4 Funktionen und ihre Graphen

4.1 Strecken, verschieben, spiegeln

Gegeben sei der Graph der Funktion f. Der in x-Richtung verschobene, in y-Richtung verschobene und in y-Richtung gestreckte Graph der Funktion g besitzt den Funktionsterm:

$$g(x) = a \cdot f(x - c) + d$$

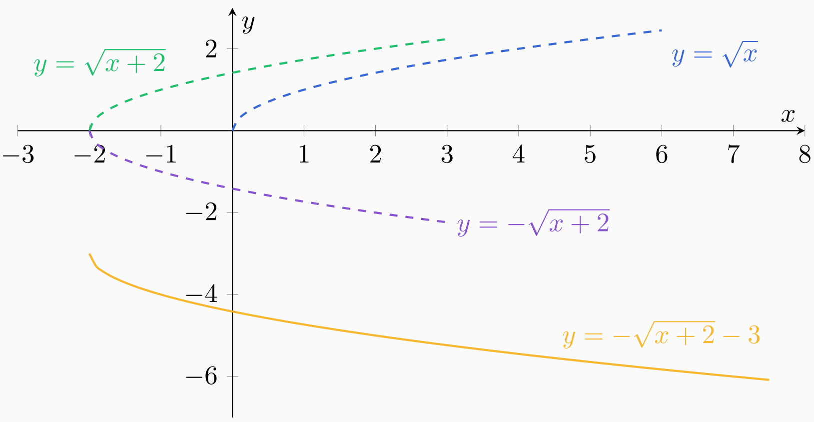
Bei den Spiegelungen von f gilt:

- $g(x) = f(-x)$ Spiegelung an der **y-Achse**
- $g(x) = -f(x)$ Spiegelung an der **x-Achse**
- $g(x) = -f(-x)$ Spiegelung am **Ursprung**

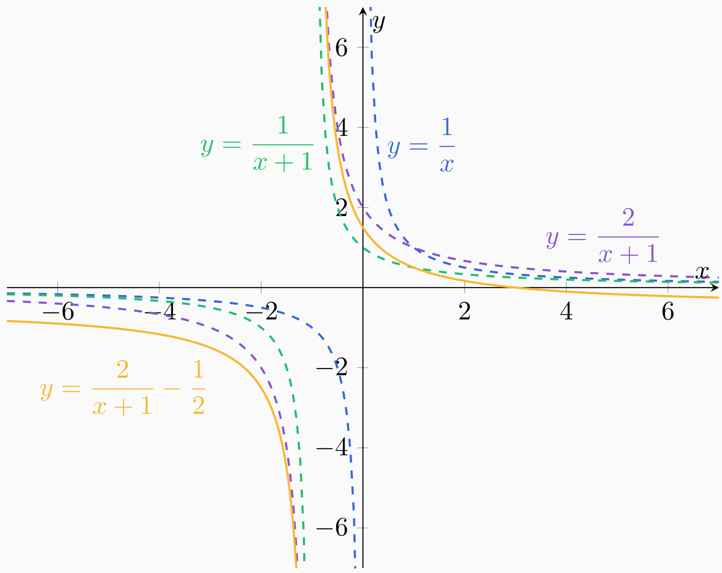
Beispiel

Skizziere die Graphen von f und g.

a) $f(x) = -\sqrt{x+2} - 3; \quad x \geq -2$



b) $g(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{2}; \quad x \neq -1$



Zeige, dass die Graphen von f_k mit $f_k(x) = kxe^{x^2};\ k \in \mathbb{R}$ punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

$$\begin{aligned} f(-x) &= k \cdot (-x) \cdot e^{(-x)^2} \\ &= -kxe^{x^2} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

□

4.2 Linearfaktordarstellung - mehrfache Nullstellen

Satz 1

Hat eine ganzrationale Funktion vom Grad n eine Nullstelle x_0, so gilt:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) \qquad \text{wobei } g \text{ vom Grad } n-1 \text{ ist.}$$

$(x - x_0)$ nennt man **Linearfaktor**.

Satz 2

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades besitzt höchstens n Nullstellen.

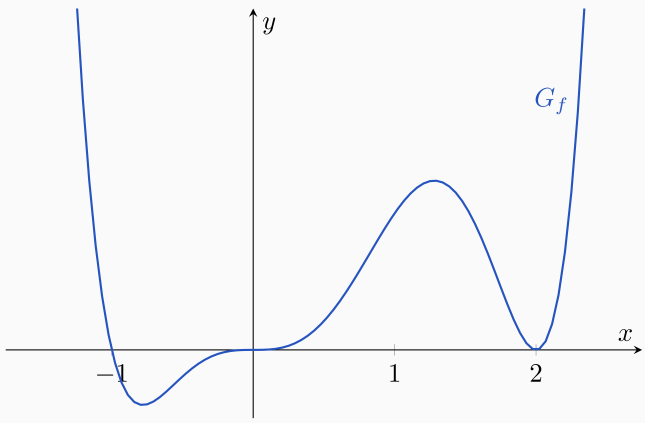
Satz 3

Sei $f(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$.

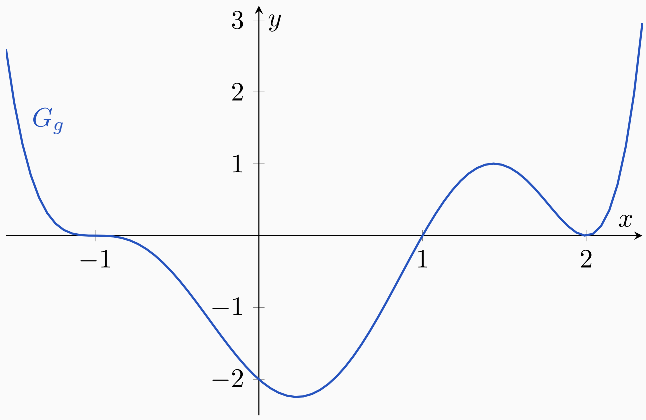
- Für $k = 1$: Schnittstelle von f mit der x-Achse.
- Für $k = 2$: Berührstelle von f an der x-Achse.
- Für $k = 3$: Sattelstelle von f an der x-Achse.

Beispiel

$a)$ Skizziere den Graph von f mit $f(x) = x^3(x-2)^2(x+1)$.



b) Bestimme die Funktionsgleichung des folgenden Graphen.



$$g(x) = a(x+1)^3(x-1)(x-2)^2$$

$$\text{mit } a = 1: \ g(0) = -4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^3(x-1)(x-2)^2$$

4.3 Lösen von Gleichungen

Folgende Strategien zum Lösen von diversen Gleichungen sind zielführend:

Betragsgleichungen

Führe eine Fallunterscheidung durch:

- für positive Beträge kann man den Betrag weglassen und die Gleichung wie gewohnt lösen.
- für negative Beträge wird eine Seite der Gleichung mit -1 multipliziert.

Beispiel

$$\left|\frac{10}{e^x - 1}\right| = 2$$

Fall 1:

$$\begin{aligned} \frac{10}{e^x-1} &= 2 && \mid \cdot e^x - 1 \\ 10 &= 2e^x - 2 && \mid +2; \ \cdot\frac{1}{2} \\ 6 &= e^x && \mid \ln \\ x &= \ln 6 \end{aligned}$$

Fall 2:

$$\begin{aligned} -\frac{10}{e^x-1} &= 2 && \mid \cdot e^x - 1 \\ -10 &= 2e^x - 2 && \mid +2; \ \cdot\frac{1}{2} \\ -4 &= e^x \Rightarrow \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

Probe:

$$\left|\frac{10}{e^{\ln 6} - 1}\right| = \left|\frac{10}{5}\right| = 2$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\ln 6\}$$

Wurzelgleichungen

- isoliere die Wurzel
- quadriere beide Seiten der Gleichung

> **Beispiel**
>
> $$\begin{aligned} \sqrt{20-2x}+6 &= x && \mid -6 \\ \sqrt{20-2x} &= x-6 && \mid ()^2 \\ 20-2x &= (x-6)^2 \\ 20-2x &= x^2-12x+36 && \mid -20+2x \\ x^2-10x+16 &= 0 \\ (x-2)(x-8) &= 0 \\ x_1 = 2;\ x_2 &= 8 \end{aligned}$$
>
> Probe: $\sqrt{20-2\cdot 2}+6=2 \Leftrightarrow 4+6\neq 2$
>
> $\sqrt{20-2\cdot 8}+6=8 \Leftrightarrow 2+6=8$
>
> $\Rightarrow \mathbb{L}=\{8\}$

Bruchgleichungen

- Bestimme den Hauptnenner
- Beide Seiten mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren

> **Beispiel**
>
> $$\begin{aligned} \frac{6}{x^4}-\frac{5}{x^2} &= -1 && \mid \cdot x^4 \\ 6-5x^2 &= -x^4 && \mid +x^4 \\ x^4-5x^2+6 &= 0 && \mid u=x^2 \\ u^2-5u+6 &= 0 \\ (u-2)(u-3) &= 0 \\ u_1=2;\ u_2 &= 3 && \mid x^2=u \end{aligned}$$
>
> $x^2 = 2$ | $x^2 = 3$
>
> $x_1 = \pm\sqrt{2}$ | $x_2 = \pm\sqrt{3}$
>
> $x^4 \neq 0$ und $x^2 \neq 0$ für $x=\pm\sqrt{2}$ oder $x=\pm\sqrt{3}$
>
> $\Rightarrow \mathbb{L}=\{\sqrt{2};\ -\sqrt{2};\ \sqrt{3};\ -\sqrt{3}\}$

Ungleichungen

Entweder: Mit Vergleichszeichen auflösen und aufpassen bei Mulitplikation oder Division mit negativen Zahlen.

Oder: Eine Gleichung lösen und Werte größer und kleiner als die Lösung testen.

Beispiel

$$\begin{aligned} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^x &< 0.05 && \mid -1 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^x &< -0.95 && \mid \cdot(-1) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &> 0.95 && \mid \log \\ x\log 0.5 &> \log 0.95 && \mid \cdot \frac{1}{\log 0.5} \\ x &< \frac{\log 0.95}{\log 0.5} \approx 0.074 \end{aligned}$$

4.4 Trigonometrische Funktionen

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sin x$. Der Graph von der Funktion g mit

$$g(x) = a \sin\left(b(x-c)\right) + d$$

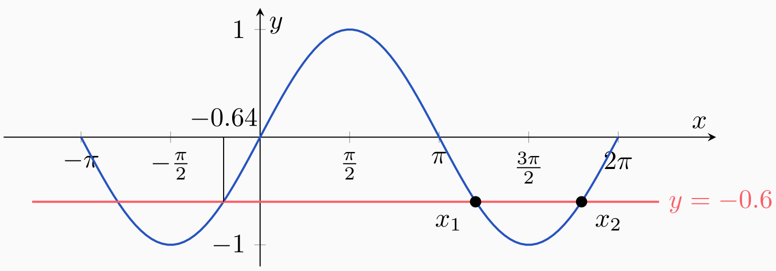
ist gegenüber dem Graph von f

- um $|a|$ Einheiten in y-Richtung gestreckt,
- um d Einheiten in y-Richtung verschoben,
- besitzt die Periode $p = \frac{2\pi}{b}$ (Streckung in x-Richtung) und
- um c Einheiten in x-Richtung verschoben.

Für $a < 0$ wird der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

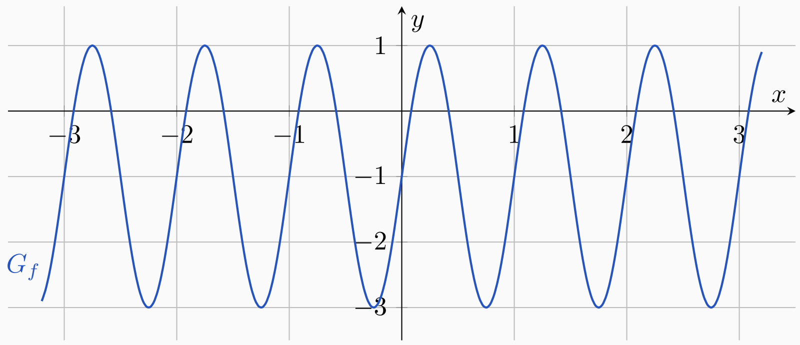
Beispiel

$a)$ Gib im Intervall $I = [0; 2\pi]$ zwei Lösungen der Gleichung $\sin x = -0.6$ an.



$$\begin{aligned} \sin^{-1}(-0.6) &\approx -0.64 \\ x_2 &= -0.64 + 2\pi \approx 5.64 \\ x_1 &= \pi + 0.64 \approx 3.78 \end{aligned}$$

$b)$ Skizziere den Graphen von $f(x) = 2\sin(2\pi(x-1)) - 1$.



4.5 Senkrechte und waagerechte Asymptoten

Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen $g(x)$ und $h(x)$. Die Funktion f mit $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad (h(x) \neq 0)$ nennt man **gebrochenrationale Funktion**.
Wenn $g(x_0) \neq 0$ und $h(x_0) = 0$ gilt, dann ist x_0 eine **Polstelle** von f und die Gerade mit $x = x_0$ ist eine **senkrechte Asymptote** des Graphen von f.
Gilt $g(x_0) = 0$ und $h(x_0) = 0$, dann liegt keine senkrechte Asymptote, sondern eine **hebbare Definitionslücke** vor.
Für die waagerechte Asymptote gilt:

1. Zählergrad > Nennergrad: keine waagerechte Asymptote
2. Zählergrad = Nennergrad: höchste Potenz von x ausklammern und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ bilden. $\left(y = \frac{a}{b}\right)$
3. Zählergrad < Nennergrad: waagerechte Asymptote bei $y = 0$.

Beispiel

$a)$ Bestimme die senkrechte und waagerechte Asymptote.

$$f(x) = \frac{6x^2+3}{5x^2 - 1/2}$$

$$5x^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}} \qquad \rightarrow \text{Senk. Asymp. bei } x = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(6 + \frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(5 - \frac{1/2}{x^2}\right)} = \frac{6}{5} \qquad \rightarrow \text{Wag. Asymp. bei } y = \frac{6}{5}$$

$$g(x) = \frac{7x}{x^2-1}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \qquad \rightarrow \text{Senk. Asymp. bei } x = \pm 1$$

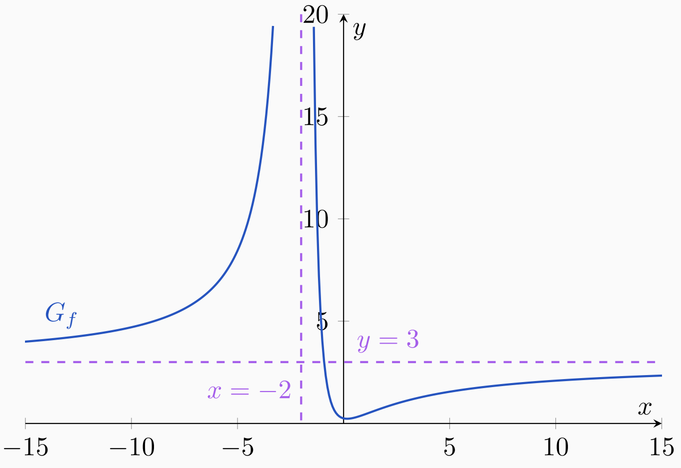
$\rightarrow$ Wag. Asymp. bei $y = 0$

$$h(x) = \frac{3x^2+2}{7x-2}$$

$$7x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \qquad \rightarrow \text{Senk. Asymp. bei } x = \frac{2}{7}$$

$\rightarrow$ keine wag. Asymp.

$b)$ Skizziere den Graphen von t mit $t(x) = \dfrac{3x^2+1}{x^2+4x+4}$.



4.6 Vollständige Kurvendiskussion

Strategie zum „Zeichnen“ eines Graphen:

1. Nullstellen bestimmen ($f(x) = 0$),
2. senkrechte und waagerechte Asymptoten bestimmen,
3. Symmetrie zur y-Achse und zum Ursprung,
4. Hoch-, Tief- und Wendepunkte,
5. Verhalten für $x \to \pm\infty$, bzw. Vorzeichenwechsel an einer Polstelle,
6. Verhalten für $x \to 0$ (kleinste Potenz von x betrachten).

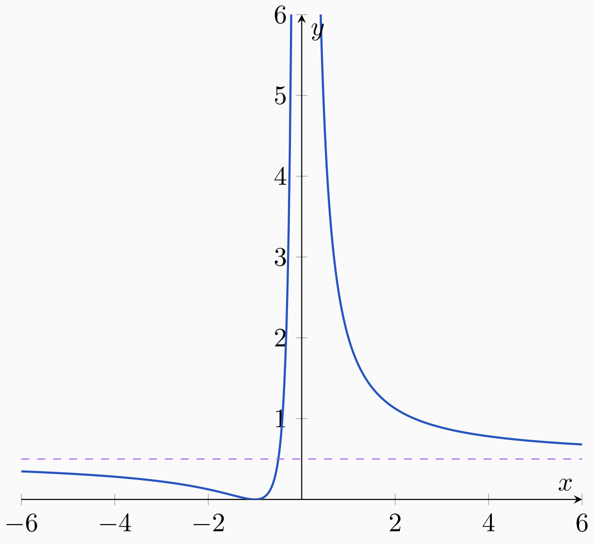
Beispiel

Skizziere den Graphen von f mit $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2x^2}$

$$f(x) = 0$$
$$\frac{(x+1)^2}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Senk. Asymp. bei $x = 0$

Wag. Asymp. bei $y = \dfrac{1}{2}$



4.7 Funktionenscharen – Ortskurven

Eine Funktion mit Parameter nennt man **Funktionenschar**. Die Menge aller Punkte, die alle eine gemeinsame Eigenschaft teilen, z. B. gemeinsame Hochpunkte, bilden eine **Ortskurve**. Um die Gleichung der Ortskurve zu bestimmen geht man wie folgt vor:

1. Die notwendige Bedingung aufstellen und nach x auflösen.
2. x in $f_t(x)$ einsetzen $\rightarrow$ y-Koordinate
3. Gleichung aus 1. nach t auflösen und in die y-Koordinate aus 2. einsetzen.

Beispiel

$a)$ Bestimme die Ortskurve aller Tiefpunkte von $f_t(x) = (x-t)e^x + 1$

$$f_t'(x) = e^x + (x-t)e^x$$

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= 0 \\ e^x + (x-t)e^x &= 0 \\ e^x\left(1 + (x-t)\right) &= 0 && \mid e^x \neq 0 \;\; \forall x \\ 1 + (x-t) &= 0 \\ x &= t-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t-1) &= \left((t-1) - t\right) e^{t-1} + 1 \\ &= -e^{t-1} + 1 && \mid t = x+1 \\ \Rightarrow y &= -e^x + 1 \end{aligned}$$

$b)$ Untersuche $f_t(x) = 2(x+5)e^{tx}$ auf gemeinsame Punkte.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f_1(x) \\ 2(x+5) &= 2(x+5)e^x \\ 2(x+5) - 2(x+5)e^x &= 0 \\ 2(x+5)(1-e^x) &= 0 \\ \Rightarrow x_1 = -5;\; x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_t(-5) &= 2(-5+5)e^{-5t} = 0 \\ f_t(0) &= 2(0+5)e^0 = 10 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_1(-5,0);\; P_2(0,10)$$