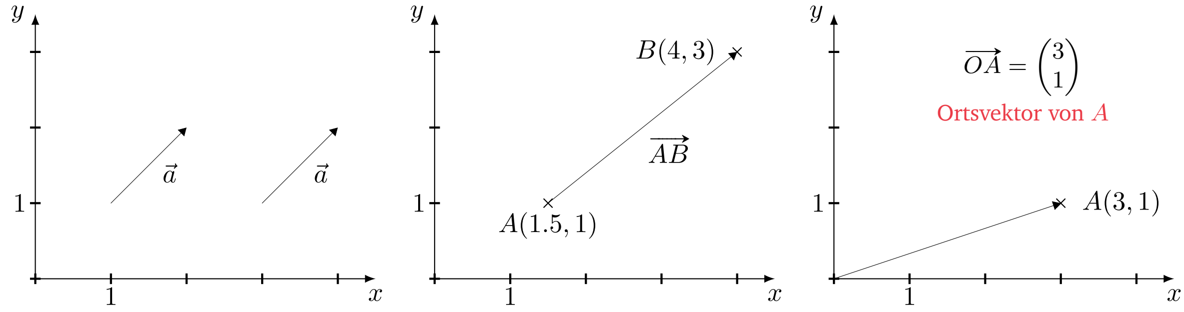
6 Geraden und Ebenen

6.1 Vektoren im Raum

Vektoren kommen hauptsächlich auf folgende 3 Arten und Weisen vor:



(a) Als Pfeil (mit beliebigem Anfang) (b) Als Pfeil (zwischen 2 Punkten) (c) Als Punkt

Gegenvektor

Gegenvektor eines Vektors $\vec{a}$ ist der Vektor $-\vec{a}$.

Beispiel

Bestimme den Gegenvektor zum Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt

Der Mittelpunkt M zweier Punkte $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ ergibt sich wiefolt:

$$M\left(\frac{a_1 + b_2}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$

Beispiel

Bestimme den Mittelpunkt M der Punkte $A(2,3,3)$ und $B(4,1,2)$.

$$\Rightarrow M(3, 2, 2.5)$$

Betrag

Der Betrag eines Vektors $\vec{a}$ ist geometrisch die Länge des zugehörigen Pfeils. Er lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiel

Berechne den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$

Einheitsvektor

Der Einheitsvektor $\vec{a}_0$ ist der Vektor, der in dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ zeigt, und den Betrag 1 hat.
Er errechnet sich mit:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Beispiel

Bestimme den Einheitsvektor $\vec{a}_0$ des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme jeweils den fehlenden Punkt.

$a)$ $A(0,-1,2)$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B(3,2,5)$$

$b)$ $B(2,0,3)$

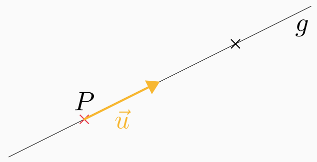
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(-1,-3,0)$$

6.2 Geraden im Raum

Allgemeine Parametergleichung einer Geraden

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$



$\vec{p}$: Stützvektor
$\vec{u}$: Richtungsvektor

Gegenseitige Lage von Geraden

Es gibt vier mögliche gegenseitige Lagen zweier Geraden:

- parallel und verschieden (echt parallel)
- identisch
- sie schneiden sich in einem Punkt
- windschief

Sind die Richtungsvektoren Vielfache?

- **ja**: parallel oder identisch
  - Haben sie gemeinsame Punkte?
    - **ja**: identisch
    - **nein**: parallel
- **nein**: schneiden sich oder sind windschief
  - Haben sie gemeinsame Punkte?
    - **ja**: schneiden sich
    - **nein**: windschief

Beispiel

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \; ; \; h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen $\rightarrow$ schneiden sich oder sind windschief

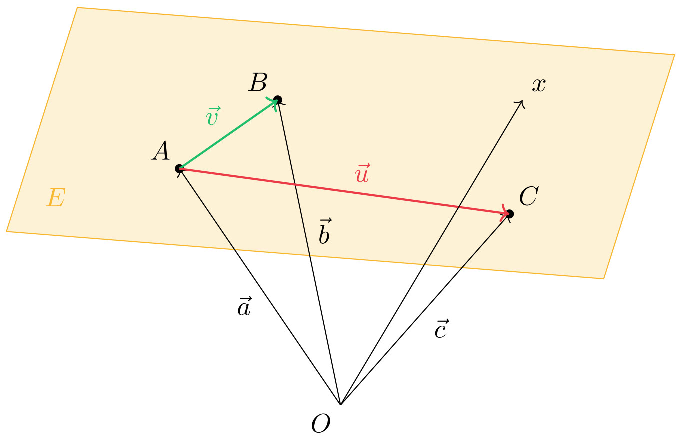
$$g \cap h : \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2r &= 1 + s \\ -1 + 3r &= 1 - s \\ 1 + 3r &= s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2r - s &= 0 && (1) \\ 3r + s &= 2 && (2) \\ 3r - s &= -1 && (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) + (3): &\quad & 6r &= 1 \\ & & r &= \frac{1}{6} \\ r = \frac{1}{6} \text{ in } (2): & & 3 \cdot \frac{1}{6} + s &= 2 \\ & & s &= 1.5 \\ r = \frac{1}{6};\ s = 1.5 \text{ in } (1): & & \frac{1}{3} - 1.5 &\neq 0 \rightarrow \text{keine Schnittpunkte} \\ & & \Rightarrow \text{windschief} \end{aligned}$$

6.3 Ebenen im Raum



$$\begin{aligned} E:\ \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AB} \qquad r, s \in \mathbb{R} \\ E:\ \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Parametergleichung einer Ebene

Jede Ebene lässt sich durch eine Parametergleichung der Form

$$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

beschreiben.
$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die Spannvektoren. Sie dürfen keine Veilfachen voneinader sein. $\vec{p}$ ist der Stützvektor.

Beispiel

$a)$ Bestimme die Parametergleichung der Ebene, die durch die Punkte A, B und C verläuft.

$$A(1,0,1);\ B(1,1,0);\ C(0,0,1)$$

$$E:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AC} + s\cdot\overrightarrow{AB}$$
$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$b)$ Gegeben ist die Ebene E mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Bestimme, ob die Punkte $A(7,5,4)$ und $B(7,1,8)$ auf der Ebene E liegen.

$$A(7,5,4):\quad \begin{pmatrix}7\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$5 = r + 2s \quad (1)$$
$$5 = 3r - s \quad (2)$$
$$3 = 5r + s \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
&(2)+(3): && 8 = 8r\\
& && \rightarrow r = 1\\
&r = 1 \text{ in } (1): && 5 = 1 + 2s\\
& && \rightarrow s = 2\\
&r = 1;\ s = 2 \text{ in } (2): && 5 \neq 3 - 2 \Rightarrow A \notin E
\end{aligned}$$

$$B(7,1,8):\quad \begin{pmatrix}7\\1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$5 = r + 2s \quad (1)$$
$$1 = 3r - s \quad (2)$$
$$7 = 5r + s \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
&(2)+(3): && 8 = 8r\\
& && \rightarrow r = 1\\
&r = 1 \text{ in } (1): && 5 = 1 + 2s\\
& && \rightarrow s = 2\\
&r = 1;\ s = 2 \text{ in } (2): && 1 = 3 - 2 \Rightarrow B \in E
\end{aligned}$$

$c)$ Überprüfe ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen.

$$A(0,1,-1);\ B(2,3,5);\ C(-1,3,-1);\ D(2,2,2)$$

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Durch } A, B, C\text{)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 = 2r - s \tag{1}$$
$$1 = 2r + 2s \tag{2}$$
$$3 = 6r \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
(3):& \qquad & 3 &= 6r \\
& & \rightarrow r &= \frac{1}{2} \\
r = \frac{1}{2} \text{ in } (1):& & 2 &= 1 - s \\
& & \rightarrow s &= -1 \\
r = \frac{1}{2};\ s = -1 \text{ in } (2):& & 1 &\neq 1 - 2 \Rightarrow D \notin E
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ A, B, C und D liegen nicht in einer Ebene.

6.4 Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt

Skalarprodukt

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Der Term

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

heißt **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Beweis

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 = |\vec{a}|^2$$

Beispiel

Bestimme, ob sich die Geraden g und h orthogonal schneiden.

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

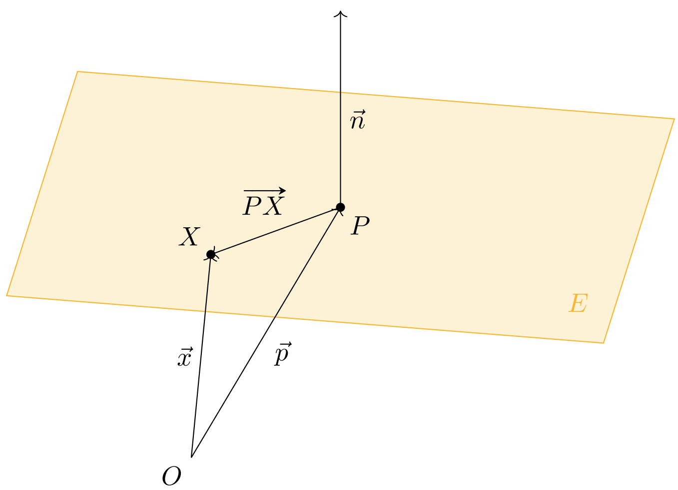
$$g \cap h : P(8, -9, 7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 26 + 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Sie schneiden sich nicht orthogonal.

6.5 Normalen- und Koordinatengleichung einer Ebene

Der Punkt P ist ein beliebiger Punkt in der Ebene E.
Der Vektor $\vec{n}$ steht orthogonal auf der Ebene E und wird **Normalvektor** der Ebene E genannt.



Die Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{x} - \vec{p}$ sind orthogonal, daher gilt $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$.
Auch umgekehrt gilt, dass ein Punkt X, der die Gleichung $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ erfüllt, in der Ebene E liegt.

Normalengleichung einer Ebene

Eine Ebene E mit dem Stützvektor $\vec{p}$ und dem Normalvektor $\vec{n}$ wird beschreiben durch die Gleichung:

$$E: \ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Alle Punkte X, die diese Gleichung erfüllen, liegen in E.

Beispiel

Gib die Normalengleichung der Ebene mit dem Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, die auf $P(1, 2, 3)$ liegt.

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Durch Ausmultiplizieren der Normalengleichung erhält man eine weitere Gleichung, um die Ebene zu beschreiben.

$$\begin{aligned}
\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0 \\
\vec{x} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0 \\
4x_1 + x_2 - 2x_3 - (4 + 2 - 6) &= 0 \\
4x_1 + 1x_2 - 2x_3 &= 0
\end{aligned}$$

Koordinatengleichung einer Ebene

Jede Ebene E lässt sich durch eine **Koordinatengleichung** der Form

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

beschreiben. Mindestens einer der Koeffizienten muss ungleich 0 sein.

Der Normalvektor $\vec{n}$ einer Ebene E mit der Koordinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Beispiel

Begründe, dass die Ebenen E_1 und E_2 parallel sind.

$$E_1 : \; 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$$

$$E_2 : \; 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$$

E_1 und E_2 haben den gleichen Normalvektor.
$\Rightarrow E_1 \parallel E_2$

Die Koordinatenebenen lassen sich mit folgenden Koordinatengleichungen beschreiben:

- x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$
- x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$
- x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$

6.6 Ebenengleichungen umformen – das Kreuzprodukt

$$E : \; \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}$$

Um die Ebene E mit einer Normalen- oder Koordinatengleichung zu beschreiben,
braucht man $\vec{n}$ mit $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix} = 0$.

Kreuzprodukt

Unter dem Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$ versteht man den Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ("kreuz") mit:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$, falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ keine Vielfachen sind. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vielfache voneinader sind.

Rechenverfahren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} \end{array} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gib die Koordinatengleichung der Ebene E mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ an.

$$\vec{n}: \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ -2-6 \\ 10+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$E: \; -x_1 - 4x_2 + 6x_3 = d$$

$$\text{mit } P(1,3,2): \quad -1 - 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = d = -1$$

$$\Rightarrow E: \; -x_1 - 4x_2 + 6x_3 = -1$$

$$E: \; 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 8$$

Um die Ebene E mit einer Parametergleichung zu beschreiben, gibt es zwei Vorgehensweisen:

1. 3 Punkte finden, die die Gleichung erfüllen, also in der Ebene liegen, die nicht auf einer Geraden liegen.

Wir wählen

$$P_1(0,0,-8); \; P_2(4,0,0); \; P_3(5,0,2)$$

$$E: \; \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + r \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + s \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}5\\0\\10\end{pmatrix}$ sind Vielfache von $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$. Wir wählen einen weiteren Punkt $P_4(1,-2,0)$ statt P_3.

$$\Rightarrow E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-8\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\8\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$$

2. Auflösen nach einer Variable und die anderen den Parametern r und s gleichsetzen. Dann die Vektoren so wählen, dass die Zeilen mit den Gleichungen übereinstimmen.

$$E:\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 8$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 2x_1 - 3x_2 - 8 \\ &= 2r - 3s - 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E:\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-8\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

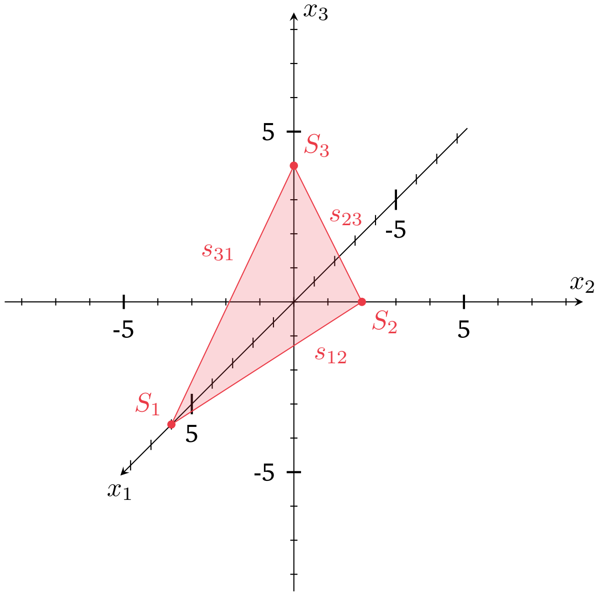
6.7 Ebenen veranschaulichen

$$E:\ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 12$$

Die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen heißen **Spurpunkte**.

$S_1(6,0,0);\ S_2(0,2,0);\ S_3(0,0,4)$

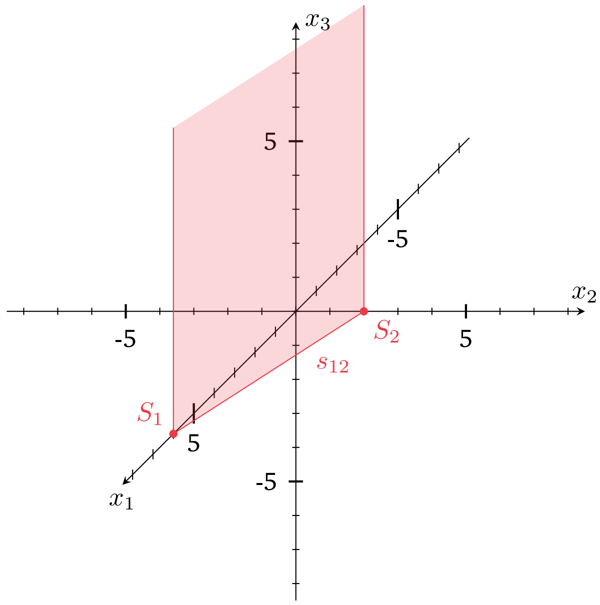
Die gemeinsamen Punkte der Ebene mit den Koordinatenebenen heißen **Spurgeraden**.



$$E: \ 2x_1 + 6x_2 = 12$$

$$S_1(6,0,0); \ S_2(0,2,0)$$

E ist parallel zur x_3-Achse

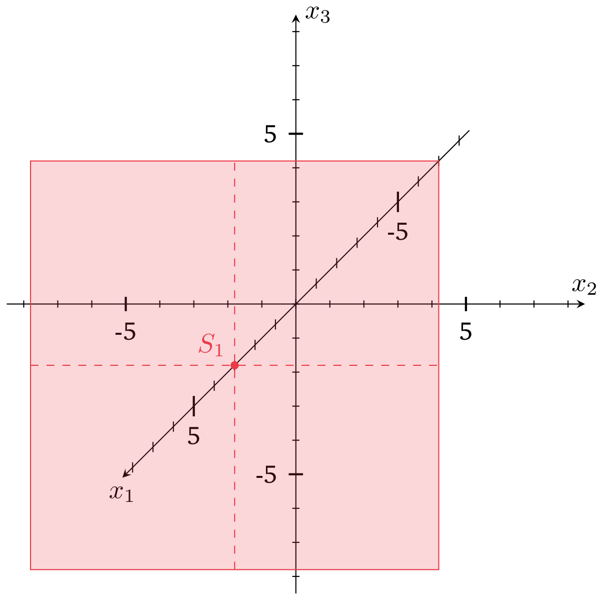


$$E: \ 4x_1 = 12$$

$$E: \ x_1 = 3$$

$$S_1(3,0,0)$$

E ist parallel zur x_2x_3-Ebene.



Um eine Ebenengleichung anhand der Spurpunkte zu bestimmen, gilt mit allgemeinen Spurpunkten

$$S_1(a,0,0); \ S_2(0,b,0); \ S_3(0,0,c)$$

für die Ebene:

$$E: \ \frac{1}{a}x_1 + \frac{1}{b}x_2 + \frac{1}{c}x_3 = 1$$

Durch multiplizieren mit dem gemeinsamen Vielfachen abc erhält man eine ganzzahlige Ebenengleichung.

6.8 Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden

Unterscheide

Nur die gegenseitige Lage ist gefragt	Schnittpunkt ist gefragt
$\rightarrow \vec{n}; \vec{u}_g$ untersuchen	$\rightarrow g \cap E$

Beispiel

Bestimme die Lage der Geraden g, h und i zu $E: \; 2x_1+5x_2-x_3 = 49$ und berechne ggf. den Schnittpunkt.

$a) \quad g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow g \text{ und } E \text{ schneiden sich}$$

$$g: \; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2(3+2t) + 5(4+t) - (7-t) &= 49 \\ 6 + 4t + 20 + 5t - 7 + t &= 49 \\ 10t &= 30 \\ t &= 3 \end{aligned}$$

$$\text{in } g: \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S(9,7,4)$$

$b) \quad h: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow g \text{ und } E \text{ liegen parallel oder } g \text{ liegt in } E$$

$$P(3,8,-3) \text{ in } E: \qquad 2 \cdot 3 + 5 \cdot 8 - (-3) = 49$$

$$\Rightarrow g \text{ liegt in } E$$

$c)\quad i:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \to g \text{ und } E \text{ liegen parallel oder } g \text{ liegt in } E$$

$$P(3,4,7) \text{ in } E: \qquad 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 7 \neq 49$$

$$\Rightarrow i \text{ liegt parallel zu } E$$

6.9 Gegenseitige Lage von Ebenen

Es gibt drei mögliche gegenseitige Lagen zweier Ebenen:

- parallel und verschieden (echt parallel)
- identisch
- sie schneiden sich in einer Geraden

Fallunterscheidung

Gegeben sind die Ebenen E und F mit:

$$E:\ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_E = 0 \qquad F:\ (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_F = 0$$

Sind die Normalvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$ Vielfache?

- **ja**: E und F sind parallel oder identisch
  - P liegt in F bzw. Q liegt in E: identisch
  - P liegt nicht in F bzw. Q liegt nicht in E: echt parallel
- **nein**: E und F schneiden sich in einer Geraden
  - $\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F = 0$: E und F schneiden sich orthogonal
  - $\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F \neq 0$: E und F schneiden sich

Beispiel

Bestimme die Schnittgerade der beiden Ebenen.

$a)\quad E_1:\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 12;\ E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2: \quad 8 - 4r + 5s - r + 3(2 + r - s) &= 12 \\ -2r + 2s &= -2 \\ 2s &= -2 + 2r \\ s &= r - 1 \end{aligned}$$

$$s = r - 1 \text{ in } E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (r-1) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$b)$ $\quad F_1: \ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1; \ F_2: \ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$

$$F_1 \cap F_2: \quad 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \tag{1}$$

$$5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \tag{2}$$

$$\text{(1)} + 2 \cdot \text{(2)}: \quad 13x_1 - 5x_3 = 13 \qquad | \ x_3 = t$$

$$13x_1 - 5t = 13 \qquad | \ + 5t; \ \cdot \frac{1}{13}$$

$$x_1 = 1 + \frac{5}{13}t$$

$$x_1 = 1 + \frac{5}{13}t \text{ in (2)}: \quad 5\left(1 + \frac{5}{13}t\right) + 2x_2 - 3t = 6$$

$$\frac{25}{13}t + 2x_2 - 3t = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{7}{13}t$$

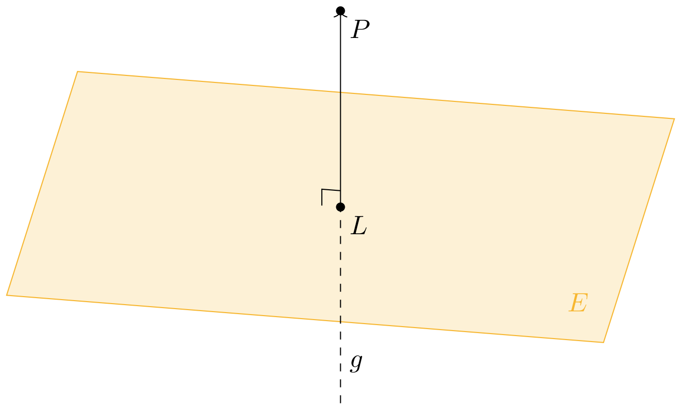
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5/13 \\ 7/13 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad | \ \vec{n} \cdot 13$$

$$\Rightarrow h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$$

7 Abstände und Winkel

7.1 Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Unter dem Abstand eines Punktes P von einer Ebene E versteht man immer die Länge der kürztmöglichsten Verbindung des Punktes und der Ebene.
Diesen erhält man, indem man von P aus das Lot auf die Ebene E fällt und den Abstand des Punktes P vom Lotfußpunkt L bestimmt.



Hierzu stellt man eine Hilfsgerade g auf, die orthogonal zur Ebene E ist und durch den Punkt P verläuft. Als Richtungsvektor von g wählt man daher den Normalenvektor der Ebene E und als Stützvektor den Ortsvektor des Punktes P. Dem Lotfußpunkt erhält man als Schnittpunkt der Hilfsgerade g mit der Ebene E.

Hessesche Normalform

Wenn man als Normalenvektor einer Ebene E einen Einheitsvektor ($|\vec{n}_0| = 1$) nimmt, heißt die Ebenengleichung $E:\ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$ **Hessesche Normalform (HNF)**.
Hiermit lässt sich der Abstand d eines Punktes R von der Ebene E einfach in einem Schritt berechnen.
Es gilt:

$$d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$$

Beispiel

$a)$ Bestimme den Abstand des Punktes $R(9,4,-3)$ von der Ebene E mit $E:\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 0.$

$$\left|\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$$

$$E \text{ in HNF}: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} d(R,E) &= \left|\left[\begin{pmatrix}9\\4\\-3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix}8\\7\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\right| = \left|(8+14-8)\cdot\frac{1}{3}\right| = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

$b)$ Bestimme den Abstand des Punktes $Q(1,6,2)$ von der Ebene F mit $F:\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1$.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$F \text{ in HNF}: \quad \frac{x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 1}{\sqrt{21}} = 0$$

$$\begin{aligned} d(Q,F) &= \left|\frac{1 - 2\cdot 6 + 4\cdot 2 - 1}{\sqrt{21}}\right| \\ &= \left|\frac{-4}{\sqrt{21}}\right| = \frac{4}{\sqrt{21}} \end{aligned}$$

$b)$ Bestimme die zur Ebene E mit $E:\ 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 5$ parallele Ebenen F_1 und F_2, die von E den Abstand 3 LE haben.

$$F:\ 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = k;\ R(r_1, r_2, r_3) \in F$$

$$\begin{aligned} E \text{ in HNF}: \quad \frac{12x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 5}{14} &= 0 \\ d(R,E) &= 3 \\ \left|\frac{12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5}{14}\right| &= 3 \end{aligned}$$

Fall 1 :

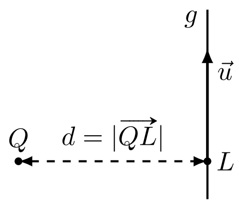
$$\begin{aligned} \frac{12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5}{14} &= 3 \\ 12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5 &= 42 \\ 12r_1 + 6r_2 - 4r_3 &= 47 \\ \Rightarrow F_1:\ 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 47 \end{aligned}$$

Fall 2 :

$$\begin{aligned} \frac{12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5}{14} &= -3 \\ 12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5 &= -42 \\ 12r_1 + 6r_2 - 4r_3 &= -37 \\ \Rightarrow F_2:\ 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= -37 \end{aligned}$$

7.2 Abstand eines Punktes zu einer Gerade

Der Verbindungsvektor zwischen dem Punkt Q und einem allgemeinen Geradenpunkt P muss senkrecht zum Richtungsvektor $\vec{u}$ der Gerade g sein.
Dazu setzt man das Skalarprodukt $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u} = 0$. Man erhält den Parameter, für den dies der Fall ist. Setzt man diesen in den allgemeinen Geradenpunkt P ein, erhält man den Lotfußpunkt L.
Der Abständ dann beträgt dann $d = |\overrightarrow{QL}|$.



Beispiel

Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt $Q(6, -6, 9)$ und der Gerade g mit $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4-2r \\ 5+r \\ 6+r \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 4-2r \\ 5+r \\ 6+r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2r-2 \\ r+11 \\ r-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \begin{pmatrix} -2r-2 \\ r+11 \\ r-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ (-2)(-2r-2) + (r+11) + (r-3) &= 0 \\ r &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OL} &= \begin{pmatrix} 4-2\cdot(-2) \\ 5+(-2) \\ 6+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow L(8,3,4) \\ \overrightarrow{QL} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} \\ |\overrightarrow{QL}| &= \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 9^2 + (-5)^2} = \sqrt{110} \end{aligned}$$

7.3 Abstand zweier Geraden

Der Abstand zwischen zwei Geraden g und h lassen sich wiefolt bestimmen:

1. Schneiden sich g und h beträgt der Abstand $d = 0$.
2. Verlaufen g und h parallel zueinander, wählt man einen beliebigen Punkt R auf der Geraden g und bestimmt den Abstand von R zu h. (s. *7.2 Abstand eines Punktes zu einer Gerade*)
3. Sind g und h windschief, gibt es zwei Möglichkeit, je nach dem ob nur der Abstand oder auch die Lotfußpunkte gefragt sind.

1. Möglichkeit (Lotfußpunkte):
Man stellt die allgemeinen Geradenpunkte P_g und P_h der Geraden g und h auf.
Der allgemeine Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_gP_h}$ zwischen den Geraden g und h muss sowohl zum Richtungsvektor $\vec{u}_g$ der Gerade g als auch zum Richtungsvektor $\vec{u}_h$ der Gerade h orthogonal sein:

$$\overrightarrow{P_gP_h} \cdot \vec{u}_g = 0 \tag{1}$$
$$\overrightarrow{P_gP_h} \cdot \vec{u}_h = 0 \tag{2}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystem führt die beiden Parameter der Geradengleichungen, die zu den Lotfußpunkten L_g und L_h führen.
Der Abstand beträgt beträgt dann $d = |\overrightarrow{L_gL_h}|$.

2. Möglichkeit (nur Abstand):
Zur Berechnung des Abstands zwischen den Geraden g und h dient die Formel

$$d(g,h) = |(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$$

Dabei wählt man $P \in g$; $Q \in h$, und $\vec{n}_0$ ist der Einheitsvektor (vgl. *7.1 Hessesche Normalform*) von $\vec{n}$ mit:

$$\vec{n} = \vec{u}_g \times \vec{u}_h$$

Beispiel

Bestimme den Abstand der Geraden g und h mit $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$; $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Möglichkeit:

$$\overrightarrow{OP_g} = \begin{pmatrix}1\\4+s\\2+2s\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OP_h} = \begin{pmatrix}2+4t\\-t\\1-t\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{P_gP_h} = \begin{pmatrix}2+4t\\-t\\1-t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4+s\\2+2s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+4t\\-4-t-s\\-1-t-2s\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1+4t\\-4-t-s\\-1-t-2s\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$
$$\begin{pmatrix}1+4t\\-4-t-s\\-1-t-2s\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow -3t - 5s = 6 \tag{1}$$
$$\Leftrightarrow 18t + 3s = -9 \tag{2}$$

$$\Rightarrow s = -1;\ t = -\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{OL_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 + (-1) \\ 2 + 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OL_h} = \begin{pmatrix} 2 + 4\,(-1/3) \\ -\,(-1/3) \\ 1 - (-1/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

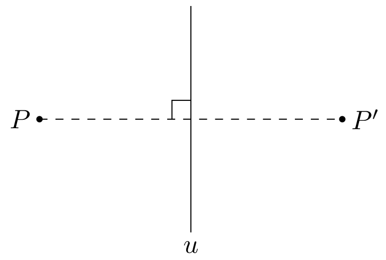
$$\Rightarrow d = |\overrightarrow{L_g L_h}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = 3$$

2. Möglichkeit:

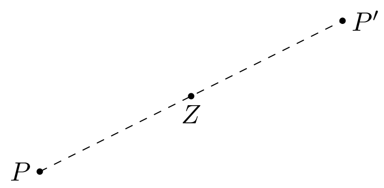
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}; |\vec{n}| = 9$$

$$\begin{aligned} d(g,h) &= \left| \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \right| \\ &= \left| 27 \cdot \frac{1}{9} \right| = 3 \end{aligned}$$

7.4 Spiegelung und Symmetrie

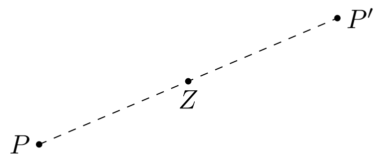


Achsenspiegelung



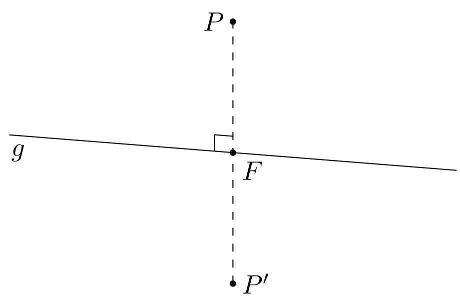
Punktspiegelung

Spiegelung und Symmetrie im $\mathbb{R}^3$:



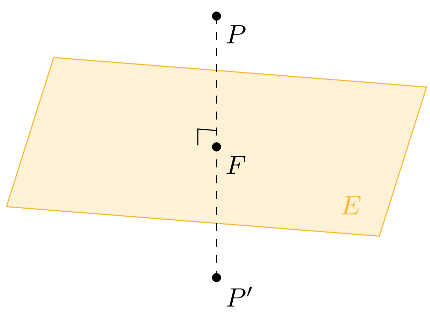
Punktspiegelung

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PZ}$$
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{PZ}$$



Spiegelung an Gerade

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$$
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}$$



Spiegelung an Ebene

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$$
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}$$

Beispiel

Spiegle den Punkt $P(3,3,0)$
$a)$ am Punkt $Z(1,-2,5)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{PZ}\\ &= \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-5\\5\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1\\-7\\10\end{pmatrix}\\ &\Rightarrow P'(-1,-7,10)\end{aligned}$$

$b)$ an der Gerade g mit $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\9\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix}-2+t\\-4-2t\\9+2t\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG}\cdot\vec{u} &= 0\\ \begin{pmatrix}-5+t\\-7-2t\\9+2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} &= 0\\ 27+9t &= 0\\ t &= -3\\ \Rightarrow \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}-2+(-3)\\-4-2(-3)\\9+2(-3)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{PL}\\ &= \begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\1\\6\end{pmatrix}\\ &\Rightarrow P'(-13,1,6)\end{aligned}$$

$c)$ an der Ebene E mit $E: 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$

$$l:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}l\cap E: \qquad 3(3+3r)+2(3+2r)+r &= 8\\ 14r+15 &= 8\\ r &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.5\\2\\-0.5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{PF}\\ &= \begin{pmatrix}1.5\\2\\-0.5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1.5\\-1\\-0.5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P'(0,1,-1)$$

7.5 Modellieren von geradlinigen Bewegung

U-Boote, Flugzeuge, etc. bewegen sich oft näherungsweise geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit. Ihre Bahngleichungen können somit durch Geradengleichungen beschreiben werden.

$$\vec{x} = \vec{p} + t\cdot\vec{v}$$

Dabei steht

- der Parameter t für die vergangene Zeit nach (Beobachtungs-)Beginn der Bewegung,
- der Stützvektor $\vec{p}$ für die Koordinaten des Startpunktes der Bewegung,
- der Richtungsvektor $\vec{v}$ für die Änderung der Koordinaten des Objekts innerhalb einer Zeiteinheit,
- die Länge des Richtungsvektors $|\vec{v}|$ für Geschwindigkeit des Objekts.

Beispiel

Ein Modellflugzeug befindet sich zu Beginn der Beobachtung im Punkt $A(100, 100, 100)$. Nach 3 Stunden befindet es sich im Punkt $B(10, 250, 85)$ (Längenangaben in km).

$a)$ Gebe die Bahngleichungen an.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-90\\150\\-15\end{pmatrix} \text{ in } 3\,\mathrm{h}$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-90\\150\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30\\50\\-5\end{pmatrix}$$

$$\text{Bahngleichung: } \vec{x} = \begin{pmatrix}100\\100\\100\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-30\\50\\-5\end{pmatrix} \quad (t \text{ in } \mathrm{h},\ x \text{ in } \mathrm{km})$$

$b)$ Bestimme, ob das Flugzeug steigt oder sinkt und mit welcher Geschwindigkeit es fliegt.

x_3-Komponente von $\vec{v}$ ist negativ (-5), also sinkt das Flugzeug.

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{(-30)^2 + 50^2 + (-5)^2} \approx 58.52\\ &\Rightarrow 58.52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\end{aligned}$$

$c)$ Wo befindet sich das Flugzeug $1.2\,\mathrm{h}$ nach Beobachtungsbeginn?

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}100\\100\\100\end{pmatrix} + 1.2\cdot\begin{pmatrix}-30\\50\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}64\\160\\94\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Im Punkt } P(64, 160, 94)$$

Die Bahngleichungen der Flugzeuge 1 und 2 lauten:

$$F_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix};\ F_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-30\\-15\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}12\\9\\0\end{pmatrix}\quad (t \text{ in min}, x \text{ in km})$$

$a)$ Bestimme, ob es zu einem Zusammenstoß der beiden Flugzeuge kommt.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-30\\-15\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}12\\9\\0\end{pmatrix}$$

$$t\cdot\begin{pmatrix}-8\\-5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-30\\-15\\8\end{pmatrix}$$

$t=3.75$ aus Zeile 1; $t=3$ aus Zeile 2
$\Rightarrow$ keine Lösung
$\Rightarrow$ Es kommt zu keinem Zusammenstoß

$b)$ Bestimme, ob sich die beiden Flugbahnen schneiden.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-30\\-15\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}12\\9\\0\end{pmatrix}$$

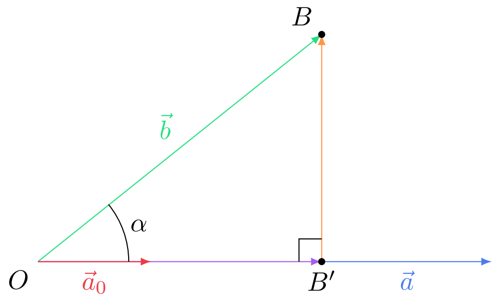
$$4s-12t=-30 \quad (1)$$
$$4s-9t=-15 \quad (2)$$
$$s=8 \quad (3)$$

$$s=8 \text{ in } (1): \qquad 32-12t=-30$$
$$t=\frac{31}{6}$$
$$s=8 \text{ in } (2): \qquad 32-9t=-15$$
$$t=\frac{47}{9}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung
$\Rightarrow$ Die Flugbahnen schneiden sich nicht

7.6 Winkel zwischen Vektoren

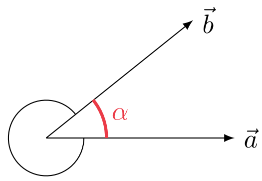
$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B'B}\right) \\
&= \vec{a} \cdot \overrightarrow{OB} + \underbrace{\vec{a} \cdot \overrightarrow{B'B}}_{\substack{=\,0,\text{ da} \\ \vec{a} \perp \overrightarrow{B'B}}} \\
&= \underbrace{|\vec{a}| \cdot \vec{a}_0}_{\vec{a}} \cdot \underbrace{|\overrightarrow{OB'}| \cdot \vec{a}_0}_{\overrightarrow{OB'}} \\
&= |\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{OB'}| \cdot \underbrace{\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0}_{=|\vec{a}_0|^2=1}
\end{aligned}
$$



$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{OB'}| \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{|\overrightarrow{OB'}|}{|\vec{b}|} \\
\Leftrightarrow |\overrightarrow{OB'}| &= |\vec{b}| \cdot \cos\alpha
\end{aligned}
$$

mit (1) : $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} = v\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos\alpha$



$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Satz

Unter dem Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den **kleineren** der beiden Winkel, der entsteht, wenn man die Pfeile der Vektoren **zu einem gemeinsamen Anfangspunkt** zeichnet.

Für den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Beispiel

a) Bestimme den Winkel α des Dreiecks ABC mit $A(1, -1, -5);\ B(3, 2, -4);\ C(5, -1, -2)$.

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{14} \cdot 5} = \frac{11}{5\sqrt{14}} \\
\alpha &= \arccos\left(\frac{11}{5\sqrt{14}}\right) \approx 54^\circ
\end{aligned}
$$

$b)$ Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimme b so, dass der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $60°$ beträgt.

$$
\begin{aligned}
\cos 60° &= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+b^2}} \\
\frac{1}{2} &= \frac{b}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+b^2}} 2b \qquad = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+b^2} \qquad \mid ()^2 \\
4b^2 &= 2\left(1+b^2\right) \\
4b^2 &= 2+2b^2 \\
b &= \pm 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Probe :} \quad & b = 1 : \quad && \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+1^2}} = \frac{1}{2} \\
& b = -1 : \quad && \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+(-1)^2}} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow b = 1$$

7.7 Schnittwinkel

Satz

Für den Schnittwinkel α zwischen

- zwei Geraden g und h mit Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- zwei Ebenen E_1 und E_2 mit Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ gilt: $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$
- der Geraden g der Ebene E_1 gilt: $\sin\alpha = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}_1|}$

Anmerkung

Unter dem Winkel zweier benachbarter Flächen in geometrischen Körpern im Inneren dieses Körpers. Dieser kann auch größer als $90°$ sein (Nebenwinkel des Schnittwinkels).

Beispiel

$a)$ Berechne den Schnittwinkel zwischen den Geraden g und h mit

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \ h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{|-2|}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{26}}\right) = 85°$$

$b)$ Berechne den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E mit

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \ E: \ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6.$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}_1|}\right) = \arcsin\left(\frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{|6|}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{6}}\right) = 33.21°$$