2 次方程式の解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α, β とすると、$\alpha + \beta, \alpha\beta$ は次のようになる

解と係数の関係

$$\alpha + \beta = \underline{\qquad\qquad} , \quad \alpha\beta = \underline{\qquad\qquad}$$

[証明]

α, β をそれぞれ　$\alpha = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$, $\beta = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$とおく。

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$$

このように,2 次方程式の 2 つの解の和と積は、その係数を用いて表すことができる。

これを 2 次方程式の**解と係数の関係**という

※この関係は $\alpha = \beta$ のとき、つまり解が重解のときにも成り立つ。

memo

[例 7]

2 次方程式 $3x^2 - 5x - 6 = 0$ の 2 つの解を α, β とすると

$\alpha + \beta = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$, $\quad \alpha\beta = \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad}$

練習 11

次の 2 次方程式について,2 つの解の和と積を求めよ。

(1) $x^2 + 3x - 5 = 0$

(2) $-3x^2 + 7x - 4 = 0$

(3) $3x^2 + 2 = 0$

練習 11　解答欄

解と係数の関係を利用した問題

[例題 4]

2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の 2 つの解を α, β とするとき,$\alpha^2+\beta^2$ の値を求めよ。

解答

解と係数の関係から $\alpha+\beta=$ ＿＿＿＿＿＿ ,$\alpha\beta=$ ＿＿＿＿＿＿

よって　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot 3=-2$

練習 12

2 次方程式 $x^2-3x-1=0$ の 2 つの解を α, β とするとき, 次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$

(2) $\alpha^3+\beta^3$

※ (2) のヒント:$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ を使って解く

練習 12　解答欄

コラム ～2 次方程式の解と係数の関係の別の証明方法～

2 次方程式の解と係数の関係の公式は以下の方法でも証明が出来る。

[証明]
2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解を α, β とすると、
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ となる。
右辺を展開すると,
(右辺)$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta$
ここで両辺を係数比較すると

$$\begin{cases} b=-a(\alpha+\beta) \\ c=a\alpha\beta \end{cases}$$

$a \neq 0$ なので

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

[終]

この証明方法を利用すると 3 次以上の方程式の解と係数の関係を証明することが出来る。

[証明]
3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α, β, γ とすると,
$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}$
ここで両辺を係数比較すると

$$\begin{cases} b=-a(\alpha+\beta+\gamma) \\ c=a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\ d=-a\alpha\beta\gamma \end{cases}$$

$a \neq 0$ なので

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

[終]