

ゼミ課題

問. ファンとバルブからなる実験装置において、ファンの性能曲線(効率)を求めるために
はどこにどのような装置をつければいいのか？

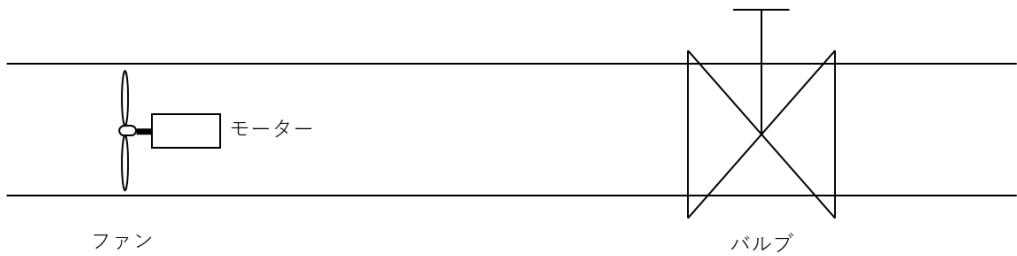


図 1 ファンとバルブの概略図

まず、効率を求めるための式を導出する。

$$\text{効率} \eta = \frac{\text{圧力上昇} P_a [P_a] \times \text{流量} Q [m^3/s]}{\text{トルク} T [N \cdot m] \times \text{角周波数} \omega [1/s]} \quad (1)$$

ここで、圧力上昇とトルクは位差量、流量と角周波数は流通量を指す。また性能曲線は、横軸に流量、縦軸に圧力と設定するため、以下の値を求める必要がある。

- ・ファン入口・出口の圧力(圧力上昇 ΔP)
- ・管内の体積流量 Q
- ・ファンのトルク T
- ・ファン回転数(角速度 ω)

1. 圧力上昇 P_a

上昇圧力 P_a をファン入口と出口の全圧差として定義する。全圧は以下の式で表すことができる。

$$p_t = p_s + \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (2)$$

この式において、 p_s は静圧を指し、 $\frac{1}{2} \rho u^2$ は動圧を指す。また、この式はベルヌーイの定理より導出できる。

$$e + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}u^2 + gh = const. \quad (3)$$

流速は以下の式より導出できる。ここで A はダクト断面積を指す。

$$u = \frac{Q}{A} \quad (4)$$

式(2)(4)より、ファン入口の全圧を p_{t1} 、ファン出口の全圧を p_{t2} とし、ファン前後のダクト径は等しいため、式(5)のようになる

$$P_a = p_{t2} - p_{t1} = (p_{s2} - p_{s1}) + \frac{1}{2}\rho(u_2^2 - u_1^2) = (p_{s2} - p_{s1}) + \frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{Q_2}{A}\right)^2 - \left(\frac{Q_1}{A}\right)^2\right) \quad (5)$$

ここで、定常・非圧縮とすると、

$$Q_1 = Q_2 = Q \quad (6)$$

よって、

$$P_a = p_{s2} - p_{s1} \quad (7)$$

したがって、ファン入口と出口の静圧 p_{s1} と p_{s2} の計測が必要である。入口・出口の直管部に U 字管マノメータまたは差圧計を用いることで測定できる。今回は差圧しか利用しないため、2つの静圧孔に対して、U 字管差圧マノメータを接続すればいいと考えられる。

2. 流量 Q

流量を計測する方法はいくつか考えられる。オリフィス流量計、ベンチュリ管、ピト管+断面積である。それぞれについて解説する

2.1. オリフィス流量計

オリフィス上流、下流のそれぞれの断面積を A_3, A_4 、流速を u_3, u_4 、静圧を p_{s3}, p_{s4} とする。密度 ρ 一定の非圧縮・定常一次元流れより、

$$Q = u_3 A_3 = u_4 A_4 \quad (8)$$

式(8)と式(2)を用いると、オリフィス前後の静圧差 Δp_o は

$$\Delta p_o = p_{s3} - p_{s4} = \frac{1}{2}\rho(u_4^2 - u_3^2) = \frac{1}{2}\rho\left(\left(\frac{Q}{A_4}\right)^2 - \left(\frac{Q}{A_3}\right)^2\right) \quad (9)$$

式(9)を Q について解くと、

$$Q = \sqrt{\frac{2\Delta p_o}{\rho\left(\frac{1}{A_4^2} - \frac{1}{A_3^2}\right)}} \quad (10)$$

粘性によるエネルギー損失や取縮の影響を考慮して流量係数 C を導入する。この値は、オリフィスの形状より既知の値である。

$$Q = C \sqrt{\frac{2\Delta p_o}{\rho\left(\frac{1}{A_4^2} - \frac{1}{A_3^2}\right)}} \quad (11)$$

ファン下流にオリフィス板を設置して、オリフィス前後の静圧 p_{s3}, p_{s4} をダクト壁面で U 字管マノメータまたは差圧計によって測定する。また、オリフィス前後には十分な長さの直管部を設け、流れを一様にすることで流量係数 C が既知の値として適用できるようにする。

2.2. ベンチュリ管

ベンチュリ管は、入口の太い断面、途中の絞り部、下流の拡大部から構成される流量計であり、導出できる式はオリフィス流量計と同様に式(11)が求まる。ここではベンチュリ用の流量係数 C_v とする。

$$Q = C_v \sqrt{\frac{2\Delta p_b}{\rho \left(\frac{1}{A_4^2} - \frac{1}{A_3^2} \right)}} \quad (12)$$

ノズル流量計も同様な計測方法が考えられる。

2.3. ピトー管と断面積

式(2)より、

$$p_t - p_s = \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (13)$$

理想的な流速は次のようになる。

$$u = \sqrt{\frac{2(p_t - p_s)}{\rho}} \quad (14)$$

実際にはピトー管の形状や取り付けの影響を補正するため、速度係数 C_p を導入する。

$$u = C_p \sqrt{\frac{2(p_t - p_s)}{\rho}} \quad (15)$$

ダクト半径方向のいくつかの位置 r_i でピトー管により速度 u_i を測定し、これらの値から面積平均流速 u_{avg} を求める。

$$u_{avg} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i \quad (16)$$

(円管の場合)

$$u_{avg} = \frac{1}{A} \int_A u \, dA \quad (16)'$$

$$Q = u_{avg} A \quad (17)$$

オリフィスやベンチュリ管は絞り前後の静圧差を測って全体の流量を出すのに対して、ピトー管は断面内の速度分布を直接測って積分的に流量を求める違いがある。

2.4. オリフィス板を採用する理由

オリフィス流量計は、他の実験方法に比べて圧力損失は大きいものの、構造が単純のため準備が容易である。このため、コストと取り扱いの容易さから採用するのが現実的であると判断できる。

3. 空気密度 ρ

式(11)の流量の導出において、空気密度 ρ が必要である。空気は理想気体とみなせるので、状態方程式より、

$$\rho = \frac{p_{atm}}{RT} \quad (18)$$

それぞれの変数は、 p_{atm} が空気密度 [kg/m³]、 p が空気の絶対圧 [Pa]、 R が空気の気体定数 $R = 287\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 、 T が絶対温度 [K] である。

温度は摂氏温度 θ [°C] から式(19)より絶対温度 [K] に変換できる。

$$T = \theta + 273.15 \quad (19)$$

したがって、式(18)は次のようになる。

$$\rho = \frac{p}{287 \times (\theta + 273.15)} \quad (20)$$

したがって、空気密度 ρ を求めるためには、温度計と気圧計が必要だとわかる。

本実験装置ではファンの圧縮比が小さく、吸込口からオリフィス部までの温度変化や圧力変化もわずかであると考えられるため、空気は非圧縮・等温とみなし、室内外気圧と外気温から求めた一定密度を用いる近似を採用した。

一方で、より厳密に評価する場合には、オリフィス直前断面における静圧 p_n と温度 θ_n を個別に測定し、それらを式(20)に代入して局所空気密度 ρ_n を算出する必要がある。

4. トルク T

トルクを測るためにモータとファンの間の軸に回転軸用トルク計を挿入して設置することが考えられる。ひずみゲージを用いて、軸に加わるせん断応力を検出して、トルク T を求める装置であり、出力電圧を V_{out} とし、あらかじめ校正試験により得られた比例係数を K_T とすると、トルクは式(21)のようになる。

$$T = K_T V_{out} \quad (21)$$

5. 角周波数 ω

角速度を求めるために、まず回転数を求める。回転数は、式(22)より角速度に変換できる。また単位は[rpm]である。

$$\omega = \frac{2\pi N}{60} \quad (22)$$

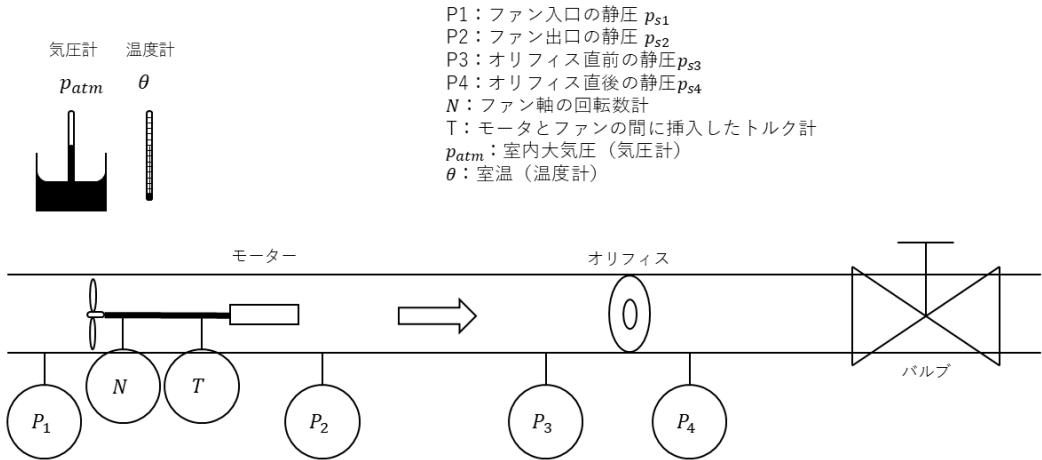
回転数を求めるためには回転体に貼り付けた反射マークやスリットを光学的に検出し、1

回転あたりのパルス数から求める方法が考えられる。

パルスの周波数を f [Hz] (1秒あたりの回転数) とすると、次のようになる。

$$N = 60f \quad (23)$$

図にすると次のようになる。



問. 非定常の流体の場合、変動流速、変動周波数を計測するためにはどうやって計測し、どのようにデータを処理すればいいのか。

前問と違い非定常の場合を考える。この時、速度と圧力に対して以下の式が成り立つ。

$$u(t) = \bar{u} + u'(t) \quad (24)$$

$$p(t) = \bar{p} + p'(t) \quad (25)$$

このような場合、ゆっくり変化する値だけではなく、高周波まで追従できるセンサが必要となる。

流量の変化を見るためには、熱線流速計が考えられる。

熱線流速計は、細い金属線に電流を流して加熱して、流れによる冷却のされ方から速度を求める装置である。エネルギー保存則より次の式が成り立つ。

$$C_w \frac{dT_w}{dt} = P_{in} - Q_{conv} - Q_{cond} - Q_{rad} \quad (26)$$

まず、 C_w は熱線全体の熱容量 [J/K] を指し、 $C_w \frac{dT_w}{dt}$ は内部エネルギーの変化である。 $P_{in} [W]$ は電気から入る熱、 $Q_{conv} [W]$ が対流による熱損失、 $Q_{cond} [W]$ が支持部への伝導熱、 $Q_{rad} [W]$ が放射による熱損失指す。

$$C_w = m_w c_w = \rho_w c_w V_w \quad (27)$$

熱線に電流 I , 抵抗を R_w , 電圧を E とすると, ジュール熱による発熱量は,

$$P_{in} = I^2 R_w = EI = \frac{E^2}{R_w} \quad (28)$$

ニュートンの冷却則より,

$$q''_{conv} = h(T_w - T_\infty) \quad (29)$$

ここで, $h[W/(m^2 \cdot K)]$ は対流熱伝達係数を指し, $A = \pi d l [m^2]$ を熱線の表面積とすると,

$$Q_{conv} = hA(T_w - T_\infty) \quad (30)$$

支持部への伝導と放射による熱損失は十分小さいとみなせるため,

$$Q_{cond} \approx 0 \quad (31)$$

$$Q_{rad} \approx 0 \quad (32)$$

十分時間が経ち, 热線温度が落ち着いた状態においては

$$\frac{dT_w}{dt} \approx 0 \Rightarrow C_w \frac{dT_w}{dt} \approx 0 \quad (33)$$

式(26), 式(31), 式(32), 式(33)より,

$$P_{in} = Q_{conv} \quad (34)$$

式(28), 式(30)より,

$$I^2 R_w = hA(T_w - T_\infty) \quad (35)$$

式を変形して

$$I^2 = \frac{A(T_w - T_\infty)}{R_w} h \quad (36)$$

電流と対流熱伝達係数が時間と共に変化すると考えれば,

$$I(t)^2 = Kh(t) \left(K = \frac{A(T_w - T_\infty)}{R_w} \right) \quad (37)$$

$$h(t) = \frac{I(t)^2}{K} \quad (38)$$

円柱まわりの強制対流では式(39)が成り立つため,

$$Nu = C Re^m Pr^n \quad (39)$$

ヌセルト数は $Nu = \frac{hL}{\lambda}$, レイノルズ数は $Re = \frac{\rho u L}{\mu}$, プラントル数は $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ より,

$$\frac{hL}{\lambda} = C \left(\frac{\rho u L}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} \right)^n \quad (40)$$

両辺に λ/L を掛けると,

$$h = C \frac{\lambda}{L} \left(\frac{\rho u L}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} \right)^n \quad (41)$$

実験において変動するのは流速 u のみであり, ρ , μ , c_p , λ , L は「ほぼ一定」と見なせる

ため、($\rho \propto \frac{p}{T}$, $\mu = \mu(T_f)$, $\lambda = \lambda(T_f)$, 空気の比熱 c_p は $0 \sim 200$ °C くらいの範囲では変化が小さい)

$$h = k'u^m \left(k' = C \frac{\lambda}{L} \left(\frac{\rho L}{\mu} \right)^m \left(\frac{\mu c_p}{\lambda} \right)^n \right) \quad (42)$$

式(31), 式(32)において、支持部への伝導熱と放射は十分小さいと仮定したが、実際は流速が 0 の時も熱損失が存在するため、流速に依存しない熱損失を有効熱伝達係数の定数項 h_0 にまとめると、

$$h(t) = h_0 + k'u^m \quad (43)$$

式(36)と式(43)より、

$$\frac{I(t)^2}{K} = h_0 + k'u(t)^m \quad (44)$$

$u(t)$ について解くと、

$$u(t) = \left[\frac{1}{k'} \left(\frac{I(t)^2}{K} - h_0 \right) \right]^{\frac{1}{m}} \quad (45)$$

定常流れでのキャリブレーションにより K, h_0, k', m を決定すれば、非定常流れ中で測定した電流波形 $I(t)$ から瞬時流速 $u(t)$ を求めることが可能となる。

ここからはホイートストンブリッジを用いて熱線流速計がどのように測定しているのかを整理する。金属線の抵抗 R_w は温度依存のため、ホイートストンブリッジによって、流速変化に伴う温度変化を検出することが可能である。

それぞれの抵抗を R_1, R_2, R_3, R_w , 供給電圧を E_s , 中点電圧を左枝の中点を V_A , 右枝の中点を V_B , 出力電圧を $V_o = V_A - V_B$ とすると、各枝の電流は次のようになる。

$$I_L = \frac{E_s}{R_1 + R_3} \quad (46)$$

$$I_R = \frac{E_s}{R_2 + R_w} \quad (47)$$

これを基に、中点電圧を表すと、

$$V_A = E_s - I_L R_1 = E_s \frac{R_3}{R_1 + R_3} \quad (48)$$

$$V_B = E_s - I_R R_2 = E_s \frac{R_w}{R_2 + R_w} \quad (49)$$

ブリッジ出力電圧は

$$V_o = V_A - V_B = E_s \left\{ \frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_w}{R_2 + R_w} \right\} \quad (50)$$

平衡しているときは $V_o = 0$ なので、

$$\frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_w}{R_2 + R_w} \quad (51)$$

R_w について解くと

$$R_w = \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (52)$$

定温度型熱線流速計では、 $V_o = 0$ になるように供給電圧 E_s を自動的に調整するフィードバック制御が行われるため、熱線に流れる電流 I は次のようになる。

$$I = \frac{E_s}{R_{eq}(R_1, R_2, R_3, R_w)} \quad (53)$$

R_{eq} はブリッジの等価抵抗で、 R_1, R_2, R_3, R_w の組み合わせで決まる定数とする。式(35)と式(43)より、

$$I^2 R_w = A(T_w - T_\infty) \{h_0 + k' u^m\} \quad (54)$$

定温度型熱線流速計より、 T_w, R_w はほぼ一定とみなせるため、 h_0 に掛かる部分を C_0 、 $|u|^m$ にかかる部分を C_1 とすると、

$$I^2 R_w = C_0 + C_1 |u|^m$$

両辺を R_w で割り、

$$I^2 = \frac{C_0}{R_w} + \frac{C_1}{R_w} |u|^m = A + B |u|^m \quad (55)$$

観測データに適用するためには、 A, B, m を既知にする必要がある。ピト一管を用いて、 Δp を求め、平均流速を導出する。

$$U = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}} \quad (56)$$

そのうえで、熱線プローブを設置して、定温度型熱線流速計の出力電圧 E またはブリッジ電流 I を測定する。これによって、データ点 (U_i, I_i) を取得し、式(55)に最も当てはまるよう最小2乗法を行う。この操作によって、 A, B, m を既知になれば、電流波形 $I(t)$ に対して、瞬時流速 $u(t)$ が計算できる。

$$|u(t)| = \left(\frac{I(t)^2 - A}{B} \right)^{\frac{1}{m}} \quad (57)$$

非定常圧力に対しても考察する。U字管マノメータでは、応答が遅いため、ダイヤフラム式ひずみゲージ型圧力センサを考える。

円形ダイヤフラム(面積 A_d 、質量 m_d)に非定常圧力 $p'(t)$ が作用すると、ダイヤフラムには時間的に変動する。

$$F(t) = A_d p'(t) \quad (58)$$

ダイヤフラムはばね定数 k_d 、減衰係数 c_d をもつ1自由度振動系とみなせるので、たわみ変位 $x(t)$ は次のようなになる。

$$m_d \ddot{x}(t) + c_d \dot{x}(t) + k_d x(t) = A_d p'(t) \quad (59)$$

ひずみゲージは、たわみ $x(t)$ を出力電圧 $e(t)$ に変換する。 K_s をセンサ感度とする。

$$e(t) = K_s x(t) \quad (60)$$

入力を单一周波数の調和圧力とすると、

$$p'(t) = \hat{p} e^{i\omega t} \quad (61)$$

$$x(t) = \hat{x} e^{i\omega t} \quad (62)$$

$$e(t) = \hat{e} e^{i\omega t} \quad (63)$$

したがって、式(59)は次のようになる。固有角周波数を $\omega_n = \sqrt{\frac{k_d}{m_d}}$ と減衰比を $\zeta = \frac{c_d}{2\sqrt{k_d m_d}}$ と

すると、

$$(-\omega^2 m_d + i\omega c_d + k_d) \hat{x} = A_d \hat{p} \quad (64)$$

$$\hat{x} = \frac{A_d \hat{p}}{(-\omega^2 m_d + i\omega c_d + k_d)} \quad (65)$$

圧力-電圧の周波数応答は

$$H(\omega) = \frac{\hat{e}}{\hat{p}} = \frac{K_s A_d}{k_d \left\{ 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + 2i\zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right) \right\}} \quad (66)$$

定常と非定常の違いを確認する。

定常流れは、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (67)$$

この場合時間平均を取っても元の値と変わらない。

$$\bar{\phi}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x, t) dt \quad (68)$$

一方、非定常流れは、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0 \quad (69)$$

であり、

$$\phi(x, t) = \bar{\phi}(x) + \phi'(x, t) \quad (70)$$

時間平均成分 $\bar{\phi}$ と変動成分 ϕ' をそれぞれ評価すると、

$$\bar{\phi}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x, t) dt \quad (71)$$

$$\phi'(x, t) = \phi(x, t) - \bar{\phi}(x) \quad (72)$$

フーリエ解析について考える。これは、変動成分 $\phi'(t)$ を周波数ごとの寄与に分解するための手法である。一定時間記録した ΔT にわたって時間平均を取り、

$$\bar{u} = \frac{1}{\Delta T} \int_0^{\Delta T} u(t) dt \quad (73)$$

と定義する。この時瞬時速度は、

$$u(t) = \bar{u} + u'(t) \quad (74)$$

$$u'(t) = u(t) - \bar{u} \quad (75)$$

実際の計測によって、サンプリング間隔 Δt 、サンプリング周波数 $f_s = 1/\Delta t$ の離散的なデータを集められ、次の式によって表される。

$$u'_k = u'(k\Delta t) (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (76)$$

このデータに対して、離散フーリエ変換(DFT)を実行する。DFT は、N 個のデータに対して、いろいろな周波数の正弦波・余弦波の足し合わせに分解する操作を指す。式に表すと次のようになる。

$$U_m = \sum_{k=0}^{N-1} u'_k e^{-i2\pi mk/N} (m = 0, 1, \dots, N-1) \quad (77)$$

$$U_m = \sum_{k=0}^{N-1} u'_k \left(\cos\left(\frac{2\pi mk}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi mk}{N}\right) \right) (m = 0, 1, \dots, N-1) \quad (78)$$

複素数で表すと、

$$U_m = a_m + ib_m \quad (79)$$

となり、 a_m がコサイン成分の大きさ、 b_m がサイン成分の大きさを指す。DFT で出てきたインデックス m と物理的な周波数 f[Hz]の対応は、

$$f_m = \frac{m}{N\Delta t} = \frac{mf_s}{N} \quad (80)$$

とあらわされる。 U_m の大きさ(絶対値)は次のように表される。

$$|U_m| = \sqrt{(Re(U_m))^2 + (Im(U_m))^2} \quad (81)$$

したがってパワースペクトルは次のようになる。

$$E_{uu}(f_m) \propto |U_m|^2 \quad (82)$$

この式より、周波数ごとのエネルギーの分布を見ることが可能である。スペクトル上に鋭いピークが現れる周波数は、カルマン渦列の渦放出周波数やファンの羽根通過周波数など、流れ場に固有の周期的現象に対応する支配的な変動周波数として解釈できる。

具体的な解析手法の例を見ていく。

6. 非定常解析手法の例

6.1. RMS 値

変動成分 $u'(t)$ の強さを表す代表値

$$u_{rms} = \sqrt{\overline{u'^2}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u'(t)^2 dt} \quad (83)$$

6.2. 自己相関

遅れ時間 τ に対する時間的な相関構造を調べることができる.

$$R_{uu}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u'(t) u'(t + \tau) dt \quad (84)$$

6.3. 相互相関

異なる 2 位置の変動 $u'(t), v'(t)$ の間の相互相関関数によって、渦構造の伝播速度や上流・下流の影響関係を時間領域で調べることができる.

$$R_{uv}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u'(t) v'(t + \tau) dt \quad (85)$$

6.4. 位相平均

回転位相に同期した周期成分を抽出する方法.

$$\tilde{u}(\phi) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u(t_k(\phi)) \quad (86)$$

6.5. Wiener–Khintchine の関係

自己相関関数とスペクトル密度の関係

$$E_{uu}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{uu}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau \quad (87)$$

6.6. クロススペクトル密度

周波数 f における 2 点の変動成分の相関の強さと位相差を評価

$$G_{uv}(f) = \hat{u}(f) \hat{v}^*(f) \quad (88)$$

6.7. コヒーレンス関数

周波数 f において 2 点の変動がどれだけ強く結びついているか（1 に近いほど強い）を表す指標であり、ターボ機械において、翼通過周波数成分やカルマン渦列など、特定周波数成分の空間的な広がりを調べられる.

$$\gamma_{uv}^2(f) = \frac{|G_{uv}(f)|^2}{G_{uu}(f) G_{vv}(f)} \quad (89)$$