Вариант 16 Мохляков П.А. М80-108Б-19 Лист 1

№4

Пр-во	Формула (1)	Формула (2)
$\mathbb{R}^2$	$(x,y)=x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+5x_2y_2$	$(x,y)=x_1y_1+2x_2y_2+1$
P^2	$(p,q)=p(1)q(1)+p'(1)q(1)$	$(p,q)=\int_0^1 p(x)q(x)dx+p'(0)q'(0)$

Решение:

Рассмотрим формулу (1) для пространства $\mathbb{R}^2$. Проверяем, удовлетворяет ли эта формула аксиомам 1-4 скалярного произведения. Проверяем выполнение 1-ой аксиомы.

$(y,x)=y_1x_1-2y_1x_2-2y_2x_1+5y_2x_2=x_1y_1-2x_1y_2-2x_2y_1+5x_2y_2$

Получили выражение в правой части формулы (1), т.е $(y,x)=(x,y)$. Значит, аксиома 1 выполняется.

Вместо аксиом 2 и 3 проверяем линейность по первому множителю. Для произвольных $x,y,z\in\mathbb{R}^2$ и любых чисел $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ получаем

$(\alpha x+\beta y,z)=(\alpha x_1+\beta y_1)z_1-2(\alpha x_1+\beta y_1)z_2-2(\alpha x_2+\beta y_2)z_1+5(\alpha x_2+\beta y_2)z_2=$
$=\alpha(x_1z_1-2x_1z_2-2x_2z_1+5x_2z_2)+\beta(y_1z_1-2y_1z_2-2y_2z_1+5y_2z_2)=$
$=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$

Линейность доказана, следовательно, аксиомы 2 и 3 выполняются.

Проверяем выполнение аксиомы 4. Записываем скалярный квадрат и представляем полученную квадратичную форму в матричном виде.

$(x,x)=x_1^2-4x_1x_2+5x_2^2=(x_1\ x_2)\begin{pmatrix}1&-2\\-2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

Угловые миноры матрицы этой квадратичной формы положительные $\Delta_1=1>0$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&-2\\-2&5\end{vmatrix}=9>0$. Значит, по критерию Сильвестра, квадратичная форма положительно определена, т.е $(x,x)>0$ для всех $x\neq0$. Значит, аксиома 4 для формулы (1) выполняется, поскольку $(x,x)\geq0$ для всех $x\in\mathbb{R}^2$ и $(x,x)=0$ только при $x=0$. Таким образом, формула (1) задает скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$

Находим угол φ между первыми двумя векторами стандартного базиса $\mathbb{R}^2$, т.е. между векторами $e_1=(1,0)^T$ и $e_2=(0,1)^T$. Вычисляем косинус угла

$\cos\varphi=\frac{(e_1,e_2)}{\sqrt{(e_1,e_1)}\sqrt{(e_2,e_2)}}=\frac{2}{\sqrt1\sqrt5}=\frac{2\sqrt5}{5}$. Значит, угол между векторами $\varphi=\arccos\frac{2\sqrt5}{5}$

Вариант 16 Мокляков ИА М80-108Б-19 Лист 2

Рассмотрим формулу (2) для пространства $\mathbb{R}^2$. Выражение в правой части формулы (2) симметрическое относительно x и y. Проверяем линейность.

$(\alpha x+\beta y, z)=(\alpha x_1+\beta y_1)z_1+2(\alpha x_2+\beta y_2)z_2+1$

Формула (2) не линейна. Значит, аксиомы 2-3 не выполняются. Поэтому формулой (2) нельзя задать скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$

Рассмотрим формулу (1) для пространства P_2. Эта формула ставит в соответствие элементам $p(x)=ax^2+bx+c$, $q(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ пространства P_2 действительное число. Проверяем, удовлетворяет ли эта формула аксиомам 1-4 скалярного произведения.

$(q,p)=q(1)p'(1)+q'(1)p(1)=p(1)q'(1)+p'(1)q(1)$

Формула (1) удовлетворяет аксиоме 1.

$(\alpha p+\beta q, m)=\alpha p(1)m'(1)+\beta q(1)m'(1)+\alpha p'(1)m(1)+\beta q'(1)m(1)=$
$=\alpha(p(1)m'(1)+m(1)p'(1))+\beta(q(1)m'(1)+q'(1)m(1))=\alpha(p,m)+\beta(q,m)$

Формула (1) линейна. Значит, аксиомы 2-3 выполняются.

$(p,p)=2p(1)p'(1)$. Это выражение может быть отрицательным. Например, $p=-x^2+3$, $(p,p)=2\cdot2\cdot(-2)=-8$. Значит, аксиома 4 не выполняется. Поэтому формулой (1) нельзя задать скалярное произведение.

Рассмотрим формулу (2) для пространства P_2.

$(q,p)=\int_0^1 q(x)p(x)dx+q'(0)p'(0)=\int_0^1 p(x)q(x)dx+p'(0)q'(0)$

Аксиома 1 выполняется. Проверяем линейность

$(\alpha p+\beta q, m)=\alpha\int_0^1 p(x)m(x)dx+\beta\int_0^1 q(x)m(x)dx+\alpha p(0)m(0)+\beta q(0)m(0)=$
$=\alpha(\int_0^1 p(x)m(x)+p(0)m(0))+\beta(\int_0^1 q(x)m(x)+q(0)m(0))=\alpha(p,m)+\beta(q,m)$

Линейность выполняется. Значит, выполняются аксиомы 2-3

$(p,p)=\int_0^1 p^2(x)dx+(p'(0))^2$ Аксиома 4 выполняется. Таким образом формула (2) задает скалярное произведение в P_2

Находим угол φ между первыми двумя векторами стандартного базиса P_2 т.е между многочленами $p_1(x)\equiv1$ и $p_2(x)=x$

$\cos\varphi=\frac{(p_1,p_2)}{\sqrt{(p_1,p_1)}\sqrt{(p_2,p_2)}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1}\sqrt{\frac{4}{3}}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$; $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$

Ответ: в пространстве $\mathbb{R}^2$ формула (1) задает скалярное произведение, а формула (2) нет; в пространстве P_2 формула (2) задает скалярное произведение, а формула (1) нет. Углы между первыми двумя векторами стандартного базиса $\mathbb{R}^2$ и P_2 равны $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$ и $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$, соответственно.

Вариант 16 Мохняков П.А М80-108Б-19 Лист 3

№5

$a_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $a_2=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\2\end{pmatrix}$ $a_3=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\2\end{pmatrix}$ $a_4=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\2\end{pmatrix}$

Решение: Применяем к заданной системе векторов процесс ортогонализации.

1. Полагаем $b_1=a_1$

2. Вычисляем $\alpha_{21}=\dfrac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}=\dfrac{3+2+1+2}{4}=2$

$b_2=a_2-\alpha_{21}b_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$

3. Вычисляем $\alpha_{31}=\dfrac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}=\dfrac{-1+2+1+2}{4}=1$

$\alpha_{32}=\dfrac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}=\dfrac{-2}{2}=-1$

$b_3=a_3-\alpha_{31}b_1-\alpha_{32}b_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

4. Вычисляем $\alpha_{41}=\dfrac{1+2-1+2}{4}=1$

$\alpha_{42}=\dfrac{2}{2}=1$

$\alpha_{43}=\dfrac{-1+2+1+2}{4}=1$

$b_4=a_4-\alpha_{41}b_1-\alpha_{42}b_2-\alpha_{43}b_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. Получили нулевой вектор

Значит, система векторов $a_1, a_2 a_3, a_4$ линейно зависима. Процесс ортогонализации завершен. Найдена такая ортогональная система векторов b_1, b_2, b_3, b_4, что $A=Lin(a_1,a_2,a_3,a_4)=Lin(b_1,b_2,b_3,b_4)$. Исключая из этой системы нулевой вектор $b_4=0$, получаем базис b_1,b_2,b_3 подпространства $A=Lin(b_1,b_2,b_3)$

Дополняем базис b_1,b_2,b_3 до ортогонального базиса всего пространства $\mathbb{R}^4$. Для этого находим фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $B^Tx=0$, где $B=(b_1\, b_2\, b_3)$ - матрица, составленная из соответствующих столбцов. Составляем расширенную матрицу системы $B^Tx=0$ и приводим ее к упрощенному виду

$(B|0)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&0\\1&0&-1&0&0\\-1&-1&-1&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&0\\0&1&-2&-1&0\\0&-2&0&2&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&0\\0&1&-2&-1&0\\0&-1&0&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&0&0\\0&1&-2&-1&0\\0&0&-2&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right)$

Выражаем базисные переменные через свободные: $x_1=0, x_2=x_4, x_3=0$. По формулам $x_4=1$ получаем $x_1=0, x_2=1, x_3=0$. Таким образом ФСР $\varphi=(0\,1\,0\,1)^T$. Этот столбец дополняет ортогональный базис пространства A до базиса $\mathbb{R}^4$

Ответ: $(1\,-1\,1\,1)^T, (1\,0\,-1\,0)^T, (-1\,-1\,-1\,1)^T, (0\,1\,0\,1)^T$ - ортогональный базис $\mathbb{R}^4$; первые три столбца образуют базис подпространства A