二体問題で楽をしよう

2025 年 1 月 18 日

1　はじめに

このノートは、大学受験の物理における二体問題において、時短する方法をまとめたものである。

2　よく使う公式

二物体の質量をそれぞれ m_1、m_2、速度をそれぞれ v_1、v_2 とする。

2.1　重心速度

二体の重心速度は、

$$v_\mathrm{g} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{2.1}$$

により定義される。

二体の重心速度は、外力が働かない限り一定であることが知られている。それぞれの物体について運動方程式を考えると、

$$m_1 a_1 = F_1 + f_{21} \tag{2.2}$$
$$m_2 a_2 = F_2 + f_{12} \tag{2.3}$$

となる。ただし、f_{21} は物体 1 が物体 2 に受ける力であり、f_{12} は物体 2 が物体 1 に受ける力である。また、F_1 は物体 1 に働く外力であり、F_2 は物体 2 に働く外力である。両辺足し合わせると、

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 = F_1 + F_2 \tag{2.4}$$

となる。ただし、作用反作用の法則より、$f_{21} + f_{12} = 0$ であることを用いた。次に、両辺 $1 = \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}$ をかけると、

$$(m_1 + m_2)\frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} = F_1 + F_2 \tag{2.5}$$

となる。したがって、

$$Ma_{\mathrm{g}} = F_1 + F_2 \tag{2.6}$$

となる。ただし、

$$a_{\mathrm{g}} = \frac{m_1 a_1 + m_2 a_2}{m_1 + m_2} \quad \text{：重心加速度} \tag{2.7}$$

$$M = m_1 + m_2 \quad \text{：全質量} \tag{2.8}$$

である。ところで、全系に外力が働かない限り、$F_1 + F_2 = 0$ である。したがって、

$$Ma_{\mathrm{g}} = 0 \tag{2.9}$$

となる。したがって、$a_{\mathrm{g}} = 0$ であるから、

$$v_{\mathrm{g}} = \text{一定} \tag{2.10}$$

である。したがって、外力が働かない限り二体の重心速度は一定である。

2.2　運動エネルギー

二体の運動エネルギーは、

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{2.11}$$

であった。これは、重心速度および相対速度を用いて、

$$K = \frac{1}{2} M v_{\mathrm{g}}^2 + \frac{1}{2} \mu v_{\mathrm{r}}^2 \tag{2.12}$$

と書き換えることができる。ただし、

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad \text{：重心速度} \tag{2.13}$$

$$v_{\mathrm{r}} = v_1 - v_2 \quad \text{：相対速度} \tag{2.14}$$

$$M = m_1 + m_2 \quad \text{：全質量} \tag{2.15}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{：換算質量} \tag{2.16}$$

である。

Prf.

まず、二体の運動エネルギーを次のように書く。

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \tag{2.17}$$

次に、v_1 と v_2 を重心速度 v_g と相対速度 v_r を用いて表す。

$$v_1 = v_\mathrm{g} + \frac{m_2}{M} v_\mathrm{r} \tag{2.18}$$

$$v_2 = v_\mathrm{g} - \frac{m_1}{M} v_\mathrm{r} \tag{2.19}$$

これを運動エネルギーの式に代入する。

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} m_1 \left(v_\mathrm{g} + \frac{m_2}{M} v_\mathrm{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(v_\mathrm{g} - \frac{m_1}{M} v_\mathrm{r} \right)^2 && (2.20)\\
&= \frac{1}{2} m_1 \left(v_\mathrm{g}^2 + 2 v_\mathrm{g} \frac{m_2}{M} v_\mathrm{r} + \left(\frac{m_2}{M} v_\mathrm{r} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(v_\mathrm{g}^2 - 2 v_\mathrm{g} \frac{m_1}{M} v_\mathrm{r} + \left(\frac{m_1}{M} v_\mathrm{r} \right)^2 \right) && (2.21)\\
&= \frac{1}{2} m_1 v_\mathrm{g}^2 + m_1 v_\mathrm{g} \frac{m_2}{M} v_\mathrm{r} + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{M} v_\mathrm{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 v_\mathrm{g}^2 - m_2 v_\mathrm{g} \frac{m_1}{M} v_\mathrm{r} + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{M} v_\mathrm{r} \right)^2 && (2.22)
\end{aligned}$$

ここで、$m_1 v_\mathrm{g} \frac{m_2}{M} v_\mathrm{r}$ と $-m_2 v_\mathrm{g} \frac{m_1}{M} v_\mathrm{r}$ は打ち消し合うので、

$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2} m_1 v_\mathrm{g}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_\mathrm{g}^2 + \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{M} v_\mathrm{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{M} v_\mathrm{r} \right)^2 && (2.23)\\
&= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_\mathrm{g}^2 + \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{M^2} v_\mathrm{r}^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{M^2} v_\mathrm{r}^2 && (2.24)\\
&= \frac{1}{2} M v_\mathrm{g}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{M^2} \right) v_\mathrm{r}^2 && (2.25)\\
&= \frac{1}{2} M v_\mathrm{g}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{M^2} \right) v_\mathrm{r}^2 && (2.26)\\
&= \frac{1}{2} M v_\mathrm{g}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{M} \right) v_\mathrm{r}^2 && (2.27)\\
&= \frac{1}{2} M v_\mathrm{g}^2 + \frac{1}{2} \mu v_\mathrm{r}^2 && (2.28)
\end{aligned}$$

したがって、二体の運動エネルギーは重心速度および相対速度を用いて次のように表される。

$$K = \frac{1}{2} M v_\mathrm{g}^2 + \frac{1}{2} \mu v_\mathrm{r}^2 \tag{2.29}$$

□

2.3　反発係数

高校の教科書において、反発係数は次のように定義されているようである。

$$e = -\frac{v_2' - v_1'}{v_2 - v_1} \tag{2.30}$$

ただし、v_1 は物体 1 の衝突前の速度、v_2 は物体 2 の衝突前の速度、v_1' は物体 1 の衝突後の速度、v_2' は物体 2 の衝突後の速度である。

しかし、以下のようにした方が計算が楽である。

$$v_1' - v_\mathrm{g} = -e(v_1 - v_\mathrm{g}) \tag{2.31}$$

$$v_2' - v_\mathrm{g} = -e(v_2 - v_\mathrm{g}) \tag{2.32}$$

ただし、v_g は重心速度である。定義が等価なことを示す。

Prf.

式 (2.32) から式 (2.31) を引くと、

$$
\begin{aligned}
v_2' - v_1' &= -e(v_2 - v_\mathrm{g}) + e(v_1 - v_\mathrm{g}) \qquad (2.33) \\
&= -e(v_2 - v_1) \qquad (2.34)
\end{aligned}
$$

となる。したがって、定義が等価であることが示された。

3 応用例

以上の公式を使うと、以下のような問題が 3 分もあれば解けるようになる。

問題

以下のような、物体 1 と物体 2 が質量 m_1 および m_2 で、物体 2 の斜面部分を 1 が登っていくような問題を考える。

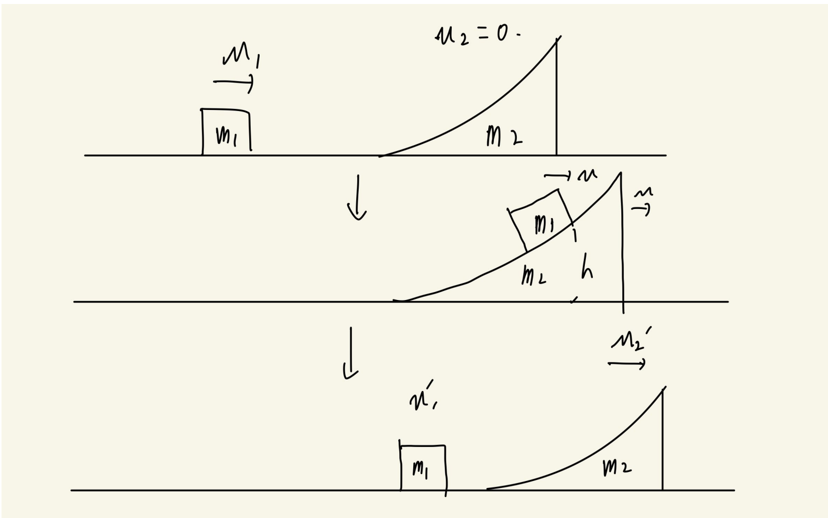

図 1　問題の図

はじめ、物体 1 の速度は v_1 であり、物体 2 の速度は 0 である。物体間の摩擦や床の摩擦、空気抵抗は無視できるものとする。このとき、

(1) 物体 1 が物体 2 の最高点に到達したときの速度 v を求めよ。

(2) 物体 1 が物体 2 の最高点に到達したときの物体 1 の地面からの高さを求めよ。

(3) 物体 1 が再び地面に到達したときの物体 2 の速度を求めよ。

解答

(1) 二体について水平方向の外力は加わっていないので、物体が最高点に到達したとき、その水平

方向の速度は二体の重心速度に等しい。二体の最初の重心速度は、

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \tag{3.1}$$

であったから、これが求める速度である。

(2) 力学的エネルギー保存則を考える。今、始めの状態と最高点の状態の運動エネルギーの差は、相対運動エネルギーの差に等しく、最高点において相対運動エネルギーが 0 であるから、

$$\Delta K = -\frac{1}{2}\mu v_1^2 \tag{3.2}$$

である。(始めの相対速度が $v_1 - 0 = v_1$ であることに注意)。ところで、この間に重力による仕事が $-m_1 g h$ だけなされる。したがって、

$$-m_1 g h = -\frac{1}{2}\mu v_1^2 \tag{3.3}$$

である。これを解いて、

$$h = \frac{\mu v_1^2}{2 m_1 g} = \frac{m_2 v_1^2}{2(m_1 + m_2) g} \tag{3.4}$$

である。

(3) この問題は、反発係数 1 の衝突問題としてとらえることもできる。したがって、物体 1 が再び地面に到達したときの物体 2 の速度は、

$$\begin{aligned} v_2' &= -1 \cdot (v_2 - v_{\mathrm{g}}) + v_{\mathrm{g}} && (3.5) \\ &= -(0 - v_{\mathrm{g}}) + v_{\mathrm{g}} && (3.6) \\ &= 2 v_{\mathrm{g}} && (3.7) \\ &= \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} && (3.8) \end{aligned}$$

である。

おまけとして、物体 1 の最後の速度は、

$$v_1' = -(v_1 - v_{\mathrm{g}}) + v_{\mathrm{g}} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \tag{3.9}$$

である。