Национальный исследовательский университет
"Московский авиационный институт"
Факультет No8 "Информационные технологии и прикладная математика"
Кафедра 806 "Вычислительная математика и программирование"

КУРСОВОЙ ПРОЕКТ
ПО КУРСУ “ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА”
1 СЕМЕСТР
“ТЕОРИЯ ГРАФОВ”

Выполнил студент:	Мохляков П. А.
Группа:	М80-108Б-19
Преподаватель:	Смерчинская С.О.

Москва 2020

Задание 1

Определить для орграфа, заданного матрицей смежности:

а) Матрицу односторонней связности;

б) Матрицу сильной связности;

в) Компоненты сильной связности;

г) Матрицу контуров.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

а) Найдем матрицу односторонней связности по формуле: $T = E \vee A \vee A^2 \vee A^3$.

1) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) $$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) $$T = E \vee A \vee A^2 \vee A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = T \text{ – матрица односторонней связности}$$

б) Матрица сильной связности: $\overline{S} = T \& T^T$

$$\overline{S} = T \& T^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

в) Компоненты сильной связности

Выбираем первую строку, как ненулевую в матрице сильной связности

$$\overline{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Номера вершин первой компоненты сильной связности соответствуют номерам столбцов матрицы $\overline{S}$, в которых в первой строке стоят единицы: $\{\mathcal{V}_1\}$.

1. Обнуляем первый столбец матрицы $\overline{S}$. Получаем матрицу
$$\overline{S_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Ищем ненулевую строку матрицы S_1: это вторая строка. Единица одна – во втором столбце. Следовательно, вторая компонента сильной связности: $\{\mathcal{V}_2\}$.
3. Обнуляем первый столбец матрицы $\overline{S_1}$. Получаем матрицу
$$\overline{S_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
4. Ищем ненулевую строку матрицы S_2: это третья строка. Единицы две – в третьем и четвертом столбце. Следовательно, третья компонента сильной связности: $\{\mathcal{V}_3, \mathcal{V}_4\}$.

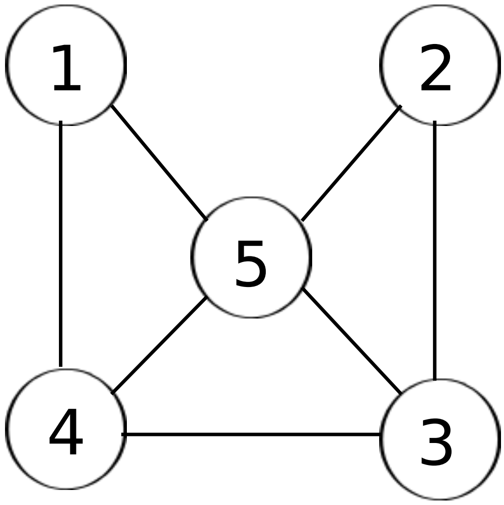
г) Матрица контуров: $K = \overline{S}\&A$.

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \& \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

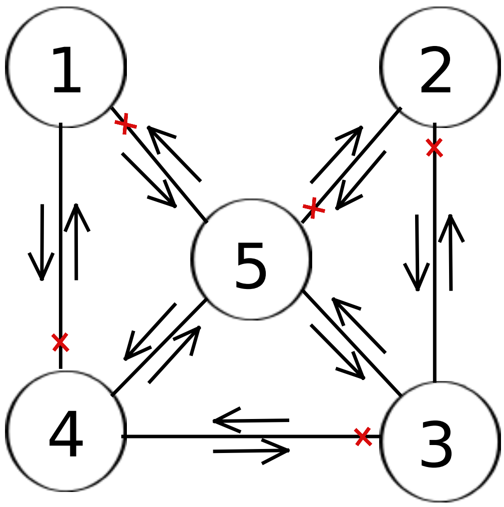
Слудовательно, дуги $< \mathcal{V}_3, \mathcal{V}_4 >$,$< \mathcal{V}_4, \mathcal{V}_3 >$ принадлежат контуру графа.

Задание 2

Используя алгоритм Терри, определить замкнутый маршрут, проходящий ровно по два раза (по одному в каждом направлении) через каждое ребро графа.



Решение:



Маршрут обхода: $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 5 \to 1 \to 5 \to 3 \to 4 \to 5 \to 2 \to 3 \to 5 \to 4 \to 1$

Задание 3

Используя алгоритм “фронта волны”, найти все кратчайшие пути из первой вершины в остальные вершины орграфа, заданного матрицей смежности:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Помечаем вершину $\mathcal{V}_1$ индексом 0. Вершина $\mathcal{V}_1$ принадлежит фронту волны нулевого уровня $W_0(\mathcal{V}_1)$.
2. Вершины из множества $\Gamma\mathcal{V}_i = \Gamma W_0(\mathcal{V}_1) = \{\mathcal{V}_5, \mathcal{V}_6\}$ помечаем индексом 1, они принадлежат фронтуволны первого уровня $W_1(\mathcal{V}_1)$.
3. Непомеченные ранее вершины из множества $\Gamma W_1(\mathcal{V}_1) = \Gamma\{\mathcal{V}_5, \mathcal{V}_6\} = \{\mathcal{V}_4\}$ помечаем индексом 2, $\mathcal{V}_4$ принадлежит фронту волны второго уровня $W_2(\mathcal{V}_1)$.
4. Непомеченные ранее вершины из множества $\Gamma W_2(\mathcal{V}_1) = \Gamma\{\mathcal{V}_4\} = \{\mathcal{V}_2\}$ помечаем индексом 3, $\mathcal{V}_2$ принадлежит фронту волны третьего уровня $W_3(\mathcal{V}_1)$.
5. Непомеченные ранее вершины из множества $\Gamma W_3(\mathcal{V}_1) = \Gamma\{\mathcal{V}_2\} = \{\mathcal{V}_7\}$ помечаем индексом 4, $\mathcal{V}_7$ принадлежит фронту волны четвертого уровня $W_4(\mathcal{V}_1)$.
6. Непомеченные ранее вершины из множества $\Gamma W_4(\mathcal{V}_1) = \Gamma\{\mathcal{V}_7\} = \{\mathcal{V}_3, \mathcal{V}_8\}$ помечаем индексом 5, они принадлежат фронту волны пятого уровня $W_5(\mathcal{V}_1)$.
7. Вершина $\mathcal{V}_8$ достигнута, помечена индексом 5, следовательно, длина кратчайшего пути из $\mathcal{V}_1$ в $\mathcal{V}_8$ равна пяти.

Промежуточные вершины кратчайших путей находятся согласно приведенным формулам (начинаем с последней вершины пути):

1. $\mathcal{V}_8$
2. $W_4(\mathcal{V}_1) \cap \Gamma^{-1}\mathcal{V}_8 = \{\mathcal{V}_7\} \cap \{\mathcal{V}_7\} = \{\mathcal{V}_7\}$
3. $W_3(\mathcal{V}_1) \cap \Gamma^{-1}\mathcal{V}_7 = \{\mathcal{V}_2\} \cap \{\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_8\} = \{\mathcal{V}_2\}$
4. $W_2(\mathcal{V}_1) \cap \Gamma^{-1}\mathcal{V}_2 = \{\mathcal{V}_4\} \cap \{\mathcal{V}_4\} = \{\mathcal{V}_4\}$
5. $W_1(\mathcal{V}_1) \cap \Gamma^{-1}\mathcal{V}_4 = \{\mathcal{V}_5, \mathcal{V}_6, \} \cap \{\mathcal{V}_3, \mathcal{V}_6, \mathcal{V}_7\} = \{\mathcal{V}_6\}$
6. $W_0(\mathcal{V}_1) \cap \Gamma^{-1}\mathcal{V}_6 = \{\mathcal{V}_1\} \cap \{\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_3, \mathcal{V}_4, \mathcal{V}_5\} = \{\mathcal{V}_1\}$

Один кратчайший путь: $\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_6 \to \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_2 \to \mathcal{V}_7 \to \mathcal{V}_8$

Задание 4

Используя алгоритм Форда, найти минимальные пути из первой вершины во все достижимые вершины в нагруженном графе, заданном матрицей длин дуг.

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 6 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 15 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 3 & \infty & 1 & \infty & 7 & \infty & \infty \\ 17 & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 2 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 10 \\ 4 & 7 & \infty & 6 & 5 & 8 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Решение:

1. Составим таблицу итераций.

	$\mathcal{V}_1$	$\mathcal{V}_2$	$\mathcal{V}_3$	$\mathcal{V}_4$	$\mathcal{V}_5$	$\mathcal{V}_6$	$\mathcal{V}_7$	$\mathcal{V}_8$	$\lambda_i^{(0)}$	$\lambda_i^{(1)}$	$\lambda_i^{(2)}$	$\lambda_i^{(3)}$	$\lambda_i^{(4)}$	$\lambda_i^{(5)}$	$\lambda_i^{(6)}$
$\mathcal{V}_1$	∞	10	6	5	∞	∞	∞	∞	0	0	0	0	0	0	0
$\mathcal{V}_2$	∞	∞	3	∞	15	∞	∞	∞	∞	10	9	9	9	9	9
$\mathcal{V}_3$	∞	3	∞	1	∞	7	∞	∞	∞	6	6	6	6	6	6
$\mathcal{V}_4$	17	∞	1	∞	∞	∞	3	∞	∞	5	5	5	5	5	5
$\mathcal{V}_5$	∞	∞	∞	∞	∞	4	∞	3	∞	∞	25	17	14	14	14
$\mathcal{V}_6$	∞	∞	∞	∞	4	∞	2	8	∞	∞	13	10	10	10	10
$\mathcal{V}_7$	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞	10	∞	∞	8	8	8	8	8
$\mathcal{V}_8$	4	7	∞	6	5	8	∞	∞	∞	∞	∞	18	18	17	17

2. Длины минимальных путей из вершины $\mathcal{V}_1$ во все остальные вершины определены в последнем столбце таблицы

3. Найдем вершины, входящие в минимальные пути из $\mathcal{V}_1$ во все остальные вершины графа.

   3.1. Минимальный пути из $\mathcal{V}_1$ в $\mathcal{V}_2$:

   3.1.1. $\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_2$, его длина равна 9
   $\lambda_3^{(1)} + c_{32} = 6 + 3 = 9 = \lambda_2^{(2)}$
   $\lambda_1^{(0)} + c_{13} = 0 + 6 = 6 = \lambda_3^{(1)}$

   3.1.2. $\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_2$, его длина равна 9
   $\lambda_3^{(2)} + c_{32} = 6 + 3 = 9 = \lambda_2^{(3)}$
   $\lambda_4^{(1)} + c_{43} = 5 + 1 = 6 = \lambda_3^{(2)}$
   $\lambda_1^{(0)} + c_{14} = 0 + 5 = 5 = \lambda_4^{(1)}$

   3.2. Минимальный пути из $\mathcal{V}_1$ в $\mathcal{V}_3$:

   3.2.1. $\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_3$, его длина равна 6
   $\lambda_1^{(0)} + c_{13} = 0 + 6 = 6 = \lambda_3^{(1)}$

   3.2.2. $\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_3$, его длина равна 6
   $\lambda_4^{(1)} + c_{43} = 5 + 1 = 6 = \lambda_3^{(2)}$
   $\lambda_1^{(0)} + c_{14} = 0 + 5 = 5 = \lambda_4^{(1)}$

   3.3. Минимальный путь из $\mathcal{V}_1$ в $\mathcal{V}_4$: $\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_4$,его длина 5
   $\lambda_1^{(0)} + c_{14} = 0 + 5 = 5 = \lambda_4^{(1)}$

3.4. Минимальный путь из $\mathcal{V}_1$ в $\mathcal{V}_5$: $\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_7 \to \mathcal{V}_6 \to \mathcal{V}_5$,его длина 14

$\lambda_6^{(3)} + c_{65} = 10 + 4 = 14 = \lambda_5^{(4)}$

$\lambda_7^{(2)} + c_{76} = 8 + 2 = 10 = \lambda_6^{(3)}$

$\lambda_4^{(1)} + c_{47} = 5 + 3 = 8 = \lambda_7^{(2)}$

$\lambda_1^{(0)} + c_{14} = 0 + 5 = 5 = \lambda_4^{(1)}$

3.5. Минимальный путь из $\mathcal{V}_1$ в $\mathcal{V}_6$: $\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_7 \to \mathcal{V}_6$,его длина 10

$\lambda_7^{(2)} + c_{76} = 8 + 2 = 10 = \lambda_6^{(3)}$

$\lambda_4^{(1)} + c_{47} = 5 + 3 = 8 = \lambda_7^{(2)}$

$\lambda_1^{(0)} + c_{14} = 0 + 5 = 5 = \lambda_4^{(1)}$

3.6. Минимальный путь из $\mathcal{V}_1$ в $\mathcal{V}_7$: $\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_7$,его длина 8

$\lambda_4^{(1)} + c_{47} = 5 + 3 = 8 = \lambda_7^{(2)}$

$\lambda_1^{(0)} + c_{14} = 0 + 5 = 5 = \lambda_4^{(1)}$

3.7. Минимальный путь из $\mathcal{V}_1$ в $\mathcal{V}_8$: $\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_4 \to \mathcal{V}_7 \to \mathcal{V}_6 \to \mathcal{V}_8$,его длина 17

$\lambda_5^{(4)} + c_{58} = 14 + 3 = 17 = \lambda_8^{(5)}$

$\lambda_6^{(3)} + c_{65} = 10 + 4 = 14 = \lambda_5^{(4)}$

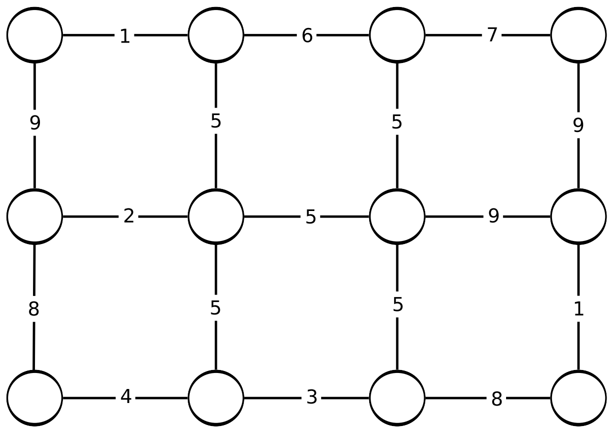
$\lambda_7^{(2)} + c_{76} = 8 + 2 = 10 = \lambda_6^{(3)}$

$\lambda_4^{(1)} + c_{47} = 5 + 3 = 8 = \lambda_7^{(2)}$

$\lambda_1^{(0)} + c_{14} = 0 + 5 = 5 = \lambda_4^{(1)}$

Задание 5

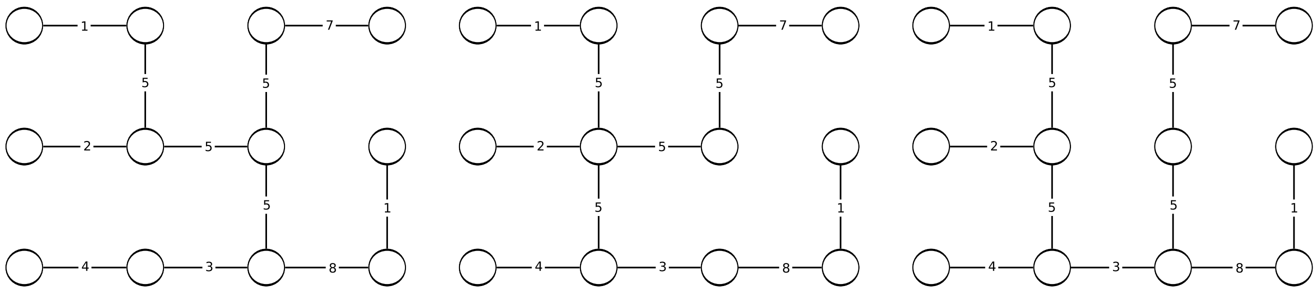
Найти остовное дерево с минимальной суммой длин входящих в него ребер.



Решение:

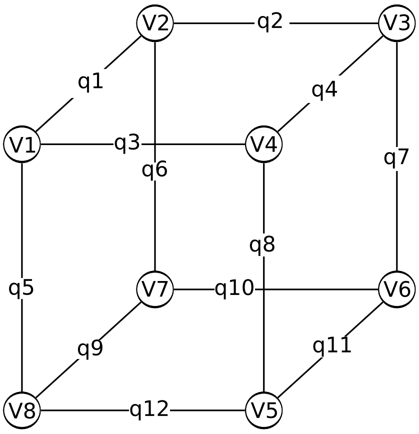
1. Выбираем все вершины графа
2. Добавляем все дуги, имеюще минимальный вес — 1. Циклов нет.
3. Добавляем все дуги, имеюще минимальный вес — 2. Циклов нет.
4. Добавляем все дуги, имеюще минимальный вес — 3. Циклов нет.
5. Добавляем все дуги, имеюще минимальный вес — 4. Циклов нет.
6. Добавляем все дуги, имеюще минимальный вес — 5, так, чтобы не было циклов. Получаем три возможных вариантов деревьев.
7. Добавляем все дуги, имеюще минимальный вес — 6. Нет вариантов без циклов.
8. Добавляем все дуги, имеюще минимальный вес — 7. Циклов нет.
9. Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес — 8, так, чтобы не было циклов. Получаем четыре возможных вариантов остовных деревьев минимального веса. Минимальный вес остовного дерева L(D) = 46.

Возможные остовные деревья с минимальной суммой длин ребер - 46:



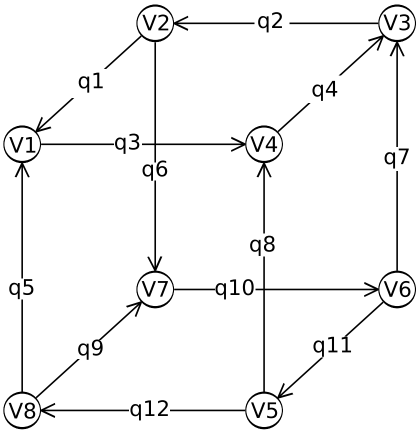
Задание 6

Пусть каждому ребру неориентированного графа соответствует некоторый элемент электрической цепи. Составить линейно независимые системы уравнений Кирхгофа для токов и напряжений. Пусть первому и пятому ребру соответствуют источники тока с ЭДС E1 и E2, а остальные элементы являются сопротивлениями. Используя закон Ома, и, предполагая внутренние сопротивления источников тока равными нулю, получить систему уравнений для токов.

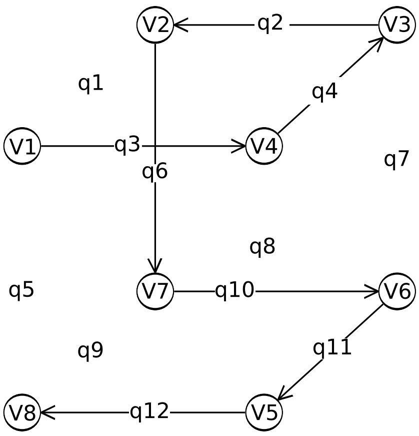


Решение:

1. Зададим на графе произвольную ориентацию:



2. Построим произвольное остовное дерево D заданного графа:



3. Найдем базис циклов, добавляя к остовному дереву по одному не вошедшему в него ребру. Затем найдем соответствующие вектор-циклы.

   $(D+q_1) : \mu_1 : V_2 - V_1 - V_4 - V_3 - V_2 \Longrightarrow C(\mu_1) = (1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0)$

   $(D+q_5) : \mu_2 : V_8 - V_1 - V_4 - V_3 - V_2 - V_7 - V_6 - V_5 - V_8 \Longrightarrow C(\mu_2) = (0,1,1,1,1,1,0,0,0,1,1,1)$

   $(D+q_7) : \mu_3 : V_6 - V_3 - V_2 - V_7 - V_6 \Longrightarrow C(\mu_3) = (0,1,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0)$

   $(D+q_8) : \mu_4 : V_5 - V_4 - V_3 - V_2 - V_7 - V_6 - V_5 \Longrightarrow C(\mu_4) = (0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,1,0)$

   $(D+q_9) : \mu_5 : V_8 - V_7 - V_6 - V_5 - V_8 \Longrightarrow C(\mu_5) = (0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1)$

4. Цикломатическая матрица графа имеет вид:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Выпишем закон Кирхгова для напряжений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{pmatrix} = 0$$

   Напряжения, соответствующие ребрам, не вошедшим в остовное дерево – базисные переменные системы.

$$\begin{cases} U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = 0 \\ U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_{10} + U_{11} + U_{12} = 0 \\ U_2 + U_6 + U_7 + U_{10} = 0 \\ U_2 + U_4 + U_6 + U_8 + U_{10} + U_{11} = 0 \\ U_9 + U_{10} + U_{11} + U_{12} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_1 = -U_2 - U_3 - U_4 \\ U_5 = -U_2 - U_3 - U_4 - U_6 - U_{10} - U_{11} - U_{12} \\ U_7 = -U_2 - U_6 - U_{10} \\ U_8 = -U_2 - U_4 - U_6 - U_{10} - U_{11} \\ U_9 = -U_{10} - U_{11} - U_{12} \end{cases}$$

6. Выпишем закон Кирхгова для токов:

7. Выпишем уравнения Кирхгофа для токов.

   Найдем матрицу инцидентности орграфа:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}	q_{12}
V_1	1	0	-1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
V_2	-1	1	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
V_3	0	-1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
V_4	0	0	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	0
V_5	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	-1
V_6	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	1	-1	0
V_7	0	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	0	0
V_8	0	0	0	0	-1	0	0	0	-1	0	0	1

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \\ I_{12} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} I_1 - I_3 + I_5 = 0 \\ I_2 - I_1 - 1_6 = 0 \\ I_4 - I_2 + I_7 = 0 \\ I_3 - I_4 + I_8 = 0 \\ I_{11} - I_{12} - I_8 = 0 \text{ ЛЗ} \\ I_{10} - I_7 - I_{11} = 0 \\ I_6 + I_9 - I_{10} = 0 \\ I_{12} - I_5 - I_9 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} I_1 - I_3 + I_5 = 0 \\ I_2 - I_1 - 1_6 = 0 \\ I_4 - I_2 + I_7 = 0 \\ I_3 - I_4 + I_8 = 0 \\ I_{10} - I_7 - I_{11} = 0 \\ I_6 + I_9 - I_{10} = 0 \\ I_{12} - I_5 - I_9 = 0 \end{cases}$$

8. Подставим Закон Ома

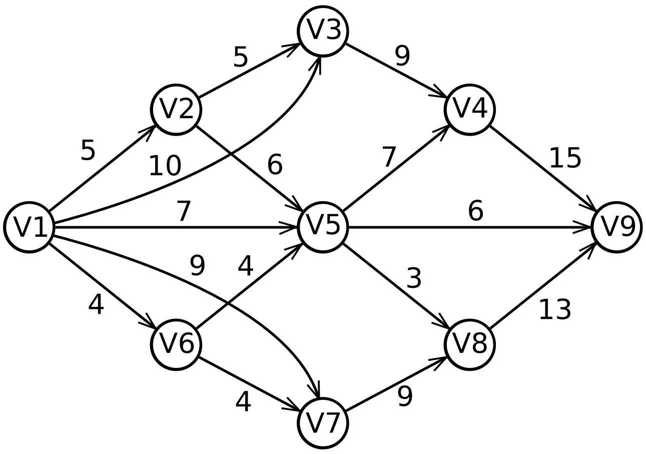
$$\begin{cases} E_1 = -I_2R_2 - I_3R_3 - I_4R_4 \\ E_2 = -I_2R_2 - I_3R_3 - I_4R_4 - I_6R_6 - I_{10}R_{10} - I11R_{11} - I_{12}R_{12} \\ 0 = I_2R_2 + I_6R_6 + I_7R_7 + I_{10}R_{10} \\ 0 = I_2R_2 + I_4R_4 + I_6R_6 + I_8R_8 + I_{10}R_{10} + I_{11}R_{11} \\ 0 = I_9R_9 + I_{10}R_{10} + I_{11}R_{11} + I_{12}R_{12} \end{cases}$$

9. Совместная система имеет вид:

$$
\begin{cases}
I_1 - I_3 + I_5 = 0 \\
I_2 - I_1 - 1_6 = 0 \\
I_4 - I_2 + I_7 = 0 \\
I_3 - I_4 + I_8 = 0 \\
I_{10} - I_7 - I_{11} = 0 \\
I_6 + I_9 - I_{10} = 0 \\
I_{12} - I_5 - I_9 = 0 \\
E_1 = -I_2R_2 - I_3R_3 - I_4R_4 \\
E_2 = -I_2R_2 - I_3R_3 - I_4R_4 - I_6R_6 - I_{10}R_{10} - I11R_{11} - I_{12}R_{12} \\
0 = I_2R_2 + I_6R_6 + I_7R_7 + I_{10}R_{10} \\
0 = I_2R_2 + I_4R_4 + I_6R_6 + I_8R_8 + I_{10}R_{10} + I_{11}R_{11} \\
0 = I_9R_9 + I_{10}R_{10} + I_{11}R_{11} + I_{12}R_{12}
\end{cases}
$$

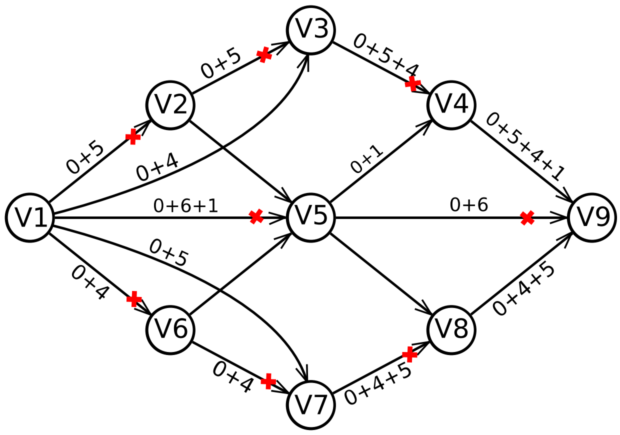
Задание 7

Построить максимальный поток по транспортной сети.

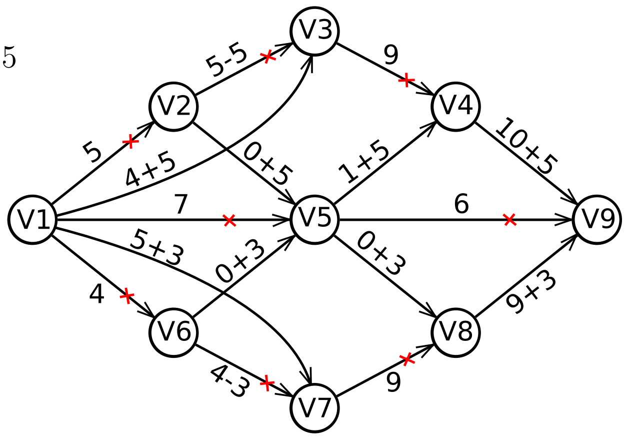


Решение:

1. Построение полного потока.
   1.1. $V_1 - V_2 - V_3 - V_4 - V_9$
   min$\{$5,5,9,15$\}$=5
   1.2. $V_1 - V_6 - V_7 - V_8 - V_9$
   min$\{$4,4,9,13$\}$=57
   1.3. $V_1 - V_5 - V_9$
   min$\{$7,6$\}$=6
   1.4. $V_1 - V_3 - V_4 - V_9$
   min$\{$10,9-5,15-5$\}$=4
   1.5. $V_1 - V_5 - V_4 - V_9$
   min$\{$7-6,7,15-9$\}$=1
   1.6. $V_1 - V_7 - V_8 - V_9$
   min$\{$9,9-4,13-4$\}$=5



2. Построение максимального потока.
   2.1. $V_1 - V_3 - V_2 - V_5 - V_4 - V_9$
   $\Delta_1 = \min\{10 - 4, \underline{5}, 6, 7 - 1, 15 - 10\} = 5$
   2.2. $V_1 - V_7 - V_6 - V_5 - V_8 - V_9$
   $\Delta_2 = \min\{9 - 5, \underline{4}, 4, 3, 13 - 9\} = 3$



Величина потока увеличилась на 8 (5+3): величина максимального потока $\Phi_{\text{макс}} = 15 + 6 + 12 = 33$

Задание 8(Индивидуальное)

Построение графа группы по образующим и определяющим соотношениям.

Теоритическая часть
Введение

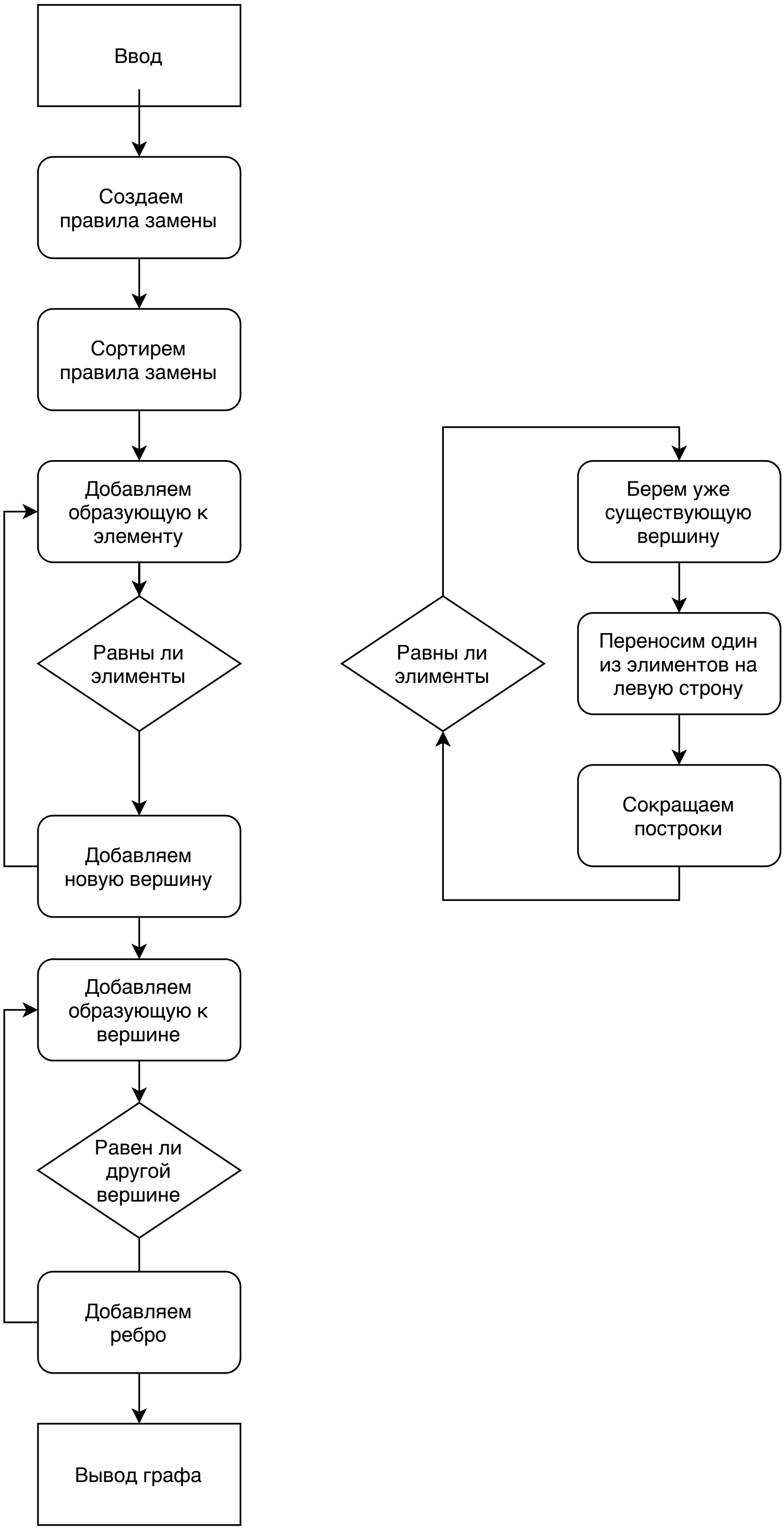
Задача о построении графа группы по образующим – это задача построения графа по базовой ниформации о них. Данная задача является NP-трудной задачей, то есть не существует алгоритма для ее решения за полиномимальное время. Это утвержение верно, если $P \neq NP$. Это связанно с тем, что эта задача влкючает в себя задачу определения равенства двух элимнтов, которая также является NP-трудной. Поэтому данную задачу невозможно решить за полимилиальное время, а только полным передором, для определения равенства элиментов группы.

Если бы данная задача была полимилиальной, то построение графа до пятого колена (ограничение для на циклических групп) имело бы сожность $\frac{n^5-1}{n-1}$.

Алгоритм решения

1. Создаем все возможные правила замены на основе определяющих соотношений.
2. Сортирем правила замены подстрок от замены набольшей подстроки на менименьшую, до замены наименьшей на наибольшую.
3. Рекурсивно добавляем образующие к уже существующим элиментам.
4. Проверяем равен ли полученный элимент одному из пред идущих.
   4.1. Переносим один из элиментов на левую строну (ab^{-1}).
   4.2. Заменяем подстроки из списка замен, пока элимент не станет равен нулю или пока не останется строка не имеющая построк из списка замен.
   4.3. Если полученный элимент пуст, то два введенных элимента равны, иначе они различны.
5. Получаем массив вершин графа.
6. Добавляем по образующей к каждому элименту, и сравнивем его со всеми элиментами массива, если полученный элимент равен одному из элиментов массива, то между данными вершинами графа есть ребро.
7. На основе полученных данных получаем матрицу смежности графа.

Логическая блок-схема алгоритма



Вычислительная часть программы написана на C, так как это один из наиболее быстрых языков, что важно, так как задача решается за не полимилиальное время. Интерфейс написан на Python с использованиеми библиотек PyQt и Networkx. В таком случае программа быстро работает и позваляет легко расширять возможности интерфейса.

Оценка сложности алгоритма

Самый быстрый способ завершить программу в том случае, если все вершины не равны, так как процесс сравнения элиментов группы занимает наиббольшее время, но в таком случае группа точно не является циклической, поэтому мы не идем дальше пятого потомка. В этом лучшем случае программа имеет сложность $\frac{n^5-1}{n-1}$. Во всех иных случаях программы приходит к решению за полимилиальное время.

Пример работы. Скриншоты программы

Рассмотрим работу программы на обном из примеров.

Для примера возьмем циклическую группу с двумя образующими:r,f, и тремя определяющими соотношениями: $r^3 = e$,$f^2 = e$,$fr = r^2 f$.

На основе этих определяющих соотношений мы получаем правила замены:

$fr^{-2} = e$
$fr^{-1} = r$
$f = r^2$
$r^2 f^{-1} = e$
$r^2 = f$
$r = fr^{-1}$

Сортируем полученные правила:

$fr^{-2} = e$
$fr^{-1} = r$
$r^2 f^{-1} = e$
$f = r^2$
$r^2 = f$
$r = fr^{-1}$

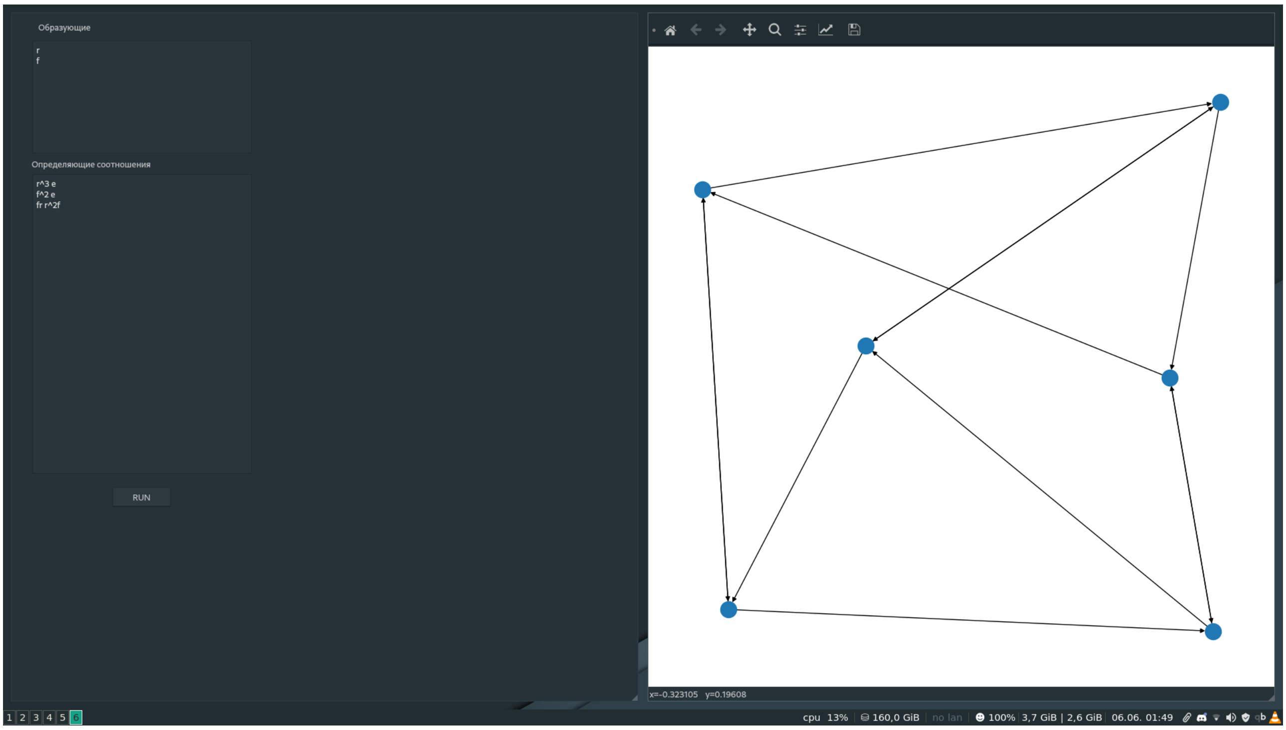
Поочередно добаляем образующие к элименту и сравниваем его с остальными вершинами графа, пробуя сократить полученный элимент на основе полученных правил замены. Таким образом мы получаем список вершин графа:

r
e
r^2
r^3
r^4
r^5
$r^5 f$
$r^4 f$
$r^4 f^2$

Добавляем по образующей к каждому элименту, и сравнивем его со всеми элиментами массива, если полученный элимент равен одному из элиментов массива, то между данными вершинами графа есть ребро. Таким образом мы можем построить матрицу смежности:

$$\begin{matrix}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{matrix}$$

На основе полученной матрицы смежности мы можем построить граф. Для этого рассмотрим скриншоты.



Пример прикладной задачи

Проверка на наличие подгрупп, и нахождение всех элиментов группы.

Список использованных ресурсов

1. И.Гросман В.Магнус. Группы и их графы. Мир, 1971.

2. Берж К. Теория графов и её применение. М.: Изд-во Иностранной литературы, 1962.-320с.

3. Гроссман И., Магнус В. Группы и их графы. Пер. с англ. Г.М. ЦукерманПод ред. В.Е. Тараканова М. Мир, 1971. -231 с.

4. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009.

5. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1975.

6. Н. Кристофидес: Теория графов. Алгоритмический подход. -М.: МИР, 1978.