5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Der Gauß-Algorithmus

Mehrere Gleichungen mit gemeinsamen (linearen) Variablen bilden ein **lineares Gleichungssystem (LGS).** Ein LGS mit 3 oder mehr Variablen löst man meistens mit dem **Gauß-Algorithmus** am sinnvollsten. Dabei werden durch

1. vertauschen von Gleichungen,
2. Multiplikation von einer oder mehrerer Gleichungen mit einer Zahl $\neq 0$,
3. Addition mehrerer Gleichungen und
4. Einsetzen einer Variablen in eine andere Gleichung

so lange Variablen eliminiert und dadurch bestimmt bis eine sogenannte **Stufenform** vorliegt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{array}\right) \longleftarrow \text{Matrix-Schreibweise}$$

Beispiel

Löse das LGS.

$$\begin{array}{lll}
2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3 & \mid \cdot (-3) & \mid \cdot (-2) \\
3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 13 & \mid \cdot 2 & \\
4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 & & \mid \cdot 1
\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 18 & -1 & 17 \\ 0 & 6 & -13 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 1 \\ \mid \cdot (-3) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 18 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & 38 & 38 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = 1$$

$$\begin{aligned} 18x_2 - 1 &= 17 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4 + 5 &= 3 \\ 2x_1 &= 2 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(1;\ 1;\ 1)\}$$

5.2 Lösungsmengen von LGS

Man bringt ein LGS wie gewohnt un Stufenform und erkennt dann schnell, dass ein LGS entweder

- **keine**
- **eine** oder
- **unendlich** viele Lösungen haben kann.

Bei keiner Lösung erhält man eine Zeile der Form $0 \cdot x_3 = 1$, bei unendlich vielen Lösungen erhält man bspw. $0 \cdot x_3 = 0$. Dann wählt man für x_3 einen beliebigen Parameter und gibt die anderen Variablen in Abhängigkeit von diesem an.

Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge des LGS.
$a)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{ll} |\cdot(-2) & |\cdot 1 \\ |\cdot 1 & \\ & |\cdot 1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = t$$

$$\begin{aligned} 3x_2 + 7t &= 12 \\ x_2 &= -\frac{7}{3}t + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2\left(-\frac{7}{3}t + 4\right) + 2t &= 3 \\ x_1 - \frac{14}{3}t + 8 + 2t = 3x_1 && = \frac{8}{3}t - 5 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{8}{3}t - 5;\ -\frac{7}{3}t + 4;\ t\right)\right\}$$

$b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 8 & 8 \\ -3 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-2) \\ |\cdot 1 \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$

5.3 Bestimmen ganzrationaler Funktionen

Zum Bestimmen eines Funktionsterms einer ganzrationalen Funktion bietet sich folgende Strategie:

1. Aufstellen eines allgemeinen Funktionsterms und ggf. dessen Ableitungen.
2. Bedingungen für f, f', f'', ... formulieren.
3. LGS aufstellen und lösen.
4. Überprüfung ob ein Hochpunkt wirklich ein Hockpunkt ist, etc.

Beispiel

Bestimme die ganzrationale Funktion vom Grad 4, dessen Graph symmetrisch zur y-Achse ist, den Punkt $A(2,0)$ enthält und den Tiefpunkt $T(1,0)$ hat.

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ f''(x) &= 12x^2 + 6bx + 2c \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{Symmetrie zur } y\text{-Achse:} \quad & b = 0;\ d = 0 \\ A(2,0): \quad & f(0) = e = 2 \\ T(1,0): \quad & f'(1) = 4a + 2c = 0 \\ & f(1) = a + c + 2 = 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} |\cdot 1 \\ |\cdot -(4) \end{array} \\ \sim &\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \end{array}\right) \quad \Rightarrow c = -4 \\ & 4a - 8 = 0 \qquad \Rightarrow a = 2 \\ & \Rightarrow f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2 \end{aligned}$$

4.

$$f''(1) = 24 - 8 = 16 > 0 \quad \Rightarrow T(1,0)$$