4 Funktionen und ihre Graphen

4.1 Strecken, verschieben, spiegeln

Gegeben sei der Graph der Funktion f. Der in x-Richtung verschobene, in y-Richtung verschobene und in y-Richtung gestreckte Graph der Funktion g besitzt den Funktionsterm:

$$g(x) = a \cdot f(x - c) + d$$

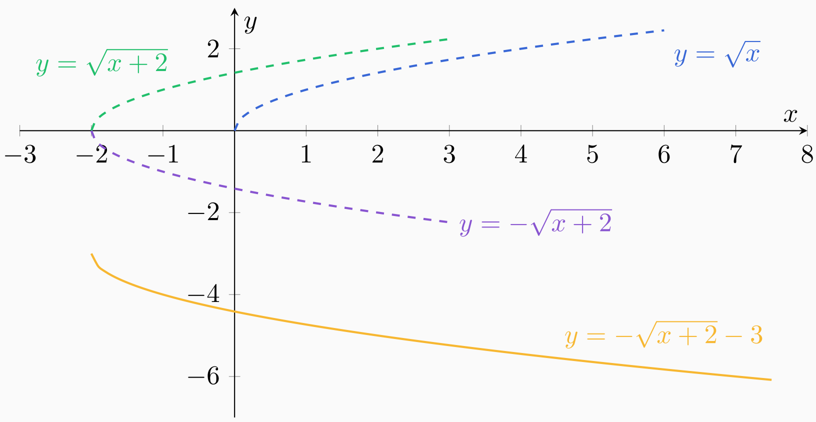
Bei den Spiegelungen von f gilt:

- $g(x) = f(-x)$ Spiegelung an der **y-Achse**
- $g(x) = -f(x)$ Spiegelung an der **x-Achse**
- $g(x) = -f(-x)$ Spiegelung am **Ursprung**

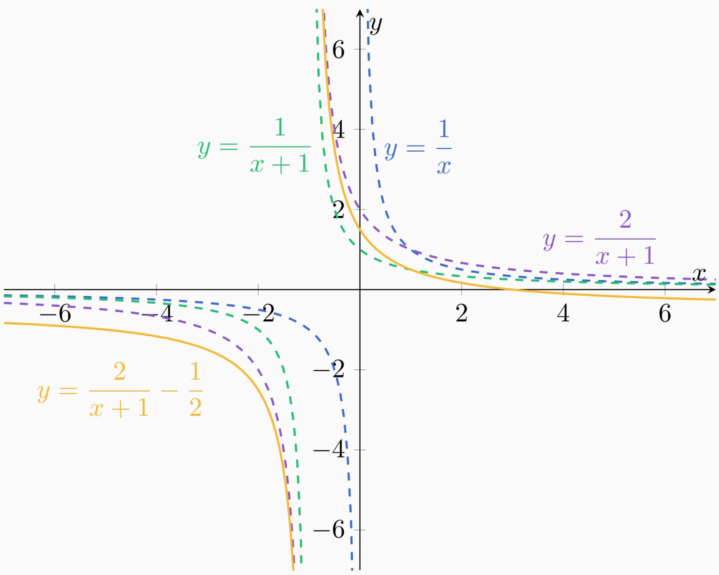
Beispiel

Skizziere die Graphen von f und g.

$a)$ $f(x) = -\sqrt{x+2} - 3; \quad x \geq -2$



$b)$ $g(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{2}; \quad x \neq -1$



Zeige, dass die Graphen von f_k mit $f_k(x) = kxe^{x^2};\ k \in \mathbb{R}$ punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

$$\begin{aligned} f(-x) &= k \cdot (-x) \cdot e^{(-x)^2} \\ &= -kxe^{x^2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

□

4.2 Linearfaktordarstellung - mehrfache Nullstellen

Satz 1

Hat eine ganzrationale Funktion vom Grad n eine Nullstelle x_0, so gilt:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) \qquad \text{wobei } g \text{ vom Grad } n-1 \text{ ist.}$$

$(x - x_0)$ nennt man **Linearfaktor**.

Satz 2

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades besitzt höchstens n Nullstellen.

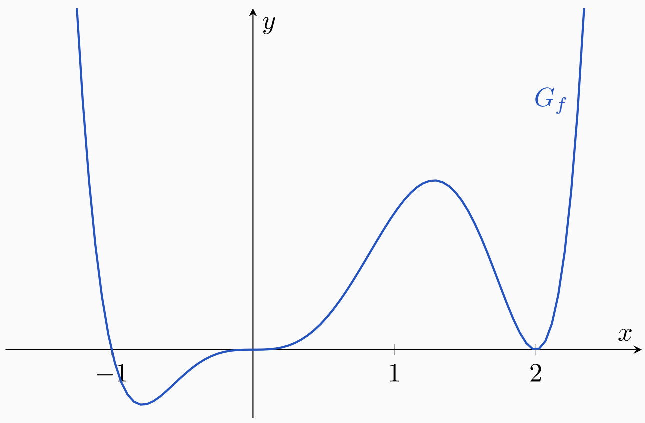
Satz 3

Sei $f(x) = (x-a)^k \cdot g(x)$.

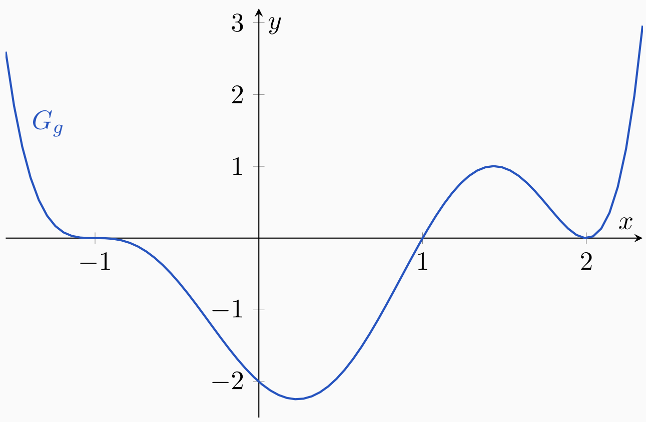
- Für $k = 1:$ Schnittstelle von f mit der x-Achse.
- Für $k = 2:$ Berührstelle von f an der x-Achse.
- Für $k = 3:$ Sattelstelle von f an der x-Achse.

Beispiel

$a)$ Skizziere den Graph von f mit $f(x) = x^3(x-2)^2(x+1)$.



$b)$ Bestimme die Funktionsgleichung des folgenden Graphen.



$$g(x) = a(x+1)^3(x-1)(x-2)^2$$
$$\text{mit } a = 1: \; g(0) = -4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$
$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^3(x-1)(x-2)^2$$

4.3 Lösen von Gleichungen

Folgende Strategien zum Lösen von diversen Gleichungen sind zielführend:

Betragsgleichungen

Führe eine Fallunterscheidung durch:

- für positive Beträge kann man den Betrag weglassen und die Gleichung wie gewohnt lösen.
- für negative Beträge wird eine Seite der Gleichung mit -1 multipliziert.

Beispiel

$$\left|\frac{10}{e^x-1}\right| = 2$$

Fall 1:
$$\frac{10}{e^x-1} = 2 \qquad | \cdot e^x - 1$$
$$10 = 2e^x - 2 \qquad | +2; \cdot\frac{1}{2}$$
$$6 = e^x \qquad | \ln$$
$$x = \ln 6$$

Fall 2:
$$-\frac{10}{e^x-1} = 2 \qquad | \cdot e^x - 1$$
$$-10 = 2e^x - 2 \qquad | +2; \cdot\frac{1}{2}$$
$$-4 = e^x \Rightarrow \text{keine Lösung}$$

Probe:
$$\left|\frac{10}{e^{\ln 6}-1}\right| = \left|\frac{10}{5}\right| = 2$$
$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\ln 6\}$$

Wurzelgleichungen

- isoliere die Wurzel
- quadriere beide Seiten der Gleichung

Beispiel

$$\begin{aligned}
\sqrt{20-2x}+6 &= x && \mid -6 \\
\sqrt{20-2x} &= x-6 && \mid ()^2 \\
20-2x &= (x-6)^2 \\
20-2x &= x^2-12x+36 && \mid -20+2x \\
x^2-10x+16 &= 0 \\
(x-2)(x-8) &= 0 \\
x_1 = 2;\ x_2 &= 8
\end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{20-2\cdot 2}+6=2 \Leftrightarrow 4+6\neq 2$

$\sqrt{20-2\cdot 8}+6=8 \Leftrightarrow 2+6=8$

$\Rightarrow \mathbb{L}=\{8\}$

Bruchgleichungen

- Bestimme den Hauptnenner
- Beide Seiten mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren

Beispiel

$$\begin{aligned}
\frac{6}{x^4}-\frac{5}{x^2} &= -1 && \mid \cdot x^4 \\
6-5x^2 &= -x^4 && \mid +x^4 \\
x^4-5x^2+6 &= 0 && \mid u=x^2 \\
u^2-5u+6 &= 0 \\
(u-2)(u-3) &= 0 \\
u_1 = 2;\ u_2 &= 3 && \mid x^2 = u
\end{aligned}$$

$x^2 = 2$ $x^2 = 3$

$x_1 = \pm\sqrt{2}$ $x_2 = \pm\sqrt{3}$

$x^4 \neq 0$ und $x^2 \neq 0$ für $x = \pm\sqrt{2}$ oder $x = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ -\sqrt{3}\}$

Ungleichungen

Entweder: Mit Vergleichszeichen auflösen und aufpassen bei Mulitplikation oder Division mit negativen Zahlen.

Oder: Eine Gleichung lösen und Werte größer und kleiner als die Lösung testen.

Beispiel

$$\begin{aligned}
1-\left(\frac{1}{2}\right)^x &< 0.05 && \mid -1\\
-\left(\frac{1}{2}\right)^x &< -0.95 && \mid \cdot(-1)\\
\left(\frac{1}{2}\right)^x &> 0.95 && \mid \log\\
x\log 0.5 &> \log 0.95 && \mid \cdot \frac{1}{\log 0.5}\\
x &< \frac{\log 0.95}{\log 0.5} \approx 0.074
\end{aligned}$$