5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Der Gauß-Algorithmus

Mehrere Gleichungen mit gemeinsamen (linearen) Variablen bilden ein **lineares Gleichungssystem (LGS).** Ein LGS mit 3 oder mehr Variablen löst man meistens mit dem **Gauß-Algorithmus** am sinnvollsten. Dabei werden durch

1. vertauschen von Gleichungen,
2. Multiplikation von einer oder mehrerer Gleichungen mit einer Zahl $\neq 0$,
3. Addition mehrerer Gleichungen und
4. Einsetzen einer Variablen in eine andere Gleichung

so lange Variablen eliminiert und dadurch bestimmt bis eine sogenannte **Stufenform** vorliegt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & x & x & x \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{array}\right) \longleftarrow \text{Matrix-Schreibweise}$$

Beispiel

Löse das LGS.

$$\begin{array}{lll} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3 & \mid \cdot (-3) & \mid \cdot (-2) \\ 3x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 13 & \mid \cdot 2 & \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 & & \mid \cdot 1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 18 & -1 & 17 \\ 0 & 6 & -13 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid \cdot 1 \\ \mid \cdot (-3) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 0 & 18 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & 38 & 38 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = 1$$

$$\begin{aligned} 18x_2 - 1 &= 17 \\ x_2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4 + 5 &= 3 \\ 2x_1 &= 2 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(1;\ 1;\ 1)\}$$

5.2 Lösungsmengen von LGS

Man bringt ein LGS wie gewohnt un Stufenform und erkennt dann schnell, dass ein LGS entweder

- **keine**
- **eine** oder
- **unendlich** viele Lösungen haben kann.

Bei keiner Lösung erhält man eine Zeile der Form $0 \cdot x_3 = 1$, bei unendlich vielen Lösungen erhält man bspw. $0 \cdot x_3 = 0$. Dann wählt man für x_3 einen beliebigen Parameter und gibt die anderen Variablen in Abhängigkeit von diesem an.

Beispiel

Bestimme die Lösungsmenge des LGS.
$a)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{ll} |\cdot(-2) & |\cdot 1 \\ |\cdot 1 & \\ & |\cdot 1 \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow x_3 = t$$

$$\begin{aligned} 3x_2 + 7t &= 12 \\ x_2 &= -\frac{7}{3}t + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2\left(-\frac{7}{3}t + 4\right) + 2t &= 3 \\ x_1 - \frac{14}{3}t + 8 + 2t = 3x_1 && = \frac{8}{3}t - 5 \end{aligned}$$
$$\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{8}{3}t - 5;\ -\frac{7}{3}t + 4;\ t\right)\right\}$$

$b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 8 & 8 \\ -3 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-2) \\ |\cdot 1 \\ \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \mathbb{L} = \{\}$$