1 Differenzialrechnung

1.1 Wiederholung Klasse 10

Definition: Funktion

Eine eindeutige Zuordnung, die jedem x-Wert (aus dem Definitionsbereich) einen y-Wert zuordnet, nennt man **Funktion**.

Definition: Graph

Die Menge aller Punkte, die einer gemeinsamen Zuordnungsvorschrift folgen (z.B. $y = x^2$), bilden einen **Graphen**.

Definition: Differenzenquotient

Gegeben sind zwei Punkte $P\left(x_0 \mid f\left(x_0\right)\right)$ und $Q\left(x_0 + h \mid f\left(x_0 + h\right)\right)$.

Der Quotient $\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$ heißt Differenzenquotient und beschreibt im Sachzusammenhang die **mittlere Änderungsrate** in einem Intervall.

Anschaulich entspricht der Differenzenquotient der **Steigung der Sekante** durch die beiden Punkte P und Q.

Definition: Ableitung

Existiert der Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$, so nennt man diesen Wert die **Ableitung von f an der Stelle $\mathbf{x_0}$**.

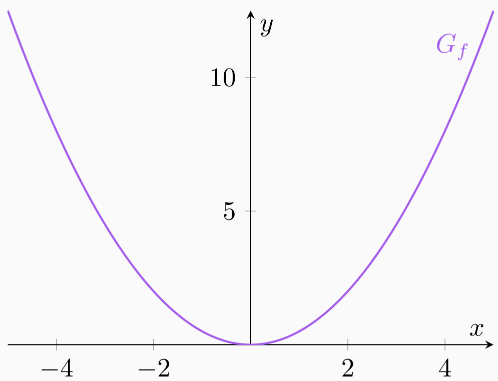
$$f'\left(x_0\right) = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

Die Ableitung beschreibt im Sachzusammenhang die **momentane Änderungsrate** und entspricht anschaulich der **Steigung der Tangente am Graphen von f an der Stelle $\mathbf{x_0}$**.

Existiert der Grenzwert $\forall x$ aus dem Intevall, so nennt man f differenzierbar.

Beispiel

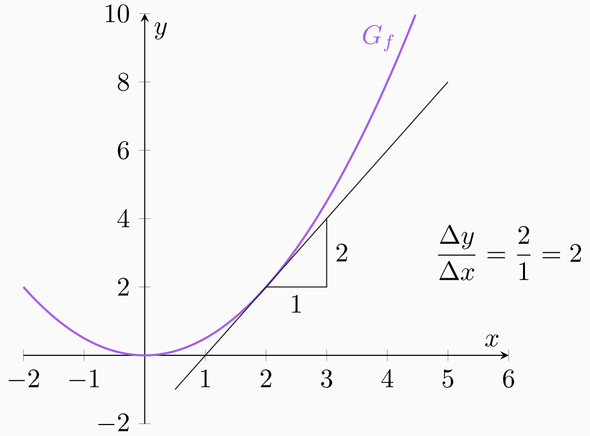
$a)$ Zeiche den Graph von f in mit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ in eine geeignetes Koordinatensystem.



b) Bestimme die mittlere Änderungsrate von f in $[0;3]$.

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{4.5-0.5}{2} = 2$$

c) Bestimme die momentane Änderungsrate an der Stelle $x_0 = 2$ zeichnerisch.



1.2 Verkettete Funktionen

Gegeben seien zwei Funktionen g und h.
Die Funktion $f = g \circ h$ ("g nach h") ist die **verkettete Funktion** mit $(g \circ h)(x) = g\left(h(x)\right)$

Dabei wird der Funktionsterm von $h(x)$ für die Variable in $g(x)$ eingesetzt.

Beispiel

a) $g(x) = 3x + 1;\ h(x) = 2x^2$. Bestimme $(g \circ h)(x)$ und $(h \circ g)(x)$.

$$(g \circ h)(x) = 6x^2 + 1$$
$$(h \circ g)(x) = 2(3x+1)^2 = 18x^2 + 12x + 2$$

b) Bestimme je 2 Funktionen für g und h, für die gilt $g \circ h = f$ mit $f(x) = \dfrac{2}{(x^2-1)^3}$

1. $$g(x) = \frac{2}{x^3}$$
   $$h(x) = x^2 - 1$$

2. $$g(x) = \frac{2}{x}$$
   $$h(x) = \left(x^2 - 1\right)^3$$

1.3 Die Kettenregel

Gegeben sind zwei differenzierbare Funktionen u und v. Gesucht ist die Ableitungsfunktion f' mit $f = u \circ v$. Es gilt:

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Beweis

$$\begin{aligned}
f'(x_1) &= \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} && \mid \text{Differenzenquotient} \\
&= \lim_{x_2 \to x_1} \frac{u(v(x_2)) - u(v(x_1))}{x_2 - x_1} && \mid \text{Einsetzen} \\
&= \lim_{x_2 \to x_1} \frac{u(v(x_2)) - u(v(x_1))}{v(x_2) - v(x_1)} \cdot \frac{v(x_2) - v(x_1)}{x_2 - x_1} && \mid \text{Multiplikation einer 1} \\
&= \lim_{x_2 \to x_1} \frac{u(v(x_2)) - u(v(x_1))}{v(x_2) - v(x_1)} \cdot \lim_{x_2 \to x_1} \frac{v(x_2) - v(x_1)}{x_2 - x_1} && \mid \text{Grenzwerte separat berechnen} \\
&\quad \text{da } v \text{ stetig ist } \Rightarrow \lim_{x_2 \to x_1} v(x_2) = v(x_1) \\
&= u'(v(x_1)) \cdot v'(x_1)
\end{aligned}$$

□

Bezeichnet man $u(x)$ und $v(x)$ als äußere bzw. innere Funktion, dann lautet die Kettenregel salopp: "Äußere Ableitung mal innere Ableitung"

Beispiel

Leite ab!

$a)$ $f(x) = (2x-1)^5$

$$f'(x) = 10(2x-1)^4$$

$b)$ $g(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{2}x^2 - 2x}$

$$g'(x) = -\frac{x-2}{\left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)^2}$$

$c)$ $h(x) = 2\cos\left(\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{2}x\right)$

$$h'(x) = -\left(\frac{4}{3}x + 1\right)\sin\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x\right)$$

1.4 Die Produktregel

Gegeben sind die Funktionen f und g (differenzierbar). Für $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ gilt für Ableitungsfunktion

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Salopp: "abgeleitet hingeschrieben plus hingeschrieben abgeleitet"

Beispiel

Leite ab!
$a)$ $\quad f(x) = x^2 \cdot \cos x$

$$f'(x) = -x^2 \sin(x) + 2x \cos(x)$$

$b)$ $\quad g(x) = \sqrt{x} \cdot (3x-5)^4$

$$g'(x) = \frac{(3x-5)^4}{2\sqrt{x}} + 12\sqrt{x}\,(3x-5)^3$$

1.5 Monotonie und Krümmungsverhalten

Definition

Eine Funktion f sei definiert auf einem Intervall I.

f heißt **streng monoton wachsend** wenn:

$$\forall x_1; x_2 \in I: \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

f heißt **streng monoton fallend** wenn:

$$\forall x_1; x_2 \in I: \; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Monotoniesatz

Die Funktion f sei differenzierbar.

Wenn $f'(x) > 0 \; \forall \; x \in I$ dann ist f in I streng monoton wachsend.
Entsprechend gilt für $f'(x) < 0$, dass f streng monoton fallend ist.

Anmerkung: Die Umkehrung des Satzes gilt im Allgemeinen nicht. (siehe $f(x) = x^2$)

Definition: Links-/Rechtskurve

Sei f eine auf dem Intevall I zweimal differenzierbare Funktion.

- $f''(x) > 0$ in $I \rightarrow$ Linkskurve, f' ist streng monoton wachsend
- $f''(x) < 0$ in $I \rightarrow$ Rechtskurve, f' ist streng monoton fallend

Beispiel

$f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 18x$. Untersuche f auf ihr Krümmungsverhalten.

$$f'(x) = -6x^2 - 12x + 18; \; f''(x) = -12x - 12$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= -1 \\ f''(0) = -12 < 0 &\Rightarrow \text{Rechtskurve} \\ f''(-2) = 12 > 0 &\Rightarrow \text{Linkskurve} \end{aligned}$$

In $(-\infty; -1]$ beschreibt f eine Linkskurve.
In $[-1; \infty)$ beschreibt f eine Rechtskurve.

1.6 Extremstellen

Geben ist eine zweimal differenzierbare Funktion f. Die **notwendige Bedingung** für Extremstellen in f lautet:

$$f'(x) = 0$$

Notwendigkeit

Notwendigkeit bedeutet:
Liegt in f eine Extremstelle vor, so ist $f'(x) = 0$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen **nicht**.

$$\begin{aligned} \text{Extremstelle} &\Rightarrow f'(x) = 0 \\ f'(x) = 0 &\not\Rightarrow \text{Extremstelle} \end{aligned}$$

Gilt zusätzlich, dass f' an der Extremstelle einen **Vorzeichenwechsel (VZW)** aufweist, so weiß man beim Übergang

- von $+$ nach $-$ liegt eine **Maximumstelle** vor.
- von $-$ nach $+$ liegt eine **Minimumstelle** vor.

Gilt

$$f'(x_e) = 0 \qquad \text{und} \qquad f''(x_e) \neq 0$$

so liegt in f am der Stelle x_e eine Extremstelle vor.

$$\begin{aligned} f''(x_e) < 0 &\Rightarrow \text{Maximumstelle} \\ f''(x_e) > 0 &\Rightarrow \text{Minimumstelle} \end{aligned}$$

Beispiel

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$. Untersuche f auf Extremstellen.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9;\ f''(x) = 6x + 6$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 + 6x - 9 &= && \mid \cdot \frac{1}{3} \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 && \mid \text{Satz von Vieta} \\ (x-3)(x+1) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 3;\ x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(3) &= 12 > 0 \rightarrow \text{Minimumstelle} \\ f''(-1) &= -12 < 0 \rightarrow \text{Maximumstelle} \end{aligned}$$

1.7 Wendestellen

Sei f eine mindestens 3-mal differenzierbare Funktion. Ist x_w eine Wendestelle von f, so gilt

$$f''(x_w) = 0 \qquad \text{(notwendige Bedingung)}$$

$$\text{sowie} \qquad f'''(x_w) \neq 0$$

Ebenfalls gilt, dass f'' um x_w einen VZW besitzt, bzw. in f' eine Extremstelle mit VZW vorliegt. (notwendig und hinreichend)

Beispiel

Berechne die Wendestellen von f mit $f(x) = x^3\,(2+x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(2+x) + x^3 \\ f''(x) &= 6x(2+x) + 3x^2 + 3x^2 \\ &= 12x^2 + 12x \\ f'''(x) &= 24x + 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 12x^2 + 12x &= 0 \\ 12x(x+1) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= 0;\ x_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x_1) &= 12 \neq 0 \\ f'''(x_2) &= -12 \neq 0 \end{aligned}$$

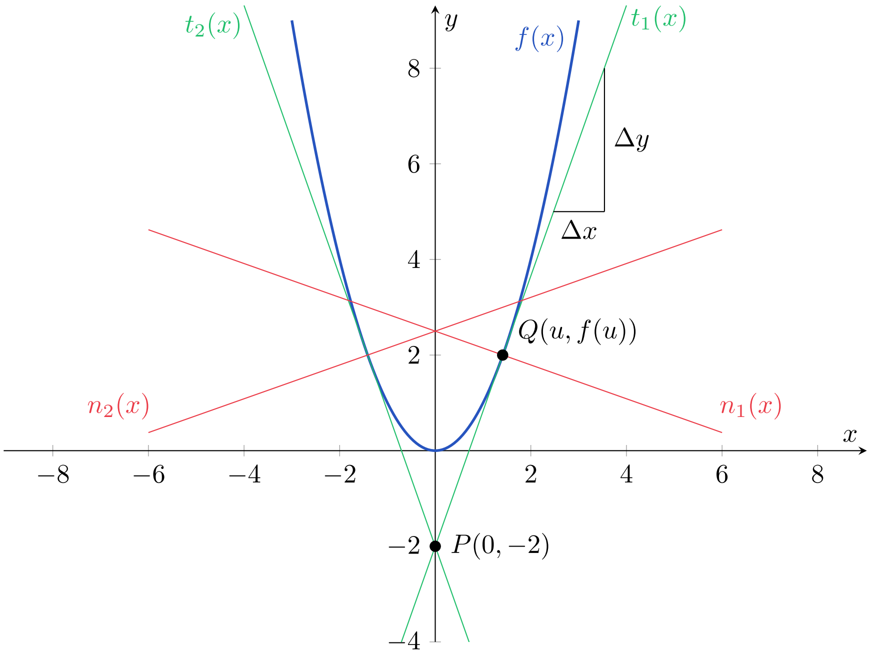
f hat Wendestellen bei $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$.

1.8 Tangente und Normale von Außen

Gegeben ist eine Funktion f und sowie ein Punkt P, der nicht auf f liegt.
Bestimme die Gleichung(en) der Tangente(n) durch P an f.

Allgemeine Tangentengleichung

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{t(x) - f(u)}{x - u} &= f'(x) && \mid \cdot (x-u) \\ t(x) - f(u) &= f'(u) \cdot (x-u) && \mid + f(u) \\ t(x) &= f'(u) \cdot (x-u) + f(u) \end{aligned}$$



1. Terme von $f(u)$ bzw. $f'(u)$ bestimmen.

$$f(u) = u^2; \; f'(u) = 2u$$

2. P in $t(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} -2 &= 2u \cdot (0 - u) + u^2 \\ -2 &= -2u^2 + u^2 \\ -2 &= -u^2 \\ u &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. u_1 / u_2 in $t(x)$ einsetzen.

$$\begin{aligned} u_1 : \quad && t_1(x) &= 2\sqrt{2} \cdot (x - \sqrt{2}) + \left(\sqrt{u}\right)^2 \\ && &= 2\sqrt{2}x - 2 \\ u_2 : \quad && t_2(x) &= -2\sqrt{2}x - 2 \end{aligned}$$

Normale

Die Gerade, die die Tangente orthogonal schneidet heißt **Normale**.
Für die Steigung der Normalen gilt:

$$m_t \cdot m_n = -1 \qquad\qquad m_n = -\frac{1}{m_t}$$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$$

1.9 Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen (Minimax)

Beim Lösen von Minimax-Aufgaben ist folgendes Verfahren empfehlenswert:

1. Aufgabe abchecken, ggf. Skizze machen
2. **Hauptbedingung** formulieren. Diese hängt von zwei Variablen ab.
3. In der Aufgabe wird die zu maximierende bzw. minimierende Größe aus der Hauptbedingung durch irgendeine zusätzliche Größe begrenzt. Diese wird durch die sogenannte **Nebenbedingung** beschrieben. Die Nebenbedingung hängt auch von zwei Variablen ab.
4. Jetzt stellt man die Nebenbedingung nach einer der Variablen um und setzt diese in die Hauptbedingung ein. Man erhält eine Gleichung, die nur noch von einer Variable abhängt und **Zielfunktion** genannt wird.
5. Zielfunktion $Z(x)$ ableiten und notwendige und hinreichende Bedingungen für Extremstellen aufstellen:
$$Z'(x) = 0$$
$$Z''(x) \lesseqgtr 0$$
6. Theoretisch Ränder überprüfen.
7. Die Wert für die Variablen berechnen und einen Antwortsatz formulieren.

Beispiel

Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 21. Berechne das größtmögliche Produkt der beiden Zahlen.

$$\begin{aligned} P(a,b) &= a \cdot b \\ a + b = 21 \Leftrightarrow a &= 21 - b \\ P(b) &= b(21 - b) \\ &= -b^2 + 21b \end{aligned}$$

$$P'(b) = -2b + 21; \; P''(b) = -2$$

$$\begin{aligned} P'(b) &= 0 \\ -2b + 21 &= 0 \\ b &= 10.5 \Rightarrow 10 \\ a &= 21 - 10 = 11 \end{aligned}$$

$$P''(b) < 0 \Rightarrow \text{Maximumstelle}$$

$$\Rightarrow a \cdot b = 110$$

Das größtmögliche Produkt beträgt 110 und ist Produkt der Zahlen 11 und 10.

2 Exponentialfunktionen

Bei einer beliebigen Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x;\ a \in \mathbb{R}$ gilt, dass die Zunahme des "Bestands" proportional zum Bestand ist.

$$f'(x) \sim f(x)$$

2.1 Die natürliche Exponentialfunktion zur Basis *e*

Es gibt eine Zahl, für die die Ableitung der Exponentialfunktion exakt gleich wie die Ausgangsfunktion ist.

Für diese **Eulersche Zahl *e* ≈ 2.7182** gilt also

$$f(x) = e^x = f'(x) = e^x$$

Beispiel

Leite ab!
$a)$ $f(x) = \sin x \cdot e^x$

$$f'(x) = e^x \cos x + e^x \sin x = e^x(\cos x + \sin x)$$

$b)$ $g(x) = 4e^{3x-1}$

$$f'(x) = 12e^{3x-1}$$

2.2 Exponentialgleichungen mit *e*

Gegeben ist eine Zahl $b > 0$. Die Lösung der Gleichung

$$e^x = b$$

heißt **natürlicher Logarithmus** von b.

Merke

$$e^{\ln k} = k$$

Die natürliche Exponentialfunktion e^x hat dementsprechend die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$ als **Umkehrfunktion.**

Beispiel

$$\begin{aligned}
e^x + \frac{7}{e^x} &= 8 && \mid -8 \\
e^x + \frac{7}{e^x} - 8 &= 0 && \mid \cdot e^x \\
e^{2x} + 7 - 8e^x &= 0 && \mid u = e^x \\
u^2 - 8u + 7 &= 0 \\
(u-1)(u-7) &= 0 \\
u_1 = 1;\ u_2 &= 7 \\
\Rightarrow x_1 = 0;\ x_2 &= \ln 7
\end{aligned}$$

2.3 Kurvendiskussion bei *e*-Funktionen

Zur Erinnerung:

1. **Nullstellen bestimmen:**

$$f(x_n) = 0$$

$$e^0 = 1$$

$\ln 0$ ist nicht definiert.

2. **Extremstellen bestimmen:**

$$f'(x_e) = 0$$
$$f''(x_e) \lessgtr 0$$

3. **Wendepunkte bestimmen:**

$$f''(x_w) = 0$$
$$f'''(x_w) \neq 0$$

Verhalten für $x \to \pm\infty$ und Asymptoten bestimmen

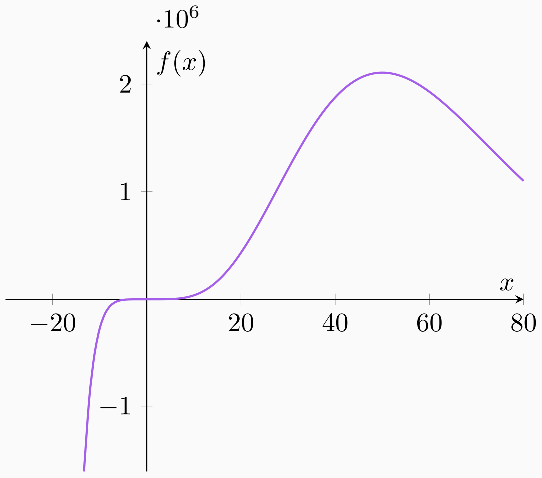
Eine waagerechte **Asymptote** ist eine Gerade der Form $y = a$, wobei a ein endlicher Wert des Grenzwerts von f für $x \to \pm\infty$ ist.
Der Graph von f nähert sich dann infinitesimal an die Asymptote an.

btw: Symmetrie

- achsensymmetrisch zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$
- punktsymmetrisch zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$

Beispiel

Skizziere den Graph von f mit $f(x) = x^5 \cdot e^{-0.1x}$



2.4 Funktionenscharen von *e*-Funktionen

Definition: Funktionenschar

Eine Funktion f_t mit einem **Parameter** t, ordnet jedem x einen Funktionswert $f_t(x)$ zu.

Dabei ist ein Parameter ein beliebiger Wert, der wenn er einmal festgelegt wurde, seinen Wert beibehält.

Die Graphen von f_t bilden eine sogenannte **Funktionenschar** von (Exponential-)Funktionen.

Die Graphen von f_t können verschoben und/oder gestreckt werden:

$f_t(x) = e^{x+t}$	ist gegenüber e^x um t Einheiten nach links verschoben für $t > 0$ und nach rechts für $t < 0$
$f_k(x) = ke^x$	ist in y-Richtung gestaucht bzw. gestreckt
$f_b(x) = e^x + b$	ist in y-Richtung nach oben bzw. nach unten verschoben
$f_w(x) = e^{wx}$	ist in x-Richtung gestreckt bzw. gestaucht.

Beispiel

Gegeben ist $f_t(x) = e^{x+t} - 1$.

$a)$ Bestimme $f_{-2}(3)$.

$$f_{-2}(3) = e^{3+(-2)} - 1 = e - 1 \approx 1.718$$

$b)$ Beschreibe die Wirkung des Parameters t auf f_t.

Der Parameter t verschriebt den Graphen in x-Richtung. Bei Erhöhung verschiebt sich der Graph nach links.

$c)$ Gib die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an.

$$\begin{aligned} f_t(0) &= e^{0+t} - 1 = e^t - 1 \\ &\Rightarrow S_t\left(0 \mid e^t - 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{x+t} - 1 &= 0 && \mid +1 \\ e^{x+t} &= 1 && \mid \ln \\ x + t &= \ln 1 \\ x + t &= 0 \\ x &= -t \\ &\Rightarrow N_t\left(-t \mid 0\right) \end{aligned}$$

2.5 Die Umkehrfunktion

Definition

Sei f eine Funktion mit Definitionsmenge D_f und Wertemenge W_f.
f heißt **umkehrbar**, wenn zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ mit $f(x) = y$ existiert.

Bei einer umkehrbaren Funktion f heißt die Funktion $\bar{f}$ *(f quer)* mit $\bar{f}(y) = x$ die **Umkehrfunktion** von f.

Es gilt

$$\begin{aligned} \bar{f}\left(f(x)\right) &= x \qquad && \forall x \in D_f \qquad && \text{und} \\ f\left(\bar{f}(x)\right) &= x \qquad && \forall x \in D_{\bar{f}} = W_f && \end{aligned}$$

$$\Big(\text{z.B.} \quad \sin^{-1}(\sin x) = x \quad \text{bzw.} \quad \sin^{-1}(\sin 30°) = 30°\Big)$$

Ist f streng monoton wachsend, so ist sie umkehrbar und es existiert eine Umkehrfunktion $\bar{f}$ von f.
Also überprüft man ob $f'(x) > 0$ gilt.

Gleiches gilt auch wenn f durchgehend streng monoton fallend ist.

Berechnung von $\bar{\mathbf{f}}$:

1. $y = f(x)$ setzen
2. Gleichung nach x auflösen
3. x und y vertauschen
4. y durch $\bar{f}(x)$ ersetzen

Beispiel

Gegeben ist f mit $f(x) = \sqrt{2x-4} - 1$.
$a)$ Gib D_f und W_f an.

$$\begin{aligned} D_f &= [2; \infty) \\ W_f &= [-1; \infty) \end{aligned}$$

$b)$ Zeige, dass f umkehrbar ist.

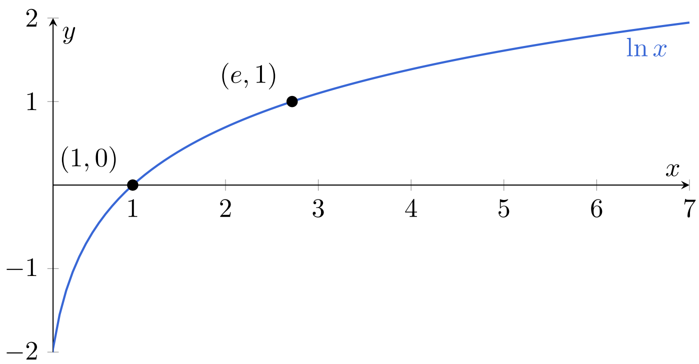
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2x-4}} \\ f'(x) &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2x-4}} &= 0 \qquad\qquad \Rightarrow \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

$c)$ Bestimme $\bar{f}$.

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{2x-4} - 1 && \mid +1 \\
y+1 &= \sqrt{2x-4} && \mid ()^2 \\
(y+1)^2 &= 2x - 4 && \mid +4 \\
(y+1)^2 + 4 &= 2x && \mid \cdot \frac{1}{2} \\
x &= \frac{(y+1)^2+4}{2} \\
y &= \frac{(x+1)^2}{2} + 2 \\
\\
\Rightarrow \bar{f}(x) &= \frac{(x+1)^2}{2} + 2
\end{aligned}
$$

2.6 Der natürliche Logarithmus und seine Ableitungsfunktion

Von der natürlichen Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ist der natürliche Logarithmus $\bar{f}(x) = \ln x$ die Umkehrfunktion.



$$
\begin{aligned}
D_{\bar{f}} &= (0; \infty) \\
W_{\bar{f}} &= (-\infty; \infty)
\end{aligned}
$$

Für die Ableitung von $\ln x$ gilt:

$$
\begin{aligned}
x &= e^{\ln x} && \mid ()' \\
1 &= \left(e^{\ln x}\right)' \\
1 &= (\ln x)' \cdot e^{\ln x} && \mid e^{\ln x} = x \\
1 &= (\ln x)' \cdot x && \mid \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \\
(\ln x)' &= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

Beispiel

$a)$ $f(x) = x\ln(3x)$. Leite ab!

$$f'(x) = \ln(3x) + \frac{x}{x} = \ln(3x) + 1$$

$b)$ $g(x) = \frac{1}{2}\ln(3x-6)$. Bestimme $\bar{g}, D_g, D_{\bar{g}}, W_g$ und $W_{\bar{g}}$.

$$\bar{g}(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + 2$$
$$D_g = (2;\infty) = W_{\bar{g}} = (2;\infty)$$
$$D_{\bar{g}} = (-\infty;\infty) = W_g = (-\infty;\infty)$$

2.7 Exponentielles Wachstum

Aus Klasse 9:

$$f(t) = f(0)\cdot a^t$$

Für $a > 1 \to$ exponentielle Zunahme
Für $a < 1 \to$ exponentieller Zerfall

Um die Exponentialfunktion ableiten zu können, ist es sinnvoll sie zur Basis e zu schreiben.

$$\Rightarrow f(t) = f(0)\cdot e^{\ln(a)\cdot t}$$

$\ln(a) = k$ Für $k > 0 \to$ Zunahme
Für $k < 0 \to$ Zerfall

Für die Verdopplungszeit T_V gilt:

$$T_V = \frac{\ln 2}{k}$$

Für die Halbwertszeit T_H gilt:

$$T_H = \frac{\ln 0.5}{k}$$

Beispiel

Gegeben ist $f(t) = 228\cdot 1.04^t$ t in y.

$a)$ Bestimme den Anfangsbestand.

$$f(0) = 228$$

$b)$ Handelt es sich um eine Zu- oder Abnahme? Begründe.
Es handelt sich um eine Zunahme, da $1.04 > 1$

$c)$ Schreibe f zur Basis e.

$$f(t) = 228\cdot e^{\ln(1.04)\cdot t}$$

$d)$ Berechne T_V/T_H.

$$T_V = \frac{\ln 2}{\ln 1.04} \approx 17.67 \qquad T_H = \frac{\ln 0.5}{\ln 1.04} \approx -17.77$$

3 Integralrechnung

3.1 Bestimmen der Gesamtänderung - orientierter Flächeninhalt

Um von einer Größe die momentane Änderung zu berechnen, muss man ableiten. Will man umgekehrt von der momentanen Änderung einer Größe auf die Größe selbst schließen, muss man den **orientierten Flächeninhalt** zwischen dem Graph der Änderungsrate und der x-Achse bestimmen.

Anmerkung

Ein Flächeninhalt ist stets positiv, ein orientierter Flächeninhalt kann negativ sein.

Beispiel

Ein Tank ist anfangs leer. Über eine Leitung kann ihm Wasser hinzugefügt oder entfernt werden. Bestimme aus der folgenden Zufluss-/Abflussmenge den Wasserinhalt nach 12 Sekunden.

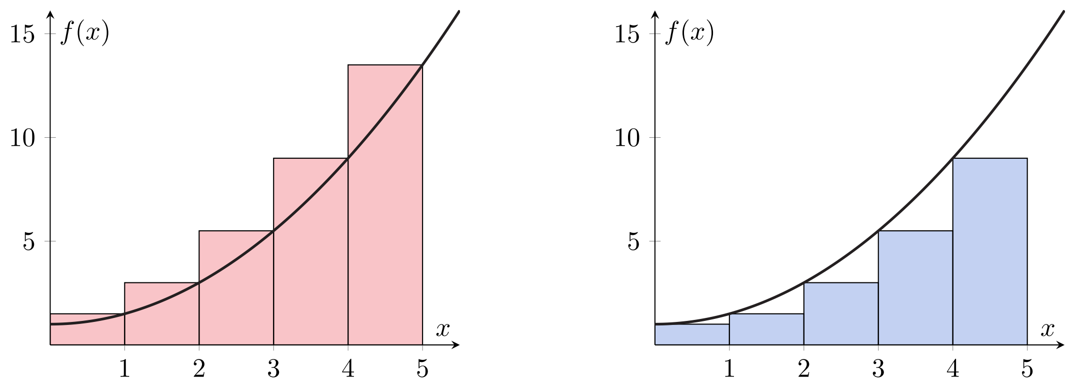
$$V = \left(4 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3\right) \mathrm{l} = 13 \, \mathrm{l}$$

3.2 Das Integral als orientierter Flächeninhalt

Um den Flächeninhalt von krummlinigen Graphen zu bestimmen, kann man die **Ober-** bzw. **Untersummen** zwischen Graph und x-Achse betrachten.

Anschaulich: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1;\ I = [0; 5];\ n = 5$

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	1.5	3	5.5	9



(a) Obersumme (b) Untersumme

Haben für $n \to \infty$ die Ober- und Untersumme den gleichen Wert, so nennt man f **integrierbar**.

Definition: Integral

Ist eine Funktion f über $[a; b]$ integrierbar, so nennt man den orientierten Flächeninhalt über $[a; b]$, den der Graph von f mit der x-Achse einschließt, das (bestimmte) **Integral** von f über $[a; b]$.
Dabei nennt man a die untere und b die obere Grenze des Integrals.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Dabei nennt man $f(x)$ den **Integrand** und dx die **Integrationsvariable**.

Integraladditivität

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Beispiel

Bestimme näherungsweise $\int_{-1}^2 x^3\,dx$

$$\int_{-1}^2 x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^2 = \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot(-1)^4\right) = 3.75$$

3.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Definition: Stammfunktion

Eine Funktion F heißt Stammfunktion von f im Intervall I, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei f integrierbar auf $[a; b]$ und F eine Stammfunktion von f, so gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Man schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Satz: Stammfunktion

Von der Funktion f existieren undendlich viele Stammfunktionen, die sich um eine Konstante c unterscheiden. Es gilt:

$$F(x) = G(x) + c \qquad \forall x \in I$$

Beweis:

$$F'(x) = f(x) = (G(x) + c)' = G'(x)$$

Beispiel

$a)$ Bestimme zwei Stammfunktionen von $f(x) = 3x^2$

$$F_1(x) = x^3$$
$$F_2(x) = x^3 + \pi$$

$b)$ Berechne $\int_1^3 3x^2\,dx$.

$$\int_1^3 3x^2\,dx = \left[x^3\right]_1^3 = 3^3 - 1^3 = 26$$

Integralfunktion

Sei f eine über I integrierbare Funktion und $u \in I$. Die Funktion J_u mit $J_u(x) = \int_u^x f(t)\,dt$ heißt die **Integralfunktion** von f zur unteren Grenze u.

Beachte:

- Man sollte für die Integrationsvariable und die obere Grenze nicht den gleichen Buchstaben wählen.
- Es gilt: $J_u(u) = \int_u^u f(t)\,dt = 0$, d.h. die untere Grenze ist stets eine Nullstelle der Integralfunktion.

Satz: Die Integralfunktion J_u ist eine Stammfunktion von f:

$$J_u'(x) = f(x)$$

Beispiel

$a)$ $f(t) = 3t^2$. Bestimme x so, dass gilt $\int_1^x f(t)\,dt = 26$.

$$\begin{aligned} \int_1^x 3t^2\,dt &= 26 \\ \left[t^3\right]_1^x &= 26 \\ x^3 - 1 &= 26 \\ x = \sqrt[3]{27} &= 3 \end{aligned}$$

$b)$ Bestimme eine Integralfunktion von $f(t) = \frac{1}{4}e^{0.5t}$ zur unteren Grenze $u = -1$.

$$\begin{aligned} J_{-1}(x) &= \int_{-1}^{x} \frac{1}{4}e^{0.5t}\,dt = \left[\frac{1}{2}e^{0.5t}\right]_{-1}^{x} \\ &= \frac{1}{2}e^{0.5x} - \frac{1}{2\sqrt{e}} \end{aligned}$$

3.4 Bestimmen von Stammfunktionen

Seien G und H Stammfunktion von g und h.

Potenzregel:

$$f(x) = x^n \qquad F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

für $n = -1$:

$$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad F(x) = \ln|x|$$

Faktorregel:

$$f(x) = c \cdot g(x) \qquad F(x) = c \cdot G(x)$$

Summenregel:

$$f(x) = g(x) + h(x) \qquad F(x) = G(x) + H(x)$$

Lineare Verkettung/Substitution:

$$f(x) = g(ax+b) \qquad F(x) = \frac{1}{a}G(ax+b)$$

Faktor und Summenregel für Integrale:

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b g(x) + h(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx$$

Beweise: HDI

Beispiel

$a)$ Bestimme eine Stammfunktion von $f(x) = 3e^{2x} - 2\sin(\pi x)$

$$F(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{2}{\pi}\cos(\pi x)$$

$b)$ Berechne das Integral $\int_{-4}^{-1} \frac{5}{x}\,dx$

$$\int_{-4}^{-1} \frac{5}{x}\,dx = [5\ln|x|]_{-4}^{-1} = 5\ln 1 - 5\ln 4 = -5\ln 4 \approx -6.93$$

3.5 Graphen von Stammfunktionen

Nach dem Schema:

$$
\begin{array}{lllll l}
N & E & W & & & F \\
 & N & E & W & & f \\
 & & N & E & W & f'
\end{array}
$$

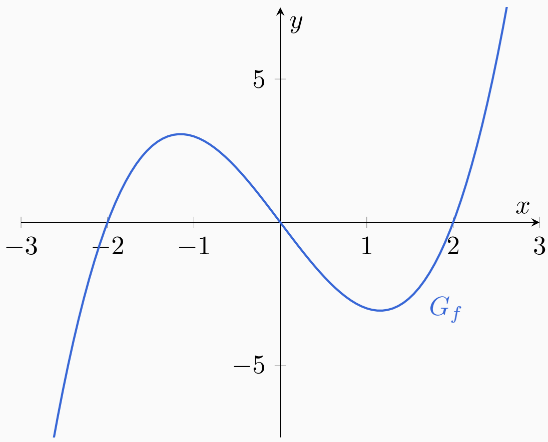
gilt für die Graphen von F und f folgendes:

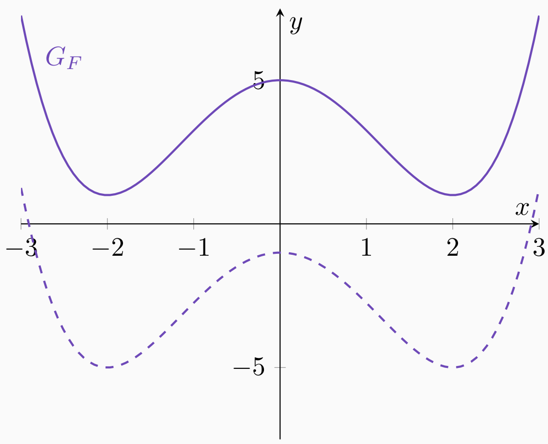
Nullstelle von *f*	mit VZW von + nach -	mit VZW mit - nach +	ohne VZW
(innere) Extremstelle von *F*	Maximumstellen	Minimumstelle	Sattelstelle von F

Funktion *f*	(innere) Extremstelle
Stammfunktion *F*	Wendestelle

Beispiel

Gegeben ist G_f. Skizziere G_F.





3.6 Integral und Flächeninhalt

Ein Integral kann einen negativen Wert haben, ein Flächeninhalt nicht.
Das bedeutet, dass man beim Berechnen des Flächeninhalts zwischen eines Graphen und der x-Achse wie folgt vorgehen sollte:

1. Bestimme die Nullstellen von f
2. Berechne die Integrale der Teilintervalle
3. Berechne die Teilflächen für $f(x) < 0$ über $\left|\int_a^{x_0} f(x)\,dx\right|$ oder $-\int_a^{x_0} f(x)\,dx$

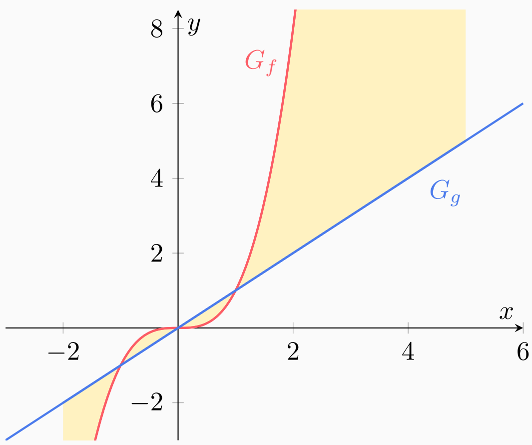
Für den Flächeninhalt A zwischen zwei Graphen gilt:

$$A = \int_a^b f(x) - g(x)\;dx$$

Salopp: "Das Obere minus das Untere."

Beispiel

$f(x) = x^3;\; g(x) = x;\; I = [-2; 5]$
Berechne den Flächeninhalt zwischen den beiden Funktionsgraphen für I.
Skizze:



$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^3 &= x \\ x^3 - x &= 0 \\ x(x^2-1) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 = 0;\; x_2 &= 1;\; x_3 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-1} g(x) - f(x)\;dx + \int_{-1}^{0} f(x) - g(x)\;dx + \int_{0}^{1} g(x) - f(x)\;dx + \int_{1}^{5} f(x) - g(x)\;dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1} + \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{1}^{5} \\ &= \frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 144 \\ &= 146.75 \end{aligned}$$

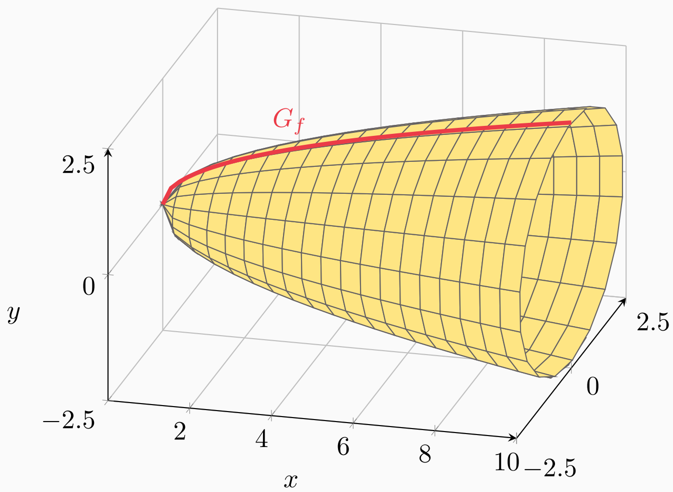
3.7 Volumen von Rotationskörpern

Sei f eine auf $[a;b]$ integrierbare Funktion. Lässt man die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt um die x-Achse rotieren, so entsteht ein 3-dimensionaler Rotationskörper, dessen Volumen man wie folgt berechnet:

$$V_{\text{Rot}} = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx$$

Beispiel

Der rotierende Graph von f mit $f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x}$ erzeugt einen Rotationskörper in Form eines Sektglases.



$a)$ Wie viel Sekt passt in das 10 cm Hohe Sektglas?

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{10} f(x)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^{10} \frac{16}{9} x \, dx \\ &= \pi \cdot \left[\frac{8}{9}x^2\right]_0^{10} \\ &= \pi \cdot \frac{800}{9} \approx 279.25 \end{aligned}$$

$b)$ An welcher Stelle muss man den 100 ml Eichstrich anbringen?

$$\begin{aligned} V &= 100 \\ \pi \int_0^a f(x)^2 \, dx &= 100 \\ \pi \cdot \left[\frac{8}{9}x^2\right]_0^a &= 100 \\ \pi \cdot \frac{8}{9}a^2 &= 100 \\ a^2 &= \frac{900}{8\pi} \\ a &= \sqrt{\frac{900}{8\pi}} \approx 5.98 \end{aligned}$$

3.8 Uneigentliche Integrale

Problem:
Sind die Flächen, die ein Graph mit z.B. der x-Achse einschließt endlich, wenn

- eine Polstelle (senkrechte Asymptote) vorliegt,
- die Funktion für $x \to \pm\infty$ läuft und der Graph dabei eine waagerechte Asymptote besitzt?

Dabei sind die betrachteten Flächen **unbegrenzt**. Das heißt aber nicht, dass automatisch der Flächeninhalt endlich oder unendlich sein muss.

Untersucht man den Flächeninhalt an seiner Polstelle z, berechnet man das Integral

$$\int_z^b f(x)\,dx$$

Nach dem Bilden der Stammfunktion setzt man z ein und entscheidet, ob der Grenzwert des Rechenausdrucks einen endlichen Flächeninhalt ergibt oder nicht.
Bei waagerechten Asymptoten verfährt man analog nur mit dem Grenzwert für $x \to \pm\infty$.

Erhält man für den Grenzwert einen endlichen Wert, spricht man von einem **uneigentlichen Integral**.

Beispiel

Berechne!

$a) \quad \int_1^\infty \frac{3}{x}\,dx$

$$\int_1^z \frac{3}{x}\,dx = [3\ln|x|]_1^z = \ln|z|$$
$$\lim_{z\to\infty} \ln|z| = \infty$$

$b) \quad \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\,dx$

$$\int_z^0 \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\,dx = \left[e^{\frac{1}{2}x}\right]_z^0 = -e^{\frac{1}{2}z} + 1$$
$$\lim_{z\to-\infty} -e^{\frac{1}{2}z} + 1 = 1$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 1$$

3.9 Mittelwerte von Funktionen

Definition: Mittelwert

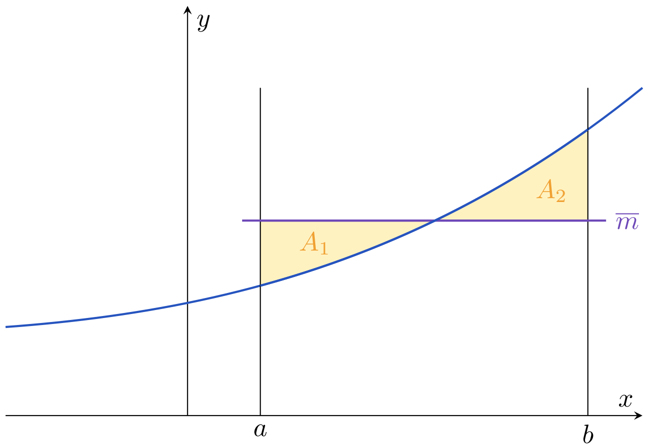
Die Zahl

$$\overline{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

heißt **Mittelwert** der Funktion f über $[a;b]$.

Graphisch lässt sich der Mittelwert bestimmen, indem man die Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt mit der Rechtecksfläche, die durch die konstante Funktion $g(x) = m$ entsteht, vergleicht. Beide Flächen müssen gleich groß sein.
Alternativ müssen die beiden Teilflächen A_1 und A_2 ober- bzw. unterhalb der Mittelwertslinie gleich groß sein.

Anschaulich:

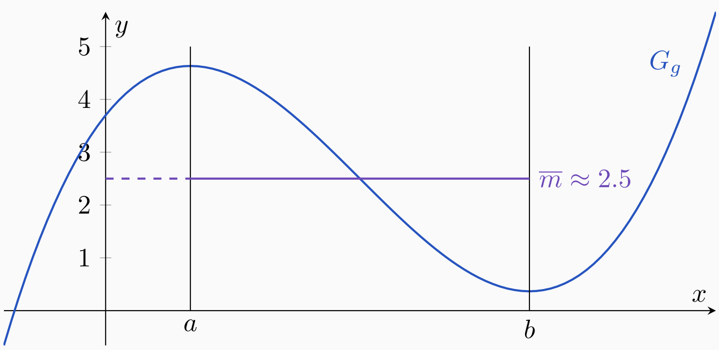


Beispiel

$a)$ $f(x) = -x^2 + 4;\ a = -3;\ b = 4$. Bestimme $\overline{m}$!

$$\begin{aligned}\overline{m} &= \frac{1}{4-(-3)} \int_{-3}^{4} -x^2 + 4\,dx \\ &= \frac{1}{7}\left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_{-3}^{4} \\ &= \frac{1}{7}\left(-\frac{4^3}{3} + 16 - \left(-\frac{(-3)^3}{3} - 12\right)\right) \\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$b)$ Bestimme graphisch den Mittelwert von g.



4 Funktionen und ihre Graphen

4.1 Strecken, verschieben, spiegeln

Gegeben sei der Graph der Funktion f. Der in x-Richtung verschobene, in y-Richtung verschobene und in y-Richtung gestreckte Graph der Funktion g besitzt den Funktionsterm:

$$g(x) = a \cdot f(x - c) + d$$

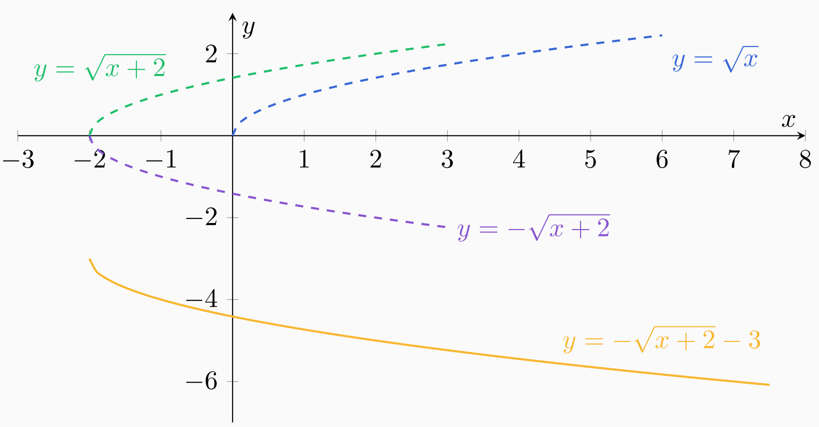
Bei den Spiegelungen von f gilt:

- $g(x) = f(-x)$ Spiegelung an der **y-Achse**
- $g(x) = -f(x)$ Spiegelung an der **x-Achse**
- $g(x) = -f(-x)$ Spiegelung am **Ursprung**

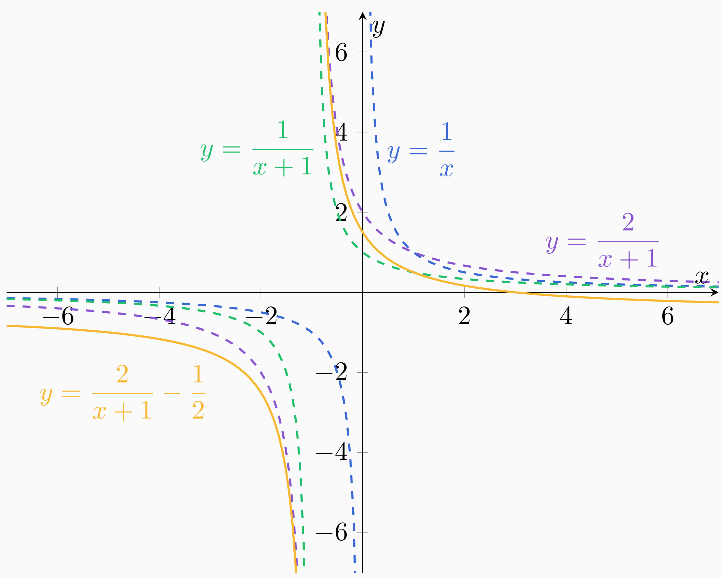
Beispiel

Skizziere die Graphen von f und g.

a) $f(x) = -\sqrt{x+2} - 3; \quad x \geq -2$



b) $g(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{2}; \quad x \neq -1$



Zeige, dass die Graphen von f_k mit $f_k(x) = kxe^{x^2}$; $k \in \mathbb{R}$ punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

$$\begin{aligned} f(-x) &= k \cdot (-x) \cdot e^{(-x)^2} \\ &= -kxe^{x^2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

□

4.2 Linearfaktordarstellung - mehrfache Nullstellen

Satz 1

Hat eine ganzrationale Funktion vom Grad n eine Nullstelle x_0, so gilt:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) \qquad \text{wobei } g \text{ vom Grad } n-1 \text{ ist.}$$

$(x - x_0)$ nennt man **Linearfaktor**.

Satz 2

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades besitzt höchstens n Nullstellen.

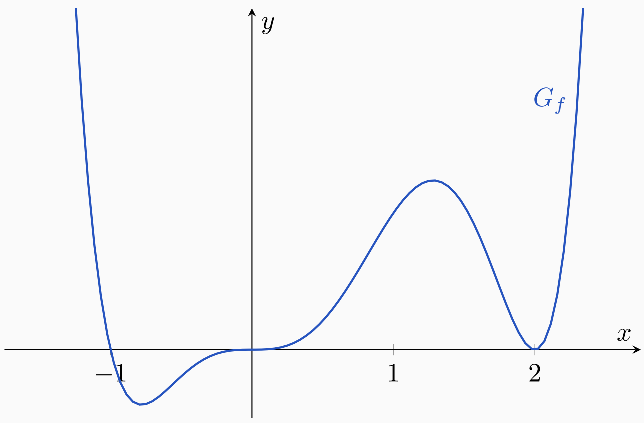
Satz 3

Sei $f(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$.

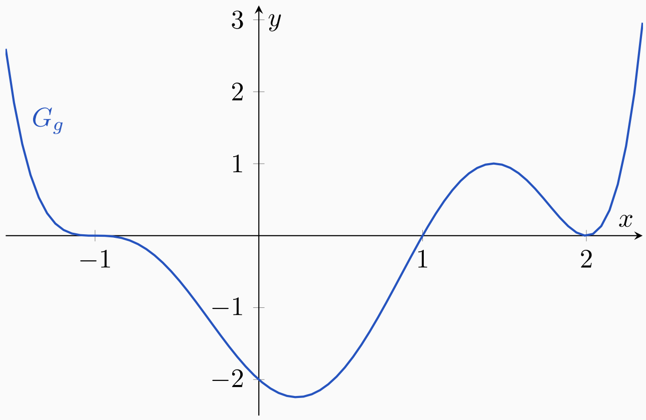
- Für $k = 1$: Schnittstelle von f mit der x-Achse.
- Für $k = 2$: Berührstelle von f an der x-Achse.
- Für $k = 3$: Sattelstelle von f an der x-Achse.

Beispiel

$a)$ Skizziere den Graph von f mit $f(x) = x^3(x-2)^2(x+1)$.



$b)$ Bestimme die Funktionsgleichung des folgenden Graphen.



$$g(x) = a(x+1)^3(x-1)(x-2)^2$$
$$\text{mit } a = 1: \ g(0) = -4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$
$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^3(x-1)(x-2)^2$$

4.3 Lösen von Gleichungen

Folgende Strategien zum Lösen von diversen Gleichungen sind zielführend:

Betragsgleichungen

Führe eine Fallunterscheidung durch:

- für positive Beträge kann man den Betrag weglassen und die Gleichung wie gewohnt lösen.
- für negative Beträge wird eine Seite der Gleichung mit -1 multipliziert.

Beispiel

$$\left|\frac{10}{e^x - 1}\right| = 2$$

Fall 1:
$$\frac{10}{e^x-1} = 2 \qquad | \cdot e^x - 1$$
$$10 = 2e^x - 2 \qquad | +2; \cdot\frac{1}{2}$$
$$6 = e^x \qquad | \ln$$
$$x = \ln 6$$

Fall 2:
$$-\frac{10}{e^x-1} = 2 \qquad | \cdot e^x - 1$$
$$-10 = 2e^x - 2 \qquad | +2; \cdot\frac{1}{2}$$
$$-4 = e^x \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Probe:
$$\left|\frac{10}{e^{\ln 6} - 1}\right| = \left|\frac{10}{5}\right| = 2$$
$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\ln 6\}$$

Wurzelgleichungen

- isoliere die Wurzel
- quadriere beide Seiten der Gleichung

> **Beispiel**
>
> $$\begin{aligned} \sqrt{20-2x}+6 &= x && \mid -6 \\ \sqrt{20-2x} &= x-6 && \mid ()^2 \\ 20-2x &= (x-6)^2 \\ 20-2x &= x^2-12x+36 && \mid -20+2x \\ x^2-10x+16 &= 0 \\ (x-2)(x-8) &= 0 \\ x_1 = 2;\ x_2 &= 8 \end{aligned}$$
>
> Probe: $$\sqrt{20-2\cdot 2}+6 = 2 \Leftrightarrow 4+6 \neq 2$$
> $$\sqrt{20-2\cdot 8}+6 = 8 \Leftrightarrow 2+6 = 8$$
> $$\Rightarrow \mathbb{L} = \{8\}$$

Bruchgleichungen

- Bestimme den Hauptnenner
- Beide Seiten mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren

> **Beispiel**
>
> $$\begin{aligned} \frac{6}{x^4}-\frac{5}{x^2} &= -1 && \mid \cdot x^4 \\ 6-5x^2 &= -x^4 && \mid +x^4 \\ x^4-5x^2+6 &= 0 && \mid u = x^2 \\ u^2-5u+6 &= 0 \\ (u-2)(u-3) &= 0 \\ u_1 = 2;\ u_2 &= 3 && \mid x^2 = u \end{aligned}$$
>
> $$x^2 = 2 \qquad\qquad x^2 = 3$$
> $$x_1 = \pm\sqrt{2} \qquad\qquad x_2 = \pm\sqrt{3}$$
>
> $x^4 \neq 0$ und $x^2 \neq 0$ für $x = \pm\sqrt{2}$ oder $x = \pm\sqrt{3}$
>
> $$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ -\sqrt{3}\}$$

Ungleichungen

Entweder: Mit Vergleichszeichen auflösen und aufpassen bei Mulitplikation oder Division mit negativen Zahlen.

Oder: Eine Gleichung lösen und Werte größer und kleiner als die Lösung testen.

Beispiel

$$\begin{aligned}
1-\left(\frac{1}{2}\right)^x &< 0.05 && \mid -1 \\
-\left(\frac{1}{2}\right)^x &< -0.95 && \mid \cdot(-1) \\
\left(\frac{1}{2}\right)^x &> 0.95 && \mid \log \\
x\log 0.5 &> \log 0.95 && \mid \cdot \frac{1}{\log 0.5} \\
x &< \frac{\log 0.95}{\log 0.5} \approx 0.074
\end{aligned}$$

4.4 Trigonometrische Funktionen

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sin x$. Der Graph von der Funktion g mit

$$g(x) = a\sin\left(b(x-c)\right) + d$$

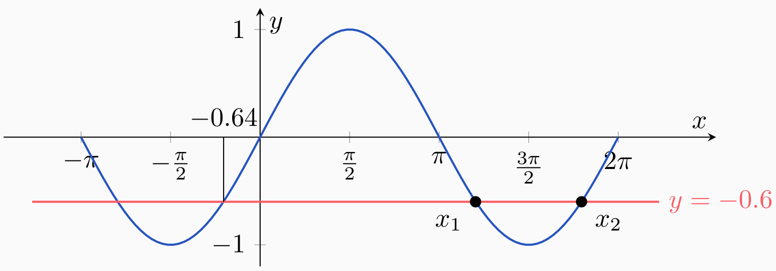
ist gegenüber dem Graph von f

- um $|a|$ Einheiten in y-Richtung gestreckt,
- um d Einheiten in y-Richtung verschoben,
- besitzt die Periode $p = \frac{2\pi}{b}$ (Streckung in x-Richtung) und
- um c Einheiten in x-Richtung verschoben.

Für $a < 0$ wird der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

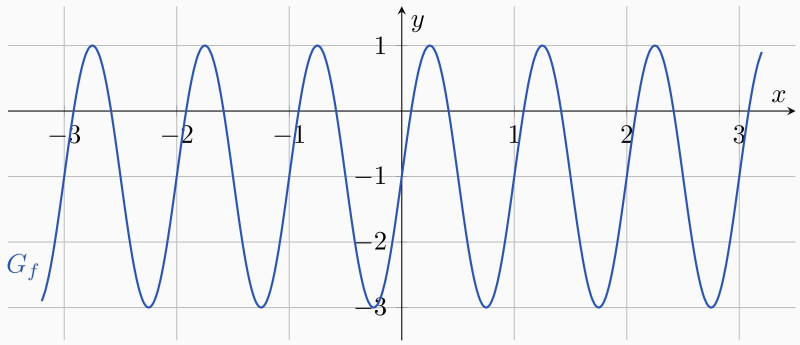
Beispiel

a) Gib im Intervall $I = [0; 2\pi]$ zwei Lösungen der Gleichung $\sin x = -0.6$ an.



$$\begin{aligned}
\sin^{-1}(-0.6) &\approx -0.64 \\
x_2 &= -0.64 + 2\pi \approx 5.64 \\
x_1 &= \pi + 0.64 \approx 3.78
\end{aligned}$$

b) Skizziere den Graphen von $f(x) = 2\sin(2\pi(x-1)) - 1$.



4.5 Senkrechte und waagerechte Asymptoten

Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen $g(x)$ und $h(x)$. Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \quad (h(x) \neq 0)$ nennt man **gebrochenrationale Funktion**.
Wenn $g(x_0) \neq 0$ und $h(x_0) = 0$ gilt, dann ist x_0 eine **Polstelle** von f und die Gerade mit $x = x_0$ ist eine **senkrechte Asymptote** des Graphen von f.
Gilt $g(x_0) = 0$ und $h(x_0) = 0$, dann liegt keine senkrechte Asymptote, sondern eine **hebbare Definitionslücke** vor.
Für die waagerechte Asymptote gilt:

1. Zählergrad > Nennergrad: keine waagerechte Asymptote
2. Zählergrad = Nennergrad: höchste Potenz von x ausklammern und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ bilden. $\left(y = \dfrac{a}{b}\right)$
3. Zählergrad < Nennergrad: waagerechte Asymptote bei $y = 0$.

Beispiel

a) Bestimme die senkrechte und waagerechte Asymptote.

$$f(x) = \frac{6x^2+3}{5x^2 - 1/2}$$

$$5x^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \rightarrow \text{Senk. Asymp. bei } x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(6+\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(5-\frac{1/2}{x^2}\right)} = \frac{6}{5} \qquad \rightarrow \text{Wag. Asymp. bei } y = \frac{6}{5}$$

$$g(x) = \frac{7x}{x^2-1}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \qquad \rightarrow \text{Senk. Asymp. bei } x = \pm 1$$

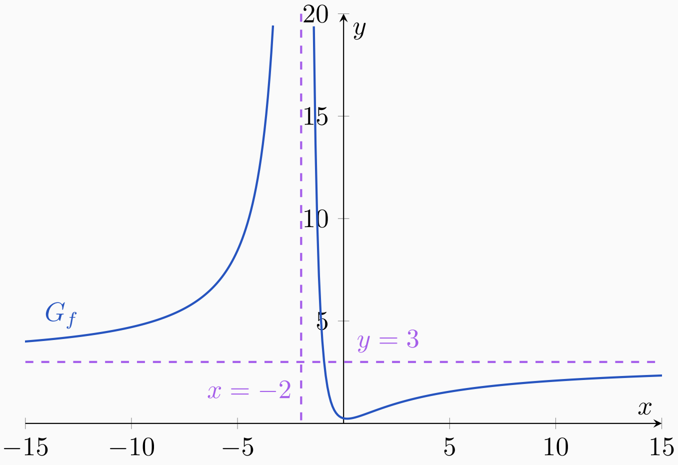
$$\rightarrow \text{Wag. Asymp. bei } y = 0$$

$$h(x) = \frac{3x^2+2}{7x-2}$$

$$7x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \qquad \rightarrow \text{Senk. Asymp. bei } x = \frac{2}{7}$$

$\rightarrow$ keine wag. Asymp.

$b)$ Skizziere den Graphen von t mit $t(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2+4x+4}$.



4.6 Vollständige Kurvendiskussion

Strategie zum „Zeichnen“ eines Graphen:

1. Nullstellen bestimmen ($f(x) = 0$),
2. senkrechte und waagerechte Asymptoten bestimmen,
3. Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung,
4. Hoch-, Tief- und Wendepunkte,
5. Verhalten für $x \to \pm\infty$, bzw. Vorzeichenwechsel an einer Polstelle,
6. Verhalten für $x \to 0$ (kleinste Potenz von x betrachten).

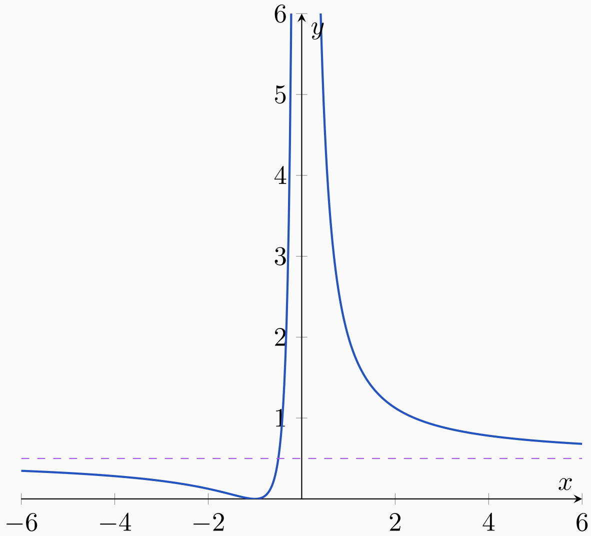
Beispiel

Skizziere den Graphen von f mit $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2x^2}$

$$f(x) = 0$$
$$\frac{(x+1)^2}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Senk. Asymp. bei $x = 0$

Wag. Asymp. bei $y = \dfrac{1}{2}$



4.7 Funktionenscharen – Ortskurven

Eine Funktion mit Parameter nennt man **Funktionenschar**. Die Menge aller Punkte, die alle eine gemeinsame Eigenschaft teilen, z. B. gemeinsame Hochpunkte, bilden eine **Ortskurve**. Um die Gleichung der Ortskurve zu bestimmen geht man wie folgt vor:

1. Die notwendige Bedingung aufstellen und nach x auflösen.
2. x in $f_t(x)$ einsetzen $\rightarrow$ y-Koordinate
3. Gleichung aus 1. nach t auflösen und in die y-Koordinate aus 2. einsetzen.

Beispiel

$a)$ Bestimme die Ortskurve aller Tiefpunkte von $f_t(x) = (x-t)e^x + 1$

$$f_t'(x) = e^x + (x-t)e^x$$

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= 0 \\ e^x + (x-t)e^x &= 0 \\ e^x\left(1 + (x-t)\right) &= 0 && \mid e^x \neq 0 \ \ \forall x \\ 1 + (x-t) &= 0 \\ x &= t-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t-1) &= \left((t-1)-t\right)e^{t-1} + 1 \\ &= -e^{t-1} + 1 && \mid t = x+1 \\ \Rightarrow y &= -e^x + 1 \end{aligned}$$

$b)$ Untersuche $f_t(x) = 2(x+5)e^{tx}$ auf gemeinsame Punkte.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_1(x) \\ 2(x+5) &= 2(x+5)e^x \\ 2(x+5) - 2(x+5)e^x &= 0 \\ 2(x+5)(1-e^x) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 = -5;\ x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_t(-5) &= 2(-5+5)e^{-5t} = 0 \\ f_t(0) &= 2(0+5)e^0 = 10 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_1(-5,0);\ P_2(0,10)$$

5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Der Gauß-Algorithmus

Mehrere Gleichungen mit gemeinsamen (linearen) Variablen bilden ein **lineares Gleichungssystem (LGS).** Ein LGS mit 3 oder mehr Variablen löst man meistens mit dem **Gauß-Algorithmus** am sinnvollsten. Dabei werden durch

1. vertauschen von Gleichungen,
2. Multiplikation von einer oder mehrerer Gleichungen mit einer Zahl $\neq 0$,
3. Addition mehrerer Gleichungen und
4. Einsetzen einer Variablen in eine andere Gleichung

so lange Variablen eliminiert und dadurch bestimmt bis eine sogenannte **Stufenform** vorliegt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{array}\right) \longleftarrow \text{Matrix-Schreibweise}$$

Beispiel

Löse das LGS.

$$\begin{array}{rll} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3 & \mid \cdot(-3) & \mid \cdot(-2) \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 13 & \mid \cdot 2 & \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 & & \mid \cdot 1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 18 & -1 & 17 \\ 0 & 6 & -13 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 1 \\ \mid \cdot (-3) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 18 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & 38 & 38 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = 1$$

$$\begin{aligned} 18x_2 - 1 &= 17 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4 + 5 &= 3 \\ 2x_1 &= 2 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(1;\ 1;\ 1)\}$$

5.2 Lösungsmengen von LGS

Man bringt ein LGS wie gewohnt un Stufenform und erkennt dann schnell, dass ein LGS entweder

- **keine**
- **eine** oder
- **unendlich** viele Lösungen haben kann.

Bei keiner Lösung erhält man eine Zeile der Form $0 \cdot x_3 = 1$, bei unendlich vielen Lösungen erhält man bspw. $0 \cdot x_3 = 0$. Dann wählt man für x_3 einen beliebigen Parameter und gibt die anderen Variablen in Abhängigkeit von diesem an.

Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge des LGS.
$a)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{ll} |\cdot(-2) & |\cdot 1 \\ |\cdot 1 & \\ & |\cdot 1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = t$$

$$\begin{aligned} 3x_2 + 7t &= 12 \\ x_2 &= -\frac{7}{3}t + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2\left(-\frac{7}{3}t + 4\right) + 2t &= 3 \\ x_1 - \frac{14}{3}t + 8 + 2t = 3x_1 && = \frac{8}{3}t - 5 \end{aligned}$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{8}{3}t - 5;\ -\frac{7}{3}t + 4;\ t \right) \right\}$$

$b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 8 & 8 \\ -3 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-2) \\ |\cdot 1 \\ \ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$

5.3 Bestimmen ganzrationaler Funktionen

Zum Bestimmen eines Funktionsterms einer ganzrationalen Funktion bietet sich folgende Strategie:

1. Aufstellen eines allgemeinen Funktionsterms und ggf. dessen Ableitungen.
2. Bedingungen für f, f', f'', ... formulieren.
3. LGS aufstellen und lösen.
4. Überprüfung ob ein Hochpunkt wirklich ein Hockpunkt ist, etc.

Beispiel

Bestimme die ganzrationale Funktion vom Grad 4, dessen Graph symmetrisch zur y-Achse ist, den Punkt $A(2,0)$ enthält und den Tiefpunkt $T(1,0)$ hat.

1.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ f''(x) &= 12x^2 + 6bx + 2c \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{Symmetrie zur } y\text{-Achse:} \quad & b = 0;\ d = 0 \\ A(2,0): \quad & f(0) = e = 2 \\ T(1,0): \quad & f'(1) = 4a + 2c = 0 \\ & f(1) = a + c + 2 = 0 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right) && \begin{array}{l} |\cdot 1 \\ |\cdot -(4) \end{array} \\ \sim &\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 8 \end{array}\right) && \Rightarrow c = -4 \\ &4a - 8 = 0 && \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$$

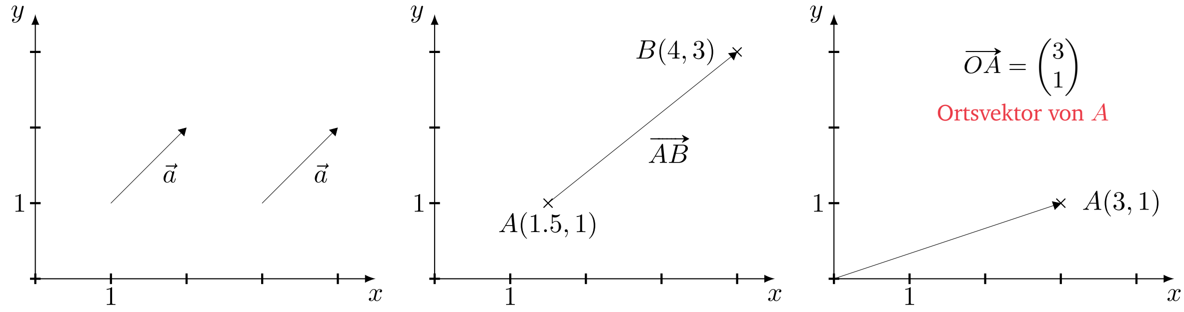
4.

$$f''(1) = 24 - 8 = 16 > 0 \quad \Rightarrow T(1,0)$$

6 Geraden und Ebenen

6.1 Vektoren im Raum

Vektoren kommen hauptsächlich auf folgende 3 Arten und Weisen vor:



(a) Als Pfeil (mit beliebigem Anfang) (b) Als Pfeil (zwischen 2 Punkten) (c) Als Punkt

Gegenvektor

Gegenvektor eines Vektors $\vec{a}$ ist der Vektor $-\vec{a}$.

Beispiel

Bestimme den Gegenvektor zum Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt

Der Mittelpunkt M zweier Punkte $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ ergibt sich wiefolt:

$$M\left(\frac{a_1 + b_2}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$

Beispiel

Bestimme den Mittelpunkt M der Punkte $A(2,3,3)$ und $B(4,1,2)$.

$$\Rightarrow M(3, 2, 2.5)$$

Betrag

Der Betrag eines Vektors $\vec{a}$ ist geometrisch die Länge des zugehörigen Pfeils. Er lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiel

Berechne den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$$

Einheitsvektor

Der Einheitsvektor $\vec{a}_0$ ist der Vektor, der in dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ zeigt, und den Betrag 1 hat.
Er errechnet sich mit:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Beispiel

Bestimme den Einheitsvektor $\vec{a}_0$ des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme jeweils den fehlenden Punkt.

$a)$ $A(0,-1,2)$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B(3,2,5)$$

$b)$ $B(2,0,3)$

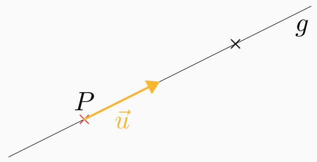
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(-1,-3,0)$$

6.2 Geraden im Raum

Allgemeine Parametergleichung einer Geraden

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$



$\vec{p}$: Stützvektor
$\vec{u}$: Richtungsvektor

Gegenseitige Lage von Geraden

Es gibt vier mögliche gegenseitige Lagen zweier Geraden:

- parallel und verschieden (echt parallel)
- identisch
- sie schneiden sich in einem Punkt
- windschief

Sind die Richtungsvektoren Vielfache?

ja: parallel oder identisch — Haben sie gemeinsame Punkte?
- **ja**: identisch
- **nein**: parallel

nein: schneiden sich oder sind windschief — Haben sie gemeinsame Punkte?
- **ja**: schneiden sich
- **nein**: windschief

Beispiel

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \; ; \; h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen $\to$ schneiden sich oder sind windschief

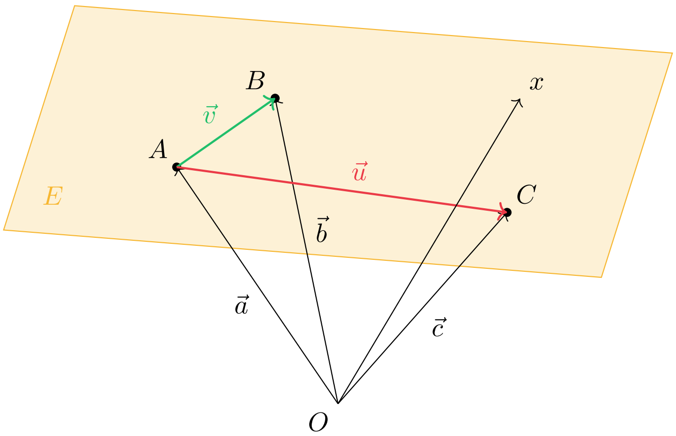
$$g \cap h : \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2r &= 1 + s \\ -1 + 3r &= 1 - s \\ 1 + 3r &= s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2r - s &= 0 && (1)\\
3r + s &= 2 && (2)\\
3r - s &= -1 && (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(2)+(3): && 6r = 1\\
& && r = \frac{1}{6}\\
&r = \frac{1}{6} \text{ in } (2): && 3 \cdot \frac{1}{6} + s = 2\\
& && s = 1.5\\
&r = \frac{1}{6};\ s = 1.5 \text{ in } (1): && \frac{1}{3} - 1.5 \neq 0 \rightarrow \text{keine Schnittpunkte}\\
& && \Rightarrow \text{windschief}
\end{aligned}
$$

6.3 Ebenen im Raum



$$
\begin{aligned}
&E: \ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AB} \qquad r, s \in \mathbb{R}\\
&E: \ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}
\end{aligned}
$$

Parametergleichung einer Ebene

Jede Ebene lässt sich durch eine Parametergleichung der Form

$$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

beschreiben.
$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die Spannvektoren. Sie dürfen keine Veilfachen voneinader sein. $\vec{p}$ ist der Stützvektor.

Beispiel

$a)$ Bestimme die Parametergleichung der Ebene, die durch die Punkte A, B und C verläuft.

$$A(1,0,1);\ B(1,1,0);\ C(0,0,1)$$

$$E:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$b)$ Gegeben ist die Ebene E mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Bestimme, ob die Punkte $A(7,5,4)$ und $B(7,1,8)$ auf der Ebene E liegen.

$$A(7,5,4):\qquad \begin{pmatrix}7\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$5 = r + 2s \qquad (1)$$
$$5 = 3r - s \qquad (2)$$
$$3 = 5r + s \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}
(2)+(3):&\quad 8 = 8r\\
&\rightarrow r = 1\\
r = 1 \text{ in } (1):&\quad 5 = 1 + 2s\\
&\rightarrow s = 2\\
r = 1;\ s = 2 \text{ in } (2):&\quad 5 \neq 3 - 2 \Rightarrow A \notin E
\end{aligned}$$

$$B(7,1,8):\qquad \begin{pmatrix}7\\1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$5 = r + 2s \qquad (1)$$
$$1 = 3r - s \qquad (2)$$
$$7 = 5r + s \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}
(2)+(3):&\quad 8 = 8r\\
&\rightarrow r = 1\\
r = 1 \text{ in } (1):&\quad 5 = 1 + 2s\\
&\rightarrow s = 2\\
r = 1;\ s = 2 \text{ in } (2):&\quad 1 = 3 - 2 \Rightarrow B \in E
\end{aligned}$$

$c)$ Überprüfe ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen.

$$A(0,1,-1);\ B(2,3,5);\ C(-1,3,-1);\ D(2,2,2)$$

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Durch } A, B, C\text{)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 = 2r - s \tag{1}$$
$$1 = 2r + 2s \tag{2}$$
$$3 = 6r \tag{3}$$

$$\begin{aligned} (3):& \qquad & 3 &= 6r \\ & & \rightarrow r &= \frac{1}{2} \\ r = \frac{1}{2} \text{ in } (1):& & 2 &= 1 - s \\ & & \rightarrow s &= -1 \\ r = \frac{1}{2};\ s = -1 \text{ in } (2):& & 1 &\neq 1 - 2 \Rightarrow D \notin E \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A,\ B,\ C \text{ und } D \text{ liegen nicht in einer Ebene.}$$

6.4 Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt

Skalarprodukt

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Der Term
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
heißt **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Beweis

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 = |\vec{a}|^2$$

Beispiel

Bestimme, ob sich die Geraden g und h orthogonal schneiden.

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix};\quad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

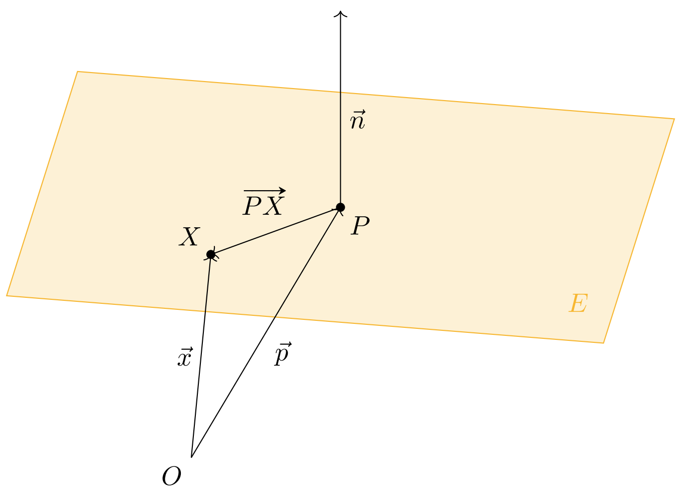
$$g \cap h : P(8, -9, 7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 26 + 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Sie schneiden sich nicht orthogonal.

6.5 Normalen- und Koordinatengleichung einer Ebene

Der Punkt P ist ein beliebiger Punkt in der Ebene E.
Der Vektor $\vec{n}$ steht orthogonal auf der Ebene E und wird **Normalvektor** der Ebene E genannt.



Die Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{x} - \vec{p}$ sind orthogonal, daher gilt $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$.
Auch umgekehrt gilt, dass ein Punkt X, der die Gleichung $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ erfüllt, in der Ebene E liegt.

Normalengleichung einer Ebene

Eine Ebene E mit dem Stützvektor $\vec{p}$ und dem Normalvektor $\vec{n}$ wird beschreiben durch die Gleichung:

$$E:\ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Alle Punkte X, die diese Gleichung erfüllen, liegen in E.

Beispiel

Gib die Normalengleichung der Ebene mit dem Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, die auf $P(1, 2, 3)$ liegt.

$$E:\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Durch Ausmultiplizieren der Normalengleichung erhält man eine weitere Gleichung, um die Ebene zu beschreiben.

$$\begin{aligned}
\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0 \\
\vec{x} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0 \\
4x_1 + x_2 - 2x_3 - (4 + 2 - 6) &= 0 \\
4x_1 + 1x_2 - 2x_3 &= 0
\end{aligned}$$

Koordinatengleichung einer Ebene

Jede Ebene E lässt sich durch eine **Koordinatengleichung** der Form

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

beschreiben. Mindestens einer der Koeffizienten muss ungleich 0 sein.

Der Normalvektor $\vec{n}$ einer Ebene E mit der Koordinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Beispiel

Begründe, dass die Ebenen E_1 und E_2 parallel sind.

$$E_1 : \; 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$$

$$E_2 : \; 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$$

E_1 und E_2 haben den gleichen Normalvektor.
$\Rightarrow E_1 \parallel E_2$

Die Koordinatenebenen lassen sich mit folgenden Koordinatengleichungen beschreiben:

- x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$
- x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$
- x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$

6.6 Ebenengleichungen umformen – das Kreuzprodukt

$$E : \; \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}$$

Um die Ebene E mit einer Normalen- oder Koordinatengleichung zu beschreiben,
braucht man $\vec{n}$ mit $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix} = 0$.

Kreuzprodukt

Unter dem Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$ versteht man den Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ("kreuz") mit:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$, falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ keine Vielfachen sind. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vielfache voneinader sind.

Rechenverfahren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} \end{array} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gib die Koordinatengleichung der Ebene E mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ an.

$$\vec{n}: \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ -2-6 \\ 10+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$E: \ -x_1 - 4x_2 + 6x_3 = d$$

$$\text{mit } P(1,3,2): \quad -1 - 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = d = -1$$

$$\Rightarrow E: \ -x_1 - 4x_2 + 6x_3 = -1$$

$$E: \ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 8$$

Um die Ebene E mit einer Parametergleichung zu beschreiben, gibt es zwei Vorgehensweisen:

1. 3 Punkte finden, die die Gleichung erfüllen, also in der Ebene liegen, die nicht auf einer Geraden liegen.

Wir wählen

$$P_1(0,0,-8); \ P_2(4,0,0); \ P_3(5,0,2)$$

$$E: \ \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + r \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + s \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ sind Vielfache von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir wählen einen weiteren Punkt $P_4(1, -2, 0)$ statt P_3.

$$\Rightarrow E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Auflösen nach einer Variable und die anderen den Parametern r und s gleichsetzen. Dann die Vektoren so wählen, dass die Zeilen mit den Gleichungen übereinstimmen.

$$E: \ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 8$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 2x_1 - 3x_2 - 8 \\ &= 2r - 3s - 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

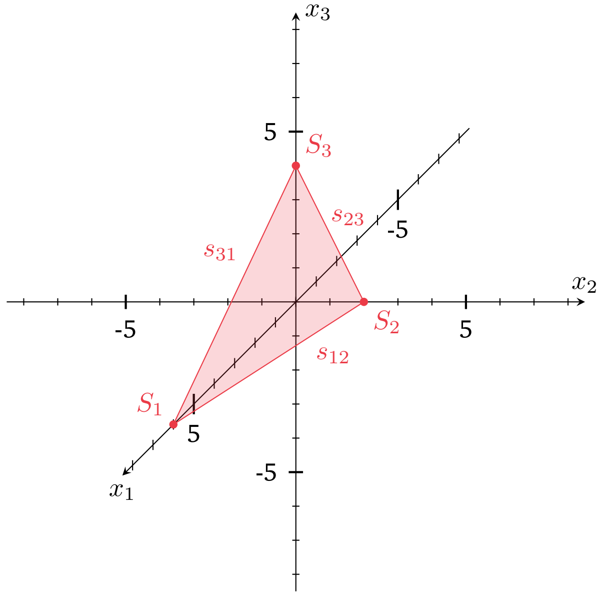
6.7 Ebenen veranschaulichen

$$E: \ 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 12$$

Die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen heißen **Spurpunkte**.

$S_1(6, 0, 0)$; $S_2(0, 2, 0)$; $S_3(0, 0, 4)$

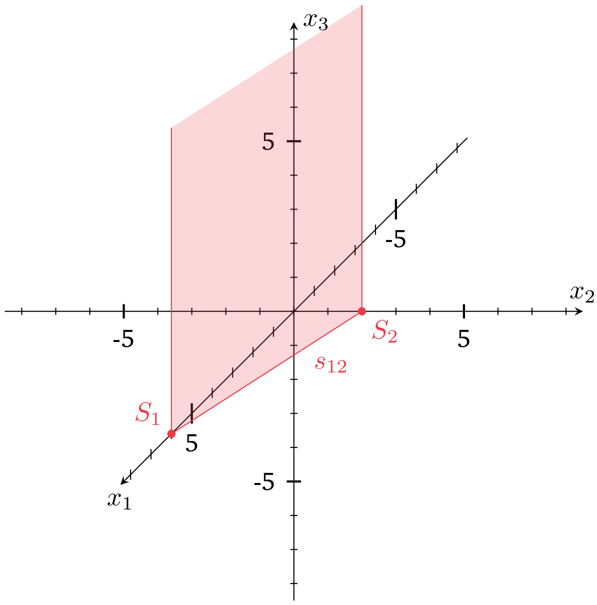
Die gemeinsamen Punkte der Ebene mit den Koordinatenebenen heißen **Spurgeraden**.



$$E:\ 2x_1 + 6x_2 = 12$$

$$S_1(6,0,0);\ S_2(0,2,0)$$

E ist parallel zur x_3-Achse

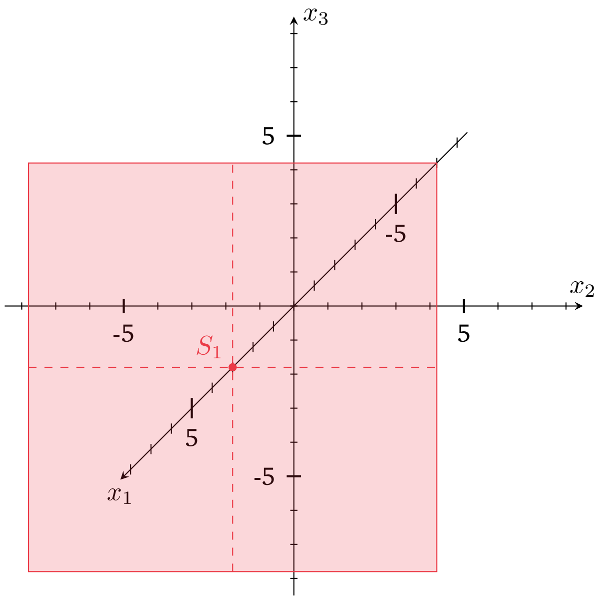


$$E:\ 4x_1 = 12$$

$$E:\ x_1 = 3$$

$$S_1(3,0,0)$$

E ist parallel zur x_2x_3-Ebene.



Um eine Ebenengleichung anhand der Spurpunkte zu bestimmen, gilt mit allgemeinen Spurpunkten

$$S_1(a,0,0);\ S_2(0,b,0);\ S_3(0,0,c)$$

für die Ebene:

$$E:\ \frac{1}{a}x_1 + \frac{1}{b}x_2 + \frac{1}{c}x_3 = 1$$

Durch multiplizieren mit dem gemeinsamen Vielfachen abc erhält man eine ganzzahlige Ebenengleichung.

6.8 Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden

Unterscheide

Nur die gegenseitige Lage ist gefragt	Schnittpunkt ist gefragt
$\rightarrow \vec{n}; \vec{u}_g$ untersuchen	$\rightarrow g \cap E$

Beispiel

Bestimme die Lage der Geraden g, h und i zu $E:\ 2x_1+5x_2-x_3=49$ und berechne ggf. den Schnittpunkt.

$a)\quad g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}\neq 0 \quad \rightarrow g \text{ und } E \text{ schneiden sich}$$

$$g:\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}2(3+2t)+5(4+t)-(7-t)&=49\\6+4t+20+5t-7+t&=49\\10t&=30\\t&=3\end{aligned}$$

$$\text{in } g: \qquad \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\7\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S(9,7,4)$$

$b)\quad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\8\\-3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}=0 \quad \rightarrow g \text{ und } E \text{ liegen parallel oder } g \text{ liegt in } E$$

$$P(3,8,-3) \text{ in } E: \qquad 2\cdot 3+5\cdot 8-(-3)=49$$

$$\Rightarrow g \text{ liegt in } E$$

c) $\quad i:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \rightarrow g \text{ und } E \text{ liegen parallel oder } g \text{ liegt in } E$$

$$P(3,4,7) \text{ in } E: \qquad 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 7 \neq 49$$

$$\Rightarrow i \text{ liegt parallel zu } E$$

6.9 Gegenseitige Lage von Ebenen

Es gibt drei mögliche gegenseitige Lagen zweier Ebenen:

- parallel und verschieden (echt parallel)
- identisch
- sie schneiden sich in einer Geraden

Fallunterscheidung

Gegeben sind die Ebenen E und F mit:

$$E:\ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_E = 0 \qquad F:\ (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_F = 0$$

Sind die Normalvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$ Vielfache?

- **ja**: E und F sind parallel oder identisch
  - P liegt in F bzw. Q liegt in E: identisch
  - P liegt nicht in F bzw. Q liegt nicht in E: echt parallel
- **nein**: E und F schneiden sich in einer Geraden
  - $\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F = 0$: E und F schneiden sich orthogonal
  - $\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F \neq 0$: E und F schneiden sich

Beispiel

Bestimme die Schnittgerade der beiden Ebenen.

a) $\quad E_1:\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 12;\ E_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2: \quad 8 - 4r + 5s - r + 3(2 + r - s) &= 12 \\ -2r + 2s &= -2 \\ 2s &= -2 + 2r \\ s &= r - 1 \end{aligned}$$

$$s = r - 1 \text{ in } E_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix} + (r-1) \cdot \begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$b)$ $\quad F_1: \ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1; \ F_2: \ 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$

$$F_1 \cap F_2: \quad 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \tag{1}$$

$$5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \tag{2}$$

$$\text{(1)} + 2 \cdot \text{(2)}: \quad 13x_1 - 5x_3 = 13 \qquad | \ x_3 = t$$

$$13x_1 - 5t = 13 \qquad | \ +5t; \ \cdot \frac{1}{13}$$

$$x_1 = 1 + \frac{5}{13}t$$

$$x_1 = 1 + \frac{5}{13}t \text{ in (2)}: \quad 5\left(1 + \frac{5}{13}t\right) + 2x_2 - 3t = 6$$

$$\frac{25}{13}t + 2x_2 - 3t = 1$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{7}{13}t$$

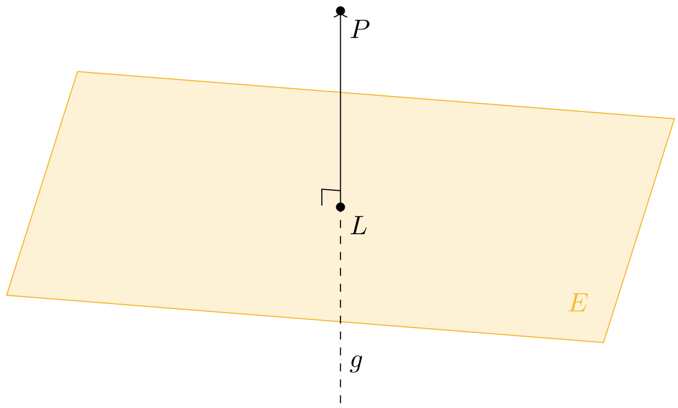
$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0.5\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}5/13\\7/13\\1\end{pmatrix} \qquad | \ \vec{n} \cdot 13$$

$$\Rightarrow h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0.5\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}5\\7\\13\end{pmatrix}$$

7 Abstände und Winkel

7.1 Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Unter dem Abstand eines Punktes P von einer Ebene E versteht man immer die Länge der kürztmöglichsten Verbindung des Punktes und der Ebene.
Diesen erhält man, indem man von P aus das Lot auf die Ebene E fällt und den Abstand des Punktes P vom Lotfußpunkt L bestimmt.



Hierzu stellt man eine Hilfsgerade g auf, die orthogonal zur Ebene E ist und durch den Punkt P verläuft. Als Richtungsvektor von g wählt man daher den Normalenvektor der Ebene E und als Stützvektor den Ortsvektor des Punktes P. Dem Lotfußpunkt erhält man als Schnittpunkt der Hilfsgerade g mit der Ebene E.

Hessesche Normalform

Wenn man als Normalenvektor einer Ebene E einen Einheitsvektor ($|\vec{n}_0| = 1$) nimmt, heißt die Ebenengleichung $E:\ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$ **Hessesche Normalform (HNF)**.
Hiermit lässt sich der Abstand d eines Punktes R von der Ebene E einfach in einem Schritt berechnen.
Es gilt:

$$d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$$

Beispiel

$a)$ Bestimme den Abstand des Punktes $R(9, 4, -3)$ von der Ebene E mit $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

$$E \text{ in HNF}: \quad \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} d(R, E) &= \left|\left[\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\right| = \left|(8 + 14 - 8) \cdot \frac{1}{3}\right| = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

$b)$ Bestimme den Abstand des Punktes $Q(1,6,2)$ von der Ebene F mit $F:\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1$.

$$\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$F \text{ in HNF}: \quad \frac{x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 1}{\sqrt{21}} = 0$$

$$\begin{aligned} d(Q,F) &= \left|\frac{1 - 2\cdot 6 + 4\cdot 2 - 1}{\sqrt{21}}\right| \\ &= \left|\frac{-4}{\sqrt{21}}\right| = \frac{4}{\sqrt{21}} \end{aligned}$$

$b)$ Bestimme die zur Ebene E mit $E:\ 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 5$ parallele Ebenen F_1 und F_2, die von E den Abstand 3 LE haben.

$$F:\ 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = k;\ R(r_1, r_2, r_3) \in F$$

$$\begin{aligned} E \text{ in HNF}: \quad \frac{12x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 5}{14} &= 0 \\ d(R,E) &= 3 \\ \left|\frac{12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5}{14}\right| &= 3 \end{aligned}$$

Fall 1 :

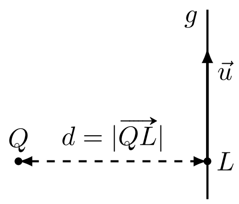
$$\begin{aligned} \frac{12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5}{14} &= 3 \\ 12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5 &= 42 \\ 12r_1 + 6r_2 - 4r_3 &= 47 \\ \Rightarrow F_1:\ 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 47 \end{aligned}$$

Fall 2 :

$$\begin{aligned} \frac{12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5}{14} &= -3 \\ 12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5 &= -42 \\ 12r_1 + 6r_2 - 4r_3 &= -37 \\ \Rightarrow F_2:\ 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= -37 \end{aligned}$$

7.2 Abstand eines Punktes zu einer Gerade

Der Verbindungsvektor zwischen dem Punkt Q und einem allgemeinen Geradenpunkt P muss senkrecht zum Richtungsvektor $\vec{u}$ der Gerade g sein.
Dazu setzt man das Skalarprodukt $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u} = 0$. Man erhält den Parameter, für den dies der Fall ist. Setzt man diesen in den allgemeinen Geradenpunkt P ein, erhält man den Lotfußpunkt L.
Der Abständ dann beträgt dann $d = |\overrightarrow{QL}|$.



Beispiel

Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt $Q(6, -6, 9)$ und der Gerade g mit $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4-2r \\ 5+r \\ 6+r \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 4-2r \\ 5+r \\ 6+r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2r-2 \\ r+11 \\ r-3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \begin{pmatrix} -2r-2 \\ r+11 \\ r-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ (-2)(-2r-2) + (r+11) + (r-3) &= 0 \\ r &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OL} &= \begin{pmatrix} 4 - 2 \cdot (-2) \\ 5 + (-2) \\ 6 + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow L(8, 3, 4) \\ \overrightarrow{QL} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} \\ |\overrightarrow{QL}| &= \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 9^2 + (-5)^2} = \sqrt{110} \end{aligned}$$

7.3 Abstand zweier Geraden

Der Abstand zwischen zwei Geraden g und h lassen sich wiefolt bestimmen:

1. Schneiden sich g und h beträgt der Abstand $d = 0$.
2. Verlaufen g und h parallel zueinander, wählt man einen beliebigen Punkt R auf der Geraden g und bestimmt den Abstand von R zu h. (s. *7.2 Abstand eines Punktes zu einer Gerade*)
3. Sind g und h windschief, gibt es zwei Möglichkeit, je nach dem ob nur der Abstand oder auch die Lotfußpunkte gefragt sind.

1. Möglichkeit (Lotfußpunkte):
Man stellt die allgemeinen Geradenpunkte P_g und P_h der Geraden g und h auf.
Der allgemeine Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_gP_h}$ zwischen den Geraden g und h muss sowohl zum Richtungsvektor $\vec{u}_g$ der Gerade g als auch zum Richtungsvektor $\vec{u}_h$ der Gerade h orthogonal sein:

$$\overrightarrow{P_gP_h} \cdot \vec{u}_g = 0 \tag{1}$$
$$\overrightarrow{P_gP_h} \cdot \vec{u}_h = 0 \tag{2}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystem führt die beiden Parameter der Geradengleichungen, die zu den Lotfußpunkten L_g und L_h führen.
Der Abstand beträgt beträgt dann $d = |\overrightarrow{L_gL_h}|$.

2. Möglichkeit (nur Abstand):
Zur Berechnung des Abstands zwischen den Geraden g und h dient die Formel

$$d(g,h) = |(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$$

Dabei wählt man $P \in g$; $Q \in h$, und $\vec{n}_0$ ist der Einheitsvektor (vgl. *7.1 Hessesche Normalform*) von $\vec{n}$ mit:

$$\vec{n} = \vec{u}_g \times \vec{u}_h$$

Beispiel

Bestimme den Abstand der Geraden g und h mit $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$; $h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

1. Möglichkeit:

$$\overrightarrow{OP_g} = \begin{pmatrix}1\\4+s\\2+2s\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OP_h} = \begin{pmatrix}2+4t\\-t\\1-t\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{P_gP_h} = \begin{pmatrix}2+4t\\-t\\1-t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\4+s\\2+2s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+4t\\-4-t-s\\-1-t-2s\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1+4t\\-4-t-s\\-1-t-2s\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$
$$\begin{pmatrix}1+4t\\-4-t-s\\-1-t-2s\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow -3t - 5s = 6 \tag{1}$$
$$\Leftrightarrow 18t + 3s = -9 \tag{2}$$

$$\Rightarrow s = -1;\ t = -\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{OL_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 + (-1) \\ 2 + 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OL_h} = \begin{pmatrix} 2 + 4\,(-1/3) \\ -\,(-1/3) \\ 1 - (-1/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

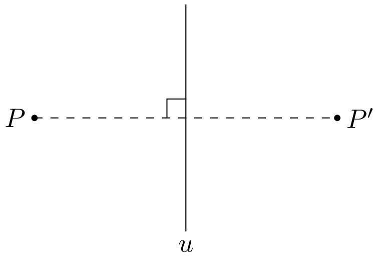
$$\Rightarrow d = |\overrightarrow{L_g L_h}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = 3$$

2. Möglichkeit:

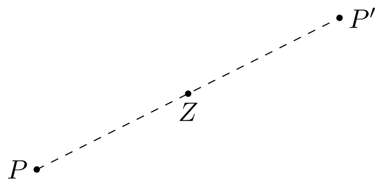
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}; |\vec{n}| = 9$$

$$\begin{aligned} d(g,h) &= \left| \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \right| \\ &= \left| 27 \cdot \frac{1}{9} \right| = 3 \end{aligned}$$

7.4 Spiegelung und Symmetrie

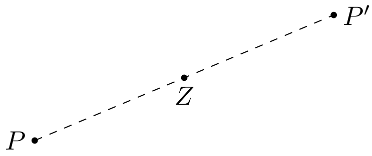


Achsenspiegelung



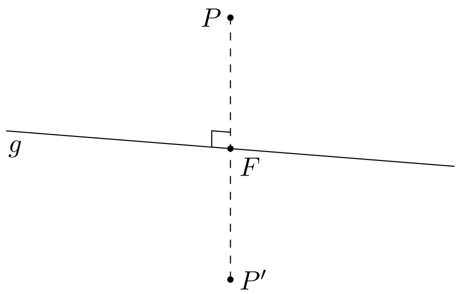
Punktspiegelung

Spiegelung und Symmetrie im $\mathbb{R}^3$:



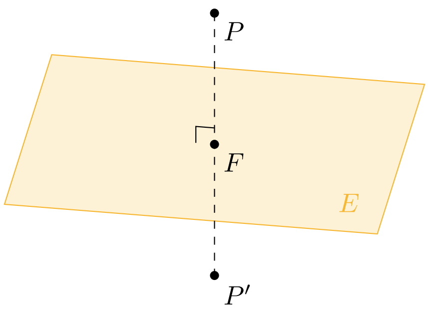
Punktspiegelung

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PZ}$$
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{PZ}$$



Spiegelung an Gerade

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$$
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}$$



Spiegelung an Ebene

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$$
$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}$$

Beispiel

Spiegle den Punkt $P(3,3,0)$
$a)$ am Punkt $Z(1,-2,5)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{PZ} \\ &= \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-5\\5\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-1\\-7\\10\end{pmatrix} \\ &\Rightarrow P'(-1,-7,10)\end{aligned}$$

$b)$ an der Gerade g mit $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\9\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix}-2+t\\-4-2t\\9+2t\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG}\cdot\vec{u} &= 0 \\ \begin{pmatrix}-5+t\\-7-2t\\9+2t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} &= 0 \\ 27+9t &= 0 \\ t &= -3 \\ \Rightarrow \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}-2+(-3)\\-4-2(-3)\\9+2(-3)\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{PL} \\ &= \begin{pmatrix}-5\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-8\\-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\1\\6\end{pmatrix} \\ &\Rightarrow P'(-13,1,6)\end{aligned}$$

$c)$ an der Ebene E mit $E: 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$

$$l:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}l\cap E: \qquad 3(3+3r)+2(3+2r)+r &= 8 \\ 14r+15 &= 8 \\ r &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.5\\2\\-0.5\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{PF}\\ &= \begin{pmatrix}1.5\\2\\-0.5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1.5\\-1\\-0.5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P'(0, 1, -1)$$

7.5 Modellieren von geradlinigen Bewegung

U-Boote, Flugzeuge, etc. bewegen sich oft näherungsweise geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit. Ihre Bahngleichungen können somit durch Geradengleichungen beschreiben werden.

$$\vec{x} = \vec{p} + t\cdot\vec{v}$$

Dabei steht

- der Parameter t für die vergangene Zeit nach (Beobachtungs-)Beginn der Bewegung,
- der Stützvektor $\vec{p}$ für die Koordinaten des Startpunktes der Bewegung,
- der Richtungsvektor $\vec{v}$ für die Änderung der Koordinaten des Objekts innerhalb einer Zeiteinheit,
- die Länge des Richtungsvektors $|\vec{v}|$ für Geschwindigkeit des Objekts.

Beispiel

Ein Modellflugzeug befindet sich zu Beginn der Beobachtung im Punkt $A(100, 100, 100)$. Nach 3 Stunden befindet es sich im Punkt $B(10, 250, 85)$ (Längenangaben in km).

$a)$ Gebe die Bahngleichungen an.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-90\\150\\-15\end{pmatrix} \text{ in } 3\,\mathrm{h}$$

$$\rightarrow \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-90\\150\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30\\50\\-5\end{pmatrix}$$

$$\text{Bahngleichung: } \vec{x} = \begin{pmatrix}100\\100\\100\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-30\\50\\-5\end{pmatrix} \quad (t \text{ in } \mathrm{h},\ x \text{ in } \mathrm{km})$$

$b)$ Bestimme, ob das Flugzeug steigt oder sinkt und mit welcher Geschwindigkeit es fliegt.

x_3-Komponente von $\vec{v}$ ist negativ (-5), also sinkt das Flugzeug.

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{(-30)^2 + 50^2 + (-5)^2} \approx 58.52\\ &\Rightarrow 58.52\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\end{aligned}$$

$c)$ Wo befindet sich das Flugzeug $1.2\,\mathrm{h}$ nach Beobachtungsbeginn?

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}100\\100\\100\end{pmatrix} + 1.2\cdot\begin{pmatrix}-30\\50\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}64\\160\\94\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Im Punkt } P(64, 160, 94)$$

Die Bahngleichungen der Flugzeuge 1 und 2 lauten:

$$F_1:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix};\ F_2:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}-30\\-15\\8\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}12\\9\\0\end{pmatrix}\ \ (t \text{ in min}, x \text{ in km})$$

$a)$ Bestimme, ob es zu einem Zusammenstoß der beiden Flugzeuge kommt.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30\\-15\\8\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}12\\9\\0\end{pmatrix}$$
$$t\cdot\begin{pmatrix}-8\\-5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30\\-15\\8\end{pmatrix}$$

$t = 3.75$ aus Zeile 1; $t = 3$ aus Zeile 2
$\Rightarrow$ keine Lösung
$\Rightarrow$ Es kommt zu keinem Zusammenstoß

$b)$ Bestimme, ob sich die beiden Flugbahnen schneiden.

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-30\\-15\\8\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}12\\9\\0\end{pmatrix}$$

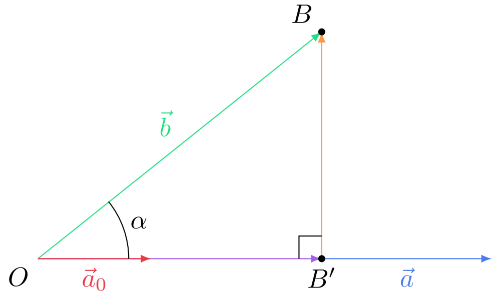
$$4s - 12t = -30 \tag{1}$$
$$4s - 9t = -15 \tag{2}$$
$$s = 8 \tag{3}$$

$$\begin{aligned} s = 8 \text{ in } (1):\quad && 32 - 12t &= -30\\ && t &= \frac{31}{6}\\ s = 8 \text{ in } (2):\quad && 32 - 9t &= -15\\ && t &= \frac{47}{9} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ keine Lösung
$\Rightarrow$ Die Flugbahnen schneiden sich nicht

7.6 Winkel zwischen Vektoren

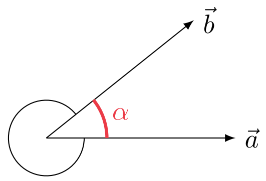
$$\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \vec{a}\cdot\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{B'B}\right)\\
&= \vec{a}\cdot\overrightarrow{OB'} + \underbrace{\vec{a}\cdot\overrightarrow{B'B}}_{\substack{=\,0,\text{ da}\\ \vec{a}\,\perp\,\overrightarrow{B'B}}}\\
&= \underbrace{|\vec{a}|\cdot\vec{a}_0}_{\vec{a}}\cdot\underbrace{|\overrightarrow{OB'}|\cdot\vec{a}_0}_{\overrightarrow{OB'}}\\
&= |\vec{a}|\cdot|\overrightarrow{OB'}|\cdot\underbrace{\vec{a}_0\cdot\vec{a}_0}_{=|\vec{a}_0|^2=1}
\end{aligned}$$



$$\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\overrightarrow{OB'}| \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{|\overrightarrow{OB'}|}{|\vec{b}|}\\
\Leftrightarrow |\overrightarrow{OB'}| &= |\vec{b}|\cdot\cos\alpha
\end{aligned}$$

mit (1) : $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = v\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\cos\alpha$



$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Satz

Unter dem Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den **kleineren** der beiden Winkel, der entsteht, wenn man die Pfeile der Vektoren **zu einem gemeinsamen Anfangspunkt** zeichnet.

Für den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Beispiel

a) Bestimme den Winkel α des Dreiecks ABC mit $A(1,-1,-5);\ B(3,2,-4);\ C(5,-1,-2)$.

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}\\
&= \frac{\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{14}\cdot 5} = \frac{11}{5\sqrt{14}}\\
\alpha &= \arccos\left(\frac{11}{5\sqrt{14}}\right)\approx 54^\circ
\end{aligned}$$

$b)$ Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimme b so, dass der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ $60°$ beträgt.

$$\begin{aligned}
\cos 60° &= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+b^2}} \\
\frac{1}{2} &= \frac{b}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+b^2}} 2b \qquad = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+b^2} \qquad \mid ()^2 \\
4b^2 &= 2\left(1+b^2\right) \\
4b^2 &= 2+2b^2 \\
b &= \pm 1
\end{aligned}$$

$$\text{Probe}: \quad b = 1: \quad \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$b = -1: \quad \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+(-1)^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow b = 1$$

7.7 Schnittwinkel

Satz

Für den Schnittwinkel α zwischen

- zwei Geraden g und h mit Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt: $\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- zwei Ebenen E_1 und E_2 mit Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ gilt: $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$
- der Geraden g der Ebene E_1 gilt: $\sin\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}_1|}$

Anmerkung

Unter dem Winkel zweier benachbarter Flächen in geometrischen Körpern im Inneren dieses Körpers. Dieser kann auch größer als $90°$ sein (Nebenwinkel des Schnittwinkels).

Beispiel

$a)$ Berechne den Schnittwinkel zwischen den Geraden g und h mit

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};\ h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}\right)$$

$$= \arccos\left(\frac{|-2|}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{26}}\right) = 85^\circ$$

$b)$ Berechne den Schnittwinkel zwischen der Geraden g und der Ebene E mit

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};\ E:\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 6.$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}_1|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}_1|}\right) = \arcsin\left(\frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}\right)$$

$$= \arcsin\left(\frac{|6|}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{6}}\right) = 33.21^\circ$$