Вариант 16 Мохляков П.А М80-108Б-19

РГР №5

Комплексные числа $<C,+,\cdot>$ $a+bi$ с рациональными a,b. Определить, является ли полем или кольцом заданная алгебраическая структура. Проверить, существуют ли делители нуля.

Решение:

1. По сложению – коммутативная группа

1.1. Коммутативность

$z_1+z_2=a_1+b_1i+a_2+b_2i=z_2+z_1$

1,2 Ассоциативная операция

$z_1+(z_2+z_3)=a_1+b_1i+(a_2+b_2i+a_3+b_3i)=(a_1+b_1i+a_2+b_2i)+a_3+b_3i=(z_1+z_2)+z_3$

1.3. $\exists e_+: z_1+e_+=z_1 \Rightarrow e_+=0$

1.4 $z_1+z_2=e_+ \Rightarrow a_1+b_1i+a_2+b_2i=0 \Rightarrow a_2=-a_1;\ b_2=-b_1$

2. По умножению – коммутативная группа (без $e_+=0$)

2.1 Ассоциативная операция

$z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(a_1+b_1i)((a_2+b_2i)(a_3+b_3i))=(a_1+b_1i)((a_2a_3-b_2b_3)+(a_2b_3+a_3b_2)i)=$

$=a_1a_2a_3-a_1b_2b_3+a_1a_2b_3i+a_1a_3b_2i+b_1a_2a_3i-b_1b_2b_3i-a_2b_1b_3-a_3b_1b_2=$

$=((a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i)(a_3+b_3i)$

2.2. $\exists e_\times: z\cdot e_\times=z \Rightarrow e_\times=1$

2.3. Коммутативность

$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)=(a_2+b_2i)(a_1+b_1i)=z_2\cdot z_1$

~~2.4 Обратный элемент~~ 3. Дистрибутивность

$z_1\cdot(z_2+z_3)=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i+a_3+b_3i)=a_1a_2+a_1b_2i+a_1a_3+a_1b_3i+a_2b_1i-b_1b_2+a_3b_1i-b_1b_3=$

$=((a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1))+((a_1a_3-b_1b_3)+(a_1b_3+a_3b_1))=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)+(a_1+b_1i)(a_3+b_3i)=$

$=z_1z_2+z_1z_3$

~~Вывод: Поле~~

2.4 Обратный элемент

$z_1\cdot z_1^{-1}=1,\ z_1^{-1}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-bi}{a^2+b^2}$

Вывод: Поле

4. Поле не может иметь делитель нуля