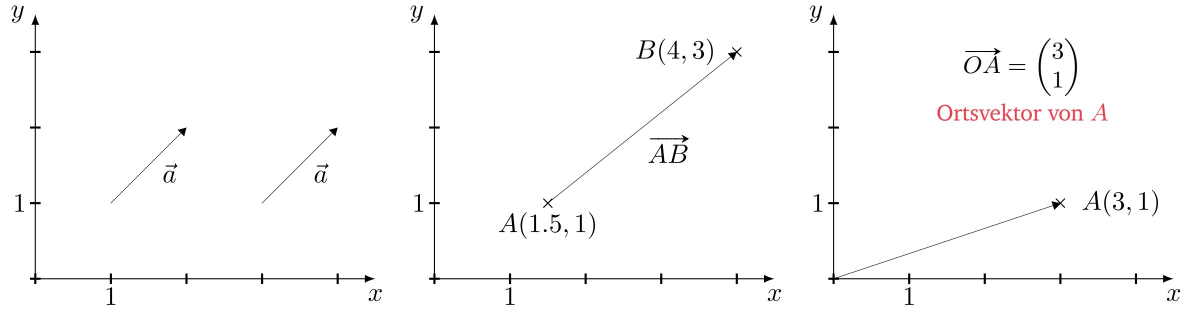
6 Geraden und Ebenen

6.1 Vektoren im Raum

Vektoren kommen hauptsächlich auf folgende 3 Arten und Weisen vor:



(a) Als Pfeil (mit beliebigem Anfang) (b) Als Pfeil (zwischen 2 Punkten) (c) Als Punkt

Gegenvektor

Gegenvektor eines Vektors $\vec{a}$ ist der Vektor $-\vec{a}$.

Beispiel

Bestimme den Gegenvektor zum Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt

Der Mittelpunkt M zweier Punkte $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ ergibt sich wiefolt:

$$M\left(\frac{a_1 + b_2}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right)$$

Beispiel

Bestimme den Mittelpunkt M der Punkte $A(2,3,3)$ und $B(4,1,2)$.

$$\Rightarrow M(3,2,2.5)$$

Betrag

Der Betrag eines Vektors $\vec{a}$ ist geometrisch die Länge des zugehörigen Pfeils. Er lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$|\vec{a}| = \left|\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiel

Berechne den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

Einheitsvektor

Der Einheitsvektor $\vec{a}_0$ ist der Vektor, der in dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ zeigt, und den Betrag 1 hat.
Er errechnet sich mit:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Beispiel

Bestimme den Einheitsvektor $\vec{a}_0$ des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme jeweils den fehlenden Punkt.

$a)$ $A(0, -1, 2)$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B(3, 2, 5)$$

$b)$ $B(2, 0, 3)$

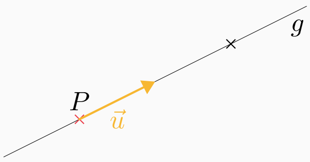
$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A(-1, -3, 0)$$

6.2 Geraden im Raum

Allgemeine Parametergleichung einer Geraden

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$



$\vec{p}$: Stützvektor
$\vec{u}$: Richtungsvektor

Gegenseite Lage von Geraden

Es gibt vier mögliche gegenseitige Lagen zweier Geraden:

- parallel und verschieden (echt parallel)
- identisch
- sie schneiden sich in einem Punkt
- windschief

Sind die Richtungsvektoren Vielfache?

ja: parallel oder identisch — Haben sie gemeinsame Punkte?
- **ja**: identisch
- **nein**: parallel

nein: schneiden sich oder sind windschief — Haben sie gemeinsame Punkte?
- **ja**: schneiden sich
- **nein**: windschief

Beispiel

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \; ; \; h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen $\rightarrow$ schneiden sich oder sind windschief

$$g \cap h : \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2r &= 1 + s \\ -1 + 3r &= 1 - s \\ 1 + 3r &= s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2r - s &= 0 && (1)\\
3r + s &= 2 && (2)\\
3r - s &= -1 && (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(2) + (3): && 6r = 1\\
& && r = \frac{1}{6}\\
&r = \frac{1}{6} \text{ in } (2): && 3 \cdot \frac{1}{6} + s = 2\\
& && s = 1.5\\
&r = \frac{1}{6};\ s = 1.5 \text{ in } (1): && \frac{1}{3} - 1.5 \neq 0 \rightarrow \text{keine Schnittpunkte}\\
& && \Rightarrow \text{windschief}
\end{aligned}
$$