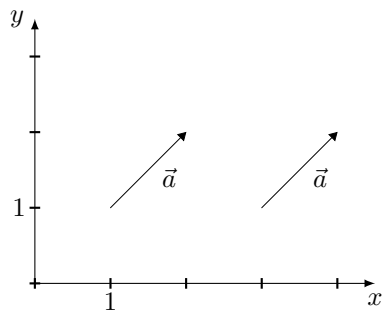


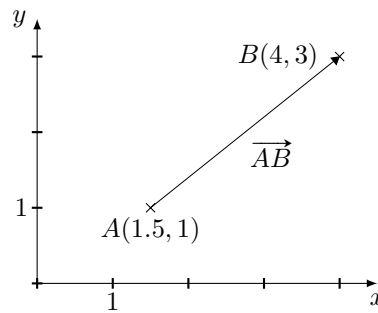
6 Geraden und Ebenen

6.1 Vektoren im Raum

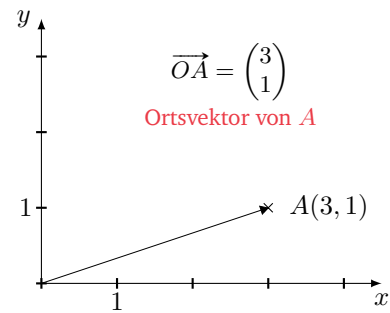
Vektoren kommen hauptsächlich auf folgende 3 Arten und Weisen vor:



(a) Als Pfeil (mit beliebigem Anfang)



(b) Als Pfeil (zwischen 2 Punkten)



(c) Als Punkt

Gegenvektor

Gegenvektor eines Vektors \vec{a} ist der Vektor $-\vec{a}$.

Beispiel

Bestimme den Gegenvektor zum Vektor $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\vec{BA} = -\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mittelpunkt

Der Mittelpunkt M zweier Punkte $A(a_1, a_2, a_3)$ und $B(b_1, b_2, b_3)$ ergibt sich wie folgt:

$$M \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2} \right)$$

Beispiel

Bestimme den Mittelpunkt M der Punkte $A(2, 3, 3)$ und $B(4, 1, 2)$.

$$\Rightarrow M(3, 2, 2.5)$$

Betrag

Der Betrag eines Vektors \vec{a} ist geometrisch die Länge des zugehörigen Pfeils. Er lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$|\vec{a}| = \left| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Beispiel

Berechne den Betrag des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4 + 36} = \sqrt{49} = 7$$

Einheitsvektor

Der Einheitsvektor \vec{a}_0 ist der Vektor, der in dieselbe Richtung wie \vec{a} zeigt, und den Betrag 1 hat. Er errechnet sich mit:

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

Beispiel

Bestimme den Einheitsvektor \vec{a}_0 des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gegeben ist der Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme jeweils den fehlenden Punkt.

a) $A(0, -1, 2)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow B(3, 2, 5)\end{aligned}$$

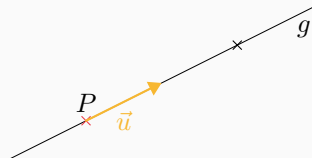
b) $B(2, 0, 3)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow A(-1, -3, 0)\end{aligned}$$

6.2 Geraden im Raum

Allgemeine Parametergleichung einer Geraden

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$



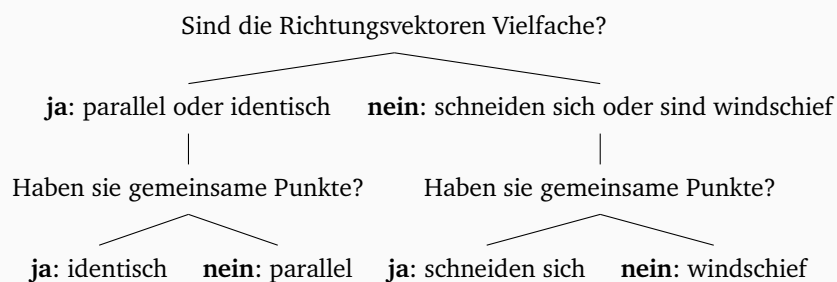
\vec{p} : Stützvektor

\vec{u} : Richtungsvektor

Gegenseitige Lage von Geraden

Es gibt vier mögliche gegenseitige Lagen zweier Geraden:

- parallel und verschieden (echt parallel)
- identisch
- sie schneiden sich in einem Punkt
- windschief



Beispiel

Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h .

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen \rightarrow schneiden sich oder sind windschief

$$g \cap h : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2r &= 1 + s \\ -1 + 3r &= 1 - s \\ 1 + 3r &= s \end{aligned}$$

$$2r - s = 0 \quad (1)$$

$$3r + s = 2 \quad (2)$$

$$3r - s = -1 \quad (3)$$

$$(2) + (3) : \quad 6r = 1$$

$$r = \frac{1}{6}$$

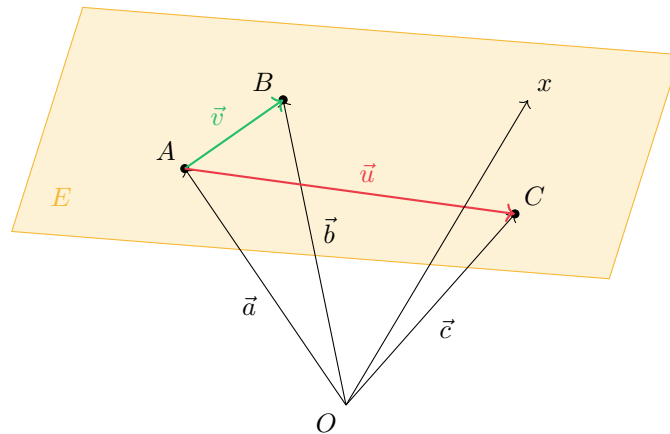
$$r = \frac{1}{6} \text{ in (2) : } \quad 3 \cdot \frac{1}{6} + s = 2$$

$$s = 1.5$$

$$r = \frac{1}{6}; s = 1.5 \text{ in (1) : } \quad \frac{1}{3} - 1.5 \neq 0 \rightarrow \text{keine Schnittpunkte}$$

\Rightarrow windschief

6.3 Ebenen im Raum



$$E : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AB} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

$$E : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

Parametergleichung einer Ebene

Jede Ebene lässt sich durch eine Parametergleichung der Form

$$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

beschreiben.

\vec{u} und \vec{v} sind die Spannvektoren. Sie dürfen keine Vielfachen voneinander sein. \vec{p} ist der Stützvektor.

Beispiel

- a) Bestimme die Parametergleichung der Ebene, die durch die Punkte A , B und C verläuft.

$$A(1, 0, 1); B(1, 1, 0); C(0, 0, 1)$$

$$E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AC} + s \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- b) Gegeben ist die Ebene E mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimme, ob die Punkte $A(7, 5, 4)$ und $B(7, 1, 8)$ auf der Ebene E liegen.

$$\begin{aligned} A(7, 5, 4): \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} &= r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$5 = r + 2s \quad (1)$$

$$5 = 3r - s \quad (2)$$

$$3 = 5r + s \quad (3)$$

$$(2) + (3): \quad 8 = 8r$$

$$\rightarrow r = 1$$

$$r = 1 \text{ in (1):} \quad 5 = 1 + 2s$$

$$\rightarrow s = 2$$

$$r = 1; s = 2 \text{ in (2):} \quad 5 \neq 3 - 2 \Rightarrow A \notin E$$

$$\begin{aligned} B(7, 1, 8): \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} &= r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$5 = r + 2s \quad (1)$$

$$1 = 3r - s \quad (2)$$

$$7 = 5r + s \quad (3)$$

$$(2) + (3): \quad 8 = 8r$$

$$\rightarrow r = 1$$

$$r = 1 \text{ in (1):} \quad 5 = 1 + 2s$$

$$\rightarrow s = 2$$

$$r = 1; s = 2 \text{ in (2):} \quad 1 = 3 - 2 \Rightarrow B \in E$$

c) Überprüfe ob die Punkte A, B, C und D in einer Ebene liegen.

$$A(0, 1, -1); B(2, 3, 5); C(-1, 3, -1); D(2, 2, 2)$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Durch } A, B, C)$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2 = 2r - s \quad (1)$$

$$1 = 2r + 2s \quad (2)$$

$$3 = 6r \quad (3)$$

$$(3): \quad 3 = 6r$$

$$\rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{1}{2} \text{ in (1):} \quad 2 = 1 - s$$

$$\rightarrow s = -1$$

$$r = \frac{1}{2}; s = -1 \text{ in (2):} \quad 1 \neq 1 - 2 \Rightarrow D \notin E$$

$\Rightarrow A, B, C$ und D liegen nicht in einer Ebene.

6.4 Zueinander orthogonale Vektoren – Skalarprodukt

Skalarprodukt

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

Der Term

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

heißt **Skalarprodukt** der Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt 0 ist.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Beweis

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \right)^2 = |\vec{a}|^2$$

Beispiel

Bestimme, ob sich die Geraden g und h orthogonal schneiden.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g \cap h: P(8, -9, 7)$$

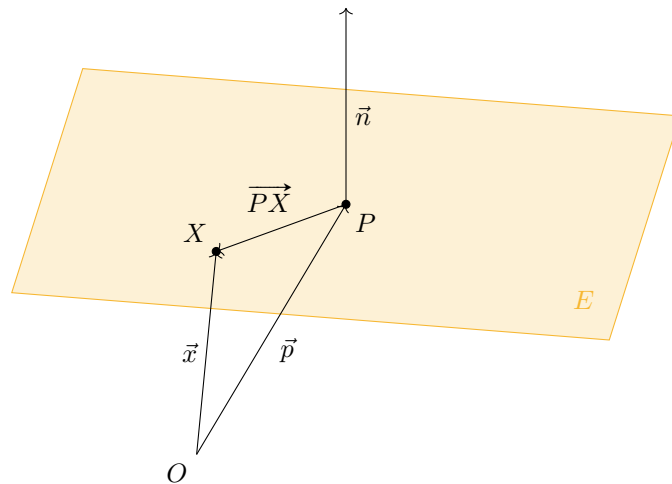
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 - 26 + 1 \neq 0$$

\Rightarrow Sie schneiden sich nicht orthogonal.

6.5 Normalen- und Koordinatengleichung einer Ebene

Der Punkt P ist ein beliebiger Punkt in der Ebene E .

Der Vektor \vec{n} steht orthogonal auf der Ebene E und wird **Normalvektor** der Ebene E genannt.



Die Vektoren \vec{n} und $\vec{x} - \vec{p}$ sind orthogonal, daher gilt $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$.

Auch umgekehrt gilt, dass ein Punkt X , der die Gleichung $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ erfüllt, in der Ebene E liegt.

Normalengleichung einer Ebene

Eine Ebene E mit dem Stützvektor \vec{p} und dem Normalvektor \vec{n} wird beschrieben durch die Gleichung:

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Alle Punkte X , die diese Gleichung erfüllen, liegen in E .

Beispiel

Gib die Normalengleichung der Ebene mit dem Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, die auf $P(1, 2, 3)$ liegt.

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

Durch Ausmultiplizieren der Normalengleichung erhält man eine weitere Gleichung, um die Ebene zu beschreiben.

$$\begin{aligned} \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 \\ \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 - (4 + 2 - 6) &= 0 \\ 4x_1 + 1x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Koordinatengleichung einer Ebene

Jede Ebene E lässt sich durch eine **Koordinatengleichung** der Form

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

beschreiben. Mindestens einer der Koeffizienten muss ungleich 0 sein.

Der Normalvektor \vec{n} einer Ebene E mit der Koordinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Beispiel

Begründe, dass die Ebenen E_1 und E_2 parallel sind.

$$E_1 : 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$$

$$E_2 : 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9$$

E_1 und E_2 haben den gleichen Normalvektor.
 $\Rightarrow E_1 \parallel E_2$

Die Koordinatenebenen lassen sich mit folgenden Koordinatengleichungen beschreiben:

- x_1x_2 -Ebene: $x_3 = 0$
- x_1x_3 -Ebene: $x_2 = 0$
- x_2x_3 -Ebene: $x_1 = 0$

6.6 Ebenengleichungen umformen – das Kreuzprodukt

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Um die Ebene E mit einer Normalen- oder Koordinatengleichung zu beschreiben,

braucht man \vec{n} mit $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$.

Kreuzprodukt

Unter dem Kreuzprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} im \mathbb{R}^3 versteht man den Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ ("kreuz") mit:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu \vec{a} und \vec{b} , falls \vec{a} und \vec{b} keine Vielfachen sind. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ genau dann, wenn \vec{a} und \vec{b} Vielfache voneinander sind.

Rechenverfahren

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{array} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Gib die Koordinatengleichung der Ebene E mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ an.

$$\vec{n} : \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 5 \\ -2 - 6 \\ 10 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$E : -x_1 - 4x_2 + 6x_3 = d$$

$$\text{mit } P(1, 3, 2) : -1 - 4 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = d = -1$$

$$\Rightarrow E : -x_1 - 4x_2 + 6x_3 = -1$$

$$E : 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 8$$

Um die Ebene E mit einer Parametergleichung zu beschreiben, gibt es zwei Vorgehensweisen:

1. 3 Punkte finden, die die Gleichung erfüllen, also in der Ebene liegen, die nicht auf einer Geraden liegen.

Wir wählen

$$P_1(0, 0, -8); P_2(4, 0, 0); P_3(5, 0, 2)$$

$$E : \vec{x} = \overrightarrow{OP_1} + r \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + s \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ sind Vielfache von $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir wählen einen weiteren Punkt $P_4(1, -2, 0)$ statt P_3 .

$$\Rightarrow E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Auflösen nach einer Variable und die anderen den Parametern r und s gleichsetzen. Dann die Vektoren so wählen, dass die Zeilen mit den Gleichungen übereinstimmen.

$$E : 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 8$$

$$x_1 = r$$

$$x_2 = s$$

$$x_3 = 2x_1 - 3x_2 - 8$$

$$= 2r - 3s - 8$$

$$\Rightarrow E : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

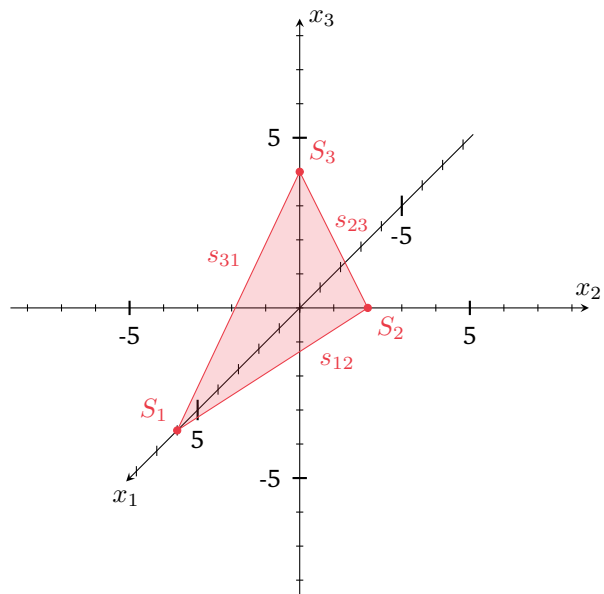
6.7 Ebenen veranschaulichen

$$E : 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 12$$

Die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen heißen **Spurpunkte**.

$$S_1(6, 0, 0); S_2(0, 2, 0); S_3(0, 0, 4)$$

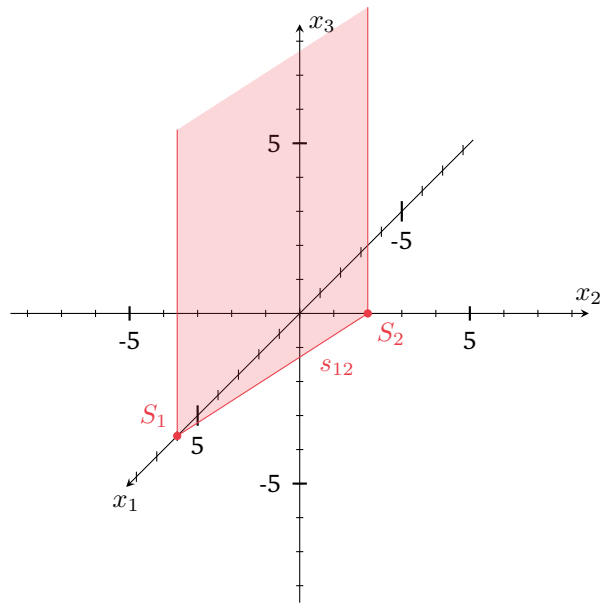
Die gemeinsamen Punkte der Ebene mit den Koordinatenebenen heißen **Spurgeraden**.



$$E : 2x_1 + 6x_2 = 12$$

$$S_1(6, 0, 0); S_2(0, 2, 0)$$

E ist parallel zur x_3 -Achse

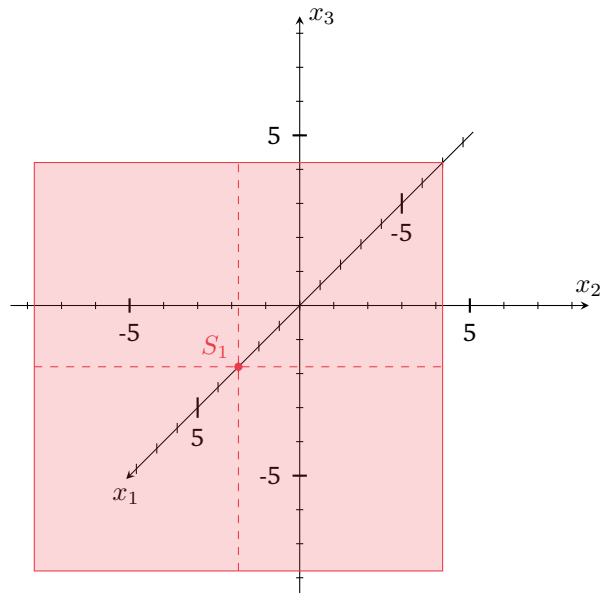


$$E : 4x_1 = 12$$

$$E : x_1 = 3$$

$$S_1(3, 0, 0)$$

E ist parallel zur x_2x_3 -Ebene.



Um eine Ebenengleichung anhand der Spurpunkte zu bestimmen, gilt mit allgemeinen Spurpunkten

$$S_1(a, 0, 0); S_2(0, b, 0); S_3(0, 0, c)$$

für die Ebene:

$$E : \frac{1}{a}x_1 + \frac{1}{b}x_2 + \frac{1}{c}x_3 = 1$$

Durch multiplizieren mit dem gemeinsamen Vielfachen abc erhält man eine ganzzahlige Ebenengleichung.

6.8 Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden

Unterscheide

Nur die gegenseitige Lage ist gefragt
 $\rightarrow \vec{n}; \vec{u}_g$ untersuchen

Schnittpunkt ist gefragt
 $\rightarrow g \cap E$

Beispiel

Bestimme die Lage der Geraden g, h und i zu $E : 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 49$ und berechne ggf. den Schnittpunkt.

$$a) \quad g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0 \rightarrow g \text{ und } E \text{ schneiden sich}$$

$$g : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$2(3 + 2t) + 5(4 + t) - (7 - t) = 49$$

$$6 + 4t + 20 + 5t - 7 + t = 49$$

$$10t = 30$$

$$t = 3$$

$$\text{in } g : \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow S(9, 7, 4)$$

$$b) \quad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow g \text{ und } E \text{ liegen parallel oder } g \text{ liegt in } E$$

$$P(3, 8, -3) \text{ in } E : \quad 2 \cdot 3 + 5 \cdot 8 - (-3) = 49$$

$$\Rightarrow g \text{ liegt in } E$$

$$c) \quad i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow g \text{ und } E \text{ liegen parallel oder } g \text{ liegt in } E$$

$$P(3, 4, 7) \text{ in } E: \quad 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4 - 7 \neq 49$$

$\Rightarrow i$ liegt parallel zu E

6.9 Gegenseitige Lage von Ebenen

Es gibt drei mögliche gegenseitige Lagen zweier Ebenen:

- parallel und verschieden (echt parallel)
- identisch
- sie schneiden sich in einer Geraden

Fallunterscheidung

Gegeben sind die Ebenen E und F mit:

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_E = 0 \quad F: (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_F = 0$$

Sind die Normalvektoren \vec{n}_E und \vec{n}_F Vielfache?

ja: E und F sind
parallel oder identisch

nein: E und F schneiden
sich in einer Geraden

P liegt in F bzw.
 Q liegt in E :
identisch

P liegt nicht in F bzw.
 Q liegt nicht in E :
echt parallel

$\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F = 0$:
 E und F schneiden
sich orthogonal

$\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F \neq 0$:
 E und F schneiden sich

Beispiel

Bestimme die Schnittgerade der beiden Ebenen.

$$a) \quad E_1: x_1 - x_2 + 3x_3 = 12; \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E_1 \cap E_2: \quad 8 - 4r + 5s - r + 3(2 + r - s) = 12$$

$$-2r + 2s = -2$$

$$2s = -2 + 2r$$

$$s = r - 1$$

$$\begin{aligned}
s = r - 1 \text{ in } E_2 : \quad \vec{x} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (r - 1) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\vec{x} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow g : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$b) \quad F_1 : 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1; \quad F_2 : 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6$$

$$F_1 \cap F_2 : \quad 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 1 \quad (1)$$

$$5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
(1) + 2 \cdot (2) : \quad 13x_1 - 5x_3 &= 13 & | \quad x_3 = t \\
13x_1 - 5t &= 13 & | \quad + 5t; \cdot \frac{1}{13} \\
x_1 &= 1 + \frac{5}{13}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_1 = 1 + \frac{5}{13}t \text{ in } (2) : \quad 5 \left(1 + \frac{5}{13}t \right) + 2x_2 - 3t &= 6 \\
\frac{25}{13}t + 2x_2 - 3t &= 1 \\
x_2 &= \frac{1}{2} + \frac{7}{13}t
\end{aligned}$$

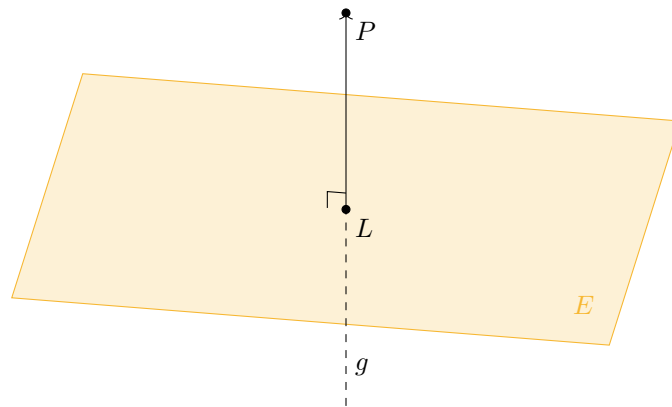
$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5/13 \\ 7/13 \\ 1 \end{pmatrix} & | \quad \vec{n} \cdot 13 \\
\Rightarrow h : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

7 Abstände und Winkel

7.1 Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Unter dem Abstand eines Punktes P von einer Ebene E versteht man immer die Länge der kürzstmöglichen Verbindung des Punktes und der Ebene.

Diesen erhält man, indem man von P aus das Lot auf die Ebene E fällt und den Abstand des Punktes P vom Lotfußpunkt L bestimmt.



Hierzu stellt man eine Hilfsgerade g auf, die orthogonal zur Ebene E ist und durch den Punkt P verläuft. Als Richtungsvektor von g wählt man daher den Normalenvektor der Ebene E und als Stützvektor den Ortsvektor des Punktes P . Dem Lotfußpunkt erhält man als Schnittpunkt der Hilfsgerade g mit der Ebene E .

Hessesche Normalform

Wenn man als Normalenvektor einer Ebene E einen Einheitsvektor ($|\vec{n}_0| = 1$) nimmt, heißt die Ebenengleichung $E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$ **Hessesche Normalform (HNF)**.

Hiermit lässt sich der Abstand d eines Punktes R von der Ebene E einfach in einem Schritt berechnen. Es gilt:

$$d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$$

Beispiel

a) Bestimme den Abstand des Punktes $R(9, 4, -3)$ von der Ebene E mit $E : \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$.

$$\begin{aligned} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3 \\ E \text{ in HNF : } &\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(R, E) &= \left| \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} \right| = \left| (8 + 14 - 8) \cdot \frac{1}{3} \right| = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

- b) Bestimme den Abstand des Punktes $Q(1, 6, 2)$ von der Ebene F mit $F : x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 1$.

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

$$F \text{ in HNF : } \frac{x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 1}{\sqrt{21}} = 0$$

$$d(Q, F) = \left| \frac{1 - 2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 - 1}{\sqrt{21}} \right|$$

$$= \left| \frac{-4}{\sqrt{21}} \right| = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

- b) Bestimme die zur Ebene E mit $E : 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 5$ parallele Ebenen F_1 und F_2 , die von E den Abstand 3 LE haben.

$$F : 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = k; R(r_1, r_2, r_3) \in F$$

$$E \text{ in HNF : } \frac{12x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 5}{14} = 0$$

$$d(R, E) = 3$$

$$\left| \frac{12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5}{14} \right| = 3$$

Fall 1 :

$$\frac{12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5}{14} = 3$$

$$12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5 = 42$$

$$12r_1 + 6r_2 - 4r_3 = 47$$

$$\Rightarrow F_1 : 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 47$$

Fall 2 :

$$\frac{12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5}{14} = -3$$

$$12r_1 + 6r_2 - 4r_3 - 5 = -42$$

$$12r_1 + 6r_2 - 4r_3 = -37$$

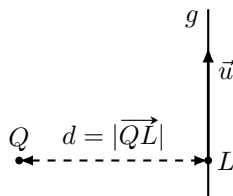
$$\Rightarrow F_2 : 12x_1 + 6x_2 - 4x_3 = -37$$

7.2 Abstand eines Punktes zu einer Gerade

Der Verbindungsvektor zwischen dem Punkt Q und einem allgemeinen Geradenpunkt P muss senkrecht zum Richtungsvektor \vec{u} der Gerade g sein.

Dazu setzt man das Skalarprodukt $\overrightarrow{QP} \cdot \vec{u} = 0$. Man erhält den Parameter, für den dies der Fall ist. Setzt man diesen in den allgemeinen Geradenpunkt P ein, erhält man den Lotfußpunkt L .

Der Abstand dann beträgt dann $d = |\overrightarrow{QL}|$.



Beispiel

Bestimme den Abstand zwischen dem Punkt $Q(6, -6, 9)$ und der Gerade g mit $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 4 - 2r \\ 5 + r \\ 6 + r \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{QP} &= \begin{pmatrix} 4 - 2r \\ 5 + r \\ 6 + r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2r - 2 \\ r + 11 \\ r - 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QP} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \begin{pmatrix} -2r - 2 \\ r + 11 \\ r - 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ (-2)(-2r - 2) + (r + 11) + (r - 3) &= 0 \\ r &= -2 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 4 - 2 \cdot (-2) \\ 5 + (-2) \\ 6 + (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow L(8, 3, 4)$$

$$\overrightarrow{QL} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{QL}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 9^2 + (-5)^2} = \sqrt{110}$$

7.3 Abstand zweier Geraden

Der Abstand zwischen zwei Geraden g und h lassen sich wie folgt bestimmen:

1. Schneiden sich g und h beträgt der Abstand $d = 0$.
2. Verlaufen g und h parallel zueinander, wählt man einen beliebigen Punkt R auf der Geraden g und bestimmt den Abstand von R zu h . (s. 7.2 Abstand eines Punktes zu einer Gerade)
3. Sind g und h windschief, gibt es zwei Möglichkeiten, je nach dem ob nur der Abstand oder auch die Lotfußpunkte gefragt sind.

1. Möglichkeit (Lotfußpunkte):

Man stellt die allgemeinen Geradenpunkte P_g und P_h der Geraden g und h auf.

Der allgemeine Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_g P_h}$ zwischen den Geraden g und h muss sowohl zum Richtungsvektor \vec{u}_g der Gerade g als auch zum Richtungsvektor \vec{u}_h der Gerade h orthogonal sein:

$$\overrightarrow{P_g P_h} \cdot \vec{u}_g = 0 \quad (1)$$

$$\overrightarrow{P_g P_h} \cdot \vec{u}_h = 0 \quad (2)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystem führt die beiden Parameter der Geradengleichungen, die zu den Lotfußpunkten L_g und L_h führen.

Der Abstand beträgt dann $d = |\overrightarrow{L_g L_h}|$.

2. Möglichkeit (nur Abstand):

Zur Berechnung des Abstands zwischen den Geraden g und h dient die Formel

$$d(g, h) = |(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$$

Dabei wählt man $P \in g$; $Q \in h$, und \vec{n}_0 ist der Einheitsvektor (vgl. 7.1 Hessesche Normalform) von \vec{n} mit:

$$\vec{n} = \vec{u}_g \times \vec{u}_h$$

Beispiel

Bestimme den Abstand der Geraden g und h mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Möglichkeit:

$$\overrightarrow{OP_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 + s \\ 2 + 2s \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP_h} = \begin{pmatrix} 2 + 4t \\ -t \\ 1 - t \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_g P_h} = \begin{pmatrix} 2 + 4t \\ -t \\ 1 - t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 + s \\ 2 + 2s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4t \\ -4 - t - s \\ -1 - t - 2s \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 + 4t \\ -4 - t - s \\ -1 - t - 2s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 + 4t \\ -4 - t - s \\ -1 - t - 2s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow -3t - 5s = 6 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 18t + 3s = -9 \quad (2)$$

$$\Rightarrow s = -1; t = -\frac{1}{3}$$

$$\overrightarrow{OL_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 + (-1) \\ 2 + 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OL_h} = \begin{pmatrix} 2 + 4(-1/3) \\ -(-1/3) \\ 1 - (-1/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

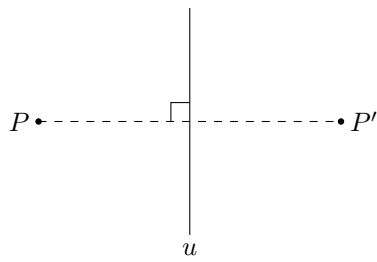
$$\Rightarrow d = |\overrightarrow{L_g L_h}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 3\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = 3$$

2. Möglichkeit:

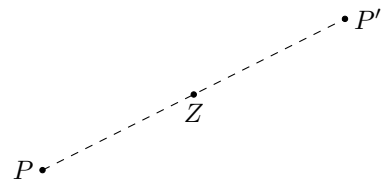
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}; |\vec{n}| = 9$$

$$\begin{aligned} d(g, h) &= \left| \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{9} \right| \\ &= \left| 27 \cdot \frac{1}{9} \right| = 3 \end{aligned}$$

7.4 Spiegelung und Symmetrie

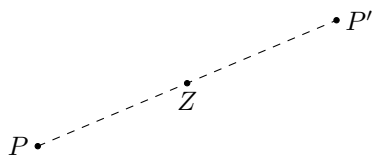


Achsenspiegelung



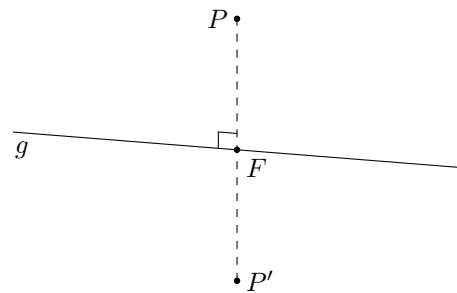
Punktspiegelung

Spiegelung und Symmetrie im \mathbb{R}^3 :



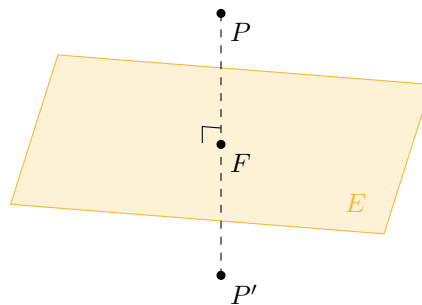
Punktspiegelung

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PZ} \\ \overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{PZ}\end{aligned}$$



Spiegelung an Gerade

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} \\ \overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}\end{aligned}$$



Spiegelung an Ebene

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF} \\ \overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}\end{aligned}$$

Beispiel

Spiegle den Punkt $P(3, 3, 0)$

a) am Punkt $Z(1, -2, 5)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{PZ} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow P'(-1, -7, 10)\end{aligned}$$

b) an der Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{G} = \begin{pmatrix} -2+t \\ -4-2t \\ 9+2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \begin{pmatrix} -5+t \\ -7-2t \\ 9+2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 \\ 27+9t &= 0 \\ t &= -3 \\ \Rightarrow \overrightarrow{OL} &= \begin{pmatrix} -2+(-3) \\ -4-2(-3) \\ 9+2(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{PL} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow P'(-13, 1, 6)\end{aligned}$$

c) an der Ebene E mit $E: 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}l \cap E: \quad 3(3+3r) + 2(3+2r) + r &= 8 \\ 14r + 15 &= 8 \\ r &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OL} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \\ -0.5 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{PF} \\ &= \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \\ -0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1 \\ -0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow P'(0, 1, -1)\end{aligned}$$

7.5 Modellieren von geradlinigen Bewegung

U-Boote, Flugzeuge, etc. bewegen sich oft näherungsweise geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit. Ihre Bahngleichungen können somit durch Geradengleichungen beschreiben werden.

$$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$$

Dabei steht

- der Parameter t für die vergangene Zeit nach (Beobachtungs-)Beginn der Bewegung,
- der Stützvektor \vec{p} für die Koordinaten des Startpunktes der Bewegung,
- der Richtungsvektor \vec{v} für die Änderung der Koordinaten des Objekts innerhalb einer Zeiteinheit,
- die Länge des Richtungsvektors $|\vec{v}|$ für Geschwindigkeit des Objekts.

Beispiel

Ein Modellflugzeug befindet sich zu Beginn der Beobachtung im Punkt $A(100, 100, 100)$. Nach 3 Stunden befindet es sich im Punkt $B(10, 250, 85)$ (Längenangaben in km).

a) Gebe die Bahngleichungen an.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} -90 \\ 150 \\ -15 \end{pmatrix} \text{ in 3 h} \\ &\rightarrow \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ 150 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 50 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \text{Bahngleichung: } \vec{x} &= \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 50 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in h, } x \text{ in km})\end{aligned}$$

b) Bestimme, ob das Flugzeug steigt oder sinkt und mit welcher Geschwindigkeit es fliegt.

x_3 -Komponente von \vec{v} ist negativ (-5), also sinkt das Flugzeug.

$$\begin{aligned}|\vec{v}| &= \sqrt{(-30)^2 + 50^2 + (-5)^2} \approx 58.52 \\ &\Rightarrow 58.52 \frac{\text{km}}{\text{h}}\end{aligned}$$

c) Wo befindet sich das Flugzeug 1.2 h nach Beobachtungsbeginn?

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} + 1.2 \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 50 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 160 \\ 94 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \text{Im Punkt } P(64, 160, 94)\end{aligned}$$

Die Bahngleichungen der Flugzeuge 1 und 2 lauten:

$$F_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; F_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \text{ in min, } x \text{ in km})$$

a) Bestimme, ob es zu einem Zusammenstoß der beiden Flugzeuge kommt.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$t = 3.75 \text{ aus Zeile 1; } t = 3 \text{ aus Zeile 2}$$

⇒ keine Lösung

⇒ Es kommt zu keinem Zusammenstoß

b) Bestimme, ob sich die beiden Flugbahnen schneiden.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4s - 12t = -30 \quad (1)$$

$$4s - 9t = -15 \quad (2)$$

$$s = 8 \quad (3)$$

$$s = 8 \text{ in (1): } 32 - 12t = -30$$

$$t = \frac{31}{6}$$

$$s = 8 \text{ in (2): } 32 - 9t = -15$$

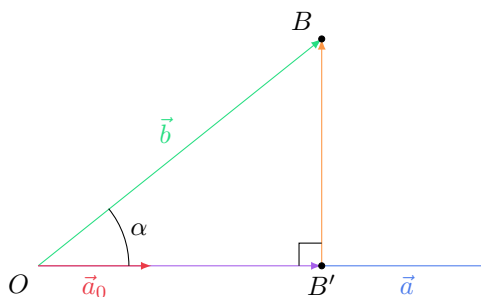
$$t = \frac{47}{9}$$

⇒ keine Lösung

⇒ Die Flugbahnen schneiden sich nicht

7.6 Winkel zwischen Vektoren

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot (\vec{OB} + \vec{B'B}) \\
 &= \vec{a} \cdot \vec{OB} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{B'B}}_{=0, \text{ da } \vec{a} \perp \vec{B'B}} \\
 &= \underbrace{|\vec{a}| \cdot \vec{a}_0}_{\vec{a}} \cdot \underbrace{|\vec{OB'}| \cdot \vec{a}_0}_{\vec{OB'}} \\
 &= |\vec{a}| \cdot |\vec{OB'}| \cdot \underbrace{\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0}_{=|\vec{a}_0|^2=1}
 \end{aligned}$$



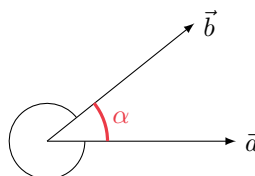
$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{OB'}| \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{OB'}|}{|\vec{b}|}$$

$$\Leftrightarrow |\vec{OB'}| = |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

mit (1): $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$



Satz

Unter dem Winkel zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} versteht man den **kleineren** der beiden Winkel, der entsteht, wenn man die Pfeile der Vektoren **zu einem gemeinsamen Anfangspunkt** zeichnet.

Für den Winkel α zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} gilt:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Beispiel

a) Bestimme den Winkel α des Dreiecks ABC mit $A(1, -1, -5)$; $B(3, 2, -4)$; $C(5, -1, -2)$.

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} \\
 &= \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{14} \cdot 5} = \frac{11}{5\sqrt{14}} \\
 \alpha &= \arccos\left(\frac{11}{5\sqrt{14}}\right) \approx 54^\circ
 \end{aligned}$$

b) Gegeben sind die Vektoren \vec{a} und \vec{b} mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Bestimme b so, dass der Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} 60° beträgt.

$$\begin{aligned} \cos 60^\circ &= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+b^2}} \\ \frac{1}{2} &= \frac{b}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+b^2}} \quad \quad \quad = \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+b^2} \quad \quad \quad | ()^2 \\ 4b^2 &= 2(1+b^2) \\ 4b^2 &= 2+2b^2 \\ b &= \pm 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Probe : } \quad b = 1 : \quad & \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+1^2}} = \frac{1}{2} \\ b = -1 : \quad & \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+(-1)^2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = 1$$