Definition Absolute Konvergenz

Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ heißt absolut konvergent wenn die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert

## 4.20 Satz

Jede absolut konvergente Reihe konvergiert

### Beweis:

Verwende Cauchy-Kriterium für Reihen
Sei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut von konvergent.
$\Rightarrow$Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit:
Für $n \geq m \geq N$ gilt $\sum\limits_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=m}^{n} a_k\right| \underset{\substack{\uparrow \\ Dreiecksungleichung}}{\leq} \sum\limits_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon \Rightarrow \sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ konvergiert ■

### Bemerkung:

Umkehrung gilt nicht. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$
konvergiert (Leibnitz)
denn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{1}{k}\right| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert

## 4.21 Definition Majorante

Eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ heißt Majorante der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, wenn $|a_k| \leq b_k$ für alle k
(schon gewesen wenn $a_k \geq 0$)

## 4.22 Satz (Majorantenkriterium)

Wenn eine Reihe eine konvergente Majorante hat, dann konvergiert sie absolut. Beweis von Satz 4.5 ■

# Umordnung von Reihen

## 4.23 Definition Umordnung von Reihen

Eine Umordnung einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k}$ wobei $(n_0, n_1, n_2 \ldots)$ eine Folge natürlicher Zahlen ist, in der jedes $n \in \mathbb{N}_0$ genau einmal vorkommt.

## 4.24 Satz

Jede Umordnung einer <u>absolut</u> konvergenten Reihe ist wieder absolut konvergent und hat den gleichen Grenzwert.
Im Gegensatz dazu gilt:

## 4.25 Satz

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine konvergente, nicht absolut konvergente, Reihe. Für jedes $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ hat $\sum a_k$ eine Umordnung, die gegen $c$ konvergiert.

### <u>Beispiel:</u>

Eine Reihe $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \ldots$ konvergiert gegen 0. Konvergiert aber nicht absolut:
Folge:

$$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \ldots \to 0\right) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{k} = \infty$$

Produziere Umordnung, die gegen $\infty$ konvergiert:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{16}}_{\geq \frac{1}{2}} - \frac{1}{5} + \ldots$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}_{\frac{1}{6}} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}_{\frac{3}{10}} + \ldots = \infty$$

$$\frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{3}{10}$$

Beweise von 4.24, 4.25 eventuell später.

# Produkte von Reihen

Frage: was ist

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)?$$

## 4.26 Definition Produkt von Reihen

Das Cauchy-Produkt von zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit

$$c_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b_{n-k} = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + a_2 \cdot b_{n-2} + \ldots + a_n \cdot b_0$$

2-dimensionale Anordnung der $a_k \cdot b_l$ SKIZZE

## 4.27 Satz

Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen, mindestens eine von ihnen absolut konvergent. Dann konvergiert ihr Cauchy-Produkt $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a, \sum_{k=0}^{\infty} b_k = b \sum_{k=0}^{\infty} c_k = a \cdot b$

### Beweis von 4.27:

Sei $\sum a_k$ absolut konvergent, $\sum b_k$ konvergent, so zeige $\sum c_k$ konvergent, $c_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot b_{n-k}$

Schreibe: $s_n = a_0 + \ldots + a_n$
$t_n = b_0 + \ldots + b_n$
$u_n = c_0 + \ldots + c_n$
$s_n \to a, t_n \to b$ (*)

Zeige $u_n \to a \cdot b$

(*)$\Rightarrow s_n \cdot b \to a \cdot b$ Zeige $s_n \cdot b - u_n \to 0$

$u_n = a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0) + \ldots + a_n \cdot b_0 = a_1 \cdot t_{n-1} + a_2 \cdot t_{n-2} + \ldots + a_n \cdot t_0$

$s_n \cdot b = a_0 \cdot b + a_1 \cdot b + a_2 \cdot b + a_3 \cdot b + \ldots + a_n \cdot b$

$s_n \cdot b - u = a_0 \cdot (b - t_n) + a_1 \cdot (b - t_{n-1}) + a_2 \cdot (b - t_{n-2}) + a_3 \cdot (b - t_{n-3}) + \ldots + a_n \cdot (b - t_0) \underset{?}{\to} 0$

Sei $C \in \mathbb{R}$ mit $|b| \leq C$ und $|b - t_n| \leq C$ für alle n

Sei $\sum_{k=0}^{\infty} |a_n| = a^*$.
Gegeben sei $\epsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass $C \cdot (|a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \ldots) < \frac{\epsilon}{2}$
(geht weil $\sum |a_k|$ konvergiert)
und $|b - t_n| < \frac{\epsilon}{2a^*}^{(2)}$ für alle $n \geq N$
(geht weil $b - t_n \to 0$ für alle $m \to \infty$)

### Bemerkung:

Wenn $a^* = 0$ dann $a_n = 0$ für alle k. Dann alles klar. Für alle $n \geq 2N$ gilt:

$$|a_0(b - t_n) + a_1(b - t_{n-1}) + \ldots + a_n(b - t_0)| \leq |a_0| \cdot |(b - t_n)| + |a_1| \cdot |(b - t_{n-1})| + \ldots + |a_n| \cdot |(b - t_0)|$$

$$\leq (|a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots |a_N|) \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ wegen (2)}}{\frac{\epsilon}{2a^*}} + (|a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \ldots |a_n|) \cdot C \leq a^* \cdot \frac{\epsilon}{2a^*} + \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Also gilt: $s_n - u \to 0$ für $n \to \infty$ ■

Zusatz Wenn $\sum a_k$ und $\sum b_k$ beide absolut konvertieren, dann auch das Cauchy-Produkt $\sum c_k$

### Beweis:

Sei $\sum a_k^*$ das Cauchy-Produkt von $\sum |a_k|$ und $\sum |b_k|$. Beide konvergieren $\Rightarrow \sum_n c_n^*$ konvergiert

d.h. $c_n^* = |a_0 \cdot b_n| + |a_1 \cdot b_{n-1}| + \ldots + |a_n \cdot b_0| \geq |a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \ldots + a_n \cdot b_0| = |c_n|$

Also $\sum_n c_n^*$ ist konvergente Majorante von $\sum_n c_n \Rightarrow \sum_n c_n$ konvergent absolut ■

### Beispiel:

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1 - + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \ldots$ konvergiert (Leibnitz)
Das Cauchy-Produkt der Reihe von $\sum a_k$ und $\sum a_k$ konvergiert nicht.

## 4.28 Beispiel

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Exponentialreihe $exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ absolut konvergent.

Es gilt $\boxed{exp(x) \cdot exp(y) = exp(x+y)}$ Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.

**Beweis:**

Betrag von $\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x^k}{k!} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{k!} = exp(|x|)$ konvergiert (bekannt, Quotientenkriterium)

Berechne Cauchy-Produkt $exp(x) \cdot exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k$

$$c_k = \frac{x^0}{0!} \cdot \frac{x^n}{n!} + \frac{x^1}{1!} \cdot \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \cdot \frac{y^0}{0!} = \frac{1}{n!} \cdot \left( \frac{n!}{0! \cdot n!} \cdot x^0 y^n + \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} \cdot x^1 y^{n-1} + \ldots + \frac{n!}{n! \cdot 0!} \cdot x^n y^0 + \right)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} binonk x^k y^{n-k} \underset{binomische Formel}{=} \frac{1}{n!} (x+y)^n \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} c_k = exp(x+y)$$

■

# 5 Abbildungen und Funktionen

## 5.1 Definition Abbildung

Seien $A, B$ Mengen. Eine Abbildung von $A$ nach $B$ ist eine Vorschrift, die jedem Element von $A$ ein Element von $B$ zuordnet.

***Notation:***
$f : A \to B,\ a \mapsto f(a)\ a \in A$

$A$ heißt Definitionsbereich von $f$
$B$ heißt Wertebereich von $f$

**Beispiel:**

1. Alle Personen in $L1 \mapsto \mathbb{N}$
   $P \mapsto$ Geburtsjahr von $P$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$
   $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},\ g(x) = x^2$
   $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}\ h(x) = x^2$

   **Bemerkung:**

3. $f, g, h$ sind verschieden
   Sei $M$ Menge. Die Identität von $M$ ist die Abbildung $id_M : M \to M,\ id_M(x) = x$

## 5.2 Definition In-/Sur-/Bijektivität

Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt:

1. injektiv wenn gilt: Für alle $a, a' \in A$ mit $f(a) = f(a')$ ist auch $a = a'$
2. surjektiv wenn gilt: Für jede $b \in B$ gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = b$
3. bijektiv wenn $f$ injektiv und surjektiv ist

**Bemerkung:**

$$f \text{ ist} \left\{\begin{array}{c}\text{injektiv}\\ \text{surjektiv}\\ \text{bijektiv}\end{array}\right\} \text{genau dann wenn für jedes } b \in B \left\{\begin{array}{c}\text{höchstens}\\ \text{mindestens}\\ \text{genau}\end{array}\right\} \text{ein } a \in A \text{ mit } f(a) = b$$

**Beispiel:**

$f, g, h$ wie oben

**f** nicht surjektiv: es gibt kein $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = -1$
nicht injektiv: $f(-2) = 4 = f(2), 2 \neq -2$.

**g** ist surjektiv, denn für jedes $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $f(\sqrt{b}) = b$ also gibt es $b \in \mathbb{R}_a$
ist nicht injektiv (wie $f$)

**h** surjektiv wie g. $\left(\sqrt{b} \geq 0\right)$
injektiv, denn: Wenn $a, a' \geq 0$ und $a^2 = (a')^2$ dann $a = a'$ also $h$ bijektiv.

## 5.3 Definition Komposition

Seien $f : A \to B, g : B \to C$ Abbildungen
Die Komposition von $f$ und $g$ ist die Abbildung
$g \circ f : A \to C, (g \circ f)(a) := g(f(a))$
Sprich $\circ$: "nach", "verkettet"

## 5.4 Satz

Eine Abbildung $f : A \to B$ ist bijektiv $\Leftrightarrow$ es gibt eine Abbildung $g : B \to A$ mit $f \circ g = id_B$
(d.h. $f(g(b)) = b$ für alle $b \in B$ $g(f(a)) = a$ für alle $a \in A$)

### Definition

Wenn $f : A \to B$ bijektiv ist, heißt die eindeutige Abbildung $g : B \to A$ wie oben die Umkehrabbildung (inverse Abbildung) von $f$ Bezeichnung: $g = f^{-1}$.

### Beweis:

Angenommen, $g : B \to A$ gegeben mit $f \circ g = id_B, g \circ f = id_A$ [1]
$f$ surjektiv: Sei $b \in B$. $b = f(g(b)) = f(a)$ mit $a = g(b)$ ✓
$f$ injektiv: Sei $a, a'$ mit $f(a) = f(a')$ zeige $a = a'$
$a = g(f(a)) = g(f(a')) = a'$ ✓

Angenommen, $f$ ist bijektiv, zeige $g$ existiert.
Gegeben sei $b \in B$ $f$ bijektiv $\Rightarrow$ es gibt genau ein $a \in A$ mit $f(a) = b$ Setze $g(b) := a$ Das definiert Abbildung $g : B \to A$
Zeige $g \circ f = id; f \circ g = id$
$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = b$ wobei $a$ wie eben

Zeige: $(g \circ f)(a)$ für alle $a \in A$
$f$ injektiv: Reicht $f(g(f)a))) = f(a)$
Das gilt weil $f \circ g = id_B$ ✓

Eindeutigkeit von $g$:
Angenommen, $g^* : B \to A$ erfüllt $g^* \circ f = id_A, f \circ g^* = id_B$
Dann gilt: $g = g \circ id_B = g \circ f \circ g^* = id_A \circ g^* = g^*$ ■

### Beispiel:

Bewiesen 5.12

- $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, f(x) = x^k$ bijektiv $(k \geq 1)$
  Die Umkehrabbildung $f^{-1}$ heißt k-te Wurzelabbildung $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$
- exp: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ $exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}$ (absolut konvergente Reihe) ist bijektiv. Die Umkehrabbildung heißt Logarithmus. bew. $log = exp()^{-1}\mathbb{R}_{\geq} \to \mathbb{R}_a$

## Bild und Urbild

## 5.5 Definition

Sei $f : A \to B$ Abbildung

1. Für eine Teilmenge $X \subset A$ ist
   $f(x) := \{f(x)|x \in X\} \subseteq B$
   das Bild von $X$ unter $f$
2. Für eine Teilmenge $Y \subseteq B$ ist $f^{-1} := \{a \in A|f(a) \in Y\} \subseteq A$ das Urbild von $Y$ unter $f$

Vorsicht nicht Urbild und Umkehrabbildung verwechseln.

[1] Dies gilt, weil $g$ als Umkehrfunktion von $f$ definiert ist.

**Beispiel:**

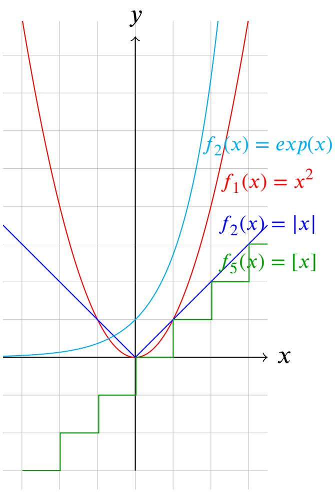
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$$
$$f(\{1, 2, -2\}) = \{1, 4\}$$
$$f^{-1}(\{1, -2, 4\}) = \{1, -1, 2, -2\} = f^{-1}(\{1, 4\})$$
$$f^{-1}(\{9\}) = \{3, -3\} \qquad f^{-1}(\{-5\}) = \varnothing$$

# Funktionen

## 5.6 Definition Funktion

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ Teilmenge. Eine reelle Funktion auf $D$ ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$
Der Graph von $f$ ist die Menge $\Gamma_f = \{(x, f(x) \mid x \in D\}$
$\Gamma_f \subseteq D \times \mathbb{R}$

**Bemerkung:**




Oft ist $D$ ein Intervall seien $a, b \in \mathbb{R}$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossen)
$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ (halboffen)
$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ (halboffen)
$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ (offen)
Uneigentliche Intervalle:

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\} = \mathbb{R}_{\geq a}$$
$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\} = \mathbb{R}_{> a}$$
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\} = \mathbb{R}_{\leq a}$$
$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\} = \mathbb{R}_{< a}$$
$$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

**Beispiel: Funktionen**

1. $f : [0, 2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, \Gamma_f \leq [0, 2]x\mathbb{R}$
2. Betragsfunktionen: $|\ | : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ An dieser Stelle fehlen noch Graphen.
3. $g : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, g(x) = \dfrac{1}{x}$ Hier auch.
4. $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
5. $[.] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Gaußklammer
   $[x] := max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$

**Beispiel:**

$[5] = 5$
$[5,78] = 5$
$[-1,2] = -2$

6. Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = \begin{cases} 0 \; wenn \; x \in \mathbb{Q} \\ 1 \; wenn \; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

   $h(\sqrt{2}) = 1, h(\frac{3}{7}) = 0$

## 5.7 Definition (Rechnen mit Funktionen)

Sei $D \subseteq \mathbb{R},\ f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen auf D.
Definiere

- $f + g : D \to \mathbb{R}$ durch $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$
- $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$
- Für $a \in \mathbb{R}$ setze $a \cdot f : D \to \mathbb{R}, (a \cdot f)(x) := a \cdot f(x)$
- Angenommen, $f(x) \neq 0$ für alle $x \in D$

$$\frac{1}{f} : D \to \mathbb{R}, \frac{1}{f}(x) := \frac{1}{f(x)} = f(x)^{-1}$$

  Vorsicht nicht $\frac{1}{f}$ mit Umkehrbild oder Urbild verwechseln

## 5.8 Definition Polynomfunktion

- Eine Polinomfunktion ist eine Funktion der Form

  $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

  wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ fest
- Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen Sei $D = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \geq 0\} \rightsquigarrow \frac{f}{g} : D \to, Rx \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ Solche Funktionen heißen rationale Funktionen.

**Beispiel:**

$$f : \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{x^7 + 5x^2}{x(x-1)}$$

## 5.9 Definition

Seien $f : C \to \mathbb{R}, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, sodass $f(C) \subseteq D$ Eine Komposition von $f$ und $g$ ist $g \circ f : C \to \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

## Wiederholung

Eine Abbildung $f : x \to y$

- ist injektiv wenn gilt:
  für alle $a, b \in X$ mit $f(a) = f(b)$ ist $a = b$
- ist surjektiv wenn für jedes $y \in Y$ ein $a \in X$ existiert mit $f(a) = y$

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ Teilmenge. Eine Funktion auf $D$ ist eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$

## Monotone Funktionen

### Bemerkung:

Eine Funktion $(a_n)_{n\geq 0}$ reeller Zahlen ist eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ d.h. eine Funktion auf $\mathbb{N}_0$

## 5.10 Definition Monotonie

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt:

1. monoton wachsend wenn gilt:
   Für alle $a, b \in D$ mit $a < b$ ist immer $f(a) \leq f(b)$
2. streng monoton wachsend: $a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$
3. monoton fallend: $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$
4. streng monoton fallend: $a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$

### Bemerkung:

Jede streng monotone Funktion $f$ ist injektiv

### Beweis:

Zeige: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
Wenn $a \neq b$ dann $a < b$ oder $b < a$
Wenn $f$ streng monoton wachsend: Folgt $f(a) < f(b)$ oder $f(b) < f(a)$ also $f(a) \neq f(b)$
Wenn $f$ streng monoton fällt: es folgt $f(a) > f(b)$ oder $f(b) > f(a)$ also $f(a) \neq f(b)$ ■

## 5.11 Beispiel

1. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^k =: f(x)$ mit $k \geq 1$
   $f$ ist streng monoton wachsend/steigend
2. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(x) = [x]$
   $h$ ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton.
   Monoton wachsend: $x < y \Rightarrow [x] < [y]$
   $x < y \not\Rightarrow [x] < [y]$
   z. B.: $1,2 < 1,3, [1,2] = 1 = [1,3]$
3. Exponentialfunktion
   $$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
   Ist streng monoton wachsend.

**Beweis:**

a) $exp(0) = 1 + \frac{0}{1!} + \frac{0}{2!} + ... = 1$

b) Sei $a > 0$
$exp(a) = 1 + \frac{a}{1!} + \frac{a}{2!} + ... > 1$

c) Sei $a > 0 exp(-a) \cdot exp(a) = exp(-a + a) = exp(0) = 1$
$\Rightarrow exp(-a) = \frac{1}{exp(a)} \Rightarrow 0 < exp(a) < 1$
Insbesondere: $exp(b) > 0$ für alle $b \in \mathbb{R}$

d) Sei $a > b$

$exp(a) = exp(a - b + b) = \overbrace{exp(a - b) \cdot exp(b)}^{>0} > \exp(b) \Rightarrow$ exp streng monoton wachsend ■

# 6 Stetigkeit

Idee Eine Funktion ohne Sprünge heißt stetig

## 6.1 Definition

Sei $D \subseteq \mathbb{R},\ f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion

1. $f$ heißt stetig in $x \in D$ wenn gilt:
   Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass für jedes $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \epsilon$
2. $f$ heißt stetig wenn f in jedem $x \in D$ stetig ist

## 6.2 Beispiel

1. Die Funktion $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ ist stetig
2. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$ ist stetig.

   **Beweis:**

   Sei $x, y \in \mathbb{R} \quad y = x + h$.

   $$f(y) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

   Wähle jedenfalls $\delta \leq 1$. Wenn $|h| = |x - y| < \delta$ dann $|h| < 1$

   $$|f(y) - f(x)| = |2xh + h^2| \leq |2x| \cdot |h| + |h|^2 < |2x| \cdot |h| + |h| = (|2x| + 1) \cdot |h|$$

   Gegeben sei $\epsilon > 0$
   Wähle $\delta = min\left\{1, \dfrac{\epsilon}{|2x| + 1}\right\}$
   Wenn $|x - y| < \delta$ dann

   $$|f(x) - f(y)| < (2|x| + 1) \cdot |h| < (2|x| + 1) \cdot \frac{\epsilon}{2|x| + 1} = \epsilon$$

   Also $f$ stetig in $x$
3. $g := \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := \{x\}$
   $g$ ist stetig an $x \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Z}$

   **Beweis $g$ nicht stetig an $x \in \mathbb{Z}$:**

   Zeige: es gibt ein $\epsilon > 0$ so dass kein $\delta > 0$ existiert mit: $|x - y| > \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \epsilon$
   z.B. $\epsilon = 1$ Sei $\delta > 0$. $y = x - \dfrac{\delta}{2} \quad |x - y| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$
   aber $g(y) = \{x - \dfrac{\delta}{2}\} = x - 1$ (weil $x \in \mathbb{Z}$)
   $|g(x) - g(y)| = |x - (x - 1)| = 1 \not< \epsilon$ ■

## 6.3 Satz

Die Exponentialfunktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

**Beweis:**

Verwende nur:

- Funktionalgleichung: $exp(x + y) = exp(x) \cdot exp(y)$
- exp ist streng monoton wachsend
- exp(0) = 1

**Behauptung**

Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $exp(\frac{1}{n}) < 1 + \epsilon$
Angenommen, $exp(\frac{1}{n}) \geq 1 + \epsilon$

Dann $exp(1)$
$= \underbrace{\frac{1}{n} + ... \frac{1}{n}}_{n}$
$= exp(\frac{1}{n}) + ... + exp(\frac{1}{n}) = exp(\frac{1}{n})^n$
$\geq (1+\epsilon)^n \underset{\substack{\uparrow \\ Bernulli}}{\geq} 1 + n\epsilon$

$exp(1) \geq 1 + n\epsilon$
$n \leq \frac{exp(1)-1}{\epsilon}$
Das gilt nur für endliche viele $n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ Beh.
Zeige exp ist stetig an 0. Gegeben sei $\epsilon > 0, OE?\epsilon < 1$
Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $exp(\frac{1}{n}) < 1 + \epsilon$

$$\Rightarrow exp(-\frac{1}{n}) = exp(\frac{1}{n})^{-1} < \frac{1}{1+\epsilon} = \frac{1-\epsilon}{(1+\epsilon)(1-\epsilon)} = \frac{1-\epsilon}{1-\epsilon^2} > 1 - \epsilon$$

Sei $\delta \frac{1}{n}$
Sei $y \in \mathbb{R}, |0 - y| < \delta = \frac{1}{n}$
$|y| < \frac{1}{n}$ d.h.
$-\frac{1}{n} < y < \frac{1}{n}$

$exp$ streng monoton wachsend.

$$\Rightarrow 1 - \epsilon < exp(-\frac{1}{n}) < \exp(y) < exp(\frac{1}{n}) < 1 + \epsilon$$

$\Rightarrow |exp(y) - exp(0)| < \epsilon$ Also exp stetig in 0
Zeige exp ist eine stetig in $x \in \mathbb{R}$. Gegeben sei $\epsilon >$
Sei $y = x + h$, $|h| < \delta$ ($\delta$ noch zu wählen)

$$|exp(y) - exp(x)| = |exp(x+h) - exp(x)| = |exp(x) \cdot exp(h) - exp(x)| = exp(x) \cdot exp(h) - 1$$

$|exp(y) - exp(x)| < \epsilon$

$$\Leftrightarrow exp(x) \cdot |exp(h) - 1| < \epsilon \Leftrightarrow exp(h) - 1 < \frac{\epsilon}{exp(x)} = \epsilon'$$

Weil exp stetig in 0 ist gibt es ein $\delta > 0$ mit $|h| < \delta \Rightarrow |exp(h) - 1| < \frac{\epsilon}{exp(x)}$
$\Rightarrow exp$ ist stetig in $x$ ■

## 6.4 Satz (Folgenstetigkeit)

Sei $D \subseteq \mathbb{R},\ x \in D,\ f : D \to \mathbb{R}$ Funktion $f$ ist genau dann stetig in $x$ wenn gilt:

- Für jede Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ mit $x_n \in D,\ x_n \to x$ für $n \to \infty$ gilt auch $f(x_n) \to f(x)$ für $n \to \infty$

## 6.5 Satz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$
Dann gilt:

- $f + g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x$
- $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x$
- Wenn $g(x) \neq 0$ für alle $x' \in D$

Dann ist $\frac{1}{g} : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x$.

### <u>Beweis</u> mit Folgenstetigkeit:

Sei $x_n \to x$ für $n \to \infty$
mit $x_n \in D$

$f, g$ stetig $\Rightarrow$
$f(x_n) \to f(x)$
$g(x_n) \to g(x)$

$\Rightarrow$
$f(x_n) + g(x_n) \to f(x) + g(x)$
$f(x_n) \cdot g(x_n) \to f(x) \cdot g(x)$

Wenn also $f(x) \neq 0$
$f(x_n)^{-1} \to f(x)^{-1}$
$\Rightarrow f + g, f) \cdot g, \frac{1}{f}$ stetig in $x$ ■

# Wiederholung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x \in D$ wenn gilt:
Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass gilt:
wenn $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ dann $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

## Beispiel:

$exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig (d.h. stetig an jedem $x \in \mathbb{R}$)
$[\cdot] : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig an $x \Leftrightarrow x \notin \mathbb{Z}$
SKIZZE

## Satz 6.4: Folgenstetigkeit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $x \in D \Leftrightarrow$ Für jede Folge $(x_n)$ mit $x_n \in D$ für alle $n$ und $x_n \to x$ gilt auch $f(x_n) \to f(x)$.
(d.h. $f$ erhält Konvergenz)

## Beweis:

"$\Rightarrow$"

Angenommen $f$ ist stetig in $x$, $x_n \to x$ mit $x_n \in D$. Zeige $f(x_n) \to f(x)$
Gegeben $\epsilon > 0$. Stetigkeit $\Rightarrow$ es gibt $\delta > 0$ mit:
Wenn $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ dann $|f(x) - f(y)| < \epsilon$
Wähle $N \in \mathbb{N}$ so dass gilt:
Für $n \geq N$ ist $|x - x_n| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_n)| < \epsilon$
Also gilt $f(x_n) \to f(x)$

"$\Leftarrow$"

Angenommen $f$ ist nicht stetig.
Zeige: Es gibt eine Folge $(x_n)$ mit $x_n \in D$ und $x_n \to x$ aber nicht $f(x_n) \to f(x)$ für nicht stetig in $x \Rightarrow$ es gibt ein $\epsilon > 0$ so dass für jedes $\delta > 0$ ein $y \in D$ existiert mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$
Wähle für $\delta = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in D$ mit $|x_n - x| < \delta,\ |f(x_n) - f(x)| \geq \epsilon$
Dann gilt $x_n \to x$ aber <u>nicht</u> $f(x_1) \to f(x)$ ■

# Wiederholung

## Satz 6.5

Wenn $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x \in D$ dann auch $f + g,\ f \cdot g$ und $\frac{1}{g}$ (falls $g(y) \neq 0$ für alle $y \in D$)
Und $a \cdot f$ für $a \in \mathbb{R}$

# 6.6 Korollar

Polynomfunktionen und rationale Funktionen sind stetig.

## Beweis:

1. $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ id_{\mathbb{R}}(x) = x$ ist stetig
2. 6.5 und Induktion $\Rightarrow$ für $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$ stetig für jedes $n$ $\quad (x^n = x \cdot x^{n-1}$
3. 6.5 $\Rightarrow$ Jede Funktion $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_0,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig
4. 6.5 $\Rightarrow$ wenn $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen, dann $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $D = \{x \in \mathbb{R} | g(x) \neq 0\}$ (denn $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$) ■

## 6.7 Satz Stetigkeit der Komposition

Sei $f : C \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(C) \subseteq D$. Wenn $f$ stetig in $x \in D$ und $g$ stetig in $f(x)$ dann ist: $g \circ f : C \to \mathbb{R}$ stetig in $x$.

### Beweis mit Folgenstetigkeit:

Sei $x_n \to x$ mit $x_n \in C$
$f$ stetig in $x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$
$g$ stetig in $f(x) \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x))$
d.h. $(g \circ f)(x_n) \to (g \circ f)(x)$
also ist $g \circ f : C \to \mathbb{R}$ stetig in $x$ ■

## 6.8 Definition (Konvergenz bei Funktionen)

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion

1. Ein $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ heißt Berührpunkt von $D$ wenn es eine Folge $(x_n)$ mit $x_n \in D$ und $x_n \to a$ gibt

   ### Bemerkung:

   Jedes $a \in D$ ist Berührpunkt von $D$ (wähle konstante Folge $x_n = a$)

2. Angenommen, $a$ ist ein Berührpunkt von $D$
   Schreibe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y$ wenn gilt:
   Für jede Folge $(x_n)$ mit $x_n \to a$ und $x_n \in D$ gibt $f(x_n) \to y$

3. Angenommen, $a \neq \infty$ ist eine Berührpunkt von $D \cap (a, \infty)$ SKIZZE
   Schreibe $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = y$ wenn gilt:
   Für jede Folge $(x_n)$ mit $x_n \to a$ und $x_n \in D$ und $x_n > a$ gilt $f(x_n) \to y$

4. Angenommen, $a \neq -\infty$ ist eine Berührpunkt von $D \cap (-\infty, a)$
   Schreibe $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = y$ wenn für jede Folge $(x_n)$ mit $x_n \to a$ und $x_n \in D$ und $x_n < a$ gilt $f(x_n) \to y$

   ### Beispiel:

   $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ SKIZZE
   Bemerke f(x)=$\begin{cases} 1 & \text{wenn} \quad x > 0 \\ -1 & \text{wenn} \quad x < 0 \end{cases}$
   $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x \searrow a} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert nicht
   Vorher $a = 0$ ist Berührpunkt von $D$ und $D \cap (0, \infty)$ und $D \cap (-\infty, 0)$, denn $\frac{1}{n} \to 0$ und $-\frac{1}{n} \to 0$

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$
$\infty, -\infty$ sind Berührpunkte von $D = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$$

### Bemerkung:

Umformulierung von Satz 6.4 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig in $a \in D \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

# Sätze über stetige Funktionen

## 6.9 Definition Beschränktheit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt nach oben beschränkt wenn die Menge $f(D)$ nach oben beschränkt ist, d.h. es gibt $C \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq C$ für alle $x \in D$
$f$ heißt nach unten beschränkt, wenn $f(D)$ nach unten beschränkt
$f$ heißt beschränkt, wenn $f$) nach oben und nach unten beschränkt

## 6.10 Definition uneigentliches Supremum

Sei $M \in \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge. Wenn $M$ nach oben unbeschränkt, schreibe $sup(M) = \infty$ (Sprich: uneigentliches Supremum)

## 6.11 Satz

Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist $f$ beschränkt und nimmt ihr Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $x_{min}, x_{max} \in [a, b]$ mit: $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ für jedes $x \in \mathbb{R}$

### Beispiel:

1. $f : (0, 1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x}$
   $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$
   Somit $f$ nicht nach oben beschränkt

2. $g(0, 1) \to \mathbb{R},\ g(x) = x$
   $g$ beschränkt. $g((0, 1)) = (0, 1)$
   $sup\{g(x) | x \in (0, 1)\} = 1$
   Aber $g(x) < 1$ für alle $x \in (0, 1)$, also nimmt $g$ nicht ihr Maximum an.

### Beweis von 6.11

Sei $y := sup\{f(x) | x \in D\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
Wähle eine Folge $(x_n)$ mit $x_n \in D$ und $f(x_n) \to y$ für $n \to \infty$
Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow$ Es gibt eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \geq 0}$ von $(x_n)_{k \geq 0}$ [1]
Sei $x_{n_k} \to x$ für $k \to \infty$ $a \leq x_n \leq b$ für alle $n \Rightarrow a \leq x \leq b,\ x \in D = [a, b]$

Und dann gilt

$f(x_{nk}) \to y$ für $k \to \infty$ (Teilfolge einer Konvergenten Folge)
$f(x_{nk})) \to y$ für $k \to \infty$ weil $f$ stetig

Also $y = f(x)$
Insbesondere $y \neq \infty$ also $f$ beschränkt
Für alle $x' \in D$ gilt $f(x') \leq sup\{f(D)\} = y = f(x)$
Setze $x_{max} := x$. Dann $f(x') \leq f(x_{max})$ für alle $x' \in D$
Anfang findet man $x_{min}$ ■

## 6.12 Satz (Zwischenwertsatz)

Sei $a \leq b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.
Wenn $y \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegt, d.h. $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(a) \geq y \geq f(b)$
Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$
GRAPH

[1] Die Folge $(x_n)$ ist beschränkt $D = [a, b]$

## Wiederholung

Zwischenwertsatz
Sei $a \leq b,\ f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig
Sei $y \in \mathbb{R}$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ d.h. $f(a) \leq y \leq f(b)$ oder $f(a) \geq y \geq f(b)$
Dann gibt es ein $x \in [a,b]$ mit $f(x) = y$
SKIZZE

### Beweis Intervallschachtelung:

Starte mit $[a_0, b_0] = [a, b]$
Definiere unendliche Kette von Intervallen
$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \dots$
So dass $[b_n - a_n] = 2^{-n}[b_0, a_0]$ und $y$ zwischen $f(a_n)$ und $f(b_n)$ liegt.
Annahme: $f(a) \leq y \leq f(b)$ (Anderer Fall $f(a) \geq y \geq f(b)$ analog)
Angenommen, $[a_n, b_n]$ ist konstruiert so dass $[b_n - a_n] = 2^{-n}(b_0, a_0)$ und $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$
Betrachte $m := \frac{a_n+b_n}{2}$, Wenn $f(m) \geq y$ dann setze $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [a_n, m]$
Wenn $f(m) < y$ dann setze $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [m, b_n]$
Dann gilt in beiden Fällen:

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = 2^{-1} \cdot 2^{-n}(b_0 - a_0) = 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \text{ und } f(a_{n+1}) \leq y \leq f(b_{n+1})$$

### Idee

Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$ "konvergent" gegen gesuchtes $x$.
Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist monoton wachsend und beschränkt, ($b$ ist obere Schranke) $\Rightarrow$
$(a_n)$ konvergiert, sei $x := \lim_{n \to \infty} a_n$
Die Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ ist monoton fallen und beschränkt $\Rightarrow$konvergent nach 4.2
Sei $x' = \lim_{n\to\infty} b_n$
$x' - x = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n)$
$= \lim_{n\to\infty}(2^{-n} \cdot (b_0 - a_0)) = 0$
also $x = x'$ $f(x) = ?$
$f$ stetig $\Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$
Wegen $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$ für alle $n$ gilt $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq y \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n)$
$\Rightarrow f(x) = y$

### Bemerkung:

Weil $a \leq a_n \leq b$ gilt $a \leq x \leq b$ d.h. $x \in [a,b]$ ■

## Anwendung

## 6.13 Satz Sichere Nullstellen

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade, $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_0$$

Dann hat $f$ eine Nullstelle, d.h. es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$

### Beweis:

Für $x \neq 0$ betrachte

$$g(x) = \frac{1}{x^n} \cdot f(x) = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_0}{x^n}$$

Für $x \to \infty$ ist $g(x) \to 1$
Für $x \to -\infty$ ist $g(x) \to 1$
D.h. es gibt $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und

$$x \geq a \Rightarrow g(x) > 0$$

$$x \geq -a \Rightarrow g(x) > 0$$

Also $x \geq a \Rightarrow f(x) = x^n \cdot g(x) > 0$
$x \geq a \Rightarrow f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ x^n<0}}{x^n} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ >0}}{g(x)} < 0$
$f(-a) < 0 < f(a)$
Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ergibt $x \in [-a, a]$ mit $f(x) = 0$

## 6.14 Satz Ergänzung Zwischenwertsatz

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $D \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-leeres Intervall. Dann ist $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$ auch ein Intervall (d.h. hat keine Lücken.)

### Bemerkung:

Hier sind auch uneigentliche Intervalle zugelassen. (z.B. $(0, \infty)$)

### Beispiel:

$f(x) = x^3 - x + 20$ GRAPH

### Beispiel:

Bedingung "$n$ ungerade" ist wesentlich, denn $f(x) = x^2 + 1$ hat keine Nullstelle

### Beispiel:

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$$
$$f(D) = (1, \infty)$$

GRAPH

### Beispiel:

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$$
$$f(D) = [0, 1)$$

GRAPH

### Beweis:

$f : D \to \mathbb{R}$ stetig
Sei $a := inf(f(D)) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$a := inf(f(D)) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
Angenommen $y \in \mathbb{R}$ mit $a < y < b$ d.h. $x \in (a, b)$
Es gibt $x_1, x_2 \in D$ mit $a < f(x_1) < y < f(x_2) < b$
Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ es gibt $x$ zwischen $x_1, x_2$
($\Rightarrow x \in D$ weil $D$ Intervall) mit $f(x) = y$
Also $(a, b) \subseteq f(D)$
Dann ist $f(D)$ eines der Intervalle $(a, b), [a, b), (a, b]$, $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{nur wenn } a\neq-\infty, b\neq\infty}}{[a, b]}$ ■

## 6.15 Satz Umkehrfunktion

Sei $D$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$, stetig, streng monoton wachsend oder fallend. Sei $D' = f(D)$ (Intervall nach 6.14) Dann ist die Abbildung $f : D \to D'$ bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1} : D' \to D$ ist stetig und streng monoton wachsend, bzw. fallen.

### Beweis:

Die Abbildung $f : D \to D'$ ist

- surjektiv nach Definition von $D'$
- streng monoton $\Rightarrow$ injektiv
- also bijektiv. Somit existiert $f^{-1} : D' \to D$

### Annahme

$f$ streng monoton wachsend (fallend analog)

### Behauptung:

$f^{-1}$ ist streng monoton wachsend, d.h. gegeben $x_1, x_2 \in D'$ mit $x_1 < x_2$ zeige:

$$f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$$

Angenommen $f^{-1}(x_1) \geq f^{-1}(x_2) \Rightarrow f$ monoton wachsend $\Rightarrow x_1 = f(f^{-1}(x_1)) \geq f(f^{-1}(x_2)) = x_2 \Rightarrow$ Widerspruch
also $f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2) \Rightarrow f^{-1}$ streng monoton wachsend

### Behauptung:

$f^{-1}$ ist stetig. Gegeben $x \in D$
Annahme $x$ ist kein Randpunkt des Intervalls $D'$
Gegeben sei $\epsilon > 0$ Suche $\delta$ mit (Stetigkeitsdefinition)
$y := f^{-1}(x) \in D$ ist kein Randpunkt (weil $f,\ f^{-1}$ bijektiv und streng monoton.)
Wähle $\epsilon' \leq \epsilon$ mit $\epsilon > 0$ sodass $[y - \epsilon', y + \epsilon'] \subseteq D'$
$f(y - \epsilon') < f(y) = x \Leftarrow y - \epsilon' < y$
also $f(y - \epsilon') = x - \delta_1 \qquad \delta_1 > 0$
$genauso f(y + \epsilon') = x + \delta_2 \qquad \delta_2 > 0$
Sei $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$

### Behauptung:

Wenn $z \in D'$ mit $|z - x| < \delta$ dann $|f^{-1}(z) - f^{-1}(x)| < \epsilon$

### Beweis:

$$x + \delta_1 \leq x - \delta < z < x + \delta \leq x + \delta - 2$$

$f^{-1}$ streng monoton wachsend $\Rightarrow$

$$f^{-1}(x) - \varepsilon' = f^{-1}(x - \delta_1) < f^{-1}(z) < f^{-1}(x + \delta - 2) = y + \varepsilon' = f^{-1}(x) + \varepsilon'$$

$$\Rightarrow |f^{-1}(z) - f^{-1}(x)| < \varepsilon' \leq \varepsilon \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Somit $f^{-1}$ stetig in $x$
Falls $x$ Randpunkt: Betrachte $[x, x + \delta]$ bzw. $[x - \delta, x]$ wieder analog ■

## 2 Anwendungen

## 6.16 Beispiel

Sei $k \in \mathbb{N}$
Die Abbildung $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} f(x) = x^k$
Bekannt $f$ ist stetig streng monoton wachsend.
$f(0) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^k = \infty$
$D := [0, \infty) = \mathbb{R}_{\geq 0}$
$f(D) = D' = [0, \infty)$
6.15 $\Rightarrow f$ hat stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktionen
$f^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$
Bezeichnung: $f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$

# Logarithmus und allgemeine Potenzen

## 6.17 Satz

Die Exponentialfunktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} = (0, \infty)$ ist stetig, streng monoton wachsend und $exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{>0}$

### Beweis:

Bekannt: $exp$ stetig, streng monoton wachsend. Für $x > 0$ ist

$$exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots \geq 1 + x$$

also gilt

$$\lim_{x\to\infty} exp(x) = \infty$$

$$exp(-x) = \frac{1}{exp(x)} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} exp(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{exp(x)}$$

Somit $exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ ■

Folge mittels 6.15: $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist bijektiv und die Umkehrfunktion $exp^{-1} := log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend, bijektiv [2] konkret: $log(x) = y \Leftrightarrow x = exp(y)$ GRAPH

[2] $exp^{-1} = log$ heißt Logarithmusfunktion

## Wiederholung

Logarithmus und allgemeine Potenzen Die Funktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist stetig, streng monoton wachsend, bijektiv. Die Umkehrfunktion heißt Logarithmus,

$$log = exp^{-1} : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$$

explizit definiert durch $log(x) = y \Leftrightarrow x = exp(y)$
$\underset{\text{nach satz 6.5}}{\Rightarrow}$ log ist stetig, streng monoton wachsend, bijektiv.

## 6.18 Satz (Eigenschaften des Logarithmus)

1. $log(1) = 0$
2. $log(x \cdot y) = log(x) + log(y)$
3. $\lim\limits_{x \to 0} log(x) = -\infty$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} log(x) = \infty$

### Beweis:

Folgt aus Eigenschaften von $exp$, Details: Übung

### Erinnerung

also $a > 0,\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{N}$ ist $a^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{a^n}$

## 6.19 Lemma

Es gibt $a^{\frac{n}{m}} = exp(\frac{n}{m} \cdot log(a))$

### Beweis:

1. Sei $n \geq 0$:

$$exp(n \cdot log(a)) = exp(\overbrace{log(a) + log(a) + \ldots + log(a)}^{n}) = exp(log(a)) \cdot \ldots \cdot exp(log(a))$$

2. Sei $n < 0$

$$exp(n \cdot log(a)) = exp(\underbrace{-n}_{-n>0} \cdot log(a)) = (a^{-1})^{-1} = a^n$$

3. Rechne:

$$exp(\frac{n}{m} log(a))^m = exp(m \cdot \frac{n}{m} \cdot log(a)) = exp(n \log(a)) = a^n$$

$\sqrt[m]{\ } \Rightarrow exp(\frac{n}{m} log(a)) = \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$

## 6.20 Definition

Sei $a > 0,\ x \in \mathbb{R}$ setze $a^x := exp(x \cdot log(a))$

## 6.21 Bemerkung

Die Regeln der Potenzrechnung gelten:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \qquad a^{x \cdot y} = (a^x)^y$$

**Beweis:**

$$a^{x+y} = exp((x+y) \cdot log(a)) = exp(x \cdot log(a)) \cdot exp(y \cdot log(a)) = a^x \cdot a^y$$
$$a^{x \cdot y} = {}^3exp(x \cdot y \cdot log(a)) = (a^x)^y = exp(y \cdot log(exp(x \cdot log(a)))) = exp(y \cdot x \cdot log(a))$$

■

**Bemerkung:**

Eulersche Zahl

$$e := {}^4exp(1) = 2{,}7\ldots \qquad e^x = exp(x \cdot log(e)) = exp(x)$$

## 6.22 Definition Logarithmusbasis

Sei $a > 1 \qquad x \in \mathbb{R}$

$$log_a(x) = \frac{log(x)}{log(a)}$$

**Bemerkung:**

$a \neq 0 \Rightarrow log\,(a) \neq 0$
Dann:

$$a^{log_a(x)} = exp\left(log_a\,(x) \cdot log\,(a)\right) = exp\left(\frac{log\,(x)}{log\,(a)} \cdot log(a)\right) = exp(log(x)) = x$$

## Gleichmäßige Stetigkeit

## Wiederholung

$f : D \to \mathbb{R}$ stetig an $x \in D$ wenn gilt:
Für jedes $\epsilon > 0$ gilt $\delta > 0$ mit wenn $y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ dann $|f(x) - f(y)| < \epsilon$
Hier hängt $\delta$ im allgemeinen von $\epsilon$ und $x$ ab!

## 6.23 Definition gleichmäßige Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig stetig wenn gilt:
Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

**Wesentlich**

$\delta$ hängt nur von $\varepsilon$, nicht von $x$ ab.

**Beispiel:**

$D = (0, 1) \qquad f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$
GRAPH $f$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig

[3] $log \circ exp = id$
[4] $log(e) = 1$

**Beweis:**

Wähle $\varepsilon = 1$. Angenommen es gibt $\delta > 0$ mit $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1$ Wähle: $x = \frac{1}{n},\ y = \frac{1}{n+1}$ so dass $\frac{1}{n\cdot(n+1)} < \delta$

$$|x-y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)}\right| = \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

Dann

$$|f(x) - f(y)| = |n - (n+1)| = 1$$

Das zeigt: $\delta$ existiert nicht.

## 6.24 Satz

Seien $a \leq b$ reelle Zahlen
Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

**Beweis:**

Angenommen, $f$ ist nicht gleichmäßig stetig: Es gibt ein $\epsilon > 0$ sodass für jedes $\delta > 0$ zwei Zahlen $x, y \in D$ existieren, mit $|x-y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| \geq \epsilon$

$f(y)| \geq \epsilon$ (*)

Bolzano-Weierstraß $\Rightarrow$ Es gibt eine Teilfolge $(x_{nk})_{k\geq 0}$, die konvergiert. Sei $x = \lim\limits_{k\to\infty} (x_{nk})_{k\geq 0} \in [a,b] = D$

Dann

$$\lim_{k\to\infty} (y_{nk})_{k\geq 0} = \lim_{k\to\infty} ((y_{nk})_{k\geq 0} - (x_{nk})_{k\geq 0}) = 0 + x = x$$

$$x_{nk})_{k\geq 0} \to x,\ y_{nk})_{k\geq 0} \to x\ f\ : k \to \infty$$

$f$ stetig

$$\Rightarrow f(x_{nk})_k \to f(x), f(y_{nk})_k \to f(x)\ f\ k \to \infty$$

$$\Rightarrow (f(x_{nk})_k) - f(y_{nk})_k) \to f(x) - f(x) = 0$$

Widerspruch zu (*) Also ist $f$ gleichmäßig stetig. ∎

# 7 Komplexe Zahlen und Trigonometrie

Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen
Mangel von $\mathbb{R}$: Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine Lösung

## 7.1 Definition Komplexe Zahlen

Es sei $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$ mit folgender Addition und Multiplikation:

$$(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$$

$$(x, y) \cdot (x', y') := (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + y \cdot x')$$

Addition gleich der Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$ GRAPH

## 7.2 Satz: $\mathbb{C}$ ist Körper

$\mathbb{C}$ ist ein Körper mit Null (0,0) und Eins (1,0)

**Beweis:**

Überprüfe Körperaxiome <u>exemplarisch</u>

1. Assoziativgesetz der Multiplikation
   Gegeben $(x, y)$, $(x', y')$, $(x'', y'') \in \mathbb{C}$

$$((x, y) \cdot (x', y')) \cdot (x'', y'') = (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' - x \cdot y' + y \cdot x')(x'', y'')$$
$$= (x \cdot x' \cdot x'' - y \cdot y' \cdot x'' - x \cdot y' \cdot y'' - y \cdot x' \cdot y'', x \cdot x' \cdot y'' - y \cdot y' \cdot y'' + x \cdot y' \cdot x'' + y \cdot x' \cdot x'')$$
$$(x, y)((x', y')(x'', y'')) = \ldots \text{ erhalte gleiches Ergebnis}$$

2. Existenz vom Inversen:
   Sei $z = (x, y) \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R},\ z \neq 0$
   Zeige es gibt ein $z^{-1} \in \mathbb{C}$ mit $z \cdot z^{-1} = (1,\ 0)$
   $z \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ oder $y \neq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 0$

$$w := \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

   Rechne $z \cdot w = (x, y) \cdot \left( \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \left( \frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{-y^2}{x^2+y^2}, \frac{-yx}{x^2+y^2} + \frac{yx}{x^2+y^2} \right) = (1, 0)$ Also $w = z^{-1}$ ■
   Weitere Axiome ähnlich.

**Definition: imaginäre Einheit**

$i := (0, 1)$ (imaginäre Einheit)
Dann ist

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) \Rightarrow i^2 + 1 = 0$$

**Bemerkung:**

Für $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x, 0) + (x', 0) = (x + x', 0)$$

$$(x, 0) \cdot (x', 0) = (x \cdot x', 0)$$

Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C},\ x \mapsto (x, 0)$ ist injektiv und verträglich mit $+,\ \cdot$
$\rightsquigarrow$ Fasse $\mathbb{R}$ mittels diese Abbildung als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, einschließlich der Körperstruktur
Dann $i^2 = -1$.
Für $(x, y) \in \mathbb{C}$ gilt $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + i \cdot y$ Jede komplexe Zahl $z$ hat eine eindeutige Darstellung $z = x + i \cdot y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

## Idee

$\mathbb{C}$ entsteht aus $\mathbb{R}$ durch Hinzunahme einer Zahl $i$ mit $i^2 = -1$
Interpretation der Multiplikation in $\mathbb{C}$:

$$(x + i \cdot y)(x' + i \cdot y') = (x \cdot x' + x \cdot i \cdot y' + i \cdot y \cdot x' + i \cdot y \cdot i \cdot y') = (x \cdot x' - y \cdot y') + i(x \cdot y' + y \cdot x')$$

## Definition

Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$
Realteil: Re(z) := x
Imagnärteil: Im(z) := y
Komplex konjugierte Zahl $\overline{z} = x - iy$
Komplex konjugation = Spiegelung an der x-Achse.
Definition Der Betrag von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ Abstand von $0 = (0, 0)$ zu $z$

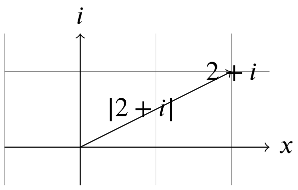
## Bemerkung:

1. $z \cdot \overline{z} = (x + i \cdot y)(x - i \cdot y) = x^2 + y^2 + i(-x \cdot y + y \cdot x) = x^2 + y^2 = |z|^2$
2. Insbesondere gilt $z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}$ und $z \cdot \overline{z} \geq 0$
3. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$ (sinnvoll wegen 2)

# Wiederholung

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$
$$(x, y) \cdot (x', y') = (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + y \cdot x')$$
$$(x, y) = x + i \cdot y \qquad i = (0, 1) \qquad i^2 = (-1)$$




$$z = x + i \cdot y \in \mathbb{C} \Rightarrow Re(z) = x \quad Im(z) = y$$

$\overline{z} = x - i \cdot y$

$$z \cdot \overline{z} = (x + i \cdot y)(x - i \cdot y) = x^2 - (i \cdot y)^2 = x^2 - i^2 \cdot y^2 = x^2 \cdot y^2$$

Abstand von 0 nach $z$ ist:

$$|z| = {}^{1}\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$
$$|2 + i| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

Berechnung von $z^{-1}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\underbrace{\overline{z} \cdot z}_{reelle\ Zahl}}$$

$$\frac{1}{2 + i} = \frac{2 - i}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{2 - 1}{5} = \frac{2}{5} = \frac{i}{5}$$

## 7.3 Lemma

Sei $z, w \in \mathbb{C}$ dann gilt:

1. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $z + \overline{z} = 2Re(z)$, $z - \overline{z} = 2i \cdot Im(z)$
   $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{z} \qquad Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$

### Beweis:

2.

$$z = x + i \cdot y$$
$$z + \overline{z} = (x + i \cdot y) + (x - i \cdot y) = 2x = 2Re(z)$$
$$z - \overline{z} = (x + i \cdot y) - (x - i \cdot y) = 2iy = 2i \cdot Im(z)$$

1.

$$z = x + iy, \ w = a + ib$$
$$\overline{z + w} = \overline{x + iy + a + ib} = \overline{x + a + i(y + b)} = x + a - i(y + b) = (x - iy) + (a - ib) = \overline{z} + \overline{w}$$
$$\overline{zw} = \overline{(x + iy)(a + ib)} = \overline{(ax - by) + i(ay + bx)} = (ax - by) - i(ay + bx) = |x|$$
$$\overline{z} \cdot \overline{w} = \overline{(x + iy)} \cdot \overline{(a + ib)} = (x - iy) \cdot (a + ib) = ax - (-y)(-b) + i(a \cdot (-y) + (-b) \cdot x)$$
$$= ax - by - i(ay + bx) = |x|$$

[1] Betrag von $z$

**Bemerkung:**

Aus 3) folgt:

$$z = x + iy \Rightarrow |z| \leq |iy| = |x| + |y|$$

Erinnerung:

$$|z| \leq |x|,\ |z| \leq |y| \text{ (aus der NR)}$$

# Folgen und Reihen komplexer Zahlen

## 7.4 Definition (Grenzwert)

Sei $(c_n)_{n\geq 0}$ eine Folge komplexer Zahlen, $c \in \mathbb{C}$
Die Folge $c_n$ konvergiert gegen $c$ wenn gilt:

Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \geq \mathbb{N}$ gilt $|c - c_n| < \epsilon$

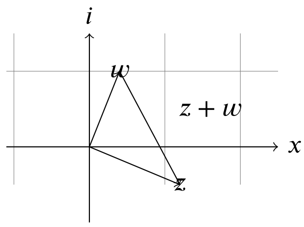
***Notation:***

$\lim\limits_{n \to \infty} c_n = c$ *oder* $c_n \to c$ *für* $n \to \infty$

## 7.5 Satz

Sei $z, w \in \mathbb{C}$

1. $|z| \geq 0$, und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (klar)
2. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|,\ |\overline{z}| = |z|$




3. $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung)

**Beweis:**

2.
$$|z \cdot w| = \sqrt{zw \cdot \overline{zw}} \underset{7.3}{=} \sqrt{z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w}} = \sqrt{z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w}} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}\sqrt{w \cdot \overline{w}} = |z| \cdot |w|$$

beide reell $\geq 0$ NR:$|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

3.
$$|z + w| = (z + w) \cdot (\overline{z + w}) \underset{7.3}{=} (z + w) \cdot (\overline{z} + \overline{w}) = z \cdot \overline{z} + z \cdot \overline{w} + w \cdot \overline{z} + w \cdot \overline{w} =^2 z \cdot \overline{z} + \underbrace{z \cdot \overline{w} + \overline{z \cdot \overline{w}}}_{2 \cdot Re(z \cdot \overline{w})} + w \cdot \overline{w}$$

$$= z \cdot \overline{z} + 2 \cdot Re(z \cdot \overline{w}) + w \cdot \overline{w} \leq |z|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |w| + |w|^2 =^3 (|z| + |w|)^2$$

$$\sqrt{} \Rightarrow |z + w| = |z| + |w|$$

■

**Bemerkung:**

1. Es gilt $c_n \to c \Leftrightarrow \overline{c_n} \to \overline{c}$
2. Wenn $c_n \to c$ dann $|c_n| \to |c|$

**Beweis:**

1. $|\overline{c_n} - \overline{c}| = |\overline{c_n - c}| = |c_n - c| \Rightarrow$ Behauptung
2. Übung

## 7.6 Satz

Sei $c_n = a_n + i \cdot b_n, \qquad c = a + ib$
Es gilt $c_n \to c \Leftrightarrow a_n \to a$ und $b_n \to b$

**Beweis:**

"$\Rightarrow$" Es gilt

$$|a_n - a| = |Re(c_n - c)| \leq |c_n - c|$$

$$|b_n - b| = |Im(c_n - c)| \leq |c_n - c|$$

Also gilt: $|c_n - c| < \varepsilon \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - b| < \varepsilon$, somit gilt "$\Rightarrow$"

"$\Leftarrow$" Verwende $|c_n - c| \leq |a_n - a| + |b_n - b| (*)$
Gegeben $\epsilon > 0$
Es gibt $N \in \mathbb{N}$ so dass für jedes $n \geq N$:

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \ |b_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

Dann gilt für $n \geq N$:
$|c_n - c| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$

## 7.7 Definition

Eine Folge komplexer Zahlen $(c_n)_{n\geq 0}$ heißt Cauchy-Folge, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt:
Für alle $n, m \geq N$ gilt $|c_n - c_m| < \varepsilon$

## 7.8 Satz

Sei $c_n = a_n + ib_n$
$(c_n)$ ist Cauchy-Folge $\Leftrightarrow$ $(a_n)$ und $(b_n)$ sind Cauchy-Folgen

**Beweis:**

Genau wie Beweis von 7.6 verwende:

$$|a_n - a_m| \leq |c_n - c_m|$$

$$|b_n - b_m| \leq |c_n - c_m|$$

$$|c_n - c_m| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m|$$

■

## 7.9 Satz konvergente Folge komplexer Zahlen ist Cauchy-Folge

Eine Folge komplexer Zahlen $(c_n)$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $(c_n)$ ist Cauchy-Folge

**Beweis:**

Sei $c_n = a_n + ib_n$
$(c_n)$ konvergiert $\underset{7.6}{\Leftrightarrow}$ $(a_n)$ und $(b_n)$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $(a_n)$ und $(b_n)$ sind Cauchy-Folgen $\underset{7.8}{\Leftrightarrow}$ $(c_n)$ ist Cauchy-Folge ■

## 7.10 Satz

Wenn $c_n \to c, c_n \to c'$ konvergente Folgen komplexer Zahlen sind, dann gilt:

1. $c_n + c_m \to c + c'$
2. $c_n \cdot c_m \to c \cdot c'$
3. Wenn $c \neq 0$ dann $c_n \neq 0$ für fast alle $n$ und $\frac{1}{c_n} \to \frac{1}{c}$

**Beweis:**

Analog zum Fall reeller Folgen ■

## 7.11 Definition

Eine Reihe komplexer Zahlen
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt <u>absolut</u> konvergent, wenn die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|$ konvergent ist

## 7.12 Satz

Eine Folge komplexer Zahlen $(c_n)$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $(c_n)$ ist Cauchy-Folge

**Beweis:**

Sei $c_n = a_n + i \cdot b_n$
$(c_n)$ konvergiert $\underset{7.6}{\Leftrightarrow}$ $(a_n$ und $(b_n)$ konvergieren $\Leftrightarrow$ $(a_n)$ und $(b_n)$ sind Cauchy-Folgen $\underset{7.8}{\Leftrightarrow}$ $(c_n)$ ist Cauchy-Folge ■

## 7.13 Satz

Sei $c_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$

1. Majorantenkriterium:
   Wenn reelle Zahlen $a_n$ existieren, so dass $|c_n| \leq |a_n|$ und $\sum a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum c_n$ absolut
2. Quotientenkriterium:
   Wenn eine reelle zahl $b \in \mathbb{R}$ existiert mit $0 \leq b < 1$, so dass $|c_{n+1}| \leq b \cdot |c_n|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$
   Dann konvergiert $\sum\limits_{n \geq 0} c_n$ absolut

## 7.14 Satz

Seien $\sum c_n$ und $\sum d_n$ zwei konvergente Reihen komplexer Zahlen, $\sum c_n = c, \; \sum d_n = d$
Wenn eine der Reihen absolut konvergiert, konvergiert auch das Cauchy-Produkt mit Grenzwert $c \cdot d$

## 7.15 Satz

Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent ist, dann ist die konvergent.

**Beweis:**

Sei $c_n = a_n + i \cdot b_n$

$$|c_n| \geq |a_n| \quad |c_n| \geq |b_n|$$

$\sum |c_n|$ konvergent $\Rightarrow \sum |a|, \; \sum |b_n|$ konvergent. (Majorantenkriterium)
d.h.: $\sum a_n, \; \sum |b_n|$ konvergiert absolut
$\Rightarrow \sum a_n, \; \sum b_n$ konvergiert.
$\overset{7.7}{\Rightarrow} \sum c_n$ konvergent ■

<u>Zusatz</u>
Angenommen $\sum c_n$ konvergiert absolut, dann:

$$\left|\sum_{n\geq 0} c_n\right| = \sum_{n\geq 0} c_n$$

(Dreiecksungleichung für $\infty$ viele Summanden)

## Beweis:

Gewöhnliche Dreiecksungleichung $\Rightarrow$

$$|c_0 + c_1 + ... + c_n| \leq |c_0| + |c_1 + ... + c_n|$$

$$\text{(Partialsummen)} \leq ... \leq |c_0| + |c_1| + ... + |c_n| (*)$$

Wenn $c = \sum c_n$, dann $c = \lim\limits_{n\to\infty} (c_0 + c_1 + ... + c_n)$ (Definition des Grenzwertes einer Reihe)

$\Rightarrow |c| = \lim\limits_{n\to\infty} |c_0 + c_1 + ... + c_n| = \left|\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\right| \leq \lim\limits_{n\to\infty} |c_0| + |c_1| + ... + |c_n| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|$

## Wiederholung

Eine Folge komplexer Zahlen $(c_n)n \geq 0$ konvergiert gegen $c \in \mathbb{C}$ wenn gilt:
Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $n \geq N \Rightarrow |c_n - c| < \epsilon$
Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit $c_n \in \mathbb{C}$ heißt absolut konvergent, wenn die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ konvergiert.
Absolute Konvergenz $\Rightarrow$ Konvergenz Nach 7.15:
Seien $\sum_{n\geq 0} c_n = c$ und $\sum_{n\geq 0} c_n' = c'$ konvergente komplexe Reihen, mindestens eine absolut konvergent. Dann konvergiert hier Cauchy-Produkt $\sum_{n\geq 0} d_n$ mit dem Grenzwert $c \cdot c'$
Erinnerung
$d_n = \sum_{n\geq 0} c_k \cdot c_{n-k}$

### Beweis:

Wörtlich wie bei reellen Reihen. ■

## Die komplexe Exponentialfunktion

## 7.16 Satz Komplexe Exponentialreihe konvergiert absolut

Für $z \in \mathbb{C}$ konvergiert die "Exponentialreihe"

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

absolut (Somit konvergiert sie)

### Beweis:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^n|}{n!} = exp(|z|)$$

Bekannt: $exp(|z|)$ konvergiert ■

## 7.17 Definition komplexe Exponentialfunktion

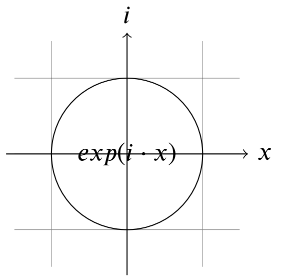
Die komplexe Exponentialfunktion ist die Abbildung $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

## Eigenschaften

## 7.18 Satz

Seien $z, w \in \mathbb{C}$

1. $exp(0) = 1$ (klar)
2. $exp(z + w) = exp(z) + exp(w)$
3. $exp(z) \neq 0, \; exp(z)^{-1} = exp(-z)$
4. $exp(\overline{z}) = \overline{exp(z)}$ (Komplexe Konjugation)




5. Für $x \in \mathbb{R}$ ist $|exp(ix)| = 1$

**Beweis:**

2. Wie bei der reellen Exponentialfunktion:
   Die Reihe $exp(z+w)$ ist das Cauchy-Produkt der Reihen $exp(z)$ und $exp(w)$, dann folgt $(z)$ aus 7.15

3. $exp(z) \cdot exp(-z) \underset{2)}{=} exp(z-z) = exp(0) \underset{1)}{=} 1$

4. Sei $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ somit nach Definition $exp(z) = \lim_{n\to\infty} s_n$

   Sei $s'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!}$ somit $exp(\overline{z}) = \lim_{n\to\infty} s'_n$

   Es gilt
   $$s'_n = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{n} (\overline{\frac{z^k}{k!}}) = \sum_{k=0}^{n} (\frac{\overline{z}^k}{k!}) = s'_n$$

   Somit $\overline{exp(z)} = \lim_{n\to\infty} (\overline{s_n}) = \lim_{n\to\infty} s'_n = exp(\overline{z})$

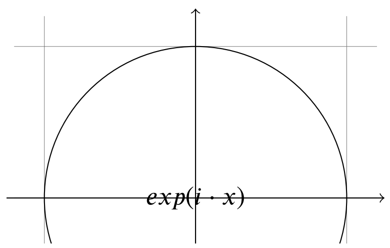
5. 
   $$|exp(ix)|^2 = exp(ix) \cdot \overline{exp(ix)} \underset{4)}{=} exp(ix) \cdot exp(\overline{ix}) = exp(ix) \cdot exp(-ix) \underset{2)}{=} exp(ix - ix) = exp(0) \underset{1)}{=} 1$$

   $\surd$
   $\Rightarrow |exp(ix)| = 1$

# Trigonometrische Funktionen

## 7.19 Definition

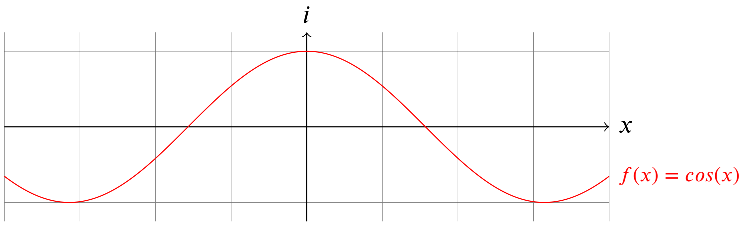
Sei $x \in \mathbb{R}$
$sin(x) = Im(exp(i \cdot x))$ (Sinus)
$cos(x) = Re(exp(i \cdot x))$ (Cosinus)




**Bemerkung:**

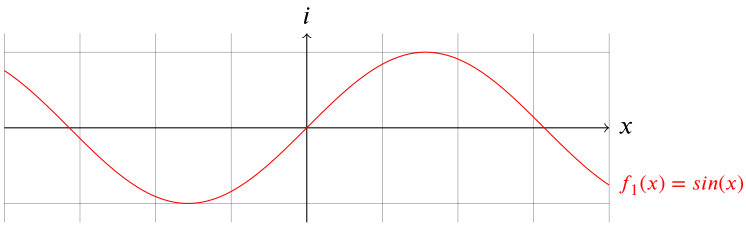
Für jede komplexe Zahl $z$ gilt $z = Re(z) + i \cdot Im(z)$
$\Rightarrow exp(i \cdot x) = cos(x) + i \cdot sin(x)$ (Eulersche Formel)

## 7.20 Satz




1. $cos(0) = 1,\ sin(0) = 0$

2. $cos(-x) = cos(x),\ sin(-x) = -sin(x)$




3. $sin(x)^2 + cos(x)^2 = 1$

4. Additionstheoreme
   $sin(x+y) = sin(x) \cdot cos(y) + cos(x) \cdot sin(y)$
   $cos(x+y) = cos(x) \cdot cos(y) - sin(x) \cdot sin(y)$

### Beweis:

1. $exp(0i) = 1 = 1 + 0i \Rightarrow cos(0) = 1, sin(0) = 0$

2. $exp(-ix) = exp(\overline{ix}) = \overline{exp(ix)} = cos(x) - i \cdot sin(x)$
   $exp(-ix) = cos(-x) + i \cdot sin{-x} \Rightarrow cos(x) = cos(-x),\ sin(-x) = -sin(x)$

3. $sin(x)^2 + cos(x)^2 \overset{Def.}{=} |exp(ix)|^2 = 1$

4. $$exp(i(x+y)) = exp(i \cdot x) \cdot exp(i \cdot y)$$
   $$\Rightarrow cos(x+y) + i \cdot sin(x+y) = (cos(x) + i \cdot sin(x))(cos(y) + i \cdot sin(y))$$
   $$= cos(x) \cdot cos(y) - sin(x) \cdot sin(y) + i \cdot (sin(x) \cdot cos(y) + cos(x) \cdot sin(y))$$
   Vergleich der Realteile / Imaginärteile $\Rightarrow$ Behauptung 4 ■

### Bemerkung:

Die Gleichung

$$cos(x)^2 + sin(x)^2 = 1$$

impliziert $0 \leq cos(x)^2 \leq 1, 0 \leq sin(x)^2 \leq 1$ somit $-1 \leq cos(x) \leq 1, -1 \leq sin(x) \leq 1$.

## 7.21 Definition

1. Eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt stetig in $z \in \mathbb{C}$ wenn gilt:
   Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass für jedes $w \in \mathbb{C}$ mit $|z - w| < \delta$ ist $|f(z) - f(w)| < \epsilon$

2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt stetig, wenn $f$ in jedem $z \in \mathbb{C}$ stetig ist.

## 7.22 Satz

Eine Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig in $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$ Für jede Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n \geq 0}$ mit $z_n \to z$ für $n \to \infty$ gilt auch $f(z_n) \to f(z)$ für $n \to \infty$

**Beweis:**

Wörtlich wie bei reeller Funktion (Satz 6.4) ■

## 7.23 Satz

Die komplexe Exponentialfunktion $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist stetig

**Beweis:**

Verwende Folgenstetigkeit

1. Stetigkeit in $z = 0$ $exp(0) = 1$
   Sie $z \in \mathbb{C}$ (nahe 0)
   $$|exp(z) - 1| = \left|1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots - 1\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \underset{unendliche Dreiecksungleichung 7.13}{\leq} exp(|z|) - 1$$
   Wenn $z_n \to 0$ in $\mathbb{C}$
   dann $|z_n| \to 0$ in $\mathbb{R}$
   dann $exp(|z_n|) \to exp(0) = 1$ (weil $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ steig)
   d.h. $exp(|z_n|) - 1 \to 0$
   $\Rightarrow |exp(z_n) - 1| \to 0$
   Somit $exp$ stetig in $z = 0$
2. Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig, $z_n \to z$
   $$exp(z_n) - exp(z) = exp(z_n - z + z) - exp(z) = exp(z_n - z) - exp(z) - 1 \cdot exp(z) = (exp(z_n - z) - 1) \cdot exp(z)$$
   Es gilt: $z_n \to z \Leftrightarrow z_n - z \to 0$
   $$\underset{1)}{\Rightarrow} exp(z_n - z) \to 1$$
   $$\Leftrightarrow exp(z_n - z) - 1 \to 0$$
   $$\Rightarrow (exp(z_n - z) - 1) \cdot exp(z) \to 0 \cdot exp(z) = 0 \qquad \underset{(*))}{\Rightarrow} (exp(z_n) - exp(z) \to 0$$
   d.h. $exp(z_n) \to exp(z)$ ■

## 7.24 Satz

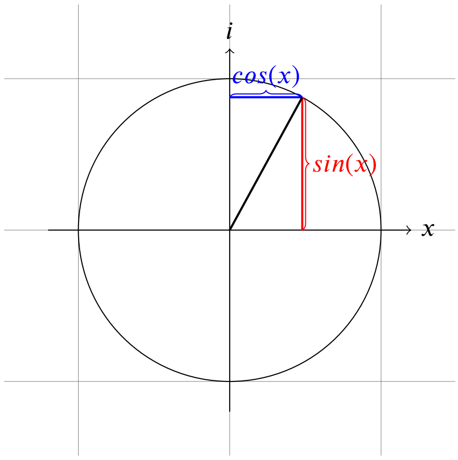
Die Funktionen $sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig.

**Beweis:**

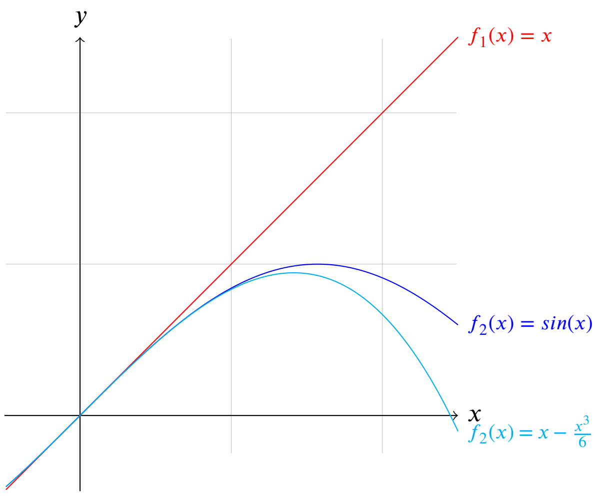
Mittels Folgenstetigkeit.
Sei $x_n \to x$ mit $x_n \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow i \cdot x_n \to i \cdot x$ in $\mathbb{C}$
$\underset{7.23}{\Rightarrow} exp(i \cdot x_n) \to exp(i \cdot x)$
d.h. $cos(x_n) + i \cdot sin(x_n) \to cos(x_n) + i \cdot sin(x_n)$
$\Leftrightarrow cos(x_n) \to cos(x)$ und $sin(x_n) \to sin(x)$
Somit sind $sin$ und $cos$ stetig in $x$ also stetig.

## Wiederholung

- Komplexe Exponentialfunktion: $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto exp(z) \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ stetig, Funktionalgleichung: $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $z, w \in \mathbb{C}$ Additionstheoreme: $cos(x+y) = Re(e^{i(x+y)}) = Re(e^{i(x)} \cdot e^{i(y)}) = cos(x) \cdot cos(y) - sin(x) \cdot sin(y)$
- Sinus, Cosinus: $sin, cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ sin(x) := Im(e^{ix}),\ cos(x) := Re(e^{ix}),\ e^{ix} = cos(x) + i \cdot sin(x)$
- Weil $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig $\Rightarrow sin, cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig




Problem: zu zeigen
$\widetilde{sin}$ und $sin$ aus Vorlesung
$\widetilde{cos}$ und $cos$ aus Vorlesung




Potenzreihen von $sin$ und $cos$: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$cos(x) + i \cdot sin(x) = exp(i \cdot x) = \frac{1}{0!} + \frac{i \cdot x}{+} 1! + \frac{(i \cdot x)^2}{1!} + 2! + \frac{(i \cdot x)^3}{3!} + \dots$$

$$= (\frac{1}{0!} + \frac{(i \cdot x)^2}{2!} + \frac{(i \cdot x)^4}{4!}) + \frac{(i \cdot x)^6}{6!} + \dots) + i(\frac{(i \cdot x)}{1!} + \frac{(i \cdot x)^3}{3!}) + \frac{(i \cdot x)^5}{5!}) + \dots)$$

## 7.25 Bemerkung

Siehe Übung

$$cos(x) - cos(y) = 2sin \dots$$

## 7.26 Satz

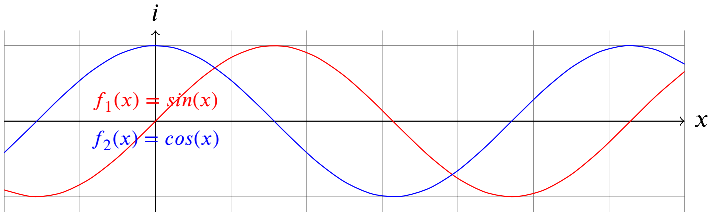
Für $x \in R$ gilt:

$$cos(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}, \; sin(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

# Analytische Definition der Zahl $\pi$

## 7.27 Lemma

Für $0 < x \leq 2$ gilt: $0 < x - \frac{x^3}{6} < sin(x) < x$.




### Beweis:

Schreibe $sin(x) = \sum(-1)^n a_n$ mit $a_n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0$

Für $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{2(n+1)+1}}{(2(n+1)+1)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} = \frac{x^2}{(2n+3)\cdot(2n+2)} < 1$$

also: $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \ldots$
Damit:

$$x - sin(x) = \underset{>0}{(a_1 - a_2)} + \underset{>0}{(a_3 - a_4)} + \underset{>0}{(a_5 - a_6)} \ldots > 0, \text{ d.h. } sin(x) < x$$

$$sin(x) - (x - \frac{x^3}{6}) = \underset{>0}{(a_2 - a_3)} + \underset{>0}{(a_4 - a_5)} \ldots > 0, \text{ d.h. } sin(x) > x - \frac{x^3}{6}$$

Schließlich gilt für $0 < x \leq 2$:

$$0 < x - \frac{x^3}{6}, \text{ denn } \frac{x^3}{6} = \frac{x \cdot x^2}{6} \leq x \cdot \frac{4}{6} < x$$

■

## 7.28 Lemma

es gilt $cos(2) < 0$ und $cos(1) > 0$

### Beweis:

Es gilt $cos(2) = \sum(-1)^n \cdot b_n$, $b_n = \frac{2^{2n}}{(2n)!}$. Für $n \geq 1$ gilt:

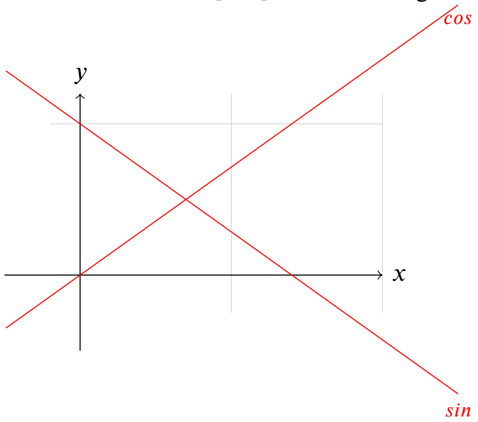
$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^2}{(2n+1)(2n+2)} < 1$$

Also $b_1 > b_2 > b_3 > b_4 > \ldots$

Somit:
$cos(2) = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \ldots$
$= b_0 - b_1 + b_2 \underbrace{-(b_3 + b_4)}_{<0} \underbrace{-(b_5 + b_6)}_{<0} \ldots < b_0 - b_1 + b_2$
$= 1 - 2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ ■
Analog $cos(1) > 1 - \frac{1}{2}$

## 7.29 Lemma

Die Funktion $cos : [0,2] \to \mathbb{R}$ ist streng monoton fallend im Intervall




**Beweis:**

Sei $2 \geq x > x \geq 0$, dann gilt $cos(x) - cos(y) \underset{\substack{\uparrow \\ Additionstheoreme}}{=} -2 \cdot sin(\frac{x+y}{2}) \cdot sin(\frac{x-y}{2})$

Weil $\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2} \in (0,2]$ gilt mit Lemma 7.27
$cos(x) - cos(y) < 0$, d.h. $cos(x) < cos(y)$ ■

## 7.30 Satz

Die Funktion $cos : [0,2] \to \mathbb{R}$ hat genau eine Nullstelle $x$, und es gilt $x > 1$

**Beweis:**

- $cos(1) > 0,\ cos(2) < 0,\ cos$ stetig $\underset{Zwischenwertsatz}{\Rightarrow}$ $cos$ hat Nullstelle $x \in (1,2)$ $(1 < x < 2)$
- Da $cos : [0,2] \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend, hat $cos$ genau eine Nullstelle ■

## 7.31 Definition

Es sei $\pi \in \mathbb{R}$ die eindeutige Zahl, so dass $cos(\frac{\pi}{2})$ und $1 \leq \frac{\pi}{2} \leq 2$

**Bemerkung:**

$2 \leq \pi \leq 4$, tatsächlich: $\pi = 3,14159\ldots$ (Kreiszahl) es gilt Es gilt:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\cdot\pi}{2}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $cos(x)$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ | |
| $sin(x)$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | |

dazu:

1. $sin(x)^2 + cos(x)^2 = 1$
   $sin(\frac{\pi}{2})^2 = 1$ also $sin(\frac{\pi}{2} = \pm 1$ aber $sin(\frac{\pi}{2}) > 0$
   d.h.:
   $e^{i\frac{\pi}{2}} = cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot sin(\frac{\pi}{2}) = i$

2. $$e^{i\cdot\pi} = (e^{i\cdot\frac{\pi}{2}})^2 = i^2 = -1 = cos(\pi) + i \cdot sin(\pi)$$

3. $$e^{i\frac{3\cdot\pi}{2}} = e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = -1 \cdot i = -i = cos(\frac{3\pi}{2}) + i \cdot sin(\frac{3\pi}{2})$$

4. …

## 7.32 Satz

Für $x\in \mathbb{R}$ gilt:

1. $cos(2\pi + x) = cos(x),\ sin(2\pi + x) = sin(x)$
2. $cos(\pi + x) = -cos(x),\ sin(\pi + x) = -sin(x)$
3. $cos(\pi - x) = -cos(x),\ sin(\pi - x) = sin(x)$
4. $cos(\frac{\pi}{2} - x) = sin(x)$

### <u>Beweis</u> Additionstheoreme anwenden:

1. $cos(2\pi + x) = \underbrace{cos(2\pi)}_{=1} \cdot cos(x) - \underbrace{sin(2\pi)}_{=0} \cdot sin(x) = cos(x)$
4. $cos(\frac{\pi}{2} - x) = \underbrace{cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} \cdot cos(-x) - \underbrace{sin(\frac{\pi}{2})}_{=1} \cdot \underbrace{sin(-x)}_{=-sin(x)} = sin(x)$

### Bemerkung:

$cos, sin$ sind periodisch mit Periode $2\pi$, $sin, cos$ sind durch $cos\ :\ [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt.

### Bemerkung:

$cos(x), sin(x)$ kann für $x \in \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$ explizit bestimmt werden

### Beispiel:

$cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2},\ sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

### Beweis:

Sei $x = cos(\frac{\pi}{3}),\ \ y = sin(\frac{\pi}{3}), z = x + i \cdot y = e^{i\frac{\pi}{3}}$
Dann gilt:

$$z^2 = e^{2\cdot i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi\cdot -\frac{\pi}{3}} = -1 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = -\bar{z}$$

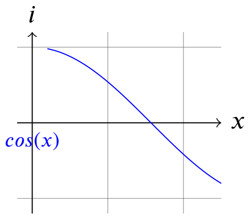
Also $(x + iy)^2 = -x + iy$ d.h. $x^2 - y^2 = -x$, $2xy = y$ und $x^2 + y^2 = 1$
Auflösen liefert Beh.

## Wiederholung

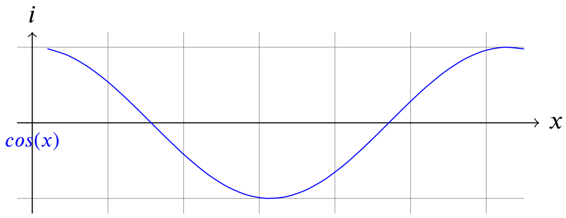
## Definition

$$cos(x) + i \cdot sin(x) = exp(i \cdot x) = e^{i \cdot x}$$

$cos$ $[0,2] \to \mathbb{R}$: streng monoton fallend,
$cos(0) = 1, cos(1) > 0, cos(2) < 0$




$\Rightarrow$ cos hat in [1,2] eine eindeutige Nullstelle.
Definiere $\pi \in \mathbb{R}$ sei die Zahl mit $1 \leq \frac{\pi}{2} \leq 2$, $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$




Verschiebungsregeln (folgt aus Additionstheorem)
$cos(2\pi + x) = cos(x)$
$cos(2\pi - x) = cos(x)$
$cos(\pi - x) = -cos(x)$

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $cos(x)$ | 1 | 0 | -1 | 0 | 1 |

## 7.33 Satz

Die Funktion $cos : [0, \pi] \to [0, 1]$ ist stetig, streng monoton fallend, bijektiv

### Beweis:

$cos : [0, 2] \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend $\Rightarrow cos : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend
$cos(\pi - x) = -cos(x) \Rightarrow cos : [\frac{\pi}{2}, \pi] \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend SKIZZE
$\Rightarrow cos : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend
$cos(0) = 1,\ cos[\pi] = -1 \Rightarrow cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ surjektiv, somit bijektiv ■
Folge es gibt eine Umkehrfunktion: Arcuscosinus: $arccos = cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$
SKIZZE ARCCOS

$$\begin{aligned} cos(0) = 1 \quad & arccos(1) = 0 \\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad & arccos(0) = \frac{\pi}{2} \\ cos(\pi) = -1 \quad & arccos(1) = \pi \end{aligned}$$

### Bemerkung:

Die Wahl des Intervalls $[0, \pi]$ ist willkürlich. Auch bijektiv:
$cos : [\pi, 2\pi] \to [-1, 1],\ cos : [-\pi, 0] \to [-1, 1]$

### Bemerkung:

Sei $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi \cdot n$ mit $n \in \mathbb{Z}$
(Anschaulich: klar, Beweis: Übung)

# Polarzerlegung

## 7.34 Satz

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ hat eine Darstellung $\boxed{z = r \cdot e^{i\phi}}$ mit $r \in \mathbb{R},\ r \geq 0,\ \phi \in \mathbb{R}$. Es gilt $r = |z|$, Man kann $\phi$ so wählen, dass $\phi \in [0, 2\pi)$. Wenn $z \neq 0$, dann ist $\phi \in [0, 2\pi)$ eindeutig.
Bezeichnung: $z = r \cdot e^{i\phi}$
Polarzerlegung von $z$, $\phi \in [0, 2\pi)$ , Argument von $z$ (wenn $z \neq 0$) SKIZZE

### Beweis:

Wenn $z = 0 \Rightarrow |z| = |r| \cdot |e^{i\phi}| = r \cdot 1 = r$
Wenn $z = 0$: $z = 0 \cdot e^{i\phi}$ für alle $\phi$
Sei $z \neq 0$. $r := |z| > 0$
$w := \frac{z}{r} \in \mathbb{C}$. $|w| = \frac{|z|}{r} = \frac{r}{r} = 1$
Suche $\phi$ mit $w = e^{i\phi}$. Sei $w = x + i \cdot y$, $x, y \in \mathbb{R}$
$cos(\phi) = x,\ sin(\phi) = y$
Setze $\widetilde{\phi} := arcos(x)$ und $\tilde{y} = \sin(\widetilde{\phi})$
Dann $\tilde{y}^2 = sin(\widetilde{\phi})^2 = 1 - cos(\widetilde{\phi})^2$
$= 1 - x^2 = y^2$, denn $x^2 + y^2 = |w|^2 = 1$
2 Fälle:
$\tilde{y} = y$ oder $\tilde{y} = -y$
Wenn $\tilde{y} = y$ dann $\phi = \widetilde{\phi}$ Lösung: $e^{i\phi} = w$
Wenn $\tilde{y} = -y$ dann $\phi := 2\pi 2\pi - \widetilde{\phi}$
$cos(\phi) = cos(\widetilde{\phi}) = x$ ✓
$sin(\phi) = sin(2\pi - \widetilde{\phi}) = sin(\widetilde{phi}) = -\tilde{y} = y$ ✓
$\Rightarrow e^{i\phi} = w \Rightarrow z = r \cdot w = r \cdot e^{i\phi}$
Aber:

$$|\phi - \phi'| < 2\pi \Rightarrow \phi - \phi' < 0$$

Das zeigt Eindeutigkeit der Polarzerlegung ■

### Bemerkung:

(Multiplikation komplexer Zahlen in Polarzerlegung)

$$(r \cdot e^{i\phi}) \cdot (r \cdot e^{i\phi'}) = (r \cdot r') \cdot e^{i\phi + i\phi'} = (r \cdot r') \cdot e^{i(\phi+\phi')}$$

Multiplikation in $\mathbb{C}$ entspricht $\begin{cases} \text{Multiplikation der Beträge} \\ \text{Addition der Argumente} \end{cases}$ SKIZZE

## 7.35 Satz (Einheitswurzel)

Sei $n \in \mathbb{N}$
Die Gleichung $z^n = 1,\ z \in \mathbb{C}$
Hat genau $n$ Lösungen, nämlich $z = e^{2\pi \frac{k}{n}}$ mit $k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k < n$

### Beweis:

Wenn $z^n = 1$, dann $|z|^n = |1| = 1 \Rightarrow |z| = 1$
Sei $z = e^{i\phi}$ mit $0 \leq \phi < 2\pi$ $z^n = 1 \Leftrightarrow (e^{i\phi})^n = 1 \Leftrightarrow e^{in\phi} = 1$

$$\Leftrightarrow n \cdot \phi = k \cdot 2\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \phi = 2\pi k/n \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow z = e^{2\pi i \frac{k}{n}} \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

## Bedeutung

$0 \leq \phi < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq 2\pi k/n < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq k < n$ ■

$$\text{SKIZZE}\begin{cases} e^0 = 1 \\ e^{2\pi i/6} = e^{\pi i/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ e^{2\pi i 2/6} = e^{\pi i 2/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ e^{2\pi i 3/6} = e^{\pi i} = -1 \\ e^{2\pi i 4/6} = \dots = \dots \\ e^{2\pi i 5/6} = \dots \end{cases}$$

## Verhalten von $exp(z)$ nahe Null

Erinnerung: $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig, dass heißt wenn $z \to 0$ dann $exp(z) \to exp(0) = 1$

Betrachte $\dfrac{exp(z) - 1}{z}$ für $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$

# 7.36 Satz

Es gilt $\lim_{z\to 0} \frac{exp(z)-1}{z} = 1$
Das heißt:
Wenn $(z_n)$ Folge in $\mathbb{C}$ mit $z_n \neq 0$, $z_n \to 0$ dann gilt $\frac{exp(z)-1}{z} \to 1$

## Beweis:

$$exp(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\frac{exp(z) - 1}{z} = \frac{\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots}{z}$$

$$= \frac{1}{1!} + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots$$

Also $|\frac{exp(z)-1}{z} - 1| = |\frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots| \leq |\frac{z}{2!}| + |\frac{z^2}{3!}| + |\frac{z^3}{4!}| + \dots$
$\leq \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \dots = exo(|z|) - 1$
Wenn $z_n \to 0$ dann $|z_n| \to 0$
$\Rightarrow (exp(|z|)) \to 0$
$\Rightarrow \frac{exp(z_n)-1}{z_n} \to 1$ ■

## Bemerkung:

1. Beschränkung auf $z = x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \overset{x\to 0}{x \neq 0} \quad \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad x \in \mathbb{R}$
2. Beschränkung auf

$$z = ix,\ x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^i x - 1}{ix} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x) + i \cdot sin(x) - 1}{ix} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \left( \frac{sin(x)}{x} - i \cdot \frac{cos(x) - 1}{x} \right) = 1 + 0i\ (*)$$

$$(*) \underset{Realteil}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

$$(*) \underset{Imaginrteil}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{cos(x) - 1}{x} = 0$$

# Geometrische Bedeutung von $\pi$?

## Frage

Was ist die Länge des Kreisbogens von 1 bis $e^{ix}$? SKIZZE

1. Wie ist diese Länge definiert?
2. Berechnen

Zerteilung in kleine Strecken Wähle $n \in \mathbb{N}$ groß:

$$l_n = |e^{ix/n} - 1| + |e^{2ix/n} - e^{ix/n}| + ... + |e^{ix} - e^{(n-1)ix/n}|$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left| |e^{(k+1)ix/n} - e^{kix/n}| \right|$$

# 7.37 Satz

Es gilt $\lim_{n \to \infty} l_n = |x|$ Interpretation der Länge des Bogens ist $|x|$
SKIZZE bogenlänge

## Beweis:

$$|e^{(k+1)ix/n} - e^{kix/n}| = |e^{kix/n}| \cdot |e^{ix/n} - 1| = |e^{ix/n} - 1|$$

$$(**) \text{ Satz 7.36: } \lim_{n \to \infty} \left| \frac{e^{ix/n} - 1}{ix/n} \right| = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n \to \infty} n \cdot \left|e^{ix/n} - 1\right| = \frac{\left|e^{ix/n} - 1\right|}{\frac{1}{n}} \underset{(**)}{=} |x|$$

■

# 8 Differenzialrechnung

## 8.1 Definition Differenzialrechnung

Sei $I$ ein Intervall:
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt $\underline{x_0 \in I}$ differenzierbar, wenn der Grenzwert existiert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und $f'(x_0)$ heißt Ableitung von $f$ in $x_0$
$f$ heißt differnzierbar, wenn $f$ in jedem $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

### Andere Bezeichnung

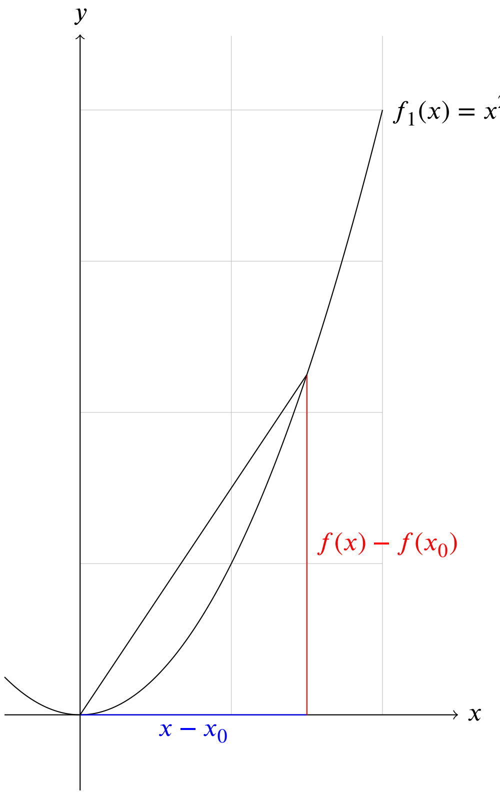
$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0).$$

### Geometrische Interpretation

Der Differenzialquotient

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)}$$

ist Steigung der Geraden durch die Punkte $(x, f(x)),\ (x_0, f(x_0))$ (Sekante)




$f'(x_0)$ (wenn existiert) ist die Steigung der Tangente an $\Gamma_f$ im Punkt $(x_0, f(x_0))$

### Bemerkung:

Schreibe

$$x = x_0 + h$$
$$h = x - x_0$$

$$\rightsquigarrow \; f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

## Beispiel:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f(x) = c$ konstante Funktion

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{c-c}{\underbrace{x - x_0}_{0}} = 0$$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f(x) = a \cdot x, a \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{a \cdot x - a \cdot x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a \Rightarrow f \text{ differenzierbar}$$

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f(x) = x^2$

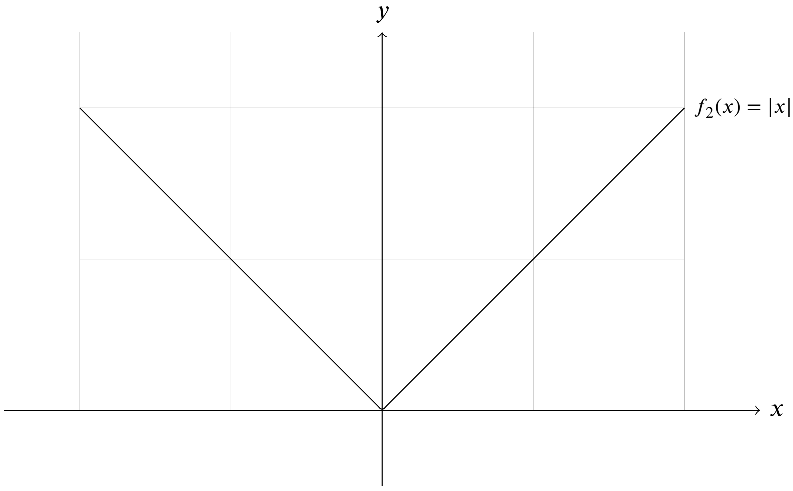
$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x_0 + h}{h} = 2x_0 \Rightarrow f \text{ differenzierbar}$$

4. $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\; f(x) = \frac{1}{x}$ Sei $x_0 \neq 0$

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{x_0 - x}}{\cancel{(x - x_0)} \cdot x \cdot x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-1}{x \cdot x_0} = -\frac{1}{x_0^2} \Rightarrow f \text{ differenzierbar,}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; f(x) = |x|$




$x_0 = 0$

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} \text{ existiert nicht, denn } \begin{cases} 1 & h > 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ ist nicht in 0 differenzierbar.

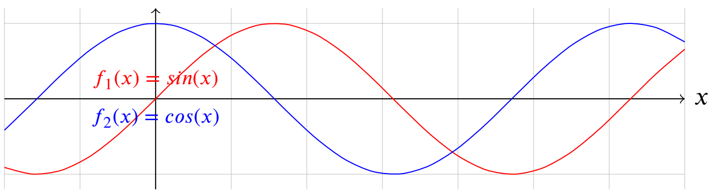
6. $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bekannt aus Satz 7.36
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$.
$exp(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{exp(x_0+h) - exp(x_0)}{h}$
$\lim_{x \to 0} \frac{exp x - 1}{x} = 1 = \frac{exp(x) - exp(0)}{x - 0}$ Das heißt: $exp'(0) = 1$. Insbesondere ist $exp$ differenzierbar in 0

7. $sin : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ Sei $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{sin(x_0+h)-sin(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}(sin(x_0)\cdot cos(h)+cos(x_0)\cdot sin(h)-sin(x_0))\\ &= \frac{1}{h}\cdot sin(x_0)\cdot(cos(h)-1)+cos(x_0)\cdot\frac{sin(h)}{h}\\ &= sin(x_0)\cdot\underbrace{\frac{(cos(h)-1)}{h}}_{\to 0\ fr\ h\to 0}+cos(x_0)\cdot\underbrace{\frac{sin(h)}{h}}_{\to 1\ fr\ h\to 0}\quad\text{(Korollar zu Satz 7.36)}\end{aligned}$$

Somit $sin'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{sin(x_0+h)-sin(x_0)}{h} = cos(x_0) \Rightarrow sin$ ist differenzierbar, $sin' = cos$.

8. $cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analog... cos' = -sin




$sin' = cos$
$cos' = -sin$

## 8.2 Lemma

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0$ differenzierbar, wenn eine andere Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

1. $f(x) - f(x_0) = \phi(x)\cdot(x-x_0)$ für alle $x \in I$

2. $\phi$ ist stetig in $x_0$

Dann gilt $\phi(x_0) = f'(x_0)$

### Beweis:

Definiere notwendig

$$\phi_0 : I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R},\ \phi(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Folgenstetigkeit: $\phi_0$ hat eine Fortsetzung $\phi : I \to \mathbb{R}$, die in $x_0$ stetig ist $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\phi_0(x)$ existiert, dann ist

$$\phi(x_0) = \lim_{x\to x_0}\phi_0(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

existiert, dann ist $\phi(x_0) = f'(x_0)$ ■

## 8.3 Satz

Sei $f I \to \mathbb{R} eine Funktion$

1. $f$ in $x_0$ differenzierbar $\Rightarrow f$ in $x_0$ stetig.

2. $f$ differenzierbar $\Rightarrow f$ stetig.

### Beweis:

1. Sei $\phi$wie im Lemma $\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x-x_0)$
   $\phi$ stetig in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in $x_0$ ■

2. folg aus 1.)

# Berechnung der Ableitung

## 8.4 Satz (Zusammengesetzte Ableitungen)

Seien $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, dann sind auch $f+g, a\cdot f, f\cdot g : I \to \mathbb{R}$ in $x_0$ differenzierbar. ($a \in R$) und:

1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(a\cdot f)'(x_0) = a\cdot f'(x_0)$
3. $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$

### Beweis:

Zeige 3), 1) und 2) analog.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} + \frac{f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}\right) + \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}\right) \\ &= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)\end{aligned}$$

Weil $f$ stetig in $x_0$ und nach Definition der Ableitung. ■
Folge: Für $n \geq 1$ $(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$

### Beweis:

mit vollständiger Induktion:

IA:
$n = 0$
$(x^1) = 1 = 1\cdot x^0$ ✓

IS:
$n \to n+1$
$(x^n + 1) = n\cdot x^{n-1}$

$$(x^{n+1})' = x'\cdot x^n + x\cdot (x^n)' = 1 + x^n + x\cdot n\cdot x^{n-1} = (n+1)x^n$$

■

## 8.5 Satz Kettenregel

Sei $I, J$ Intervalle, $f : I \to \mathbb{R},\ g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen
mit $f(I) \subseteq J \rightsquigarrow g\circ f : I \to \mathbb{R}$ ist definiert
$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$
$x_0 \longmapsto f(x_0)$

Wenn
$f$ in $x_0$ differenzierbar und
$g$ in $f(x_0)$ differenzierbar,

dann ist $g\circ f$ in $x_0$ differenzierbar, und $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$
Beweisidee

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

## Wiederholung

$I$ Intervall
$f : I \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I$ differenzierbar wenn

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x_0)$ Ableitung von $f$ an $x_0$

### Beispiel:

$n \geq 0$ :

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2},\ exp' = exp,\ \text{d.h. } (e^x)' = e^x,\ cos' = -sin,\ sin' = cos$$

### Produktregel

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

### Kettenregel

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

### Beispiel:

$$(e^{x^2})' = (exp(x^2))' = exp'(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cdot e^(x^2)$$

$$((cos(x))^2)' = f(cos(x))' = f'(cos(x)) \cdot cos'(x) = 2 \cdot cos(x) \cdot sin(x)$$

## 8.6 Satz Quotientenregel

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $x_0$ differenzierbar, $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.
Dann ist $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$, $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ differenzierbar in $x_0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

### Beweis:

Fall $f = 1$:
Kettenregel: $\frac{1}{g} = \frac{1}{x} \cdot g$
Sei $h(x) = \frac{1}{x}$ $\frac{1}{g}(x) = h(g(x))$
$(\frac{1}{g})'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x) = -\frac{1}{g(x^2)} \cdot g'(x) \approx Beh.$
Insbesondere: $(\frac{1}{g})' = -\frac{1}{g^2} \cdot g' = -\frac{g'}{g^2}$ Allgemeiner Fall: $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$
Produktregel $\Rightarrow (\frac{f}{g})' = (f \cdot \frac{1}{g})' = f'\frac{1}{g} + f \cdot (\frac{1}{g})'$
$= \frac{f' \cdot g}{g^2} - f \cdot \frac{g'}{g^2} = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$ ■

### Beispiel:

Sei $n < 0$, $f : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^n$
Sei $m = -n > 0$ $f(x) = \frac{1}{x^m}$

$$f'(x) = -\frac{(x^m)'}{(x^n)'} = -m\frac{x^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

$$-m - 1 = n - 1$$

$$-m = n$$

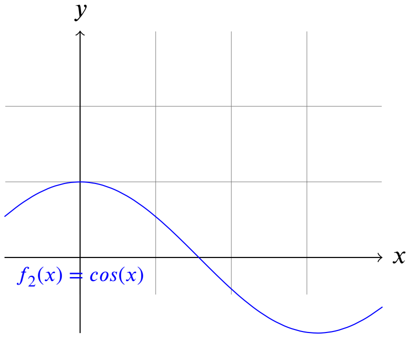
## Folge

$(x^n)' = nx^{n-1}$ gilt für alle $n \in \mathbb{Z}$!

$$(x^{-3})' = -3x^{-4}$$

## 8.7 Satz (Ableitung der Umkehrfunktion)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton
Sei $J = f(I)$, $g = f^{-1} : J \to I$ die Umkehrfunkion von $f$
Angenommen, $f$ ist $x_0 \in I$ differenzierbar und $f'(x_0) \neq 0$
Dann ist $g$ in $y_0 := f(x_0)$ differenzierbar und $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$




## Beweis:

Sei $(y_n)_{n\geq 1}$ Folge in $J$ ist mit $y_n \to y_0$

$$g'(y_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0}$$

(soll unabhängig von (y_n) sein) $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$ Sei $x_n = g(y_n)$ $\to$ $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ da $g$ stetig.
$x_n = g(y_n) \Leftrightarrow f(x_n) = y_n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y_0)}{y_n - y_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}\right)^{-1} = f'(x_0)^{-1}$$

Rechnung ok weil $f'(x_0) \neq 0$ ∎
Folge $log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar, $log'(x) = \frac{1}{x}$

## Beweis:

$log(x) = exp(x)^{-1}$ Umkehrfunktion $exp'(x) = exp(x) \neq 0$ für alle $x$
$\Rightarrow$ 8.7 anwendbar. Sei $y = exp(x)$, $x = log(y)$. $log'(y) = \frac{1}{exp'(x)} = \frac{1}{exp(x)} = \frac{1}{y}$ ∎
$log'(x) = \frac{1}{x}$

## Anwendung

$x = 1$ $log(1) = 0$
$log'(1) = \frac{1}{1} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{log\left(1+\frac{1}{n}\right) - log(1)}{\frac{1}{n}} = log'(1) = 1 \Rightarrow 1 = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right))$$

$exp$ anwenden $\underset{exp\ stetig}{\Rightarrow}$

$$exp(1) = \lim_{n\to\infty} exp\left(n \cdot log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right))$$

$$e = exp(1) \underset{Def}{=} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

## 8.8 Höhere Ableitungen

Idee: Wenn $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar $\rightsquigarrow$ $f' : I \to \mathbb{R}$ Funktion
Wenn $f'$ differenzierbar $\rightsquigarrow$ $(f')' = f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$
2. Ableitung weiter:
$f'' = f^{(2)}$
$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ wenn differenzierbar
$f^{(n)}$: n-te Ableitung von $f$.

**Beispiel:**

$$(x^5)^{(2)} = ((x^5)')' = (5x^4)' = 20x^3$$
$$cos'' = -sin' = -cos$$
$$sin'' = -cos' = -sin$$

## 8.9 Formale Definition der höheren Ableitung

Rekursive Definition:
Sei $n \geq 1$
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist $n+1$ mal differenzierbar in $x_0 \in I$, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $f$ auf $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ $n$-mal differenzierbar und $f^{(n)} : (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ in $x_0$ differenzierbar ist, dann setzte $f^{(n+1)}(x_0) := (f^{(n)})'(x_0)$

# Lokale Extrema und Mittelwertsatz

## 8.10 Definition Lokale Extrema

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion

$f$ hat ein lokales Maximum in $x_0 \in I$ wenn gilt: $\begin{cases} \text{es gibt ein } \epsilon > 0 \text{ s.d.} \\ \text{Für alle } x \in I \text{ mit } |x - x_0| < \epsilon \\ \text{gilt } f(x) \leq f(x_0) \end{cases}$

Analog: Lokales Minimum.

**Bemerkung:**

Lokale Minima von $f$ = lokale Maxima von $-f$

## 8.11 Satz (Mittelwertsatz)

Sei $I = (a, b)$, $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion
Wenn $f$ in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum hat, und wenn $f$ in $x_0$ differenzierbar ist, dann ist $f'(x_0) = 0$ (Extremum = Maxium oder Minimum)

**Beweis:**

$$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\geq 0} = \lim_{x \nearrow x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\leq 0}$$

Angenommen $f$ hat in $x_0$ lokales Minimum $\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$ wenn $|x - x_0| < \varepsilon$, $\varepsilon$ wie oben
Somit $f'(x_0) \leq 0$, $f'(x_0) \geq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$ ■

## 8.12 Satz von Rolle

Sei $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $(a, b)$ differenzierbar.
Sei $f(a) = f(b)$.
Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$
GRAPH

### <u>Beweis:</u>

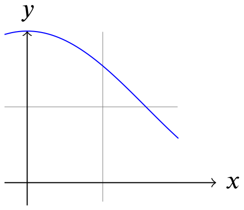
Wenn $f$ konstant, d.h. $f(x) = f(a)$ für alle $x \in (a, b)$, dann $f'(x) = 0$ für alle $x \Rightarrow$ Satz stimmt.
Sei $f$ nicht konstant, gibt es $x_1 \in (a, b)$ mit $f(x_1) \neq f(a)$
Angenommen $f(x_1) > f(a)$ (sonst Betrag $-f$)
sei $x_0 \in I$ mit $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in I$
$f(x_0) \geq f(x_1) > f(a) = f(b) \Rightarrow x_0 \neq a,\ x_0 \neq b$
$f$ hat in $x_0$ ein <u>lokales</u> Maximum $\overset{8.19}{\Rightarrow}$ $f'(x_0) = 0$

## Wiederholung

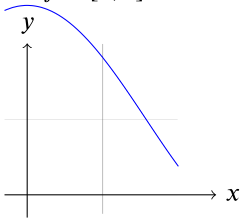
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in I$ wenn der Limes

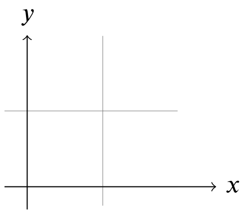
$$f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x0)}{x - x_0} \text{ existiert}$$

Ableitungsregeln: Produkt, Kettenregel, Umkehrfunktion $\rightsquigarrow$ Kann "alle" Ableitungen ausrechnen 8.11 $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f$ hat ein lokales extremum in $x_0 \in (a, b) \Leftarrow f'(x) = 0$




8.12 (Satz von Rolle)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar




$f(a) = f(b)$ dann existiert $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$

## 8.13 Satz (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, auf (a,b) differenzierbar, dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lambda$$

GRAPH

### Beweis:

Sei $g : (a, b) \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - \lambda \cdot x$

Rechne $g(a) - g(b) = f(a) - \lambda \cdot a - f(b) + \lambda \cdot b = f(a) - f(b) - \lambda(a - b) = f(a) - f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - b) = 0$

Satz von Rolle auf $g$ anwendbar $\Rightarrow$ es gibt $x_0 \in (a, b),\ g'(x_0) = 0$

$$f(x) = g(x) + \lambda x \Rightarrow f'(x_0) = g'(x_0) + \lambda = \lambda$$

■

## 8.14 Folge

Sei $f : T \to \mathbb{R}$ diffbar, $f'(x) = 0$ für alle $x$ dann ist $f$ konstant.

### Beweis:

Sei $x_1 < x_2$ in $I$
Es gilt $x_0$ mit $x_1 < x_0 < x_2$ mit $f(x_1) - f(x_2) = f(x_0) \cdot f(x_1 - x_2) = 0$
$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f$ konstant. ■
Mittelwertsatz ■

## 8.15 Satz (Monotonie)

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, diff'bar auf $(a,b)$
$f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ monoton wachsend
$f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ monoton fallend
$f'(x) > 0$ für alle $x \in (a,b) \Rightarrow f$ streng monoton wachsend
$f'(x) < 0$ für alle $x \in (a,b) \Rightarrow f$ streng monoton fallend

### Beweis:

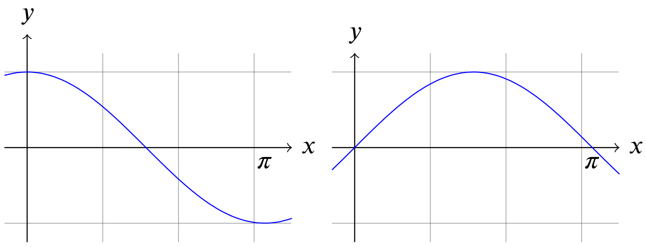
Angenommen $f'(x) \geq 0$ für alle $x$
Gegeben sei $a < x_1 < x_2 < b$

### Zeige

$f(x_1) \leq f(x_2)$
Mittelwertsatz: es gibt $x_0$ mit $x_1 < x_0 < x_2$ und $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(x_0)}_{\geq 0}\underbrace{x_2 - x_1}_{>0} \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$, also monoton wachsend.
Analog folgen alle "$\Rightarrow$" des Satzes.
Angenommen $f$ monoton wachsend
Sei $x_0 \in (a,b)$
Zeige: $f'(x) \geq 0$
$f'(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
$x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0,\ f(x) - f(x_0) \geq 0$
Analog: für monoton fallend $\Rightarrow f'(x) \leq 0$ für alle $x$ ∎

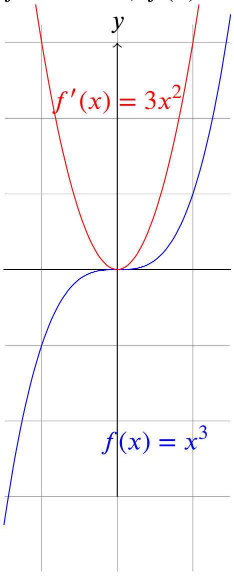
### Beispiel:

1. $cos : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ streng monoton fallend




$cos' = -sin,\ -sin(x) < 0$ für alle $x \in (0,\pi)$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$




$f'(x) \geq 0$ für alle $x$ $f'(0) = 0$ trotzdem $f$ streng monoton wachsend

## 8.16 Satz

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ in $x_0$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$, dann gilt:

1. Wenn $f''(x_0) < 0$ dann hat $f$ in $x_0$ ein lokales Maximum
2. Wenn $f''(x_0) > 0$ dann hat $f$ in $x_0$ ein lokales Minimum

(Wenn $f''(x_0 = 0)$, dann keine Aussage)

### Beweis:

Sei $f''(x_0) < 0$).

$$f''(x_0) = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

$\Rightarrow$Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$$

d.h.

a $x_0 < x < x_0 + \epsilon \Rightarrow f'(x) - f'(x_0) < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

b $x_0 - \epsilon < x < x_0 \Rightarrow f'(x) - f'(x_0) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

8.15 $\Rightarrow$ $f$ streng monoton fallend auf $[x_0, x_0 + \epsilon]$ wegen a) $f$ streng monoton steigend auf $[x_0 - \epsilon, x_0]$ wegen b)

### Beispiel:

$f(x)x^3 - 3x$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f'(x) = 3x^2 - 3$
$f''(x) = 6x$
Nullstelle (NST) von $f'$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x \in \{1, -1\}$
Anwendung von $f''$ an NST von $f'$: $f(1) = 6$

## Regeln von de l' Hospital

Ziel: Berechnung eines Limes $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ wenn $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$ oder $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

## 8.17 Satz

Sei $I = (a, b)$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen

### Annahme

Der Limes

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R} \text{ existiert}$$

1. Wenn $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, dann gilt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$
2. Wenn $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ oder $-\infty$, dann $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = c$

Analog für $x \to b$ (ohne Beweis)

**Beispiel:**

1. $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = ?$
   $\lim_{x\to 0} x = 0$, $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{=} 0$
   $x' = 1, sin' = cos$
   $\rightsquigarrow$ Berechne
   $\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)}{1} = cos(0) = 1$ existiert.
   l'Hospital $\Rightarrow lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{log(x)}{x}$
   $\lim_{x\to\infty} x = \infty$
   $log(x)' = \frac{1}{x}$, $x' = 1$
   $\rightsquigarrow$ Berechne
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$
   8.17 $\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{log(x)}{x} = 0$

3. Rationale Funktion
   $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{2x^2+5}$
   $f(x) = x^3 + x$, $g(x) = 2x^2 + 5$
   $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$
   $\rightsquigarrow\ f'(x) = 2x + 1$, $g(x) = 4x$
   $\rightsquigarrow$ Rechne
   $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{4x}$
   $= \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4x}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{2x^2+5} = \frac{1}{2}$

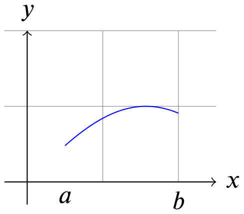
4. $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$$
   $$\frac{1}{sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - sin(x)}{x \cdot sin(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$
   $$f(x) = x - sin(x),\ g(x) = x \cdot sin(x)$$
   $$\lim_{x\to 0}(x - sin(x)) = 0 = \lim_{x\to 0}(x \cdot sin(x))$$
   $$f'(x) = 1 - cos(x),\ g'(x) = sin(x) + x \cdot cos(x)$$
   $$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos(x)}{sin(x) + x \cdot cos(x)} = ?$$
   $$\lim_{x\to 0}(1 - cos(x)) = 0 = \lim_{x\to 0} sin(x) + x \cdot cos(x)$$
   Wende 8.17 nochmal an
   $$f''(x) = sin(x),\ g''(x) = cos(x) + cos(x) - x.sin(x)$$
   $$lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{g''(x)} = lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{2cos(x) - x \cdot sin(x)} =^{1} \frac{0}{2} = 0$$
   $$\underset{8.17}{\Rightarrow} lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x) = 0} \underset{8.17}{\Rightarrow} lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x) = 0}$$

[1] $lim_{x\to 0} 2cos(x) - x \cdot sin(x) = 2$
$lim_{x\to 0} sin(x) = 0$

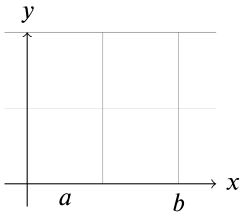
# 9 Integration

## Idee

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$




$\int_a^b f(x)dx =$ Fläche zwischen Graphen von $f$ und $x$-Achse
Wenn allgemeiner $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,




dann zählen Flächen unterhalb der $x$-Achse negativ

$$\int_a^b f(x)dx = F_1 - F_2 + F_3$$

## Fragen

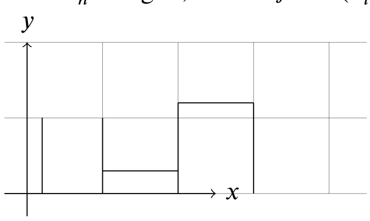
Formale Definition des Intervalls? Welche Funktionen sind interpretierbar? Eigenschaften, Berechnung des Integrals.

## Treppenfunktion

## 9.1 Definition der Treppenfunktion

Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

1. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n = b$ gibt, so dass $f$ auf $(x_{i-1}, x_i)$ konstant ist, dass heißt $f(x) = c_i$ für alle $x$ mit $x_{i-1} < x < x_i$




2. In diesem Fall definiere

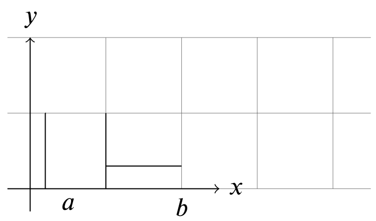
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

"Summe der Rechtecke"

### Bemerkung:

Die Definition eines Integrals für die Treppenfunktion ist unabhängig von der Unterteilung

**Beispiel:**

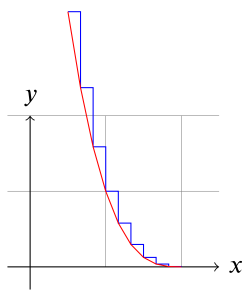



(ohne formalen Beweis)

## 9.2 Lemma

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Treppenfuntionen
Dann gilt:

1. $\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
2. $c \in \mathbb{R}$ $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$
3. Wenn $f \leq g$, dass heißt $f(x) \leq g(x)\ \forall x$, dann $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$




(ohne formalen Beweiß)

## Das Riemannsche Integral

Idee Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beliebige Funktion.
Wenn $g \leq f$ und $g$ Treppenfunktion dann sollte $\int g(x)dx < \int f(x)dx$ Wenn $f \leq h$ und $f$ Treppenfunktion dann sollte $\int f(x)dx < \int h(x)dx$ Wenn $\int_a^b f(x)dx$ durch diese ($\infty$-vielen) Bedingungen festgelegt wird, nennen wir $f$ integrierbar und $\int_a^b f(x)dx$ ist definiert.

## 9.3 Definition des Riemannschen Integral

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkte Funktion
Unterintegral:

$$sup\left\{\int_a^b g(x)dx \mid g : [a, b] \text{ Treppenfunktion mit } g \leq f\right\} =: \int_a^b {}_*f(x)dx$$

Oberintegral:

$$inf\left\{\int_a^b h(x)dx \mid h : [a, b] \text{ Treppenfunktion mit } f \leq h\right\} =: \int_a^{b\,*} f(x)dx$$

(Idee Wenn $\int_a^b f(x)$ definiert, sollte $\int_a^b {}_*f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{b\,*} f(x)dx$)

### Definition

$f$ heißt integrierbar, wenn $\int_a^b {}_*f(x)dx = \int_a^{b\,*} f(x)dx$
Dann setzte $\int_a^b f(x)dx := \int_a^b {}_*f(x)dx$

## 9.4 Bemerkung

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar $\Leftrightarrow$ es gilt: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine Treppenfunktion $g,\ h$ mit $g \leq f \leq h$ mit $\int_a^b h(x)dx - \int_a^b g(x)dx < \epsilon$. Damit ist $\int_a^b f(x)$ auf $\epsilon$ festgelegt.

## 9.5 Satz Eigenschaften des Integrals

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, dann sind auch $f + g$ und $c \cdot f$ integrierbar und

1. $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x) + \int_a^b g(x)$
2. $\int_a^b (c \cdot f)(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)$
3. wenn $f \leq g$ dann $\int f(x)dx \leq \int g(x)dx$

### Beweis:

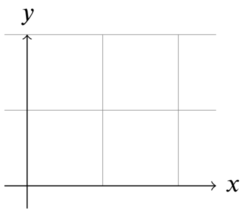
***Notation:***
$I(f) = \int f(x)dx$

Sei $\epsilon > 0$ gegeben.
Wähle Treppenfunktion $f_1, f_2, g_1, g_2$ mit $f_1 < f < f_2$ und $g_1 < g < g_2$
$I(f_2) - I(f_1) < \epsilon$, $I(g_2) - I(g_1) < \epsilon$
$\Leftarrow f_1 + g_1 < f + g < f_2 + g_2$
$I(f_2 + g_2) - I(f_1 + g_1) = I(f_2) - I(f_1) + I(g_2) - I(g_1) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$
Das für jedes $\epsilon > 0$
$|I(f+g) - I(f) - I(g)| \leq |I(f+g) - I(f_1 + g_1)| + |I(f) - I(f_1)| + |I(f) - I(f_1)| = 2\epsilon + \epsilon + \epsilon = 4\epsilon$
(Dreiecksungleichung)
$\Rightarrow I(f+g) - I(f) - I(g) = 0$
Rest des Satzes analog. ■

## 9.6 Satz

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann:

1. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Treppenfuntion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$




2. $f$ ist integrierbar

### Beweis:

Zeige 2) unter Annahme von 1).
Gegeben $\varepsilon > 0$. Setze $\varepsilon' = \frac{1}{2(b-a)}\varepsilon$
Wegen 1) gibt es eine Treppenfunktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $|f(x) - g(x)| < \varepsilon'$.

$$g_1(x) = g(x) - \varepsilon',\ g_2(x) = g(x) + \varepsilon' \Rightarrow g_1 \leq f \leq g_2$$

$$\int_a^b g_2(x)dx - \int_a^b g_1(x)dx = \int_a^b (g_2 - g_1)(x)dx = \int_a^b \underset{\substack{\uparrow \\ konstante\ Funktion}}{2\varepsilon'}(x)dx$$

$$= 2\varepsilon'(b-a) = \frac{1}{(b-a)} \cdot \varepsilon \cdot 2(b-a) = \varepsilon \underset{9.4}{\Rightarrow} f \text{ integrierbar}$$

Zeige

1. Gegeben sei $\epsilon > 0$
   6.24 $\Rightarrow f$ gleichmäßig aber stetig. d.h. es gibt $\delta > 0$ so dass gilt:
   Wenn $|x - y| < \delta$ dann $|f(x) - f(y)| < \epsilon$
   Wähle Unterteilung $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ mit $x_i - x_{i-1} < \delta$ Sei $c := f(x_i)$
   Definiere Treppenfunktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$
   $x_{i-1} < x < x_i \Rightarrow g(x) = c_i = f(x)\ (1 \leq i \leq n)$
   $g(x_0) = f(x_0)$ dann $|f(x) - g(x)| < \epsilon$ für alle $x$. ■

## 9.7 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig (somit integrierbar)
Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b - a)$
GRAPH

### Beweis:

Sei

$m = inf f(x) \mid x \in [a, b]$
$M = sup f(x) \mid X \in [a, b]$

6.11 $\Rightarrow$ Bekannt es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) = m, f(x_2) = M$
$f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $f(x) \leq f(x_2) \Rightarrow f(x_1)(b - a) = \int_a^b f(x) \leq \int_a^b dx \leq_a^b f(x_2)dx = f(x_2)(b - a)$
$f(x_1) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(x)$
Zwischenwertsatz $\Rightarrow$ es gibt auch $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y \Rightarrow f(x_0)(b - a) = \int_a^b f(x)dx$
(nachtrag)

## 9.8 Definition Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $a < b$

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

### Konsequenz

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig $a, b, c \in I$, dann

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

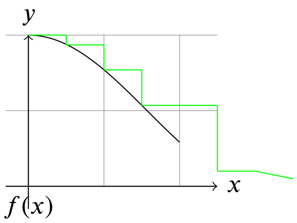
egal wie $a, b, c$ liegen!
WEITERE Graphen

## Wiederholung

1. Integration der Treppenfunktion (leicht)
2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt

$$\int_a^b {}_* f(x) = sup \left\{ \int_a^b g(x)dx \mid g : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ Treppenfunktion,} g \leq f \right\}$$

$$inf \left\{ \int_a^b h(x)dx \mid h : f \leq h \right\} = \int_a^b {}^* f(x)$$




$f$ integrierbar wenn $\int_a^b {}_* f(x)dx = \int_a^b {}^* f(x)dx$, dann $\int_a^b f(x)dx := \int_a^b {}_* f(x)dx$

a) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig $\Rightarrow$ integrierbar
b) Mittelwertsatz: Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)dx = f(x_0) \cdot (b-a)$ (Grundlage aller Berechnungen)

## Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

## 9.9 Satz

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktion, $a \in I$ feste Zahl.
Definiere:

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

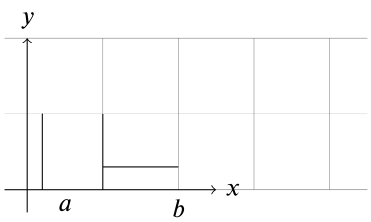
(Erinnerung: Wenn $x < a$, dann $\int_a^x \underset{Def}{=} -\int_x^a$)

Dann ist $F : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $F'(x) = f(x)$.

### Beweis:

Sei $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = \frac{1}{h}\int_a^{x+h} f(t)dt$$




Mittelwertsatz $\Rightarrow$ es gibt $x_h \in [x, x+h]$ (wenn $h > 0$) bzw. $x_h \in [x+h, x]$ (wenn $h < 0$), so dass

$$\int_a^{x+h} f(t)dt = f(x_n) \cdot h \Rightarrow (*) = \frac{f(x_n) \cdot h}{h} = f(x_n)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(x_n) \underset{1}{=} f(x)$$

$\Rightarrow$ Behauptung ■

## 9.10 Definition Stammfunktion

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ Funktion. Eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f$ wenn $F$ differenzierbar und $F' = f$

### Bemerkung:

9.9 $\Rightarrow$ Jede stetige Funktion $f$ hat eine Stammfunktion

## 9.11 Satz

Sei $F$ Stammfunktion von $f$
Eine Funktion $G : I \to \mathbb{R}$ ist Stammfunktion von $f \Leftrightarrow F - G$ konstant, dass heißt $G = F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$

### Beweis:

$G$ differenzierbar mit $G' = f \Leftrightarrow G - F$ differenzierbar mit $(G - F)' = f - f = 0 \Leftrightarrow G - F$ konstant (bekannt) ■

## 9.12 Satz (Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f$, dann

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

### Beweis:

Sei $G(x) := \int_a^x f(t)dt$, $G : [a, b] \to \mathbb{R}$.
9.9 $\Rightarrow G' = f \underset{9.11}{\Rightarrow} G - F = c$ konstant, $c \in \mathbb{R}$. $G = F + c$

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) = G(b) - \underbrace{G(a)}_{=0} = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

■

### Folge

Berechnung von Integralen $\Leftrightarrow$ Finden von Stammfunktionen = Umkehrung des Ableitens

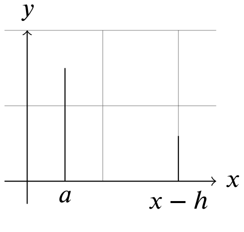
***Notation:***

$$"\int f(x)dx = F(x)"(*)$$

soll heißen: $F$ ist Stammfunktion von $f$, dass heißt $F' = f$
Vorsicht: (*) ist keine echte Gleichung, bestimmt $F(x)$ nur bis auf Addition einer Konstante

### Beispiel:

Sei $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ $\int_a^b x^s dx$ Erlaubter Integrationsbereich:




1. $s \in \mathbb{N}$: $a, b$ beliebig
2. $s \in \mathbb{Z}$: $s \leq -2$ : $x = 0$ ausschließen $x^s = \frac{1}{x^{-s}}$ entweder $a, b < 0$ oder $a, b > 0$

3. $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
   $x^s := e^{s \cdot log(x)}$ nur definiert für $x > 0 \quad a, b > 0$
   Suche $F$ mit $F' = x^s$
   $F = \frac{1}{s+1} x^{s+1}$ $F' = (s+1)\frac{1}{s+1} x^2 = s^2$
   $s \neq -1 \Rightarrow s+1 = 0$
   $\Rightarrow \int_a^b x^s dx = \frac{1}{s+1} x^s \Big|_a^b$

## Beispiel:

2. $\int e^x dx = e^x$, denn $(e^x)' = e^x$
3. $\int sin(x)dx = -cos(x) denn (-cos(x))' = sin(x)$
   $\int cos(x)dx = sin(x) denn (sin(x))' = cos(x)$ (Unbestimmte Integrale) $\underset{z.B.}{\Rightarrow} \int_a^b e^x dx = e^x \Big|_a^b = e^b - e^a$ etc.

$$\int e^{cx} dx = \frac{1}{c} e^{cx} \qquad \frac{1}{c}(e^{cx})' = \frac{1}{c} \cdot c \cdot e^{cx} = e^{cx}$$

$$\int x^s dx, s \neq 1 \ldots \text{ bekannt aus 1)}$$

4. $\displaystyle\int_a^b x^{-1} dx = \int_a^b \frac{1}{x} dx$
   Erlaubte Grenzen: $x \neq 0$
   d.h. $a, b > 0$ oder $a, b < 0$
   - Sei $a, b > 0 \quad . log'(x) = \frac{1}{x} \quad \log : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$
     $\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{x} dx = log(x) \mid_a^b$ wenn $a, b > 0$
   - Sei $a, b < 0$ Sei $g : \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{R}$, $g(x) = log(-x) = log(|x|)$
     $g'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$
     $\int_a^b \frac{1}{x} = log(-x) \mid_a^b = log(|x|) \mid_a^b$

   In beiden Fällen: $\int \frac{1}{x} dx = log(|x|)$ wenn $x \neq 0$
5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctan(x)$

### Beweis:

$tan = \frac{sin}{cos} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$
$(tan(x))' = \frac{1}{cos(x)^2}$
Wenn $y = tan(x) \qquad arctan'(y) = \frac{1}{tan'(x)} = cos(x)^2 \overset{!}{=} \frac{1}{1+y^2}$

$$cos(x)^2 \overset{!}{=} \frac{1}{1 + \frac{sin(x)^2}{cos(x)^2}} = \frac{cos(x)^2}{cos(x)^2 + sin(x)^2} = cos(x)^2$$

✓

Grundprinzip:
Jede Ableitungsregel gibt eine Integrationsregel:

- Kettenregel → Substitutionsregel
- Produktregel → Partielle Integration

# Substitutionsregeln

## 9.13 Satz (Substitionsregel)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\phi : [a, b] \to I$ differenzierbar, dann

$$\int_a^b f(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

### Beweis:

Sei $F : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f$, dass heißt $F' = f$

$$(F \cdot \phi)'(x) = F'(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) \Rightarrow \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = F(x)\Bigg| \begin{matrix} \phi(b) \\ \phi(a) \end{matrix} = F(\phi(b) - F(\phi'(a))$$

$F(\phi(X)) \mid_a^b = \int_a^b (F(\phi \circ F)'(x))dx = \int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)dx$

### Beispiel:

1. $\displaystyle\int_a^b f(x+c)dx = \int_a^b \underbrace{f(\phi(t))}_{f}(t+c) \cdot \underbrace{\phi'(t)}_{=1} dt) = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$
   $\phi(t) = t + c \qquad \phi'(t) = 1$
2. $\displaystyle\int_a^b f(c \cdot x) = \int_a^b f(\phi(t)) \cdot \frac{\phi'(t)}{c} dt = \frac{1}{c} \cdot \int_a^b f(x)dx$
3. $\displaystyle\int_a^b t : f(t^2)dt = {}^2\frac{1}{2}\int_a^b \underbrace{\phi'(t)}_{2t} \cdot f(\phi(t)) = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)dx$ z.B. $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{0^2}^{1^2} e^x dx$
   $f(x) = e^x = \frac{1}{2}e^2 \Bigg| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} = \frac{e-1}{2}$ $F(\phi(X)) \mid_a^b = \int_a^b (F(\phi \circ F)'(x))dx = \int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)dx$

### Beispiel:

1. $\displaystyle\int_a^b f(x+c)dx = \int_a^b \underbrace{f(\phi(t))}_{f}(t+c) \cdot \underbrace{\phi'(t)}_{=1} dt) = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$
   $\phi(t) = t + c \qquad \phi'(t) = 1$
2. $\displaystyle\int_a^b f(c \cdot x)dx = \int_a^b f(\phi(t)) \cdot \frac{\phi'(t)}{c} dt = \frac{1}{c} \cdot \int_{ca}^{cb} f(x)dx$
   $c \in \mathbb{R},\ c \neq 0 \qquad \phi(t) = ct \qquad \phi'(t) = c$
3. $\displaystyle\int_a^b tf(t^2)dx = \int_a^b \underbrace{\phi'(t)}_{2t} f(\phi(t))dt = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} f(x)dx$
   $\phi(t) = t^2 \qquad \phi'(t) = 2t$

### zum Beispiel:

$f(x) = e^x = \frac{1}{2}e^2 \Bigg| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} = \frac{e-1}{2}$

[2] $\phi(t) = t^2 \quad \phi'(t) = 2t$

# Wiederholung

Hauptsatz Wenn $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion der stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist, (d.h. $F' = f$) dann $\int_a^b f(x)dx = f(x)|_a^b$
Substitutionsregel

$$F' = f \Rightarrow (F \circ \phi)' = (F' \circ \phi) \cdot \phi' = (f \circ) \cdot \phi$$

$$\int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)dx = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

## Beispiel:

4. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $\phi(x) \neq 0$ für alle x.

$$\int_a^b \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = \int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} \frac{1}{x}dx = log(|x|)|_a^b$$

$$= log(|\phi(b)|) - log(|\phi(a)|)$$

5. Fläche unterm Halbkreis
   GRAPH Halbkreis

$$(*) = \int_a^b \sqrt{1-x^2}dx$$

$x^2 + y^2 = 1$ (Pythagoras) $y = \sqrt{1-x^2}$ Substituiere $x = sin(t)$ $\sqrt{1 - sin(t)^2} = \sqrt{cos(t)} = cos(t)$
(Wenn $cos(t) \geq 0$, d.h. z.B.$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) GRAPH cos(x) Intervall -pi/2 -> pi/2
$\phi(t) = sin(t)$
$\phi'(t) = cos(t)$
$a = sin(u) \qquad b = sin(v)$
$u := arcsin(a) \qquad v := arcsin(b)$
$(*) = \int_{sin(u)}^{sin(v)} \sqrt{1} - x^2dx$
$= \int_u^v \sqrt{1 - sin(t)^2} \cdot cos(t)dt$
$= \int cos(t)^2dt$
$\rightsquigarrow$ Siehe Übung

# Partielle Induktion

## Produktregel

$(f \cdot g)' = f'g + fg'$

# 9.14 Satz (Partielle Induktion )

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar, dass heißt $f', g'$ stetig
Dann gilt $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)dx$

## Beweis:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \underset{Produktregel}{=} \int_a^b (f \cdot g)'(x) \underset{Hauptsatz}{=} f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b \Rightarrow \text{Behauptung}$$

■

**Beispiel:**

1. $\int_a^b log(x)dx = (*)$
Sei $g(x) = x, g'(x) = 1, f(x) = log(x)$

$$(*) = \int_a^b log(x)g'(x)dx = log(x)\Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b log(x)\cdot x\,dx}_{\int_a^b \frac{x}{x}dx=b-a=x\Big|_a^b}$$

$$= (log(x) - x)\Big|_a^b = x(log(x) - 1)\Big|_a^b$$

**Probe**

x(log(x)-1)'=...=log(x)

2.

$$\int_a^b cos^2(x)dx = \int_a^b cos(x)\cdot sin'(x)dx = cos(x)\cdot sin(x)\Big|_a^b \int_a^b cos'(x)\cdot sin(x)dx$$

$$= cos(x)\cdot sin(x)\Big|_a^b + \int_a^b \underbrace{sin(x)\cdot sin(x)}_{sin^2(x)=1-cos^2(x)}dx$$

$$= cos(x)\cdot sin(x)\Big|_a^b + x\Big|_a^b - \int_a^b cos^2(x)dx$$

$$\Rightarrow 2\int_a^b cos^2(x)dx = (cos(x)sin(x) + x)\Big|_a^b \Rightarrow 2\int_a^b cos^2(x)dx = \frac{1}{2}(\dots)$$

3. $\int_a^b e^x cos(x)dx = \int_a^b e^x sin'(x)dx$
$= e^x sin(x)\Big|_a^b - \int_a^b e^x sin(x)dx$
$= e^x sin(x)\Big|_a^b + \int_a^b e^x cos'(x)dx$
$= e^x sin(x)\Big|_a^b + e^x cos(x)\Big|_a^b - \int_a^b e^x cos(x)dx$
$\Rightarrow \int_a^b e^x cos'(x)dx = \frac{1}{2}\left(e^x(sin(x) + cos(x))\right)\Big|_a^b$

## Uneigentliche Intregrale

## 9.15 Definition Uneigentliche Integrale

Sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ Funktion, die auf jedem Intervall $[a,R]$ mit $a \leq R < \infty$ integrierbar ist. Setzte

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$$

(Wenn der Limes existiert), dann nennt man $\int_a^\infty f(x)dx$ konvergent
Analog für $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$

**Beispiel:**

1.

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = ?$$

Graph

$$\int_1^R \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Bigg| \begin{matrix} R \\ 1 \end{matrix} = \frac{1}{1} - \frac{1}{R} = 1 - \frac{1}{R}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty}(1-\frac{1}{R}) = 1$$

2.

$$f(x) = \frac{1}{x}m \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$$

$$\int_1^R \frac{1}{x}dx = -log(x)\Bigg| \begin{matrix} R \\ 1 \end{matrix} = log(R) - \underbrace{log(1)}_{=0} = 1$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{R\to\infty} log(R) \text{ existiert nicht}$$

(bzw. lim()=∞)

## 9.16 Definition

Sei $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf einem Intervall $[a,R]$ mit $a \leq R \leq b$ integrierbar ist.
Setze $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \lim_{R\to b}\int_a^R f(x)dx$ (wenn der Grenzwert existiert.) Dann heißt $\int_a^b f(x)dx$ konvergent.
Analog für $f : (a,b] \to \mathbb{R}$

### Beispiel:

1. $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = ?$
   GRAPH des Integrals
   $f(x) = \frac{1}{x}$, $f : (0,1] \to \mathbb{R}$
   $\int_0^1 \frac{1}{x}dx = \lim_{R\to 0}\int_a^b \frac{1}{x}dx = \lim_{R\to 0}\left(\underbrace{log(1)}_{=0} - log(R)\right)$

   ### Bemerkung:

   für $\mathbb{R} \to 0$ ist $log(R) \to -\infty$
   GRAPH log(x) $\Rightarrow \int_a^b \frac{1}{x}dx$ divergiert.

2. $\int_0^1 \frac{1}{sqrtx}dx = \lim_{R\to 0}\int_R^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$
   $= \lim_{R\to 0}\left(2x^{\frac{1}{2}}\Bigg| \begin{matrix} b \\ R \end{matrix}\right) = \lim_{R\to 0}\left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{R}\right) = 2$
   GRAPHEN $= F_1 + F_2 = F_3 + 1 = 2$

## 9.17 Definition

Sei $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Intervall $[R,S]$ mit $a < R \leq S < b$ integrierbar ist.
Wähle $c \in (a,b)$. Setzte $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
Wenn beide Integrale konvergieren (Nach Definition 9.16, 9.15)

### Bemerkung:

Unabhängig von $c$ GRAPH

### Beispiel:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

### Uneigentliche Integrale

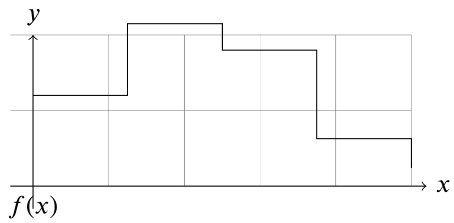
zum Beispiel:

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx$$

(wenn der lim existiert)

## Integrale mit Reihen

Beobachtung: eine Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist das unbestimmte Integral einer Treppenfunktion:




$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \int_0^\infty f(x)dx$$

## 9.18 Satz (Integralkriterium für Reihen)

Sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend mit $f(x) \geq 0$ für alle $x$. Für $n \geq 1$, sei

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(x)dx$$

Graph 1/x Treppenfunktion über dem graphen, fester abstand, schraffur treppenfunktion ohne graph

1. die Folge $(a_n)$ konvergiert
2. die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(x)$ konvergiert $\Leftrightarrow \int_1^\infty f(x)dx$ konvergiert

### Beweis:

$f$ monoton: $k \leq x \leq k+1 \Rightarrow f(k) \geq f(x) \geq f(k+1) \Rightarrow$

$$f(k) = \int_k^{k+1} f(k)dx \geq \int_k^{k+1} f(x)dx \geq \int_k^{k+1} f(k+1)dx = f(k+1)$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left( \underbrace{f(k) - \int_k^{k+1} f(x)dx}_{\geq 0} \right) \underset{(b)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} (f(k) - f(k+1)dx)$$

$$= f(1) - f(2) + f(2) - f(3) + \ldots - f(n+1) = f(1) - f(n+1) \leq f(1)$$

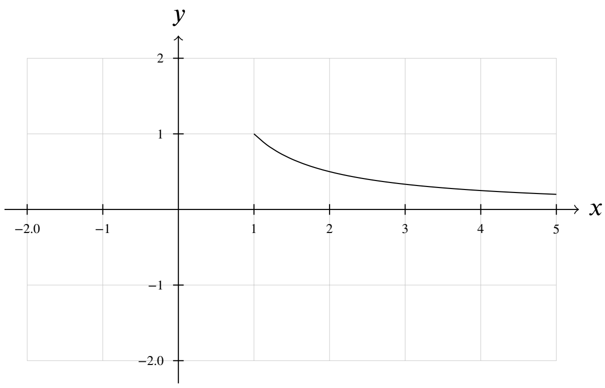
$\Rightarrow (a_n)$ monoton wachsend, beschränkt $\Rightarrow$ konvergent $\Rightarrow$ (1).
Sei $\gamma = \lim_{n\to\infty} a_n$

2. Angenommen $\int_0^\infty f(x)dx$ konvergent.
   $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k)$
   $$= \lim_{n\to\infty} \left( \underbrace{f(x) - \int_1^{n+1} f(x)dx}_{\gamma} \right) + \underbrace{\int_1 n+1 f(x)dx}_{\text{konvergiert}}$$

$\Rightarrow$ lim existiert (auch $\sum\limits_{k \geq 1} f(x) = \gamma + \int_1^\infty f(x)dx$)
Richtung: $\int$ konvergiert $\Rightarrow \sum$ konvergiert ähnlich ■

**Beispiel:**

$f(x) = \frac{1}{x}$




**Folge**

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}$ konvergiert $\Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ konvergiert (nicht der Fall)

$$\left(\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty} log(b) = \infty\right)$$

Bsp sei $s > 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}\text{konvergiert} \Leftrightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^s}\text{konvergiert}$$

## 9.19 Beispiel

Berechnung der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} ... = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$
(konvergiert nach Leibniz) $\sum_{k=1}^{infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}$
$= \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2n}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + ... + \frac{1}{2n})$
Sei $cn = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} =$[3] $\lim n \to \infty(c_{zn} - c_n)$

$$\begin{aligned}(n = 2 \quad & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ & 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4})\end{aligned}$$

Sei $a_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx = c_n - \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx \underset{Satz\ (1)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty}(a_n) = \gamma$ existiert!

$$b_n := \int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx$$
$$a_n = c_n - b_n \quad (c_n = a_n + b_n)$$

MISSING STUFF

[3] NR $2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + ... \frac{1}{2n})$

# 10 Potenzreihen

## 10.1 Definition Potenzreihen

Eine Potenzreihe in der Variablen $z$ ist eine Reihe der Form

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z11k \quad \text{mit } a_k \in \mathbb{C}$$

(reelle Potenzreihe: $a_k \in \mathbb{R}$)

### Beispiel:

Exponentialreihe

$$exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \quad a_k = \frac{1}{k!}$$

## Lemma

Wenn $P(z_0)$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert, dann konvergiert $P(z)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < |z_0|$ absolut.

### Beweis:

$P(z_0) = \sum a_k z_0^k$ konvergiert $\Rightarrow$ es gibt $C \in \mathbb{R}$ mit $|a_k z_0^k| \leq C$ für alle $k$
Sei $|z| < |z_0|$, dass heißt $q = \frac{|z|}{|z_0|} < 1$

$$|a_k z^k| = |a_k z_o^k \left(\frac{z}{z_0}\right)| = |a_k z_0^k| \cdot q^k \leq C \cdot q^k$$

$\Rightarrow$ Die Reihe $P(z) = \sum_k a_k z^k$ hat eine Majorante $\sum_k C \cdot q^k$, letztere konvergiert (Geometrische Reihe)
Majorantenkriterium $\Rightarrow$ $P(z)$ konvergiert absolut ■

## 10.2 Defintion Konvergenzradius

Der Konvergenzradius von $P(z)$ ist

$$R := sup \left\{ r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid P(r) \text{ konvergiert} \right\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

### Bemerkung:

ERROREOS STUCTURES

### Beispiel:

1. $exp(z)$ konvergiert absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$
   $R = \infty$
2. $\sum_{n=0}^{2} \infty 2^w z^w = 1 + 2z + 4z^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} (2z)^n$ geometrische Reihe.
   $|z| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2z| \geq 1$: divergiert
   $|z| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |2z| < 1$: konvergiert

Also $R = \frac{1}{2}$

**Beispiel:**

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^w = 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{z^3}{4} + \dots$$

$$R = 1 \Leftarrow \left\{ \begin{array}{c} z = 1 : \; P(1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \text{ divergiert} \\ z = -1 : \; P(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = log(2) \text{ konvergiert} \end{array} \right\}$$

**Folge**

Methoden zur Berechnung des Konvergenzradius

## 10.3 Definition

Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ reelle Folge.
Bilde $b_m = sup(a_n)_{n\geq m} = sup\{a_m, a_{m+1}, ...\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
Dann: $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq ...$ $(b_n)$ monoton fallend $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(b_n) =: \lim\limits_{n\to\infty} sup(a_n) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert

**Beispiel:**

$$(a_n) = (1, -1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, -1, \frac{1}{5} \dots)$$
$$(b_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5} \dots)$$
$$\lim\sup(a_n) = \lim(b_n) = 0$$

$$(a_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4 \dots)$$
$$(b_n) = (\infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \dots)$$
$$\lim\sup(a_n) = \infty$$

$$(a_n) = (0, -1, -2, -3, -4, \dots)$$
$$(b_n) = (0, -1, -2, -3, -4, \dots)$$
$$\lim\sup(a_n) = \lim(b_n) = -\infty$$

**Bemerkung:**

$C = \lim\sup_{n\to\infty}(a_n)$ ist durch folgende Eigenschaft eindeutig bestimmt: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es

1. unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \geq C - \varepsilon$
2. unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > C + \varepsilon$

SKIZZE
(zumindest wenn C≠-∞)
(ohne Beweis)

## 10.4 Satz

Der Konvergenzradius einer Potenzreihe $P(z) = \sum a_k z_0^k$ ist $R = \left(\lim\sup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)\right)^{-1} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ (Setze hier $0^{-1} = \infty, \infty^{-1} = 0$)