1 Differenzialrechnung

1.1 Wiederholung Klasse 10

Definition: Funktion

Eine eindeutige Zuordnung, die jedem x-Wert (aus dem Definitionsbereich) einen y-Wert zuordnet, nennt man **Funktion**.

Definition: Graph

Die Menge aller Punkte, die einer gemeinsamen Zuordnungsvorschrift folgen (z.B. $y = x^2$), bilden einen **Graphen**.

Definition: Differenzenquotient

Gegeben sind zwei Punkte $P\left(x_0 \mid f\left(x_0\right)\right)$ und $Q\left(x_0+h \mid f\left(x_0+h\right)\right)$.

Der Quotient $\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$ heißt Differenzenquotient und beschreibt im Sachzusammenhang die **mittlere Änderungsrate** in einem Intervall.

Anschaulich entspricht der Differenzenquotient der **Steigung der Sekante** durch die beiden Punkte P und Q.

Definition: Ableitung

Existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$, so nennt man diesen Wert die **Ableitung von f an der Stelle $\mathbf{x_0}$**.

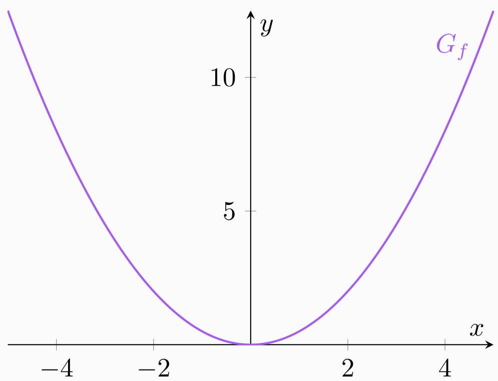
$$f'\left(x_0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

Die Ableitung beschreibt im Sachzusammenhang die **momentane Änderungsrate** und entspricht anschaulich der **Steigung der Tangente am Graphen von f an der Stelle $\mathbf{x_0}$**.

Existiert der Grenzwert $\forall x$ aus dem Intevall, so nennt man f differenzierbar.

Beispiel

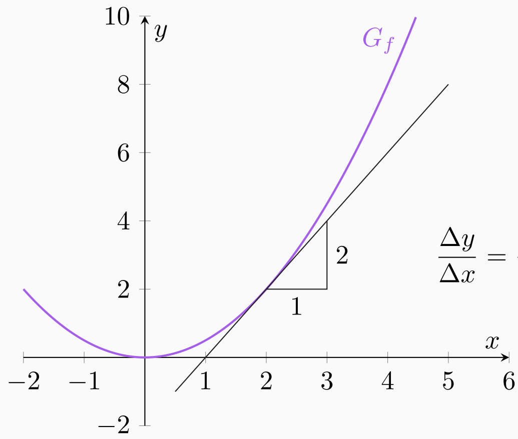
$a)$ Zeiche den Graph von f in mit $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2$ in eine geeignetes Koordinatensystem.



b) Bestimme die mittlere Änderungsrate von f in $[0;3]$.

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{4.5-0.5}{2}=2$$

c) Bestimme die momentane Änderungsrate an der Stelle $x_0 = 2$ zeichnerisch.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2}{1}=2$$

1.2 Verkettete Funktionen

Gegeben seien zwei Funktionen g und h.
Die Funktion $f = g \circ h$ ("g nach h") ist die **verkettete Funktion** mit $(g \circ h)(x) = g\,(h(x))$

Dabei wird der Funktionsterm von $h(x)$ für die Variable in $g(x)$ eingesetzt.

Beispiel

a) $g(x) = 3x + 1;\; h(x) = 2x^2$. Bestimme $(g \circ h)(x)$ und $(h \circ g)(x)$.

$$(g \circ h)(x) = 6x^2 + 1$$
$$(h \circ g)(x) = 2(3x+1)^2 = 18x^2 + 12x + 2$$

b) Bestimme je 2 Funktionen für g und h, für die gilt $g \circ h = f$ mit $f(x) = \dfrac{2}{(x^2-1)^3}$

1. $$g(x) = \frac{2}{x^3}$$
$$h(x) = x^2 - 1$$

2. $$g(x) = \frac{2}{x}$$
$$h(x) = \left(x^2 - 1\right)^3$$

1.3 Die Kettenregel

Gegeben sind zwei differenzierbare Funktionen u und v. Gesucht ist die Ableitungsfunktion f' mit $f = u \circ v$. Es gilt:

$$f'(x) = u'\left(v(x)\right) \cdot v'(x)$$

Beweis

$$\begin{aligned}
f'\left(x_1\right) &= \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f\left(x_2\right) - f\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} && \mid \text{Differenzenquotient} \\
&= \lim_{x_2 \to x_1} \frac{u\left(v\left(x_2\right)\right) - u\left(v\left(x_1\right)\right)}{x_2 - x_1} && \mid \text{Einsetzen} \\
&= \lim_{x_2 \to x_1} \frac{u\left(v\left(x_2\right)\right) - u\left(v\left(x_1\right)\right)}{v\left(x_2\right) - v\left(x_1\right)} \cdot \frac{v\left(x_2\right) - v\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} && \mid \text{Multiplikation einer 1} \\
&= \lim_{x_2 \to x_1} \frac{u\left(v\left(x_2\right)\right) - u\left(v\left(x_1\right)\right)}{v\left(x_2\right) - v\left(x_1\right)} \cdot \lim_{x_2 \to x_1} \frac{v\left(x_2\right) - v\left(x_1\right)}{x_2 - x_1} && \mid \text{Grenzwerte separat berechnen} \\
&\quad \text{da } v \text{ stetig ist } \Rightarrow \lim_{x_2 \to x_1} v\left(x_2\right) = v\left(x_1\right) \\
&= u'\left(v\left(x_1\right)\right) \cdot v'\left(x_1\right)
\end{aligned}$$

$\square$

Bezeichnet man $u(x)$ und $v(x)$ als äußere bzw. innere Funktion, dann lautet die Kettenregel salopp: "Äußere Ableitung mal innere Ableitung"

Beispiel

Leite ab!

$a)$ $f(x) = (2x-1)^5$

$$f'(x) = 10(2x-1)^4$$

$b)$ $g(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 - 2x}$

$$g'(x) = -\frac{x-2}{\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)^2}$$

$c)$ $h(x) = 2\cos\left(\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{2}x\right)$

$$h'(x) = -\left(\frac{4}{3}x + 1\right)\sin\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$$

1.4 Die Produktregel

Gegeben sind die Funktionen f und g (differenzierbar). Für $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ gilt für Ableitungsfunktion

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Salopp: ”abgeleitet hingeschrieben plus hingeschrieben abgeleitet”

Beispiel

Leite ab!
$a)$ $\quad f(x) = x^2 \cdot \cos x$

$$f'(x) = -x^2 \sin(x) + 2x \cos(x)$$

$b)$ $\quad g(x) = \sqrt{x} \cdot (3x-5)^4$

$$g'(x) = \frac{(3x-5)^4}{2\sqrt{x}} + 12\sqrt{x}\,(3x-5)^3$$

1.5 Monotonie und Krümmungsverhalten

Definition

Eine Funktion f sei definiert auf einem Intervall I.

f heißt **streng monoton wachsend** wenn:

$$\forall x_1; x_2 \in I: \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f heißt **streng monoton fallend** wenn:

$$\forall x_1; x_2 \in I: \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Monotoniesatz

Die Funktion f sei differenzierbar.

Wenn $f'(x) > 0 \; \forall \; x \in I$ dann ist f in I streng monoton wachsend.
Entsprechend gilt für $f'(x) < 0$, dass f streng monoton fallend ist.

Anmerkung: Die Umkehrung des Satzes gilt im Allgemeinen nicht. (siehe $f(x) = x^2$)

Definition: Links-/Rechtskurve

Sei f eine auf dem Intevall I zweimal differenzierbare Funktion.

- $f''(x) > 0$ in $I \rightarrow$ Linkskurve, f' ist streng monoton wachsend
- $f''(x) > 0$ in $I \rightarrow$ Rechtskurve, f' ist streng monoton fallend

Beispiel

$f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 18x$. Untersuche f auf ihr Krümmungsverhalten.

$$f'(x) = -6x^2 - 12x + 18; \; f''(x) = -12x - 12$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= -1 \\ f''(0) = -12 < 0 &\Rightarrow \text{Rechtskurve} \\ f''(-2) = 12 > 0 &\Rightarrow \text{Linkskurve} \end{aligned}$$

In $(-\infty; -1]$ beschreibt f eine Linkskurve.
In $[-1; \infty)$ beschreibt f eine Rechtskurve.

1.6 Extremstellen

Geben ist eine zweimal differenzierbare Funktion f. Die **notwendige Bedingung** für Extremstellen in f lautet:

$$f'(x) = 0$$

Notwendigkeit

Notwendigkeit bedeutet:
Liegt in f eine Extremstelle vor, so ist $f'(x) = 0$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen **nicht**.

$$\begin{aligned} \text{Extremstelle} &\Rightarrow f'(x) = 0 \\ f'(x) = 0 &\not\Rightarrow \text{Extremstelle} \end{aligned}$$

Gilt zusätzlich, dass f' an der Extremstelle einen **Vorzeichenwechsel (VZW)** aufweist, so weiß man beim Übergang

- von $+$ nach $-$ liegt eine **Maximumstelle** vor.
- von $-$ nach $+$ liegt eine **Minimumstelle** vor.

Gilt

$$f'(x_e) = 0 \qquad \text{und} \qquad f''(x_e) \neq 0$$

so liegt in f am der Stelle x_e eine Extremstelle vor.

$$\begin{aligned} f''(x_e) < 0 &\Rightarrow \text{Maximumstelle} \\ f''(x_e) > 0 &\Rightarrow \text{Minimumstelle} \end{aligned}$$

Beispiel

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$. Untersuche f auf Extremstellen.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9;\ f''(x) = 6x + 6$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 6x - 9 &= && \mid \cdot \frac{1}{3} \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 && \mid \text{Satz von Vieta} \\ (x-3)(x+1) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 3;\ x_2 = -1 \\ \\ f''(3) &= 12 > 0 \to \text{Minimumstelle} \\ f''(-1) &= -12 < 0 \to \text{Maximumstelle} \end{aligned}$$

1.7 Wendestellen

Sei f eine mindestens 3-mal differenzierbare Funktion. Ist x_w eine Wendestelle von f, so gilt

$$f''(x_w) = 0 \qquad \text{(notwendige Bedingung)}$$

$$\text{sowie} \qquad f'''(x_w) \neq 0$$

Ebenfalls gilt, dass f'' um x_w einen VZW besitzt, bzw. in f' eine Extremstelle mit VZW vorliegt. (notwendig und hinreichend)

Beispiel

Berechne die Wendestellen von f mit $f(x) = x^3\,(2 + x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(2+x) + x^3 \\ f''(x) &= 6x(2+x) + 3x^2 + 3x^2 \\ &= 12x^2 + 12x \\ f'''(x) &= 24x + 12 \\ \\ f''(x) &= 0 \\ 12x^2 + 12x &= 0 \\ 12x(x+1) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 0;\ x_2 = -1 \\ \\ f'''(x_1) &= 12 \neq 0 \\ f'''(x_2) &= -12 \neq 0 \end{aligned}$$

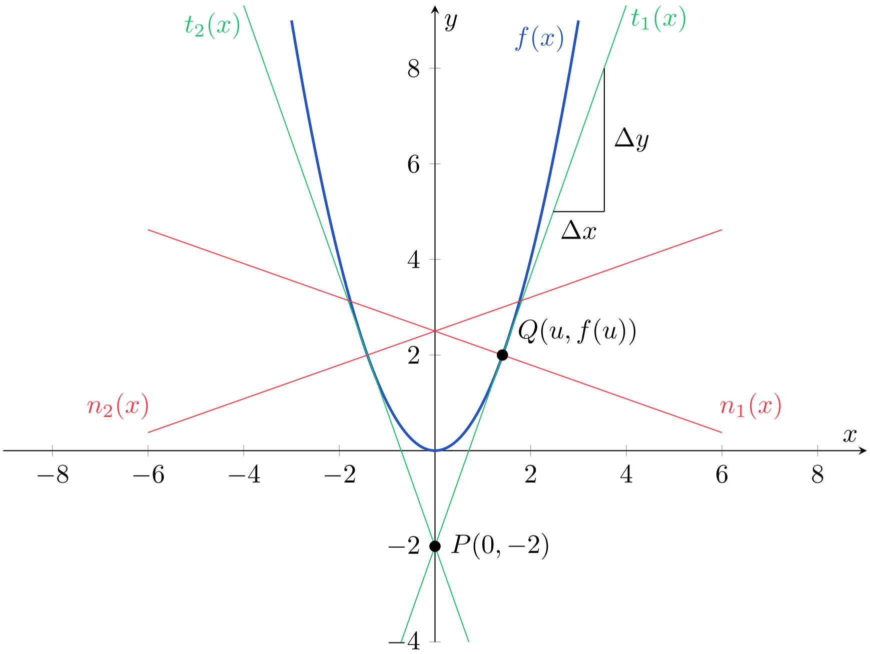
f hat Wendestellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$.

1.8 Tangente und Normale von Außen

Gegeben ist eine Funktion f und sowie ein Punkt P, der nicht auf f liegt.
Bestimme die Gleichung(en) der Tangente(n) durch P an f.

Allgemeine Tangentengleichung

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{t(x) - f(u)}{x - u} &= f'(x) && \mid \cdot (x-u) \\ t(x) - f(u) &= f'(u) \cdot (x - u) && \mid + f(u) \\ t(x) &= f'(u) \cdot (x-u) + f(u) \end{aligned}$$



1. Terme von $f(u)$ bzw. $f'(u)$ bestimmen.

$$f(u) = u^2; \; f'(u) = 2u$$

2. P in $t(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} -2 &= 2u \cdot (0 - u) + u^2 \\ -2 &= -2u^2 + u^2 \\ -2 &= -u^2 \\ u &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. u_1 / u_2 in $t(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} u_1 : \qquad t_1(x) &= 2\sqrt{2} \cdot (x - \sqrt{2}) + \left(\sqrt{u}\right)^2 \\ &= 2\sqrt{2}x - 2 \\ u_2 : \qquad t_2(x) &= -2\sqrt{2}x - 2 \end{aligned}$$

Normale

Die Gerade, die die Tangente orthogonal schneidet heißt **Normale**.
Für die Steigung der Normalen gilt:

$$m_t \cdot m_n = -1 \qquad\qquad m_n = -\frac{1}{m_t}$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$$

1.9 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen (Minimax)

Beim Lösen von Minimax-Aufgaben ist folgendes Verfahren empfehlenswert:

1. Aufgabe abchecken, ggf. Skizze machen
2. **Hauptbedingung** formulieren. Diese hängt von zwei Variablen ab.
3. In der Aufgabe wird die zu maximierende bzw. minimierende Größe aus der Hauptbedingung durch irgendeine zusätzliche Größe begrenzt. Diese wird durch die sogenannte **Nebenbedingung** beschrieben. Die Nebenbedingung hängt auch von zwei Variablen ab.
4. Jetzt stellt man die Nebenbedingung nach einer der Variablen um und setzt diese in die Hauptbedingung ein. Man erhält eine Gleichung, die nur noch von einer Variable abhängt und **Zielfunktion** genannt wird.
5. Zielfunktion $Z(x)$ ableiten und notwendige und hinreichende Bedingungen für Extremstellen aufstellen:
$$Z'(x) = 0$$
$$Z''(x) \lesseqgtr 0$$
6. Theoretisch Ränder überprüfen.
7. Die Wert für die Variablen berechnen und einen Antwortsatz formulieren.

Beispiel

Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 21. Berechne das größtmögliche Produkt der beiden Zahlen.

$$\begin{aligned} P(a,b) &= a \cdot b \\ a + b = 21 \Leftrightarrow a &= 21 - b \\ P(b) &= b(21 - b) \\ &= -b^2 + 21b \end{aligned}$$

$$P'(b) = -2b + 21; \; P''(b) = -2$$

$$\begin{aligned} P'(b) &= 0 \\ -2b + 21 &= 0 \\ b &= 10.5 \Rightarrow 10 \\ a &= 21 - 10 = 11 \end{aligned}$$

$$P''(b) < 0 \Rightarrow \text{Maximumstelle}$$

$$\Rightarrow a \cdot b = 110$$

Das größtmögliche Produkt beträgt 110 und ist Produkt der Zahlen 11 und 10.

2 Exponentialfunktionen

Bei einer beliebigen Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x;\ a \in \mathbb{R}$ gilt, dass die Zunahme des "Bestands" proportional zum Bestand ist.

$$f'(x) \sim f(x)$$

2.1 Die natürliche Exponentialfunktion zur Basis *e*

Es gibt eine Zahl, für die die Ableitung der Exponentialfunktion exakt gleich wie die Ausgangsfunktion ist.

Für diese **Eulersche Zahl** $\boldsymbol{e \approx 2.7182}$ gilt also

$$f(x) = e^x = f'(x) = e^x$$

Beispiel

Leite ab!
$a)$ $\quad f(x) = \sin x \cdot e^x$

$$f'(x) = e^x \cos x + e^x \sin x = e^x(\cos x + \sin x)$$

$b)$ $\quad g(x) = 4e^{3x-1}$

$$f'(x) = 12e^{3x-1}$$

2.2 Exponentialgleichungen mit *e*

Gegeben ist eine Zahl $b > 0$. Die Lösung der Gleichung

$$e^x = b$$

heißt **natürlicher Logarithmus** von b.

Merke

$$e^{\ln k} = k$$

Die natürliche Exponentialfunktion e^x hat dementsprechend die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ als **Umkehrfunktion**.

Beispiel

$$\begin{aligned}
e^x + \frac{7}{e^x} &= 8 && \mid -8 \\
e^x + \frac{7}{e^x} - 8 &= 0 && \mid \cdot e^x \\
e^2x + 7 - 8e^x &= 0 && \mid u = e^x \\
u^2 - 8u + 7 &= 0 \\
(u-1)(u-7) &= 0 \\
u_1 = 1;\ u_2 &= 7 \\
\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 &= \ln 7
\end{aligned}$$

2.3 Kurvendiskussion bei e-Funktionen

Zur Erinnerung:

1. **Nullstellen bestimmen:**

$$f(x_n) = 0$$

$$e^0 = 1$$

$\ln 0$ ist nicht definiert.

2. **Extremstellen bestimmen:**

$$f'(x_e) = 0$$
$$f''(x_e) \lesseqgtr 0$$

3. **Wendepunkte bestimmen:**

$$f''(x_w) = 0$$
$$f'''(x_w) \neq 0$$

Verhalten für $x \to \pm\infty$ und Asymptoten bestimmen

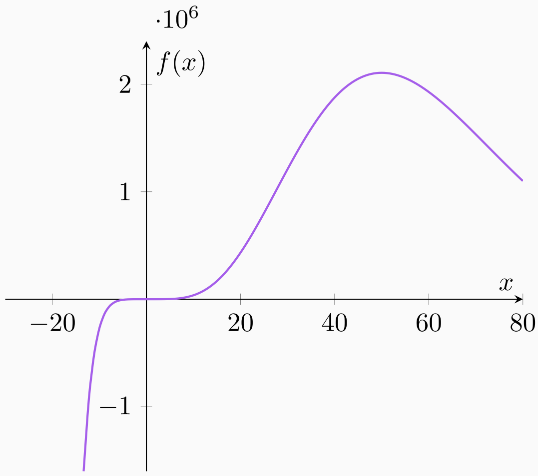
Eine waagerechte **Asymptote** ist eine Gerade der Form $y = a$, wobei a ein endlicher Wert des Grenzwerts von f für $x \to \pm\infty$ ist.
Der Graph von f nähert sich dann infinitesimal an die Asymptote an.

btw: Symmetrie

- achsensymmetrisch zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$
- punktsymmetrisch zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$

Beispiel

Skizziere den Graph von f mit $f(x) = x^5 \cdot e^{-0.1x}$



2.4 Funktionenscharen von *e*-Funktionen

Definition: Funktionenschar

Eine Funktion f_t mit einem **Parameter** t, ordnet jedem x einen Funktionswert $f_t(x)$ zu.

Dabei ist ein Parameter ein beliebiger Wert, der wenn er einmal festgelegt wurde, seinen Wert beibehält.

Die Graphen von f_t bilden eine sogenannte **Funktionenschar** von (Exponential-)Funktionen.

Die Graphen von f_t können verschoben und/oder gestreckt werden:

$f_t(x) = e^{x+t}$	ist gegenüber e^x um t Einheiten nach links verschoben für $t > 0$ und nach rechts für $t < 0$
$f_k(x) = ke^x$	ist in y-Richtung gestaucht bzw. gestreckt
$f_b(x) = e^x + b$	ist in y-Richtung nach oben bzw. nach unten verschoben
$f_w(x) = e^{wx}$	ist in x-Richtung gestreckt bzw. gestaucht.

Beispiel

Gegeben ist $f_t(x) = e^{x+t} - 1$.

$a)$ Bestimme $f_{-2}(3)$.

$$f_{-2}(3) = e^{3+(-2)} - 1 = e - 1 \approx 1.718$$

$b)$ Beschreibe die Wirkung des Parameters t auf f_t.

Der Parameter t verschriebt den Graphen in x-Richtung. Bei Erhöhung verschiebt sich der Graph nach links.

$c)$ Gib die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

$$\begin{aligned} f_t(0) &= e^{0+t} - 1 = e^t - 1 \\ &\Rightarrow S_t\left(0 \mid e^t - 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{x+t} - 1 &= 0 && \mid +1 \\ e^{x+t} &= 1 && \mid \ln \\ x + t &= \ln 1 \\ x + t &= 0 \\ x &= -t \\ &\Rightarrow N_t\left(-t \mid 0\right) \end{aligned}$$

2.5 Die Umkehrfunktion

Definition

Sei f eine Funktion mit Definitionsmenge D_f und Wertemenge W_f.
f heißt **umkehrbar**, wenn zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ existiert.

Bei einer umkehrbaren Funktion f heißt die Funktion $\bar{f}$ *(f quer)* mit $\bar{f}(y) = x$ die **Umkehrfunktion** von f.

Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{f}\left(f(x)\right) &= x \qquad && \forall x \in D_f \qquad && \text{und} \\ f\left(\bar{f}(x)\right) &= x && \forall x \in D_{\bar{f}} = W_f && \end{aligned}$$

$$\big(\text{z.B.} \quad \sin^{-1}(\sin x) = x \quad \text{bzw.} \quad \sin^{-1}(\sin 30°) = 30°\big)$$

Ist f streng monoton wachsend, so ist sie umkehrbar und es existiert eine Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f.
Also überprüft man ob $f'(x) > 0$ gilt.

Gleiches gilt auch wenn f durchgehend streng monoton fallend ist.

Berechnung von $\bar{\mathbf{f}}$:

1. $y = f(x)$ setzen
2. Gleichung nach x auflösen
3. x und y vertauschen
4. y durch $\bar{f}(x)$ ersetzen

Beispiel

Gegeben ist f mit $f(x) = \sqrt{2x-4} - 1$.
$a)$ Gib D_f und W_f an.

$$\begin{aligned} D_f &= [2; \infty) \\ W_f &= [-1; \infty) \end{aligned}$$

$b)$ Zeige, dass f umkehrbar ist.

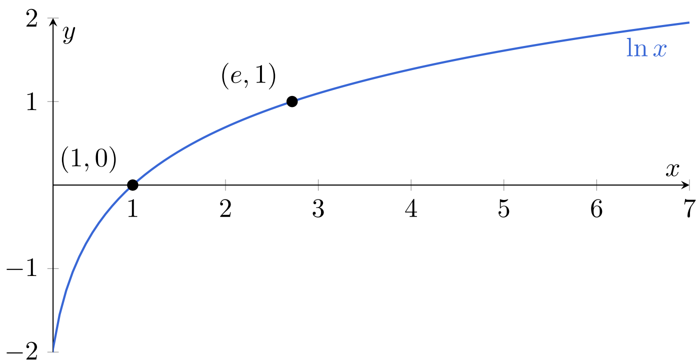
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2x-4}} \\ f'(x) &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2x-4}} &= 0 \qquad\qquad && \Rightarrow \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

c) Bestimme $\bar{f}$.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2x-4} - 1 && \mid +1 \\ y+1 &= \sqrt{2x-4} && \mid ()^2 \\ (y+1)^2 &= 2x-4 && \mid +4 \\ (y+1)^2 + 4 &= 2x && \mid \cdot \frac{1}{2} \\ x &= \frac{(y+1)^2+4}{2} \\ y &= \frac{(x+1)^2}{2} + 2 \\ \\ \Rightarrow \bar{f}(x) &= \frac{(x+1)^2}{2} + 2 \end{aligned}$$

2.6 Der natürliche Logarithmus und seine Ableitungsfunktion

Von der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist der natürliche Logarithmus $\bar{f}(x) = \ln x$ die Umkehrfunktion.



$$\begin{aligned} D_{\bar{f}} &= (0; \infty) \\ W_{\bar{f}} &= (-\infty; \infty) \end{aligned}$$

Für die Ableitung von $\ln x$ gilt:

$$\begin{aligned} x &= e^{\ln x} && \mid ()' \\ 1 &= \left(e^{\ln x}\right)' \\ 1 &= (\ln x)' \cdot e^{\ln x} && \mid e^{\ln x} = x \\ 1 &= (\ln x)' \cdot x && \mid \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \\ (\ln x)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Beispiel

$a)$ $f(x) = x\ln(3x)$. Leite ab!

$$f'(x) = \ln(3x) + \frac{x}{x} = \ln(3x) + 1$$

$b)$ $g(x) = \frac{1}{2}\ln(3x-6)$. Bestimme $\bar{g}, D_g, D_{\bar{g}}, W_g$ und $W_{\bar{g}}$.

$$\bar{g}(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + 2$$
$$D_g = (2;\infty) = W_{\bar{g}} = (2;\infty)$$
$$D_{\bar{g}} = (-\infty;\infty) = W_g = (-\infty;\infty)$$

2.7 Exponentielles Wachstum

Aus Klasse 9:

$$f(t) = f(0)\cdot a^t$$

Für $a > 1 \to$ exponentielle Zunahme
Für $a < 1 \to$ exponentieller Zerfall

Um die Exponentialfunktion ableiten zu können, ist es sinnvoll sie zur Basis e zu schreiben.

$$\Rightarrow f(t) = f(0)\cdot e^{\ln(a)\cdot t}$$

$\ln(a) = k$

Für $k > 0 \to$ Zunahme
Für $k < 0 \to$ Zerfall

Für die Verdopplungszeit T_V gilt:

$$T_V = \frac{\ln 2}{k}$$

Für die Halbwertszeit T_H gilt:

$$T_V = \frac{\ln 0.5}{k}$$

Beispiel

Gegeben ist $f(t) = 228\cdot 1.04^t$ t in y.

$a)$ Bestimme den Anfangsbestand.

$$f(0) = 228$$

$b)$ Handelt es sich um eine Zu- oder Abnahme? Begründe.
Es handelt sich um eine Zunahme, da $1.04 > 1$

$c)$ Schreibe f zur Basis e.

$$f(t) = 228\cdot e^{\ln(1.04)\cdot t}$$

$d)$ Berechne T_V/T_H.

$$T_V = \frac{\ln 2}{\ln 1.04} \approx 17.67 \qquad T_H = \frac{\ln 0.5}{\ln 1.04} \approx -17.77$$

3 Integralrechnung

3.1 Bestimmen der Gesamtänderung - orientierter Flächeninhalt

Um von einer Größe die momentane Änderung zu berechnen, muss man ableiten. Will man umgekehrt von der momentanen Änderung einer Größe auf die Größe selbst schließen, muss man den **orientierten Flächeninhalt** zwischen dem Graph der Änderungsrate und der x-Achse bestimmen.

Anmerkung

Ein Flächeninhalt ist stets positiv, ein orientierter Flächeninhalt kann negativ sein.

Beispiel

Ein Tank ist anfangs leer. Über eine Leitung kann ihm Wasser hinzugefügt oder entfernt werden. Bestimme aus der folgenden Zufluss-/Abflussmenge den Wasserinhalt nach 12 Sekunden.

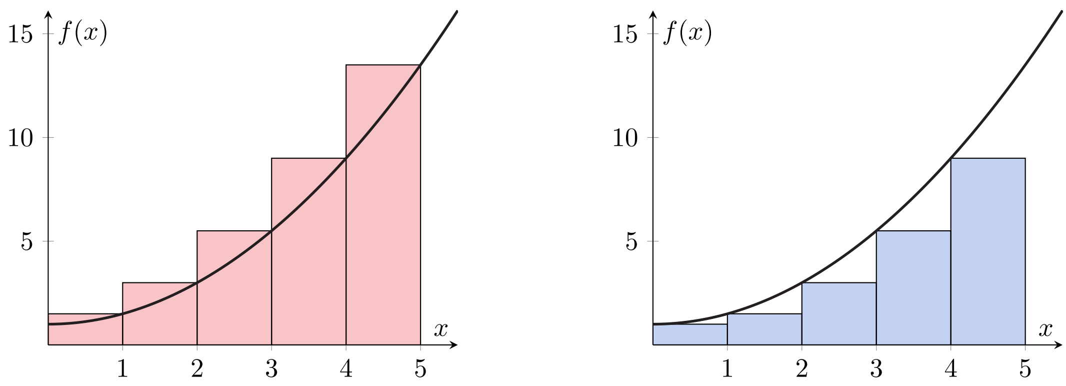
$$V = \left(4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3\right) \mathrm{l} = 13\,\mathrm{l}$$

3.2 Das Integral als orientierter Flächeninhalt

Um den Flächeninhalt von krummlinigen Graphen zu bestimmen, kann man die **Ober-** bzw. **Untersummen** zwischen Graph und x-Achse betrachten.

Anschaulich: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1;\ I = [0; 5];\ n = 5$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	1.5	3	5.5	9



(a) Obersumme

(b) Untersumme

Haben für $n \to \infty$ die Ober- und Untersumme den gleichen Wert, so nennt man f **integrierbar**.

Definition: Integral

Ist eine Funktion f über $[a;b]$ integrierbar, so nennt man den orientierten Flächeninhalt über $[a;b]$, den der Graph von f mit der x-Achse einschließt, das (bestimme) **Integral** von f über $[a;b]$.
Dabei nennt man a die untere und b die obere Grenze des Integrals.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Dabei nennt man $f(x)$ den **Integrand** und dx die **Integrationsvariable**.

Integraladditivität

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Beispiel

Bestimme näherungsweise $\int_{-1}^2 x^3\,dx$

$$\int_{-1}^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^2 = \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4\right) = 3.75$$

3.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition: Stammfunktion

Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f im Intervall I, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei f integrierbar auf $[a;b]$ und F eine Stammfunktion von f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Satz: Stammfunktion

Von der Funktion f existieren undendlich viele Stammfunktionen, die sich um eine Konstante c unterscheiden. Es gilt:

$$F(x) = G(x) + c \qquad \forall x \in I$$

Beweis:

$$F'(x) = f(x) = (G(x) + c)' = G'(x)$$

Beispiel

$a)$ Bestimme zwei Stammfunktionen von $f(x) = 3x^2$

$$F_1(x) = x^3$$
$$F_2(x) = x^3 + \pi$$

$b)$ Berechne $\int_1^3 3x^2\,dx$.

$$\int_1^3 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 26$$

Integralfunktion

Sei f eine über I integrierbare Funktion und $u \in I$. Die Funktion J_u mit $J_u(x) = \int_u^x f(t)\,dt$ heißt die **Integralfunktion** von f zur unteren Grenze u.

Beachte:

- Man sollte für die Integrationsvariable und die obere Grenze nicht den gleichen Buchstaben wählen.
- Es gilt: $J_u(u) = \int_u^u f(t)\,dt = 0$, d.h. die untere Grenze ist stets eine Nullstelle der Integralfunktion.

Satz: Die Integralfunktion J_u ist eine Stammfunktion von f:

$$J_u'(x) = f(x)$$

Beispiel

$a)$ $f(t) = 3t^2$. Bestimme x so, dass gilt $\int_1^x f(t)\,dt = 26$.

$$\begin{aligned}\int_1^x 3t^2\,dt &= 26\\ \left[t^3\right]_1^x &= 26\\ x^3 - 1 &= 26\\ x = \sqrt[3]{27} &= 3\end{aligned}$$

$b)$ Bestimme eine Integralfunktion von $f(t) = \frac{1}{4}e^{0.5t}$ zur unteren Grenze $u = -1$.

$$J_{-1}(x) = \int_{-1}^{x} \frac{1}{4}e^{0.5t}\,dt = \left[\frac{1}{2}e^{0.5t}\right]_{-1}^{x}$$
$$= \frac{1}{2}e^{0.5x} - \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

3.4 Bestimmen von Stammfunktionen

Seien G und H Stammfunktion von g und h.

Potenzregel:

$$f(x) = x^n \qquad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

für $n = -1$:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad F(x) = \ln|x|$$

Faktorregel:

$$f(x) = c \cdot g(x) \qquad F(x) = c \cdot G(x)$$

Summenregel:

$$f(x) = g(x) + h(x) \qquad F(x) = G(x) + H(x)$$

Lineare Verkettung/Substitution:

$$f(x) = g(ax+b) \qquad F(x) = \frac{1}{a}G(ax+b)$$

Faktor und Summenregel für Integrale:

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b g(x) + h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx$$

Beweise: HDI

Beispiel

$a)$ Bestimme eine Stammfunktion von $f(x) = 3e^{2x} - 2\sin(\pi x)$

$$F(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{2}{\pi}\cos(\pi x)$$

$b)$ Berechne das Integral $\int_{-4}^{-1} \frac{5}{x}\,dx$

$$\int_{-4}^{-1} \frac{5}{x}\,dx = [5\ln|x|]_{-4}^{-1} = 5\ln 1 - 5\ln 4 = -5\ln 4 \approx -6.93$$

3.5 Graphen von Stammfunktionen

Nach dem Schema:

$$\begin{array}{lll} N\ \ E\ \ W & & F \\ \quad N\ \ E\ \ W & & f \\ \qquad N\ \ E\ \ W & & f' \end{array}$$

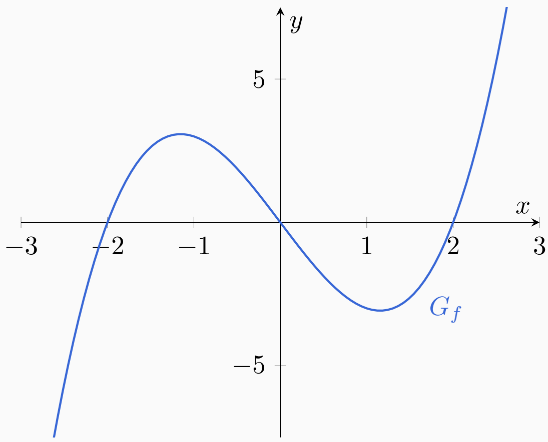
gilt für die Graphen von F und f folgendes:

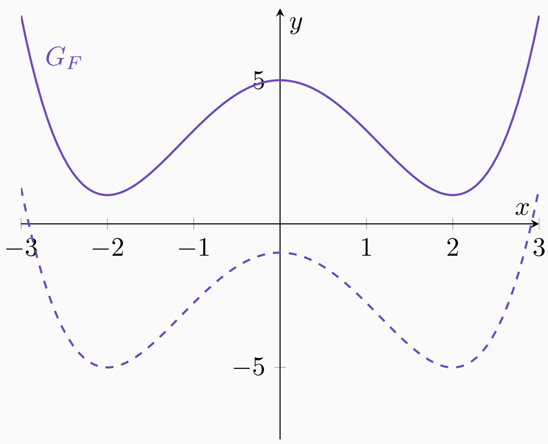
Nullstelle von *f*	mit VZW von + nach -	mit VZW mit - nach +	ohne VZW
(innere) Extremstelle von *F*	Maximumstellen	Minimumstelle	Sattelstelle von F

Funktion *f*	(innere) Extremstelle
Stammfunktion *F*	Wendestelle

Beispiel

Gegeben ist G_f. Skizziere G_F.





3.6 Integral und Flächeninhalt

Ein Integral kann einen negativen Wert haben, ein Flächeninhalt nicht.
Das bedeutet, dass man beim Berechnen des Flächeninhalts zwischen eines Graphen und der x-Achse wie folgt vorgehen sollte:

1. Bestimme die Nullstellen von f
2. Berechne die Integrale der Teilintervalle
3. Berechne die Teilflächen für $f(x) < 0$ über $\left|\int_a^{x_0} f(x)\,dx\right|$ oder $-\int_a^{x_0} f(x)\,dx$

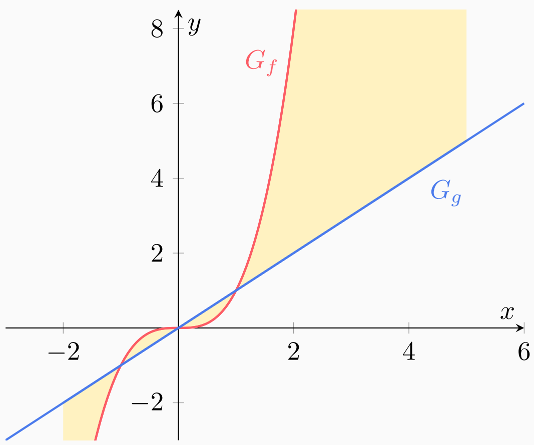
Für den Flächeninhalt A zwischen zwei Graphen gilt:

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\ dx$$

Salopp: ”Das Obere minus das Untere.”

Beispiel

$f(x) = x^3;\ g(x) = x;\ I = [-2; 5]$
Berechne den Flächeninhalt zwischen den beiden Funktionsgraphen für I.
Skizze:



$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^3 &= x \\ x^3 - x &= 0 \\ x(x^2-1) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 &= 1;\ x_3 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-1} g(x) - f(x)\ dx + \int_{-1}^{0} f(x) - g(x)\ dx + \int_{0}^{1} g(x) - f(x)\ dx + \int_{1}^{5} f(x) - g(x)\ dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{5} \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 144 \\ &= 146.75 \end{aligned}$$

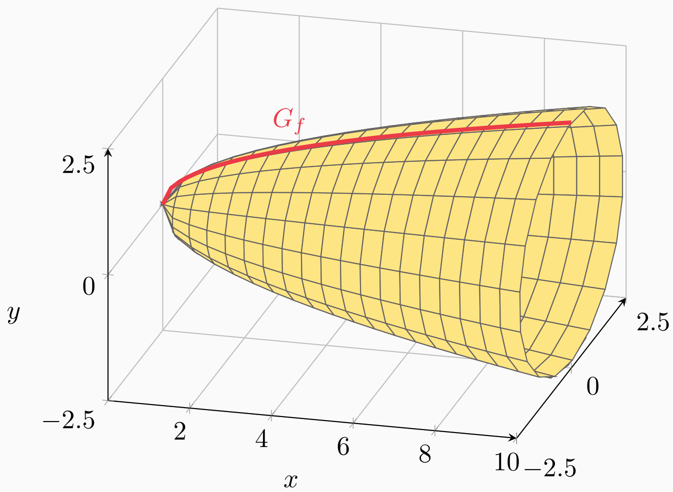
3.7 Volumen von Rotationskörpern

Sei f eine auf $[a;b]$ integrierbare Funktion. Lässt man die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt um die x-Achse rotiert, so entsteht ein 3-dimensionaler Rotationskörper, dessen Volumen man wie folgt berechnet:

$$V_{\text{Rot}} = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Beispiel

Der rotierende Graph von f mit $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x}$ erzeugt einen Rotationskörper in Form eines Sektglases.



$a)$ Wie viel Sekt passt in das $10\,\text{cm}$ Hohe Sektglas?

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{10} f(x)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^{10} \frac{16}{9} x \, dx \\ &= \pi \cdot \left[\frac{8}{9}x^2\right]_0^{10} \\ &= \pi \cdot \frac{800}{9} \approx 279.25 \end{aligned}$$

$b)$ An welcher Stelle muss man den $100\,\text{ml}$ Eichstrich anbringen?

$$\begin{aligned} V &= 100 \\ \pi \int_0^a f(x)^2 \, dx &= 100 \\ \pi \cdot \left[\frac{8}{9}x^2\right]_0^a &= 100 \\ \pi \cdot \frac{8}{9}a^2 &= 100 \\ a^2 &= \frac{900}{8\pi} \\ a &= \sqrt{\frac{900}{8\pi}} \approx 5.98 \end{aligned}$$

3.8 Uneigentliche Integrale

Problem:
Sind die Flächen, die ein Graph mit z.B. der x-Achse einschließt endlich, wenn

- eine Polstelle (senkrechte Asymptote) vorliegt,
- die Funktion für $x \to \pm\infty$ läuft und der Graph dabei eine waagerechte Asymptote besitzt?

Dabei sind die betrachteten Flächen **unbegrenzt**. Das heißt aber nicht, dass automatisch der Flächeninhalt endlich oder unendlich sein muss.

Untersucht man den Flächeninhalt an seiner Polstelle z, berechnet man das Integral

$$\int_z^b f(x)\,dx$$

Nach dem Bilden der Stammfunktion setzt man z ein und entscheidet, ob der Grenzwert des Rechenausdrucks einen endlichen Flächeninhalt ergibt oder nicht.
Bei waagerechten Asymptoten verfährt man analog nur mit dem Grenzwert für $x \to \pm\infty$.

Erhält man für den Grenzwert einen endlichen Wert, spricht man von einem **uneigentlichen Integral**.

Beispiel

Berechne!

$a)\quad \displaystyle\int_1^\infty \frac{3}{x}\,dx$

$$\int_1^z \frac{3}{x}\,dx = [3\ln|x|]_1^z = \ln|z|$$
$$\lim_{z\to\infty} \ln|z| = \infty$$

$b)\quad \displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\,dx$

$$\int_z^0 \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\,dx = \left[e^{\frac{1}{2}x}\right]_z^0 = -e^{\frac{1}{2}z} + 1$$
$$\lim_{z\to-\infty} -e^{\frac{1}{2}z} + 1 = 1$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 1$$

3.9 Mittelwerte von Funktionen

Definition: Mittelwert

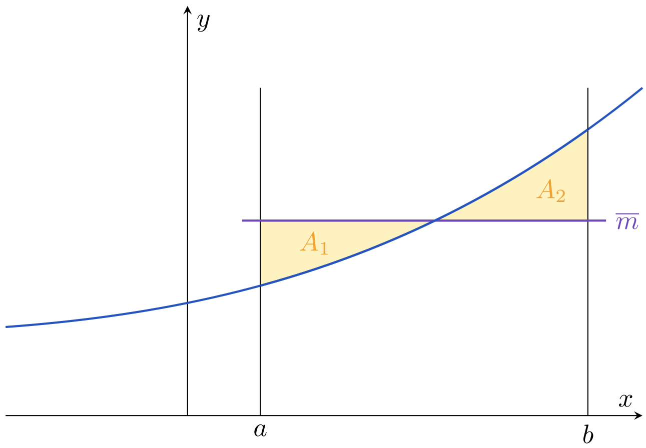
Die Zahl

$$\overline{m} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

heißt **Mittelwert** der Funktion f über $[a;b]$.

Graphisch lässt sich der Mittelwert bestimmen, indem man die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt mit der Rechtecksfläche, die durch die konstante Funktion $g(x) = m$ entsteht, vergleicht. Beide Flächen müssen gleich groß sein.
Alternativ müssen die beiden Teilflächen A_1 und A_2 ober- bzw. unterhalb der Mittelwertslinie gleich groß sein.

Anschaulich:



Beispiel

a) $f(x) = -x^2 + 4;\ a = -3;\ b = 4$. Bestimme $\overline{m}$!

$$\begin{aligned}\overline{m} &= \frac{1}{4-(-3)}\int_{-3}^{4} -x^2 + 4\,dx \\ &= \frac{1}{7}\left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-3}^{4} \\ &= \frac{1}{7}\left(-\frac{4^3}{3} + 16 - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - 12\right)\right) \\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

b) Bestimme graphisch den Mittelwert von g.