問. 非定常の流体の場合，変動流速，変動周波数を計測するためにはどうやって計測し，どのようにデータを処理すればいいのか.

前問と違い非定常の場合を考える．この時，速度と圧力に対して以下の式が成り立つ.

$$u(t) = \bar{u} + u'(t) \tag{1}$$

$$p(t) = \bar{p} + p'(t) \tag{2}$$

このような場合，ゆっくり変化する値だけではなく，高周波まで追従できるセンサが必要となる.

流量の変化をみるためには，熱線流速計が考えられる.

熱線流速計は，細い金属線に電流を流して加熱して，流れによる冷却のされ方から速度を求める装置である．エネルギ保存則より次の式が成り立つ.

$$C_w \frac{dT_w}{dt} = P_{in} - Q_{conv} - Q_{cond} - Q_{rad} \tag{3}$$

まず，C_wは熱線全体の熱容量$[J/K]$を指し，$C_w \frac{dT_w}{dt}$は内部エネルギの変化である．$P_{in}[W]$は電気から入る熱，$Q_{conv}[W]$が対流による熱損失，$Q_{cond}[W]$が支持部への伝導熱，$Q_{rad}[W]$が放射による熱損失指す.

$$C_w = m_w c_w = \rho_w c_w V_w \tag{4}$$

熱線に電流 I，抵抗を R_w，電圧を Eとすると，ジュール熱による発熱量は，

$$P_{in} = I^2 R_w = EI = \frac{E^2}{R_w} \tag{5}$$

ニュートンの冷却則より，

$$q''_{conv} = h(T_w - T_\infty) \tag{6}$$

ここで，$\mathrm{h}[\mathrm{W}/(\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K})]$は対流熱伝達係数を指し，$A = \pi dl[\mathrm{m}^2]$を熱線の表面積とすると，

$$Q_{conv} = hA(T_w - T_\infty) \tag{7}$$

支持部への伝導と放射による熱損失は十分小さいとみなせるため，

$$Q_{cond} \approx 0 \tag{8}$$

$$Q_{rad} \approx 0 \tag{9}$$

十分時間が経ち，熱線温度が落ち着いた状態においては

$$\frac{dT_w}{dt} \approx 0 \Rightarrow C_w \frac{dT_w}{dt} \approx 0 \tag{10}$$

式(26)，式(31)，式(32)，式(33)より，

$$P_{in} = Q_{conv} \tag{11}$$

式(28)，式(30)より，

$$I^2 R_w = hA(T_w - T_\infty) \tag{12}$$

式を変形して

$$I^2 = \frac{A(T_w - T_\infty)}{R_w} h \tag{13}$$

電流と対流熱伝達係数が時間と共に変化すると考えれば，

$$I(t)^2 = Kh(t) \left(K = \frac{A(T_w - T_\infty)}{R_w} \right) \tag{14}$$

$$h(t) = \frac{I(t)^2}{K} \tag{15}$$

円柱まわりの強制対流では式(39)が成り立つため，

$$Nu = CRe^m Pr^n \tag{16}$$

ヌセルト数は$Nu = \frac{hL}{\lambda}$，レイノルズ数は$\mathrm{Re} = \frac{\rho u L}{\mu}$，プラントル数は$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$より，

$$\frac{hL}{\lambda} = C \left(\frac{\rho u L}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} \right)^n \tag{17}$$

両辺に λ/Lを掛けると，

$$h = C \frac{\lambda}{L} \left(\frac{\rho u L}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} \right)^n \tag{18}$$

実験において変動するのは流速 u のみであり，ρ，μ，c_p，λ，Lは「ほぼ一定」と見なせるため，($\rho \propto \frac{p}{T}$，$\mu = \mu(T_f), \lambda = \lambda(T_f)$，空気の比熱 c_pは 0～200 ℃くらいの範囲では変化が小さい)

$$h = k' u^m \left(k' = C \frac{\lambda}{L} \left(\frac{\rho L}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} \right)^n \right) \tag{19}$$

式(31)，式(32)において，支持部への伝導熱と放射は十分小さいと仮定したが，実際は流速が 0 の時も熱損失が存在するため，流速に依存しない熱損失を有効熱伝達係数の定数項h_0にまとめると，

$$h(t) = h_0 + k' u^m \tag{20}$$

式(36)と式(43)より，

$$\frac{I(t)^2}{K} = h_0 + k' u(t)^m \tag{21}$$

u(t)について解くと，

$$u(t) = \left[\frac{1}{k'} \left(\frac{I(t)^2}{K} - h_0 \right) \right]^{\frac{1}{m}} \tag{22}$$

定常流れでのキャリブレーションにより K, h_0, k', mを決定すれば，非定常流れ中で測定した電流波形 $I(t)$から瞬時流速 $u(t)$を求めることが可能となる．

　ここからはホイートストンブリッジを用いて熱線流速計がどのように測定しているのかを整理する．金属線の抵抗R_wは温度依存のため，ホイートストンブリッジによって，流速

変化に伴う温度変化を検出することが可能である．
それぞれの抵抗をR_1, R_2, R_3, R_w，供給電圧をE_s，中点電圧を左枝の中点を V_A，右枝の中点を V_B，出力電圧を$V_o = V_A - V_B$とすると，各枝の電流は次のようになる．

$$I_L = \frac{E_s}{R_1 + R_3} \tag{23}$$

$$I_R = \frac{E_s}{R_2 + R_w} \tag{24}$$

これを基に，中点電圧を表すと，

$$V_A = E_s - I_L R_1 = E_s \frac{R_3}{R_1 + R_3} \tag{25}$$

$$V_B = E_s - I_R R_2 = E_s \frac{R_w}{R_2 + R_w} \tag{26}$$

ブリッジ出力電圧は

$$V_o = V_A - V_B = E_s \left\{ \frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_w}{R_2 + R_w} \right\} \tag{27}$$

平衡しているときは $V_o = 0$なので，

$$\frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_w}{R_2 + R_w} \tag{28}$$

R_wについて解くと

$$R_w = \frac{R_2 R_3}{R_1} \tag{29}$$

定温度型熱線流速計では，$V_o = 0$になるように供給電圧 E_sを自動的に調整するフィードバック制御が行われるため，熱線に流れる電流 Iは次のようになる．

$$I = \frac{Es}{R_{eq}(R_1, R_2, R_3, R_w)} \tag{30}$$

R_{eq}はブリッジの等価抵抗で，R_1, R_2, R_3, R_wの組み合わせで決まる定数とする．式(35)と式(43)より，

$$I^2 R_w = A(T_w - T_\infty)\{h_0 + k' u^m\} \tag{31}$$

定温度型熱線流速計より，T_w, R_wはほぼ一定とみなせるため，h_0に掛かる部分をC_0，$|u|^m$にかかる部分をC_1とすると，

$$I^2 R_w = C_0 + C_1 |u|^m$$

両辺を R_wで割り，

$$I^2 = \frac{C_0}{R_w} + \frac{C_1}{R_w} |u|^m = A + B |u|^m \tag{32}$$

観測データに適用するためには，A, B, mを既知にする必要がある．ピトー管を用いて，Δpを求め，平均流速を導出する．

$$U = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \tag{33}$$

そのうえで，熱線プローブを設置して，定温度型熱線流速計の出力電圧 Eまたはブリッジ電流 Iを測定する．これによって，データ点 (U_i, I_i)を取得し，式(55)に最も当てはまるように最小 2 乗法を行う．この操作によって，A, B, mを既知になれば，電流波形$I(t)$に対して，瞬時流速 u(t)が計算できる．

$$|u(t)| = \left(\frac{I(t)^2 - A}{B}\right)^{\frac{1}{m}} \tag{34}$$

非定常圧力に対しても考察する．U 字管マノメータでは，応答が遅いため，ダイヤフラム式ひずみゲージ型圧力センサを考える．
円形ダイヤフラム(面積 A_d，質量 m_d)に非定常圧力 $p'(t)$が作用すると，ダイヤフラムには時間的に変動する．

$$F(t) = A_d p'(t) \tag{35}$$

ダイヤフラムはばね定数 k_d，減衰係数 c_dをもつ 1 自由度振動系とみなせるので，たわみ変位 $x(t)$は次のようになる．

$$m_d \ddot{x}(t) + c_d \dot{x}(t) + k_d x(t) = A_d p'(t) \tag{36}$$

ひずみゲージは，たわみ$x(t)$を出力電圧 $e(t)$に変換する．K_sをセンサ感度とする．

$$e(t) = K_s x(t) \tag{37}$$

入力を単一周波数の調和圧力とすると，

$$p'(t) = \hat{p} e^{iwt} \tag{38}$$

$$x(t) = \hat{x} e^{iwt} \tag{39}$$

$$e(t) = \hat{e} e^{iwt} \tag{40}$$

したがって，式(59)は次のようになる．固有角周波数を$\omega_n = \sqrt{\frac{k_d}{m_d}}$と減衰比を$\zeta = \frac{c_d}{2\sqrt{k_d m_d}}$とすると，

$$(-\omega^2 m_d + i\omega c_d + k_d)\hat{x} = A_d \hat{p} \tag{41}$$

$$\hat{x} = \frac{A_d \hat{p}}{(-\omega^2 m_d + i\omega c_d + k_d)} \tag{42}$$

圧力–電圧の周波数応答は

$$H(\omega) = \frac{\hat{e}}{\hat{p}} = \frac{K_s A_d}{k_d \left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2i\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)\right\}} \tag{43}$$

定常と非定常の違いを確認する．
定常流れは，

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{44}$$

この場合時間平均を取っても元の値と変わらない．

$$\bar{\phi}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \phi(x,t)dt \tag{45}$$

一方，非定常流れは，

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0 \tag{46}$$

であり，

$$\phi(x,t) = \bar{\phi}(x) + \phi'(x,t) \tag{47}$$

時間平均成分 $\bar{\phi}$と変動成分 ϕ'をそれぞれ評価すると，

$$\bar{\phi}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \phi(x,t)dt \tag{48}$$

$$\phi'(x,t) = \phi(x,t) - \bar{\phi}(x) \tag{49}$$

フーリエ解析について考える．これは，変動成分 $\phi'(t)$を周波数ごとの寄与に分解するための手法である．一定時間記録したΔTにわたって時間平均を取り，

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta T}\int_0^{\Delta T} u(t)dt \tag{50}$$

と定義する．この時瞬時速度は，

$$u(t) = \bar{u} + u'(t) \tag{51}$$

$$u'(t) = u(t) - \bar{u} \tag{52}$$

実際の計測によって，サンプリング間隔Δt，サンプリング周波数$f_s = 1/\Delta t$の離散的なデータを集められ，次の式によって表される．

$$u'_k = u'(k\Delta t)(k = 0,1,\dots,N-1) \tag{53}$$

このデータに対して，離散フーリエ変換(DFT)を実行する．DFT は，N 個のデータに対して，いろいろな周波数の正弦波・余弦波の足し合わせに分解する操作を指す．式に表すと次のようになる．

$$U_m = \sum_{k=0}^{N-1} u'_k e^{-i2\pi mk/N}\ (m = 0,1,\dots,N-1) \tag{54}$$

$$U_m = \sum_{k=0}^{N-1} u'_k \left(\cos\left(\frac{2\pi mk}{N}\right) - isin\left(\frac{2\pi mk}{N}\right)\right)\ (m = 0,1,\dots,N-1) \tag{55}$$

複素数で表すと，

$$U_m = a_m + ib_m \tag{56}$$

となり，a_mがコサイン成分の大きさ，b_mがサイン成分の大きさを指す．DFT で出てきたインデックス m と物理的な周波数 f[Hz]の対応は，

$$f_m = \frac{m}{N\Delta t} = \frac{mf_s}{N} \tag{57}$$

とあらわされる．U_mの大きさ(絶対値)は次のように表される．

$$|U_m| = \sqrt{\left(Re(U_m)\right)^2 + \left(Im(U_m)\right)^2} \tag{58}$$

したがってパワースペクトルは次のようになる．

$$E_{uu}(f_m) \propto |U_m|^2 \tag{59}$$

この式より，周波数ごとのエネルギの分布を見ることが可能である．スペクトル上に鋭いピークが現れる周波数は，カルマン渦列の渦放出周波数やファンの羽根通過周波数など，流れ場に固有の周期的現象に対応する支配的な変動周波数として解釈できる．

具体的な解析手法の例を見ていく．

1.　非定常解析手法の例

1.1.　RMS 値

変動成分 $u'(t)$の強さを表す代表値

$$u_{rms} = \sqrt{\overline{u'^2}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u'(t)^2 dt} \tag{60}$$

1.2.　自己相関

遅れ時間 τに対する時間的な相関構造を調べることができる．

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u'(t)\,u'(t+\tau)\,dt \tag{61}$$

1.3.　相互相関

異なる 2 位置の変動 $u'(t), v'(t)$の間の相互相関関数によって，渦構造の伝播速度や上流・下流の影響関係を時間領域で調べることができる．

$$R_{uv}(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T u'(t)\,v'(t+\tau)\,dt \tag{62}$$

1.4.　位相平均

回転位相に同期した周期成分を抽出する方法.

$$\tilde{u}(\phi) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} u\left(t_k(\phi)\right) \tag{63}$$

1.5.　Wiener–Khintchine の関係

自己相関関数とスペクトル密度の関係

$$E_{uu}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau)\,e^{-i2\pi f\tau}\,d\tau \tag{64}$$

1.6.　クロススペクトル密度

周波数 f における 2 点の変動成分の相関の強さと位相差を評価

$$G_{uv}(f) = \hat{u}(f)\,\hat{v}^*(f) \tag{65}$$

1.7. コヒーレンス関数

周波数 f において 2 点の変動がどれだけ強く結びついているか（1 に近いほど強い）を表す指標であり，ターボ機械において，翼通過周波数成分やカルマン渦列など，特定周波数成分の空間的な広がりを調べられる．

$$\gamma_{uv}^2(f) = \frac{|\,G_{uv}(f)\,|^2}{G_{uu}(f)\,G_{vv}(f)} \tag{66}$$