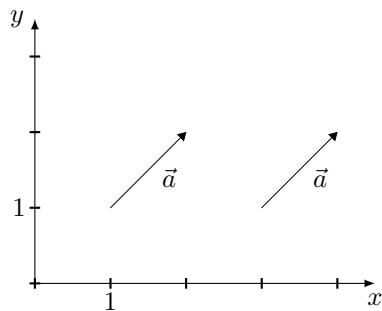


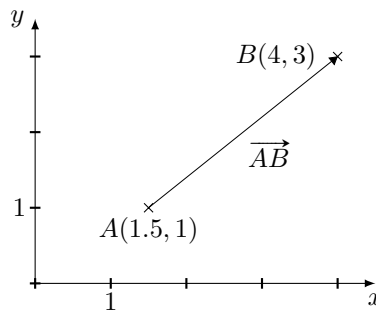
6 Geraden und Ebenen

6.1 Vektoren im Raum

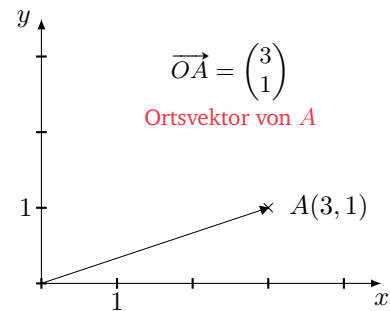
Vektoren kommen hauptsächlich auf folgende 3 Arten und Weisen vor:



(a) Als Pfeil (mit beliebigem Anfang)



(b) Als Pfeil (zwischen 2 Punkten)



(c) Als Punkt

Gegenvektor

Gegenvektor eines Vektors \vec{a} ist der Vektor $-\vec{a}$.

Beispiel

Bestimme den Gegenvektor zum Vektor $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{BA} = -\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt

Der Mittelpunkt M zweier Punkte $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ ergibt sich wie folgt:

$$M \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

Beispiel

Bestimme den Mittelpunkt M der Punkte $A(2, 3, 3)$ und $B(4, 1, 2)$.

$$\Rightarrow M(3, 2, 2.5)$$

Betrag

Der Betrag eines Vektors \vec{a} ist geometrisch die Länge des zugehörigen Pfeils. Er lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiel

Berechne den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

Einheitsvektor

Der Einheitsvektor \vec{a}_0 ist der Vektor, der in dieselbe Richtung wie \vec{a} zeigt, und den Betrag 1 hat. Er errechnet sich mit:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Beispiel

Bestimme den Einheitsvektor \vec{a}_0 des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme jeweils den fehlenden Punkt.

a) $A(0, -1, 2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow B(3, 2, 5)\end{aligned}$$

b) $B(2, 0, 3)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow A(-1, -3, 0)\end{aligned}$$