4 Funktionen und ihre Graphen

4.1 Strecken, verschieben, spiegeln

Gegeben sei der Graph der Funktion f. Der in x-Richtung verschobene, in y-Richtung verschobene und in y-Richtung gestreckte Graph der Funktion g besitzt den Funktionsterm:

$$g(x) = a \cdot f(x - c) + d$$

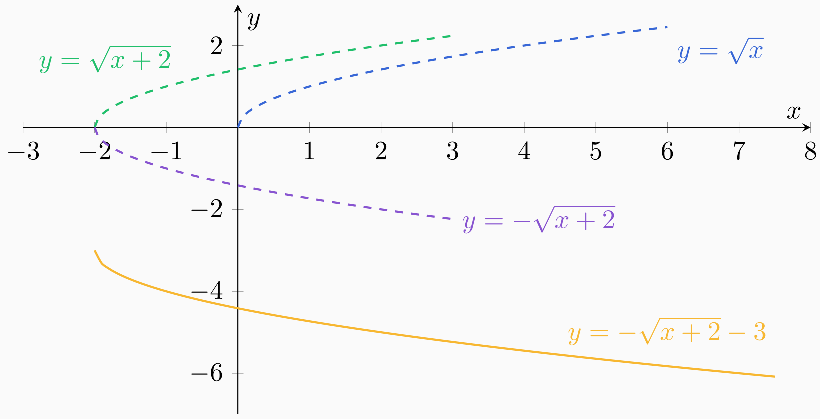
Bei den Spiegelungen von f gilt:

- $g(x) = f(-x)$ Spiegelung an der **y-Achse**
- $g(x) = -f(x)$ Spiegelung an der **x-Achse**
- $g(x) = -f(-x)$ Spiegelung am **Ursprung**

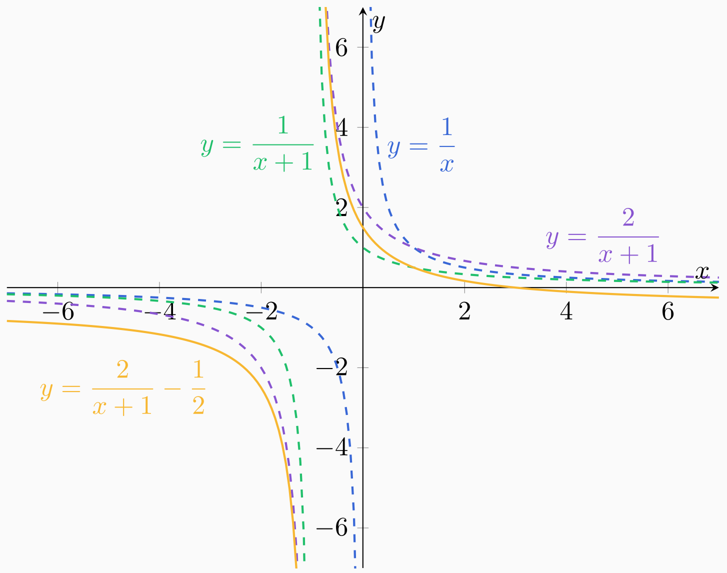
Beispiel

Skizziere die Graphen von f und g.

a) $f(x) = -\sqrt{x+2} - 3; \quad x \geq -2$



b) $g(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{2}; \quad x \neq -1$



Zeige, dass die Graphen von f_k mit $f_k(x) = kxe^{x^2}$; $k \in \mathbb{R}$ punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

$$\begin{aligned} f(-x) &= k \cdot (-x) \cdot e^{(-x)^2} \\ &= -kxe^{x^2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

□

4.2 Linearfaktordarstellung - mehrfache Nullstellen

Satz 1

Hat eine ganzrationale Funktion vom Grad n eine Nullstelle x_0, so gilt:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) \qquad \text{wobei } g \text{ vom Grad } n-1 \text{ ist.}$$

$(x - x_0)$ nennt man **Linearfaktor**.

Satz 2

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades besitzt höchstens n Nullstellen.

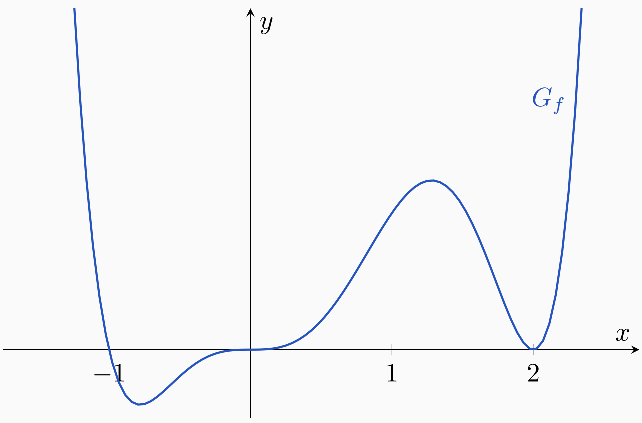
Satz 3

Sei $f(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$.

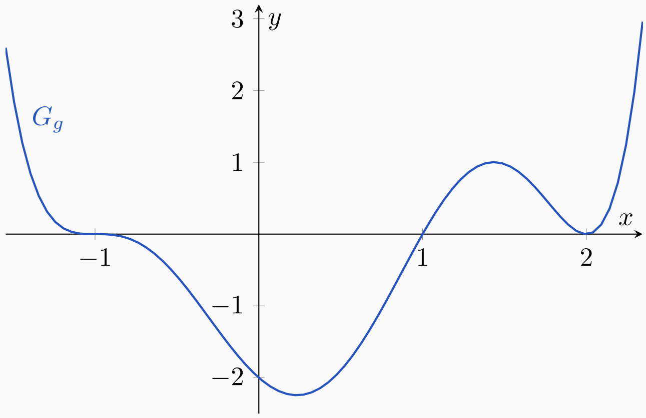
- Für $k = 1$: Schnittstelle von f mit der x-Achse.
- Für $k = 2$: Berührstelle von f an der x-Achse.
- Für $k = 3$: Sattelstelle von f an der x-Achse.

Beispiel

$a)$ Skizziere den Graph von f mit $f(x) = x^3(x-2)^2(x+1)$.



$b)$ Bestimme die Funktionsgleichung des folgenden Graphen.



$$g(x) = a(x+1)^3(x-1)(x-2)^2$$

$$\text{mit } a = 1: \; g(0) = -4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^3(x-1)(x-2)^2$$