Вариант 16 М80-108Б-19 Мохляков П.А Каб 1

РГР №10

Линейные преобразования A и B вещественных векторных пространств в некотором базисе имеют матрицы $A=\begin{pmatrix}1&3&-3\\4&2&-4\\7&7&-9\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$ соответственно. Найти жордановы формы J_A и J_B матриц этих преобразований, а также матрицы перехода к жорданову базису. Выполнить проверку, используя равенства $J_A=S_A^{-1}AS_A$ и $J_B=S_B^{-1}BS_B$

Решение:

Преобразование A

1. Составляем характеристический многочлен преобразования A.

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&3&-3\\4&2-\lambda&-4\\7&7&-9-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3-6\lambda^2-12\lambda-8=(-2-\lambda)^3$$

2. Находим корни характеристического уравнения $(-2-\lambda)^3=0$. Уравнение имеет один корень $\lambda_1=-2$, алгебраическая кратность которого $n_1=3$. Этот действительный корень является собственным значением преобразования.

3. ~~Для~~ корня $\lambda_1=3$ кратности $n_1=3$ находим ранги матриц $B=A-\lambda_1E$, B^2, B^3. Выполняя элементарные преобразования над строками, приводим матрицы B, B^2, B^3 к ступенчатому виду

$$B=\begin{pmatrix}3&3&-3\\4&4&-4\\7&7&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\ B^2=\begin{pmatrix}3&3&-3\\4&4&-4\\7&7&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&3&-3\\4&4&-4\\7&7&-7\end{pmatrix}=0;\ B^3=0$$

Матрицы B^2 и B^3 - нулевые (к ступенчатому виду не приводятся). Находим ранги $r_1=rg B=1$, $r_2=rg B^2=0$, $r_3=rg B^3=0$. Значит, $m_1=2$, так как $r_2=r_3$

4. Определяем количество $k_1=1$ - жордановых клеток 1-го порядка, количество $k_2=1$ - жордановых клеток 2-го порядка. Следовательно жорданова форма имеет жордановые клетки $J_1(-2)$ и $J_2(-2)$

5. Составляем матрицу J_A

$$J_A=\left(\begin{array}{c|cc}-2&0&0\\\hline 0&-2&1\\0&0&-2\end{array}\right)$$

Жорданова форма получена.

Второй этап. Находим матрицу перехода к жорданову базису

1. Для B модифицированный ступенчатый вид $(B)_{ст} = (1\ 1\ -1)$ получается удалением нулевых строк.

2. Так как B^2 – нулевая матрица, то $S^{(1)} = (B)^T_{ст} = (1\ 1\ -1)^T$

Вычисляем матрицу $BS^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 7 & 7 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 21 \end{pmatrix}$, составляем расширенную матрицу однородной системы уравнений $\left(\frac{(B)_{ст}}{(BS^{(1)})^T}\right)x = 0$ и приводим ее к упрощенному виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 9 & 12 & 21 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 30 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 10 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -11 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

Выражаем базисные переменне через свободную: $x_1 = 11x_3$, $x_2 = -10x_3$. Полагая $x_3 = 1$, получаем ненулевое решение $\varphi_1 = (11\ -10\ 1)^T$, которое образует фундаментальную систему. Значит, фундаментальная матрица из одного столбца $\Phi_1 = (11\ -10\ 1)^T$.

Составляем матрицу $S^{(0)} = (BS^{(1)} | \Phi_1) = \left(\begin{array}{c|c} 9 & 11 \\ 12 & -10 \\ 21 & 1 \end{array}\right)$. Из столбцов матриц $S^{(0)}$ и $S^{(1)}$ составляем искомую матрицу S:

$$S^{(0)} = \left(\begin{array}{c|c} 9 & 11 \\ 12 & -10 \\ 21 & 1 \end{array}\right),\ S^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 11 \\ 12 & 1 & -10 \\ 21 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

записывая сначала первые столбцы матриц $S^{(0)}, S^{(1)}$, а затем второй столбец матрицы $S^{(0)}$. Матрица перехода к жорданову базису найдена. Выполним проверку. Вычислим

$$J_A = S^{-1}AS = \frac{1}{222}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 74 & 74 & -74 \\ 11 & -10 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 7 & 7 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 11 \\ 12 & 1 & -10 \\ 21 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{111}\begin{pmatrix} 34 & 33 & -44 \\ -74 & -74 & 74 \\ -11 & 10 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 1 & 11 \\ 12 & 1 & -10 \\ 21 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Как видим, полученная жорданова форма отличается только перестановкой жордановых клеток.

Преобразование B.

1. Составляем характеристический многочлен преобразования B:

$$\det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -7 \end{vmatrix} = -\lambda^3 - 15\lambda^2 - 75\lambda - 125 = (-5-\lambda)^3.$$

Вариант 16 М80-108Б-19 Мохляков П.А Лист 3

2. Находим корни характеристического уравнения $(-5-\lambda)^3=0$. Уравнение имеет один корень $\lambda_1=-5$ алгебраической кратности $n_1=3$. Этот действительный корень является собственным значением преобразования.

3. Для корня $\lambda_1=-5$ кратности $n_1=3$ находим ранг матрицы $C=B-\lambda_1 E$. Выполняя элементарные преобразования над строками, приводим матрицу C к ступенчатому виду

$$C=B-\lambda_1 E=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $r_1=rg(B-\lambda_1 E)=2$. Тогда геометрическая кратность собственного значения $\lambda_1=-5$ равна единице. Это крайнее значение геометрической кратности. Поэтому можем воспользоваться упрощенной процедурой приведения к каноническому виду. Собственному значению $\lambda_1=-5$ соответствует жорданова клетка третьего порядка $J_3(-5)$. Так как других собственных значений нет, то искомая матрица J_B совпадает с этой клеткой

$$J_B=J_3(-5)=\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Составляем расширенную матрицу однородной системы $(B-\lambda_1 E)s_1=0$ и приводим ее к упрощенному виду

$$(B-\lambda_1 E|0)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_1=x_3$, $x_2=2x_3$. При $x_3=1$ получаем ненулевое решение $s_1=(1\ 2\ 1)^T$ — собственный вектор матрицы B. Составляем расширенную матрицу неоднородной системы $(B-\lambda_1 E)s_1^{(1)}=s_1$ и приводим ее к упрощенному виду:

$$(B-\lambda_1 E|s_1)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_1=x_3+2$, $x_2=2x_3+1$. При $x_3=1$ получаем $s_1^{(1)}=(3\ 3\ 1)^T$ - присоединенный вектор первого порядка. Составляем расширенную матрицу неоднородной системы $(B-\lambda_1 E)s_1^{(2)}=s_1^{(1)}$ и приводим ее к упрощенному виду.

Вариант 16 М80-108Б-19 Мохляков П.А. Лист 4

$$(B-\lambda_1 E|S_1^{(1)}) = \left(\begin{matrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 0 & -3 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Выражаем базисные переменные через свободную $x_1 = x_3 + 3$, $x_2 = 2x_3 + 1$. При $x_3 = 1$ получаем $S_1^{(2)} = (4\ 3\ 1)^T$ — присоединенный вектор второго порядка. Из полученных столбцов составляем искомую матрицу

$$S = (S_1\ S_1^{(1)}\ S_1^{(2)}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку жорданова форма данной матрицы B определяется однозначно, то можно проверить равенство $SJ_B = BS$.

Вычислим

$$SJ_B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -14 & -17 \\ -10 & -13 & -12 \\ -5 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$BS = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -14 & -17 \\ -10 & -13 & -12 \\ -5 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Равенство $SJ_B = BS$ выполняется

Ответ: а) для преобразования A: $J_A = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$, $S = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 11 \\ 12 & 1 & -10 \\ 21 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

б) для преобразования B: $J_B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$