

## Wiederholung

Sei  $M$  Menge.

Wenn  $M$  endlich:  $\#M = \text{Anzahl Elemente} \in M$

Wenn  $M$  unendlich:  $\#M = \infty$

Für  $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n \quad 0! = 1$$

Binomialkoeffizient: Für  $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0! \cdot (n-0)!} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = 1$$

### 0.0.1 Lemma

Für  $0 < k < n$  gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{k}$$

### Beweis:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k)!} = \frac{k(n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k! \cdot (n-k)!}$$

## 0.1 Geometrische Anordnung (Pascalsches Dreieck)

$$\begin{array}{ccccccc} & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & \binom{1}{0} \binom{1}{1} & & & & \\ & & \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} & & & & \\ & & \binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3} & & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 3 & 3 & 1 \end{array}$$

Folge  $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$  für alle  $0 \leq k \leq n$

### 0.2 Satz:

Sei  $A$  endliche Menge.  $\#A = n$

Sei  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $0 \leq k \leq n$

$P_k(A) := \{U \subseteq A \mid \#U = k\}$  (Menge aller  $k$ -elementigen Teilmengen von  $A$ )

Dann gilt  $\#P_k(A) = \binom{n}{k}$

### Beispiel:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$   $n = 4$   $k = 2$

2-elementige Teilmengen von  $A$ :  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \rightarrow 6$   $\binom{4}{2} = 6$  ✓

### Beweis:

Vorüberlegung: Sei  $k = 0 \vee k = n$

$P_0(A) = 1 = \binom{n}{0}$   $\#P_n(A) = 1 = \binom{n}{n}$  ✓

Jetzt Induktionsschritt nach  $n$  IA: ✓

IV:

IS:  $n \rightarrow n+1$  ■

Sei  $\#A = n+1 \Rightarrow 0 \leq k \leq (n+1)$  Falls  $k = 0 \vee k = n+1$

Sei also:  $0 < k < n+1$

Wähle  $a \in A$

Sei  $B = A \setminus \{a\}$

Dann  $A = B \cup \{a\}$ ,  $\#B = n$

Man kann die Wahl einer  $k$ -elementigen Teilmenge von  $A$  so strukturieren

1. Entscheiden, ob  $a \in U \vee a \notin U$
2. a) Wenn  $a \notin U$ : Wähle k Elemente aus B  
b) Wenn  $a \in U$ : Wähle k-1 Elemente aus B

$$\Rightarrow \#P_k(A) = \#P_k(B) + \#P_{k-1}(B) \stackrel{IV}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \stackrel{1.11}{=} \binom{n+1}{k}$$

### 0.3 Satz (Binomische Formel)

Seien  $a, b$  Zahlen,  $n \in \mathbb{N}$

Dann  $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$

**Beispiel:**

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Beweis:**

$$\text{Schreibe } (a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n\text{-Faktoren}}$$

**Ausmultiplizieren**

Halte Terme der Form  $a^{n-k}b^k$  mit  $0 \leq k \leq n$

Häufigkeit von  $a^{n-k}b^k$  = Anzahl der Möglichkeiten aus n-Faktoren k mal b zu wählen.

Das ist  $\binom{n}{k}$  (Satz 1.13)

**Folgerung**

$$\begin{aligned} \text{Setze } a=b=1 & \quad a^{n-k}b^k = 1 \\ (a+b)^n = 2^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} \end{aligned}$$

**Beispiel:**

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

### 0.4 Definition

Sei A endliche Menge

Eine Anordnung von A ist ein n-Tupel

$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n)$  mit  $a_i \in A$  für alle i und  $a_i \neq a_j$  wenn  $i \neq j$

**Beispiel:**

Anordnung von  $\{1, 2, 3\} = (1, 2, 3)(1, 3, 2)(2, 1, 3)(2, 3, 1)(3, 1, 2)(3, 2, 1) \rightarrow 6$

### 0.5 Satz