Partielle Integration

Definition

Um das Produkt zweier Funktionen u und v' zu integrieren, kann man dazu partielle Integration verwenden.

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx \tag{1}$$

Dabei müssen u und v' so gewählt werden, dass das Integral von $u'v$ einfacher zu lösen ist.

Mit Integrationsgrenzen lautet die Formel:

$$\int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$$

Beispiel

$$\int x\cos(x)\,dx$$

Wählt man $u(x) = x$ und $v'(x) = \cos(x)$, so erhält man für u' und v:

$$u'(x) = 1 \qquad\qquad v(x) = \sin(x)$$

Mit der Formel (1) folgt:

$$\begin{aligned}\int x\cos(x)\,dx &= x\sin(x) - \int \sin(x)\cdot 1\,dx \\ &= x\sin(x) + \cos(x) + c\end{aligned}$$

Wiederholte partielle Integration

Für Integrale wie $\int x^2 e^x\,dx$ erhält man nach Anwendung der Formel $x^2e^x - \int 2xe^x\,dx$.
Um das entstandene Integral $\int 2xe^x\,dx$ zu lösen, muss man partielle Integration erneut anwenden.

Phoenix-Integration

Bei Integralen wie $\int \sin(x)\cos(x)\,dx$ erhält man nach Anwenden der Formel wieder dasselbe Integral. Dieses kann dann mittels einer Äquivalenzumformung auf die andere Seite gebracht werden:

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(x)\,dx &= \sin^2(x) - \int \sin(x)\cos(x)\,dx && \Big|\; + \int \sin(x)\cos(x)\,dx \\ 2\int \sin(x)\cos(x)\,dx &= \sin^2(x) && \Big|\; :2 \\ \int \sin(x)\cos(x)\,dx &= \frac{\sin^2(x)}{2} + c\end{aligned}$$

Es kann auch vorkommen, dass partielle Integration zweimal durchgeführt werden muss, bevor man zum ursprünglichen Integral zurückkommt. Ebenso so ist zu beachten, dass ein konstanter Faktor vor das Integral gezogen werden kann: $\int c\cdot f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

DI-Methode

Um partielle Integration etwas übersichtlicher und unkomplizierter zu gestalten, insbesondere bei wiederholter Anwendung, können wir die DI-Methode verwenden.

$$\begin{array}{ccc} & D & I \\ + & u & v' \\ - & u' & v \\ + & \vdots & \vdots \end{array}$$

Bei der DI-Methode erstellt man eine Tabelle mit zwei Spalten; eine *D*-Spalte, in der man die zu differenzierende Funktion wählt, und eine *I*-Spalte, in der man die zu integrierende Funktion wählt. Links daneben schreibt man abwechselnde $+$ und $-$ Zeichen.
Jetzt differenziert man die Funktion in der *D*-Spalte und integriert Funktion in der *I*-Spalte. Man hört auf, wenn einer der folgenden 3 Haltepunkte aufkommt:

1. Eine 0 in der *D*-Spalte
Erreicht man eine 0 in der *D*-Spalte, hört man auf. Das Ergebnis erhält man nun durch das multiplizieren der Diagonalen vom Eintrag in der *D*-Spalte (mit Vorzeichen) zum darunterliegenden Eintrag in der *I*-Spalte für jede Zeile.

$$\begin{aligned} &\int x^2 \sin(3x)\,dx \\ &= -\frac{1}{3}x^2\cos(3x) + \frac{2}{9}x\sin(3x) + \frac{2}{27}\cos(3x) + c \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} & D & I \\ + & x^2 & \sin(3x) \\ - & 2x & -\frac{1}{3}\cos(3x) \\ + & 2 & -\frac{1}{9}\sin(3x) \\ - & 0 & \frac{1}{27}\sin(3x) \end{array}$$

2. Man kann das Produkt einer Zeile integrieren
Kann man das Produkt einer Zeile integrieren, hört man auf. Für das Ergebnis multipliziert man die Diagonalen wie beim ersten Haltepunkte und addiert bzw. subtrahiert dann (je nach Vorzeichen) das Integral des Produkts der letzten Zeile.

$$\begin{aligned} &\int x^4 \ln(x)\,dx \\ &= \frac{1}{5}x^5\ln(x) - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{5}x^5\,dx \\ &= \frac{1}{5}x^5\ln(x) - \int \frac{1}{5}x^4\,dx \\ &= \frac{1}{5}x^5\ln(x) - \frac{1}{25}x^5 + c \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} & D & I \\ + & \ln(x) & x^4 \\ - & \frac{1}{x} & \frac{1}{5}x^5 \end{array}$$

3. Eine Zeile wiederholt sich
Wiederholt sich eine Zeile (abgesehen von Konstanten), hört man auf. Man verfährt nun so wie beim 2. Haltepunkt. Dieser Fall entspricht dann der Phoenix-Integration und ist dementsprechend zu lösen.

$$\begin{aligned} \int e^x\sin(x)\,dx &= -e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x\sin(x)\,dx \\ 2\int e^x\sin(x)\,dx &= -e^x\cos(x) + e^x\sin(x) \\ \int e^x\sin(x)\,dx &= -\frac{1}{2}e^x\cos(x) + \frac{1}{2}e^x\sin(x) + c \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} & D & I \\ + & e^x & \sin(x) \\ - & e^x & -\cos(x) \\ + & e^x & -\sin(x) \end{array}$$