Вариант 16 М80-108Б-19 Мохляков П.А. Лист 1

№ 11

Найти степень A^{20} матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$ двумя способами:
а) приводя матрицу к жордановой нормальной форме.
б) используя характеристический многочлен матрицы как аннулирующий.

Решение. а)

1. Приводим матрицу А к жордановой форме. Для этого составляем характеристический многочлен

$$\Delta_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 8 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-6-\lambda)+16 = -12-2\lambda+6\lambda+\lambda^2+16 = \lambda^2+4\lambda+4 = (\lambda+2)^2$$

Характеристическое уравнение $(\lambda+2)^2=0$ имеет один двойной корень $\lambda_1=-2$. Для собственного значения $\lambda_1=-2$ (алгибраическая кратность $n_1=2$) находим собственные векторы. Составляем расширенную матрицу однородной системы уравнений $(A-\lambda_1 E)x=0$ и приводим ее к ступенчатому виду

$$(A-\lambda_1 E|0) = \left(\begin{matrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim (2 \ -1 | 0)$$

Выражаем базисную переменную через свободную $x_1 = \frac{1}{2}x_2$. При $x_2=2$ получаем собственный вектор $s_1=(1\ 2)^T$. Так как геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1=-2$ равна единице, то используем частный случай нахождения жорданова базиса. Собственному значению $\lambda_1=-2$ соответствует жорданова клетка второго порядка $J_2(-2)$. Так как других собственных значений нет, то искомая матрица J_A совпадает с этой клеткой. Находим столбцы матрицы S перехода к жорданову базису. Первый столбец этой матрицы собственный вектор $s_1=(1\ 2)^T$. Второй столбец - присоединенный вектор $s_1^{(1)}$. Находим присоединенный вектор. Составляем расширенную матрицу неоднородной системы $(A-\lambda_1 E)s_1^{(1)}=s_1$ и приводим ее к упрощенному виду.

Вариант 16 М8О-108Б-19 Мокляков П. А Лист 2

$(A-\lambda_1 E|S_1) = \left(\begin{matrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 4 & -2 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0,5 \\ 0 \end{matrix}\right)$

Выражаем базисную переменную через свободную $x_1 = 0,5x_2 + 0,25$. При $x_2 = 2$ получаем $s_1^{(1)} = (1,25\ 2)^T$ - присоединенный вектор первого порядка. Из полученных столбцов составляем искомую матрицу $S = (s_1\ s_1^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1,25 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Составляем матрицу $p(J_A)$. Для многочлена $p(\lambda) = \lambda^{20}$ составляем многочлен $p(J_2(-2))$ от жордановой клетки $J_2(-2)$. Учитывая, что $p(-2) = (-2)^{20} = 2^{20}$, $p'(-2) = 20\cdot(-2)^{19} = -10\cdot 2^{20}$, получаем

$p(J_A) = p(J_2(-2)) = \begin{pmatrix} p(-2) & p'(-2) \\ 0 & p(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{20} & -10\cdot 2^{20} \\ 0 & 2^{20} \end{pmatrix} = 2^{20}\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Находим искомый многочлен от матрицы A по формуле $p(A) = Sp(J_A)S^{-1}$:

$p(A) = Sp(J_A)S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1,25 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\cdot 2^{20}\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1,25 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot(-2) =$

$= (-2)^{21}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1,25 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (-2)^{21}\cdot\begin{pmatrix} 19,5 & -10 \\ 40 & -20,5 \end{pmatrix}.$

Следовательно, $A^{20} = (-2)^{21}\cdot\begin{pmatrix} 19,5 & -10 \\ 40 & -20,5 \end{pmatrix}$

б)

1) Составляем характеристический многочлен матрицы A:

$\Delta_A(\lambda) = (\lambda+2)^2$

2) Характеристическое уравнение $(\lambda+2)^2 = 0$ имеет один корень $\lambda_1 = -2$ (алгебраической кратности $n_1 = 2$)

3) Для корня $\lambda_1 = -2$ кратности $n_1 = 2$ составляем два уравнения $2^{20} = -2r_1 + r_0$, $-10\cdot 2^{20} = r_1$, где r_0, r_1 - неопределенные коэффициенты многочлена $r(\lambda) = r_1\lambda + r_0$

4) Решаем полученную систему уравнений: $r_1 = -10\cdot 2^{20}$, $r_0 = -19\cdot 2^{20}$

5) Находим искомый многочлен от матрицы:

$p(A) = -10\cdot 2^{20}A - 19\cdot 2^{20}E = 2^{20}(-10A - 19E) = 2^{20}\left(\begin{pmatrix} -20 & 20 \\ -80 & 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 19 & 0 \\ 0 & 19 \end{pmatrix}\right) =$

$= 2^{20}\cdot\begin{pmatrix} -39 & 20 \\ -80 & 41 \end{pmatrix} = (-2)^{21}\cdot\begin{pmatrix} 19,5 & -10 \\ 40 & -20,5 \end{pmatrix}$

Ответ: $A^{20} = (-2)^{21}\begin{pmatrix} 19,5 & -10 \\ 40 & -20,5 \end{pmatrix}$

Вариант 16 М80-108Б-19 Мохляков П.А Лист 3

№16

Найти линейную невырожденную замену переменных, приводящую одну из пары квадратичных форм $f(x)=-24x_1^2+20x_1x_2-4x_2^2$ и $g(x)=-13x_1^2+10x_1x_2-2x_2^2$ к каноническому виду, а другую к нормальному.

Решение:

Сначала составляем матрицы данных квадратичных форм. Квадратичная форма $f(x)=-24x_1^2+20x_1x_2-4x_2^2$ имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}-24 & 10\\ 10 & -4\end{pmatrix}$, а квадратичная форма $g(x)=-13x_1^2+10x_1x_2-2x_2^2$ имеет матрицу $B=\begin{pmatrix}-13 & 5\\ 5 & -2\end{pmatrix}$. Применяе критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм. Оба угловых минора матрицы A меньше нуля: $\Delta_1=-24<0$; $\Delta_2=-4<0$ значит, матрица A не является знакоопределенной. Знаки угловых миноров матрицы B чередуются: $\Delta_1=-13<0$, $\Delta_2=1>0$, начиная с отрицательного. Следовательно, квадратичная форма $g(x)$ отрицательно определеная. Обозначим через $\tilde{g}(x)=x^T\tilde{B}x$ квадратичную форму с противоположной матрицей $\tilde{B}=-B=\begin{pmatrix}13 & -5\\ -5 & 2\end{pmatrix}$. Эта квадратичная форма положительно определенная. Применяем алгоритм для пары форм $f(x)$ и $\tilde{g}(x)$.

1. Составляем характеристическое уравнение пары квадратичных форм $\det(A-\lambda\tilde{B})=0$:

$$\left|\begin{pmatrix}-24 & 10\\ 10 & -4\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}13 & -5\\ -5 & 2\end{pmatrix}\right|=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-24-13\lambda & 10+5\lambda\\ 10+5\lambda & -4-2\lambda\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \lambda^2-4=0$$

Находим его корни $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-2$. Корни простые, т.е $n_1=n_2=1$

2¹. Для простого корня $\lambda_1=2$ составляем расширенную матрицу однородной системы $(A-\lambda_1\tilde{B})x=0$ и упрощаем её

$$\left(\begin{array}{cc|c}-50 & 20 & 0\\ 20 & -8 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}5 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Выражаем базисную переменную через свободную $x_1=\frac{2}{5}x_2$. При $x_2=5$ имеем $x_1=2$. Следовательно, $\varphi_1=(2\ 5)^T$ – главный вектор пары форм

3^1. Простому корню $\lambda_1=2$ соответствует один главный вектор поэтому процесс ортогонализации заканчивается на первом шаге: $s_1=\varphi_1=(2\ 5)^T$. Нормируем этот вектор относительно скалярного произведения $(x,y)=x^T\tilde{B}y$. Находим скалярный квадрат

$$(s_1,s_1)=s_1^T\tilde{B}s_1=(2\ 5)\begin{pmatrix}13 & -5\\ -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=(1\ 0)\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=2$$

Следовательно, длина вектора s_1 равна корню из двух: $|s_1|=\sqrt{2}$.

Тогда $\hat{s}_1=\frac{1}{|s_1|}s_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

4^1. Полученный вектор является первым столбцом искомой матрицы

2^2. Для простого корня $\lambda_2=-2$ составляем расширенную матрицу однородной системы $(A-\lambda_2\tilde{B})x=0$ и упрощаем её

$$\left(\begin{array}{cc|c}-24+26 & 10-10 & 0\\ 10-10 & -4+4 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Находим ненулевое решение $\varphi_2=(0\ 1)^T$ - главный вектор пары форм.

3^2. Простому корню $\lambda_2=-2$ соответствует один главный вектор, поэтому процесс ортогонализации заканчивается на первом шаге: $s_2=\varphi_2=(0\ 1)^T$. Нормируем этот вектор относительно скалярного произведения $(x,y)=x^TBy$. Находим скалярный квадрат.

$$(s_2,s_2)=(0\ 1)\begin{pmatrix}13 & -5\\ -5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=(-5\ 2)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=2$$

Следовательно, $|s_2|=\sqrt{2}$. Тогда $\hat{s}_2=\frac{1}{|s_2|}s_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

4^2. Записываем полученный вектор во второй столбец искомой матрицы

$$S=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

Замена переменных $x=Sy$, соответствующая найденной матрице S, имеет вид

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\sqrt{2}y_1\\ x_2=\frac{5\sqrt{2}}{2}y_1+\frac{\sqrt{2}}{2}y_2\end{cases}$$

Вариант 16 М80-108Б-19 Мохляков П.А Лист 5

При такой ~~квадрати~~ замене квадратичная форма $f(x)$ приводится к каноническому виду

$$f(Sy) = -48y_1^2 + 100y_1^2 + 20y_1y_2 - 50y_1^2 - 2y_2^2 - 20y_1y_2 = 2y_1^2 - 2y_2^2$$

а форма $g(x)$ - к нормальному $\cancel{g(Sy)}$

$$g(Sy) = -26y_1^2 + 50y_1^2 + 10y_1y_2 - 25y_1^2 - y_2^2 - 10y_1y_2 = -y_1^2 - y_2^2$$

Ответ: $x_1 = \sqrt{2}y_1$, $x_2 = \frac{5\sqrt{2}}{2}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}y_2$; $f(Sy) = 2y_1^2 - 2y_2^2$