

4 Funktionen und ihre Graphen

4.1 Strecken, verschieben, spiegeln

Gegeben sei der Graph der Funktion f . Der in x -Richtung verschobene, in y -Richtung verschobene und in y -Richtung gestreckte Graph der Funktion g besitzt den Funktionsterm:

$$g(x) = a \cdot f(x - c) + d$$

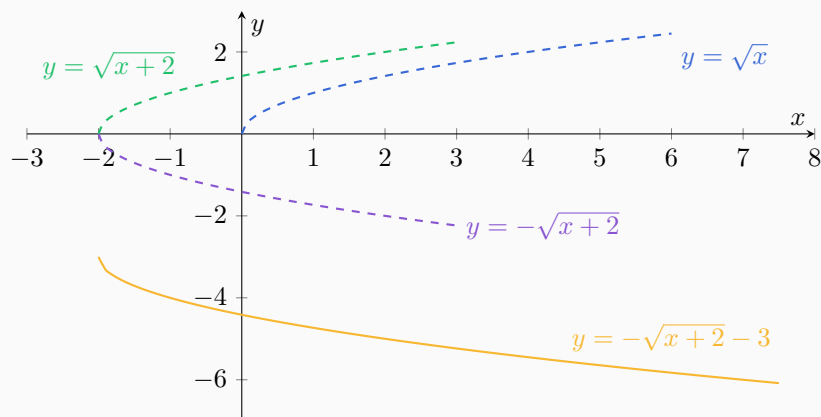
Bei den Spiegelungen von f gilt:

- $g(x) = f(-x)$ Spiegelung an der **y-Achse**
- $g(x) = -f(x)$ Spiegelung an der **x-Achse**
- $g(x) = -f(-x)$ Spiegelung am **Ursprung**

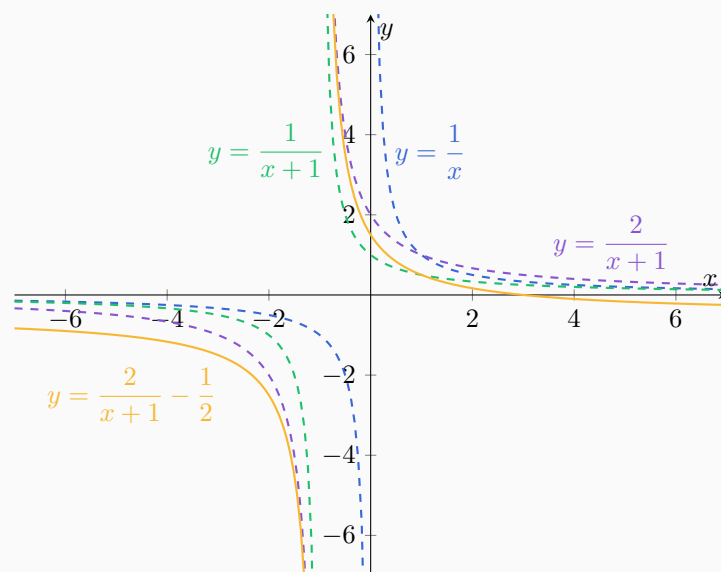
Beispiel

Skizziere die Graphen von f und g .

a) $f(x) = -\sqrt{x+2} - 3; \quad x \geq -2$



b) $g(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2}; \quad x \neq -1$



Zeige, dass die Graphen von f_k mit $f_k(x) = kxe^{x^2}$; $k \in \mathbb{R}$ punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

$$\begin{aligned}f(-x) &= k \cdot (-x) \cdot e^{(-x)^2} \\&= -kxe^{x^2} \\&= -f(x)\end{aligned}$$

□

4.2 Linearfaktordarstellung - mehrfache Nullstellen

Satz 1

Hat eine ganzrationale Funktion vom Grad n eine Nullstelle x_0 , so gilt:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x) \quad \text{wobei } g \text{ vom Grad } n - 1 \text{ ist.}$$

$(x - x_0)$ nennt man **Linearfaktor**.

Satz 2

Eine ganzrationale Funktion n -ten Grades besitzt höchstens n Nullstellen.

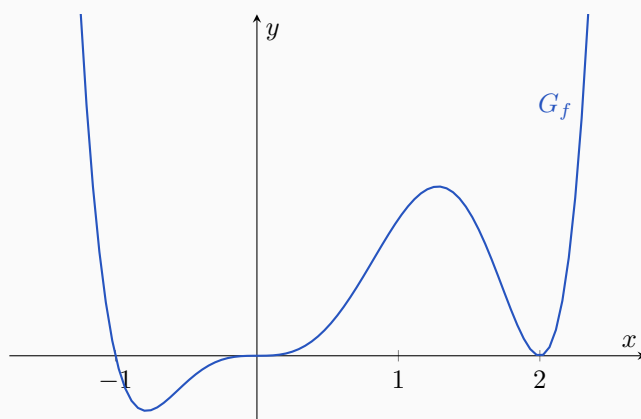
Satz 3

Sei $f(x) = (x - a)^k \cdot g(x)$.

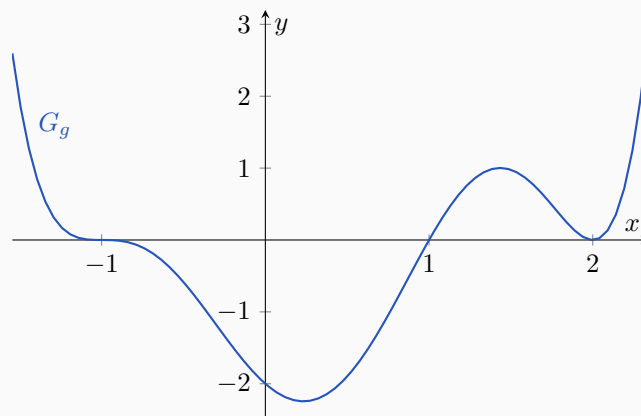
- Für $k = 1$: Schnittstelle von f mit der x -Achse.
- Für $k = 2$: Berührstelle von f an der x -Achse.
- Für $k = 3$: Sattelstelle von f an der x -Achse.

Beispiel

a) Skizziere den Graph von f mit $f(x) = x^3(x - 2)^2(x + 1)$.



b) Bestimme die Funktionsgleichung des folgenden Graphen.



$$g(x) = a(x+1)^3(x-1)(x-2)^2$$

$$\text{mit } a = 1 : g(0) = -4 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^3(x-1)(x-2)^2$$

4.3 Lösen von Gleichungen

Folgende Strategien zum Lösen von diversen Gleichungen sind zielführend:

Betragsgleichungen

Führe eine Fallunterscheidung durch:

- für positive Beträge kann man den Betrag weglassen und die Gleichung wie gewohnt lösen.
- für negative Beträge wird eine Seite der Gleichung mit -1 multipliziert.

Beispiel

	$\left \frac{10}{e^x - 1} \right = 2$	
Fall 1:	$\frac{10}{e^x - 1} = 2$	$ \cdot e^x - 1$
	$10 = 2e^x - 2$	$ + 2; \cdot \frac{1}{2}$
	$6 = e^x$	$ \ln$
	$x = \ln 6$	
Fall 2:	$-\frac{10}{e^x - 1} = 2$	$ \cdot e^x - 1$
	$-10 = 2e^x - 2$	$ + 2; \cdot \frac{1}{2}$
	$-4 = e^x \Rightarrow \text{keine Lösung}$	
Probe:	$\left \frac{10}{e^{\ln 6} - 1} \right = \left \frac{10}{5} \right = 2$	
	$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\ln 6\}$	

Wurzelgleichungen

- isoliere die Wurzel
- quadriere beide Seiten der Gleichung

Beispiel

$$\begin{aligned}\sqrt{20-2x}+6 &= x & | -6 \\ \sqrt{20-2x} &= x-6 & | ()^2 \\ 20-2x &= (x-6)^2 \\ 20-2x &= x^2-12x+36 & | -20+2x \\ x^2-10x+16 &= 0 \\ (x-2)(x-8) &= 0 \\ x_1 &= 2; x_2 = 8\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}\sqrt{20-2 \cdot 2}+6 &= 2 \Leftrightarrow 4+6 \neq 2 \\ \sqrt{20-2 \cdot 8}+6 &= 8 \Leftrightarrow 2+6 = 8 \\ &\Rightarrow \mathbb{L} = \{8\}\end{aligned}$$

Bruchgleichungen

- Bestimme den Hauptnenner
- Beide Seiten mit dem Hauptnenner durchmultiplizieren

Beispiel

$$\begin{aligned}\frac{6}{x^4} - \frac{5}{x^2} &= -1 & | \cdot x^4 \\ 6 - 5x^2 &= -x^4 & | +x^4 \\ x^4 - 5x^2 + 6 &= 0 & | u = x^2 \\ u^2 - 5u + 6 &= 0 \\ (u-2)(u-3) &= 0 \\ u_1 &= 2; u_2 = 3 & | x^2 = u\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2 &= 2 & x^2 &= 3 \\ x_1 &= \pm\sqrt{2} & x_2 &= \pm\sqrt{3} \\ x^4 \neq 0 \text{ und } x^2 \neq 0 \text{ f\"ur } x &= \pm\sqrt{2} \text{ oder } x &= \pm\sqrt{3} \\ &\Rightarrow \mathbb{L} = \{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\}\end{aligned}$$

Ungleichungen

Entweder: Mit Vergleichszeichen auflösen und aufpassen bei Multiplikation oder Division mit negativen Zahlen.

Oder: Eine Gleichung lösen und Werte größer und kleiner als die Lösung testen.

Beispiel

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x &< 0.05 & | -1 \\ -\left(\frac{1}{2}\right)^x &< -0.95 & | \cdot (-1) \\ \left(\frac{1}{2}\right)^x &> 0.95 & | \log \\ x \log 0.5 &> \log 0.95 & | \cdot \frac{1}{\log 0.5} \\ x &< \frac{\log 0.95}{\log 0.5} \approx 0.074 \end{aligned}$$

4.4 Trigonometrische Funktionen

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = \sin x$. Der Graph von der Funktion g mit

$$g(x) = a \sin(b(x - c)) + d$$

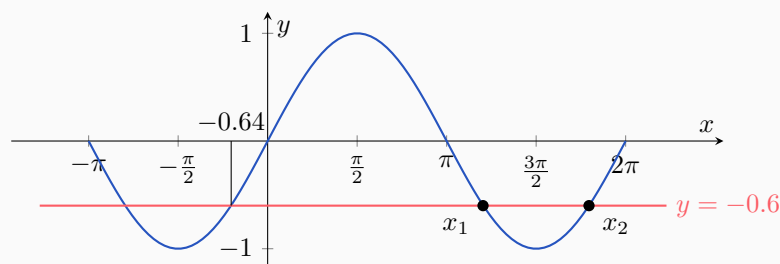
ist gegenüber dem Graph von f

- um $|a|$ Einheiten in y -Richtung gestreckt,
- um d Einheiten in y -Richtung verschoben,
- besitzt die Periode $p = \frac{2\pi}{b}$ (Streckung in x -Richtung) und
- um c Einheiten in x -Richtung verschoben.

Für $a < 0$ wird der Graph zusätzlich an der x -Achse gespiegelt.

Beispiel

a) Gib im Intervall $I = [0; 2\pi]$ zwei Lösungen der Gleichung $\sin x = -0.6$ an.



$$\begin{aligned} \sin^{-1}(-0.6) &\approx -0.64 \\ x_2 &= -0.64 + 2\pi \approx 5.64 \\ x_1 &= \pi + 0.64 \approx 3.78 \end{aligned}$$

b) Skizziere den Graphen von $f(x) = 2 \sin(2\pi(x - 1)) - 1$.

