Вариант 16 Мокляков П.А. М80-108Б-19 Лист 1

КП №1

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

а) Найдем матрицу односторонней связности

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$T=E\vee A\vee A^2\vee A^3=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\vee\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$ – матрица односторонней связи

б) Матрица сильной связности: $\bar{S}=T\,\&\,T^T$

$$\bar{S}=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\&\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

в) Компоненты сильной связности

Первая компонента $\{V_1\}$

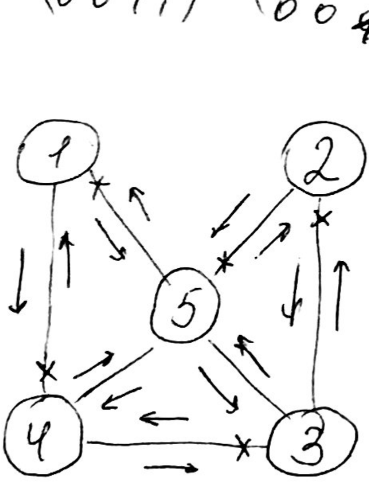
Вторая компонента $\{V_2\}$

Третья компонента $\{V_3, V_4\}$

г) Матрица контуров $K=\bar{S}\,\&\,A$

$$K=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\&\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Следовательно, дуги $\langle V_3, V_4\rangle$ и $\langle V_4, V_3\rangle$ принадлежат контуру графа.



КП №2

Маршрут обхода:

$1\to4\to3\to2\to5\to1\to5\to3\to4\to5\to2\to3\to5\to4\to1$

Вариант 16 Мохляков П.А М80-108Б-19 Лист 2

КП №3

$$A = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 1&0&0&1&1&1&0&0 \\ 0&1&0&0&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&1&0&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&1&1&0&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \end{pmatrix}$$

$V_1 \in W_0(V_1)$

$\Gamma W_0(V_1) = \{V_5, V_6\}$ $W_1(V_1) = \{V_5, V_6\}$

$\Gamma W_1(V_1) = \{V_4\}$ $W_2(V_1) = \{V_4\}$

$\Gamma W_2(V_1) = \{V_2\}$ $W_3(V_1) = \{V_2\}$

$\Gamma W_3(V_1) = \{V_7\}$ $W_4(V_1) = \{V_7\}$

$\Gamma W_4(V_1) = \{V_3, V_8\}$ $W_5(V_1) = \{V_3, V_8\}$

1) V_8

2) $W_4(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_8 = \{V_7\} \cap \{V_7\} = \{V_7\}$

3) $W_3(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_7 = \{V_2\} \cap \{V_2, V_8\} = \{V_2\}$

4) $W_2(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_2 = \{V_4\} \cap \{V_4\} = \{V_4\}$

5) $W_1(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_4 = \{V_5, V_6\} \cap \{V_3, V_6, V_7\} = \{V_6\}$

6) $W_0(V_1) \cap \Gamma^{-1} V_6 = \{V_1\} \cap \{V_1, V_3, V_4, V_5\} = \{V_1\}$

Один кратчайший путь: $V_1 \to V_6 \to V_4 \to V_2 \to V_7$

Вариант 16 Мохняков П.А. М80-108Б-19 Лист 3

КП №4

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 6 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 3 & \infty & 15 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 3 & \infty & 1 & \infty & 7 & \infty & \infty \\ 17 & \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 2 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 2 & \infty & 10 \\ 4 & 7 & \infty & 6 & 5 & 8 & \infty & \infty \end{pmatrix}$$

Решение:

	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$
V_1	∞	10	6	5	∞	∞	∞	∞	0	0	0	0	0	0	0
V_2	∞	∞	3	∞	15	∞	∞	∞	∞	10	9	9	9	9	9
V_3	∞	3	∞	1	∞	7	∞	∞	∞	6	6	6	6	6	6
V_4	17	∞	1	∞	∞	∞	3	∞	∞	5	5	5	5	5	5
V_5	∞	∞	∞	∞	∞	4	∞	3	∞	∞	25	17	14	14	14
V_6	∞	∞	∞	∞	4	∞	2	8	∞	∞	13	10	10	10	10
V_7	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞	10	∞	∞	8	8	8	8	8
V_8	4	7	∞	6	5	8	∞	∞	∞	∞	∞	18	18	17	17

Минимальный путь из V_1 в V_2: $V_1-V_3-V_2$, $V_1-V_4-V_3-V_2$, его длина 9

$\lambda_3^{(1)} + C_{32} = 6+3=9$ $\quad$ $\lambda_3^{(2)} + C_{32} = 6+3=9$

$\lambda_1^{(0)} + C_{13} = 0+6=6$ $\quad$ $\lambda_4^{(1)} + C_{43} = 5+1=6$

$\lambda_1^{(0)} + C_{14} = 0+5=5$

Минимальный путь из V_1 в V_3: V_1-V_3, $V_1-V_4-V_3$, его длина 6

$\lambda_1^{(0)} + C_{13} = 0+6=6$ $\quad$ $\lambda_1^{(1)} + C_{43} = 5+1=6$

$\lambda_0^{(1)} + C_{14} = 0+5=5$

Минимальный путь из V_1 в V_4: V_1-V_4, его длина 5

$\lambda_1^{(0)} + C_{14} = 0+5=5$

Минимальный путь из V_1 в V_5: $V_1-V_4-V_7-V_6-V_5$, его длина 14

$\lambda_6^{(3)} + C_{65} = 10+4=14$

$\lambda_7^{(2)} + C_{76} = 8+2=10$

$\lambda_4^{(1)} + C_{47} = 5+3=8$

$\lambda_1^{(0)} + C_{14} = 0+5=5$

Вариант 16 Мохляков П.А М80-108Б-19 Лист 4

Минимальный путь из V_1 в V_6: $V_1-V_4-V_7-V_6$, его длина 10

$\lambda_7^{(2)}+c_{76}=8+2=10$

$\lambda_4^{(1)}+c_{47}=5+3=8$

$\lambda_1^{(0)}+c_{14}=0+5=5$

Минимальный путь из V_1 в V_7: $V_1-V_4-V_7$, его длина 8

$\lambda_4^{(1)}+c_{47}=5+3=8$

$\lambda_1^{(0)}+c_{14}=0+5=5$

Минимальный путь из V_1 в V_8: $V_1-V_4-V_7-V_6-V_5-V_8$, его длина 17

$\lambda_5^{(4)}+c_{58}=14+3=17$

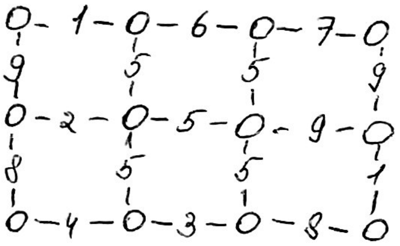
$\lambda_6^{(3)}+c_{65}=10+4=14$

$\lambda_7^{(2)}+c_{76}=8+2=10$

$\lambda_4^{(1)}+c_{47}=5+3=8$

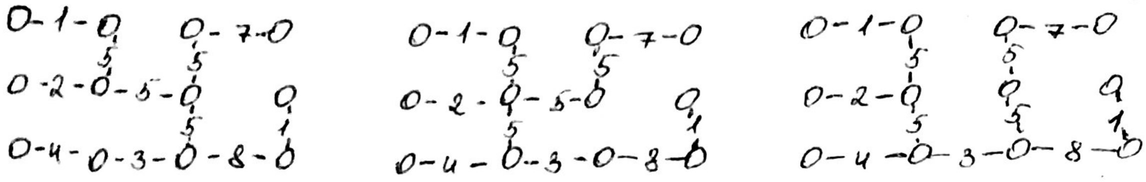
$\lambda_1^{(0)}+c_{14}=0+5=5$

КП №5

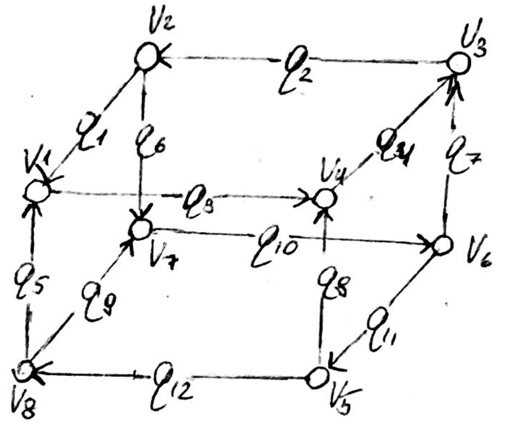


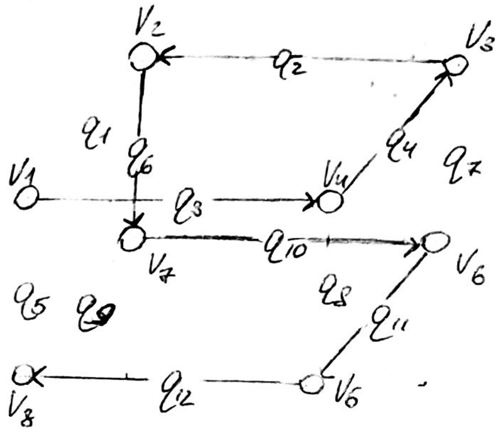
1) Выбираем все вершины графа
2) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес - 1. Циклов нет.
3) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес - 2. Циклов нет
4) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес - 3. Циклов нет.
5) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес - 4. Циклов нет.
6) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес - 5, так, чтобы не было циклов. Получаем три возможных вариантов деревьев. ~~минимального веса~~.
7) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес - 6, так, чтобы не было циклов. Нет вариантов без циклов
8) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес - 7, Циклов нет
9) Добавляем все дуги, имеющие минимальный вес - 8, так чтобы не было циклов. Получаем три возможных вариантов деревьев минимального веса. Минимальный вес основного дерева $L(D)=46$

Возможные остовные деревья с минимальной суммой ребер - 46



КП №6





1) Зададим на графе произвольную ориентацию.
2) Построим произвольное остовное дерево D заданного графа.
3) Найдем базис циклов. Затем найдем соответствующие вектор-циклы

$(D+q_1): \mu_1: V_2-V_1-V_4-V_3-V_2 \Rightarrow C(\mu_1)=(111100000000)$

$(D+q_5): \mu_2: V_8-V_1-V_4-V_3-V_2-V_7-V_6-V_5-V_8 \Rightarrow C(\mu_2)=(011111000111)$

$(D+q_7): \mu_3: V_6-V_3-V_2-V_7-V_6 \Rightarrow C(\mu_3)=(010001100100)$

$(D+q_8): \mu_4: V_5-V_4-V_3-V_2-V_7-V_6-V_5 \Rightarrow C(\mu_4)=(010101010110)$

$(D+q_9): \mu_5: V_8-V_7-V_6-V_5-V_8 \Rightarrow C(\mu_5)=(000000001111)$

4) Цикломатическая матрица графа имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

5) Выпишем закон Кирхгова для напряжений

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&1&1&1&0&0&0&1&1\\ 0&1&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1\\U_2\\U_3\\U_4\\U_5\\U_6\\U_7\\U_8\\U_9\\U_{10}\\U_{11}\\U_{12} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} U_1+U_2+U_3+U_4=0 \\ U_2+U_3+U_4+U_5+U_6+U_{10}+U_{11}+U_{12}=0 \\ U_2+U_6+U_7+U_{10}=0 \\ U_2+U_4+U_6+U_8+U_{10}+U_{11}=0 \\ U_9+U_{10}+U_{11}+U_{12}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} U_1=-U_2-U_3-U_4 \\ U_5=-U_2-U_3-U_4-U_6-U_{10}-U_{11}-U_{12} \\ U_7=-U_2-U_6-U_{10} \\ U_8=-U_2-U_4-U_6-U_{10}-U_{11} \\ U_9=-U_{10}-U_{11}-U_{12} \end{cases}$$

6) Выпишем закон Кирхгова для токов:

7) Выпишем уравнения Кирхгова для токов

Найдем матрицу инцидентности орграфа:

$$\begin{array}{c|cccccccccccc} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_5 & q_6 & q_7 & q_8 & q_9 & q_{10} & q_{11} & q_{12} \\ \hline V_1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ V_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ V_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ V_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \\ I_{10} \\ I_{11} \\ I_{12} \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{cases} I_1-I_3+I_5=0 \\ I_2-I_1-I_6=0 \\ I_4-I_2+I_7=0 \\ I_3-I_4+I_8=0 \\ I_{11}-I_{12}-I_8=0 \quad \Lambda 3 \\ I_{10}-I_7-I_{11}=0 \\ I_6+I_9-I_{10}=0 \\ I_{12}-I_5-I_9=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_1-I_3+I_5=0 \\ I_2-I_1-I_6=0 \\ I_4-I_2+I_7=0 \\ I_3-I_4+I_8=0 \\ I_{10}-I_7-I_{11}=0 \\ I_6+I_9-I_{10}=0 \\ I_{12}-I_5-I_9=0 \end{cases}$$

8) Подставим Закон Ома

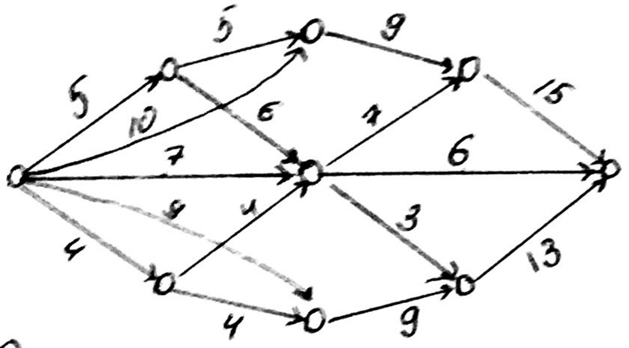
$$\begin{cases} E_1=-I_2R_2-I_3R_3-I_4R_4 \\ E_2=-I_2R_2-I_3R_3-I_4R_4-I_6R_6-I_{10}R_{10}-I_{11}R_{11}-I_{12}R_{12} \\ 0=I_2R_2+I_6R_6+I_7R_7+I_{10}R_{10} \\ 0=I_2R_2+I_4R_4+I_6R_6+I_8R_8+I_{10}R_{10}+I_{11}R_{11} \\ 0=I_9R_9+I_{10}R_{10}+I_{11}R_{11}+I_{12}R_{12} \end{cases}$$

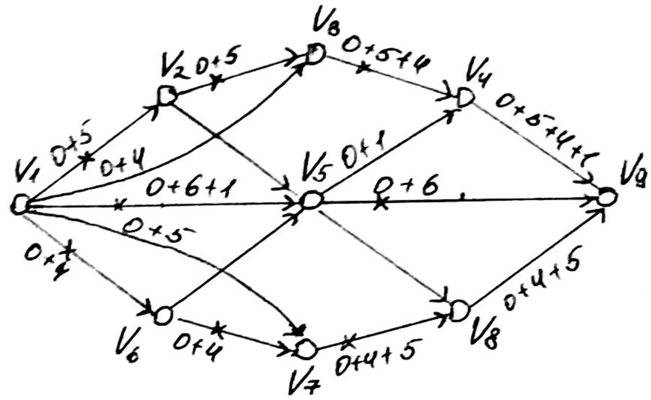
9) Совместная система имеет вид:

$$\begin{cases} I_1-I_3+I_5=0 \\ I_2-I_1-I_6=0 \\ I_4-I_2+I_7=0 \\ I_3-I_4+I_8=0 \\ I_{10}-I_7-I_{11}=0 \\ I_6+I_9-I_{10}=0 \\ I_{12}-I_5-I_9=0 \\ E_1=-I_2R_2-I_3R_3-I_4R_4 \\ E_2=-I_2R_2-I_3R_3-I_4R_4-I_6R_6-I_{10}R_{10}-I_{11}R_{11}-I_{12}R_{12} \\ 0=I_2R_2+I_6R_6+I_7R_7+I_{10}R_{10} \\ 0=I_2R_2+I_4R_4+I_6R_6+I_8R_8+I_{10}R_{10}+I_{11}R_{11} \\ 0=I_9R_9+I_{10}R_{10}+I_{11}R_{11}+I_{12}R_{12} \end{cases}$$

Вариант 16 Маляков П. А. М8О-108Б-19 Лист 7

КП №7





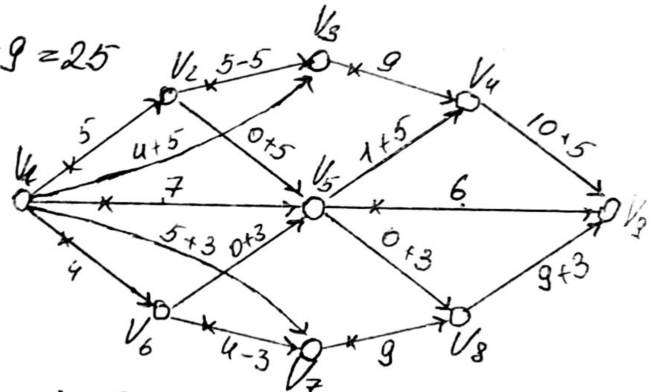
Решение:

1) Построение полного потока

1. $V_1 - V_2 - V_3 - V_4 - V_9$ $\min\{5, 5, 9, 15\} = 5$
2. $V_1 - V_6 - V_7 - V_8 - V_9$ $\min\{4, 4, 9, 13\} = 4$
3. $V_1 - V_5 - V_9$ $\min\{7, 6\} = 6$
4. $V_1 - V_3 - V_4 - V_9$ $\min\{10, 9-5, 15-5\} = 4$
5. $V_1 - V_5 - V_4 - V_9$ $\min\{7-6, 7, 15-9\} = 1$
6. $V_1 - V_7 - V_8 - V_9$ $\min\{9, 9-4, 13-4\} = 5$

Величина полного потока $\Phi_{пол} = 10 + 6 + 9 = 25$

2) Построение максимального потока



1. $V_1 - V_3 - V_2 - V_5 - V_4 - V_9$
   $\Delta_1 = \min\{10-4, \underline{5}, 6, 7-1, 15-10\} = 5$
2. $V_1 - V_7 - V_6 - V_5 - V_8 - V_9$
   $\Delta_2 = \min\{9-5, \underline{4}, 4, 3, 13-9\} = 3$

Величина потока увеличилась на 8 (5+3): величина максимального потока $\Phi_{макс} = 15 + 6 + 12 = 33$