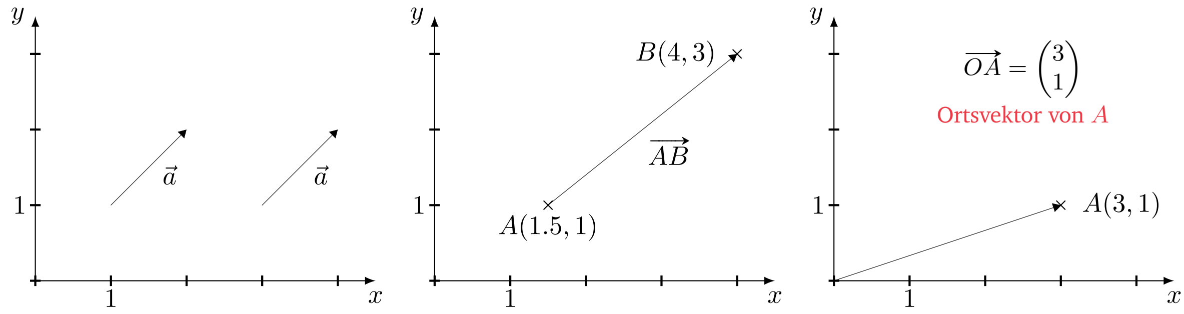
6 Geraden und Ebenen

6.1 Vektoren im Raum

Vektoren kommen hauptsächlich auf folgende 3 Arten und Weisen vor:



(a) Als Pfeil (mit beliebigem Anfang) (b) Als Pfeil (zwischen 2 Punkten) (c) Als Punkt

Gegenvektor

Gegenvektor eines Vektors $\vec{a}$ ist der Vektor $-\vec{a}$.

Beispiel

Bestimme den Gegenvektor zum Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt

Der Mittelpunkt M zweier Punkte $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ ergibt sich wiefolt:

$$M\left(\frac{a_1 + b_2}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$

Beispiel

Bestimme den Mittelpunkt M der Punkte $A(2,3,3)$ und $B(4,1,2)$.

$$\Rightarrow M(3, 2, 2.5)$$

Betrag

Der Betrag eines Vektors $\vec{a}$ ist geometrisch die Länge des zugehörigen Pfeils. Er lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiel

Berechne den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

Einheitsvektor

Der Einheitsvektor $\vec{a}_0$ ist der Vektor, der in dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ zeigt, und den Betrag 1 hat.
Er errechnet sich mit:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Beispiel

Bestimme den Einheitsvektor $\vec{a}_0$ des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme jeweils den fehlenden Punkt.

$a)$ $A(0, -1, 2)$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B(3, 2, 5)$$

$b)$ $B(2, 0, 3)$

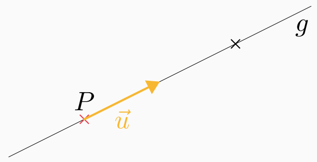
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(-1, -3, 0)$$

6.2 Geraden im Raum

Allgemeine Parametergleichung einer Geraden

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$



$\vec{p}$: Stützvektor
$\vec{u}$: Richtungsvektor

Gegenseite Lage von Geraden

Es gibt vier mögliche gegenseitige Lagen zweier Geraden:

- parallel und verschieden (echt parallel)
- identisch
- sie schneiden sich in einem Punkt
- windschief

Sind die Richtungsvektoren Vielfache?

ja: parallel oder identisch — **nein**: schneiden sich oder sind windschief

Haben sie gemeinsame Punkte? — Haben sie gemeinsame Punkte?

ja: identisch — **nein**: parallel — **ja**: schneiden sich — **nein**: windschief

Beispiel

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \; ; \; h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen $\rightarrow$ schneiden sich oder sind windschief

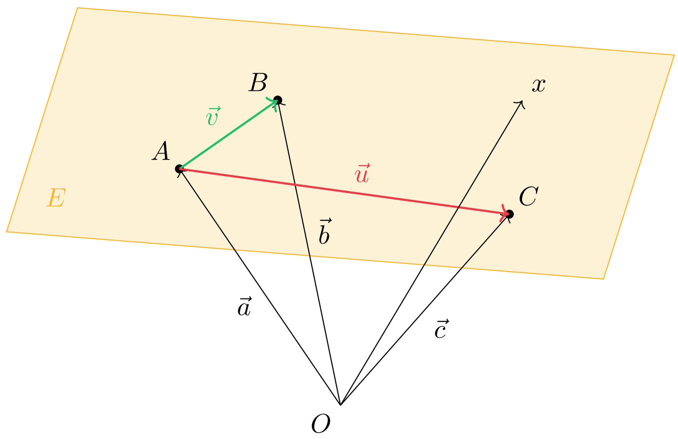
$$g \cap h : \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2r &= 1 + s \\ -1 + 3r &= 1 - s \\ 1 + 3r &= s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2r - s &= 0 && (1)\\
3r + s &= 2 && (2)\\
3r - s &= -1 && (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)+(3):& \qquad & 6r &= 1\\
& & r &= \frac{1}{6}\\
r = \frac{1}{6} \text{ in } (2):& & 3\cdot\frac{1}{6} + s &= 2\\
& & s &= 1.5\\
r = \frac{1}{6};\ s = 1.5 \text{ in } (1):& & \frac{1}{3} - 1.5 &\neq 0 \rightarrow \text{keine Schnittpunkte}\\
& & &\Rightarrow \text{windschief}
\end{aligned}
$$

6.3 Ebenen im Raum



$$
\begin{aligned}
E:\ \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + r\cdot\overrightarrow{AC} + s\cdot\overrightarrow{AB} \qquad r,s\in\mathbb{R}\\
E:\ \vec{x} &= \overrightarrow{OA} + r\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}
\end{aligned}
$$

Parametergleichung einer Ebene

Jede Ebene lässt sich durch eine Parametergleichung der Form

$$\vec{x} = \vec{p} + r\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}$$

beschreiben.
$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die Spannvektoren. Sie dürfen keine Veilfachen voneinader sein. $\vec{p}$ ist der Stützvektor.

Beispiel

$a)$ Bestimme die Parametergleichung der Ebene, die durch die Punkte A, B und C verläuft.

$$A(1,0,1);\ B(1,1,0);\ C(0,0,1)$$

$$E:\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AB}$$
$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$b)$ Gegeben ist die Ebene E mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Bestimme, ob die Punkte $A(7,5,4)$ und $B(7,1,8)$ auf der Ebene E liegen.

$$A(7,5,4): \quad \begin{pmatrix}7\\5\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}5\\5\\3\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$5 = r + 2s \tag{1}$$
$$5 = 3r - s \tag{2}$$
$$3 = 5r + s \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{(2) + (3)}: &\quad 8 = 8r \\
&\rightarrow r = 1 \\
r = 1 \text{ in (1)}: &\quad 5 = 1 + 2s \\
&\rightarrow s = 2 \\
r = 1;\ s = 2 \text{ in (2)}: &\quad 5 \neq 3 - 2 \Rightarrow A \notin E
\end{aligned}$$

$$B(7,1,8): \quad \begin{pmatrix}7\\1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}5\\1\\7\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$5 = r + 2s \tag{1}$$
$$1 = 3r - s \tag{2}$$
$$7 = 5r + s \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
\text{(2) + (3)}: &\quad 8 = 8r \\
&\rightarrow r = 1 \\
r = 1 \text{ in (1)}: &\quad 5 = 1 + 2s \\
&\rightarrow s = 2 \\
r = 1;\ s = 2 \text{ in (2)}: &\quad 1 = 3 - 2 \Rightarrow B \in E
\end{aligned}$$

$c)$ Überprüfe ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen.

$$A(0,1,-1);\ B(2,3,5);\ C(-1,3,-1);\ D(2,2,2)$$

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Durch } A, B, C\text{)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 = 2r - s \tag{1}$$
$$1 = 2r + 2s \tag{2}$$
$$3 = 6r \tag{3}$$

$$\begin{aligned} (3):& \qquad & 3 &= 6r \\ & & \rightarrow r &= \frac{1}{2} \\ r = \frac{1}{2} \text{ in } (1):& & 2 &= 1 - s \\ & & \rightarrow s &= -1 \\ r = \frac{1}{2};\ s = -1 \text{ in } (2):& & 1 &\neq 1 - 2 \Rightarrow D \notin E \end{aligned}$$

$\Rightarrow A$, B, C und D liegen nicht in einer Ebene.

6.4 Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt

Skalarprodukt

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Der Term
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
heißt **Skalarprodukt** der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal Zueinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Beweis

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 = |\vec{a}|^2$$

Beispiel

Bestimme, ob sich die Geraden g und h orthogonal schneiden.

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix};\quad h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

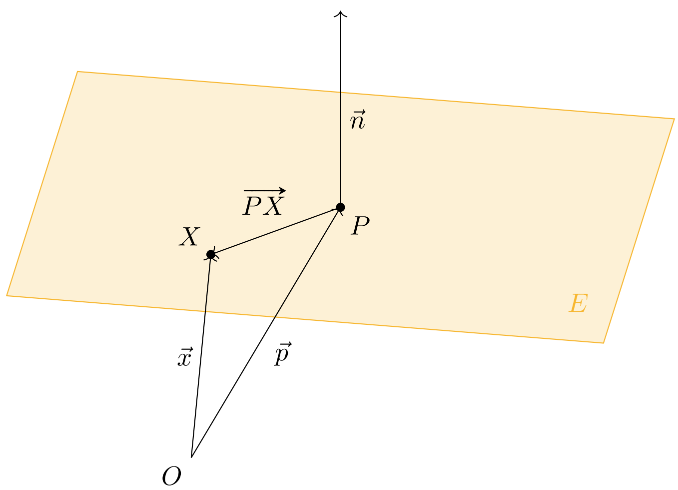
$$g \cap h : P(8, -9, 7)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 26 + 1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Sie schneiden sich nicht orthogonal.

6.5 Normalen- und Koordinatengleichung einer Ebene

Der Punkt P ist ein beliebiger Punkt in der Ebene E.
Der Vektor $\vec{n}$ steht orthogonal auf der Ebene E und wird **Normalvektor** der Ebene E genannt.



Die Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{x} - \vec{p}$ sind orthogonal, daher gilt $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$.
Auch umgekehrt gilt, dass ein Punkt X, der die Gleichung $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ erfüllt, in der Ebene E liegt.

Normalengleichung einer Ebene

Eine Ebene E mit dem Stützvektor $\vec{p}$ und dem Normalvektor $\vec{n}$ wird beschreiben durch die Gleichung:

$$E:\ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Alle Punkte X, die diese Gleichung erfüllen, liegen in E.

Beispiel

Gib die Normalengleichung der Ebene mit dem Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, die auf $P(1, 2, 3)$ liegt.

$$E:\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Durch Ausmultiplizieren der Normalengleichung erhält man eine weitere Gleichung, um die Ebene zu beschreiben.

$$\begin{aligned}
\left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0 \\
\vec{x} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0 \\
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix} &= 0 \\
4x_1 + x_2 - 2x_3 - (4 + 2 - 6) &= 0 \\
4x_1 + 1x_2 - 2x_3 &= 0
\end{aligned}$$

Koordinatengleichung einer Ebene

Jede Ebene E lässt sich durch eine **Koordinatengleichung** der Form

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

beschreiben. Mindestens einer der Koeffizienten muss ungleich 0 sein.

Der Normalvektor $\vec{n}$ einer Ebene E mit der Koordinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ist $\vec{n} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Beispiel

Begründe, dass die Ebenen E_1 und E_2 parallel sind.

$$E_1: \ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$$

$$E_2: \ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$$

E_1 und E_2 haben den gleichen Normalvektor.
$\Rightarrow E_1 \parallel E_2$

Die Koordinatenebenen lassen sich mit folgenden Koordinatengleichungen beschreiben:

- x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$
- x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$
- x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$

6.6 Ebenengleichungen umformen – das Kreuzprodukt

$$E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}$$

Um die Ebene E mit einer Normalen- oder Koordinatengleichung zu beschreiben, braucht man $\vec{n}$ mit $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix} = 0$.

Kreuzprodukt

Unter dem Kreuzprodukt zweier Vektor $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbf{R^3}$ versteht man den Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ("kreuz") mit:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$, falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ keine Vielfachen sind. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vielfache voneinader sind.

Rechenverfahren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} \end{array} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gib die Koordinatengleichung der Ebene E mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ an.

$$\vec{n}: \quad \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ -2-6 \\ 10+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$E: \ -x_1 - 4x_2 + 6x_3 = d$$

$$\text{mit } P(1,3,2): \qquad -1 - 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = d = -1$$

$$\Rightarrow E: \ -x_1 - 4x_2 + 6x_3 = -1$$

$$E: \ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 8$$

Um die Ebene E mit einer Parametergleichung zu beschreiben, gibt es zwei Vorgehensweisen:

1. 3 Punkte finden, die die Gleichung erfüllen, also in der Ebene liegen, die nicht auf einer Geraden liegen.

   Wir wählen

   $$P_1(0,0,-8); \ P_2(4,0,0); \ P_3(5,0,2)$$

   $$E: \ \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + r \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + s \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$$

   $$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}5\\0\\10\end{pmatrix}$ sind Vielfache von $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$. Wir wählen einen weiteren Punkt $P_4(1,-2,0)$ statt P_3.

$$\Rightarrow E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\-8\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\8\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}$$

2. Auflösen nach einer Variable und die anderen den Parametern r und s gleichsetzen. Dann die Vektoren so wählen, dass die Zeilen mit den Gleichungen übereinstimmen.

$$E:\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 8$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 2x_1 - 3x_2 - 8 \\ &= 2r - 3s - 8 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E:\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-8\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$