群と物理

大上由人

2024 年 4 月 10 日

1　群の定義

1.1　群の定義

群の定義

集合 G とその上の二項演算 $\cdot$ が以下の条件を満たすとき、$(G, \cdot)$ を群という。

1. 積は結合的である。
2. 単位元 e が存在する。
3. 逆元が存在する。

ex

正六角形の合同変換群について考える。
合同変換群を G とすると、$G = \{e, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$ である。ただし、θ は時計回りに $60°$ 回転、σ_i は i 番目の頂点を中心に反転である。

このとき、積表は次のようになる。

2　共役元

def: 共役元

$a, b \in G$ に対して、$b = g^{-1}ag$ を満たす $g \in G$ が存在するとき、a と b は共役であるという。
また、元 a に対して、a と共役な元全体の集合

$$C(a) = \{g^{-1}ag | g \in G\} \tag{1}$$

を a の共役類という。

このとき、$C(a)$ は G の部分群である。
共役関係は推移的に成り立つ。すなわち、a と b が共役で、b と c が共役ならば、a と c も共役である。というのも、

$$b = g^{-1}ag, \quad c = h^{-1}bh \tag{2}$$

とすると、

$$c = h^{-1}bh = h^{-1}g^{-1}agh = (gh)^{-1}a(gh) \tag{3}$$

となるからである。

thm

群 G は、互いに交わらない共役類の和集合である。

Prf
上で考えた推移律を用いる。
まず、群 G の元 a を選ぶ。そうすると、適当な $g \in G$ に対して、$b = g^{-1}ag$ を定められる。これと共役なものは推移律を用いて導くことができる。
次に、a と共役なものを取り切ったら、a と共役でない元 b を選び、同じことを繰り返す。
以上の操作を繰り返すことで、G の全ての元を共役類に分解することができる。

ex
正六角形の合同変換群について考える。
このとき、積表を見比べてみると、共役類は次のようになる。
$\{e\}$, $\{\theta, \theta^5\}$, $\{\theta^2, \theta^4\}$, $\{\sigma_1, \sigma_4\}$, $\{\sigma_2, \sigma_5\}$, $\{\sigma_3, \sigma_6\}$
また、上の例にもあるように、可換群の元は、自身単独で共役類をなす。というのも、$gag^{-1} = a$ が成り立つからである。

def: 不変部分群

G を群、H を G の部分群とする。このとき、H が G の共役変換に対して不変であるとは、$gHg^{-1} = H$ を満たすことである。このとき、H を G の不変部分群という。

すなわち、H は共役変換に対して不変である。
ただし、任意の元について、$ghg^{-1} = h$ が成り立つわけではない。

def: 中心化群

G を群、H を G の部分群とする。このとき、H の中心化群 $Z(H)$ を次のように定義する。

$$Z(H) = \{g \in G | ghg^{-1} = h \quad \text{for all} \quad h \in H\} \tag{4}$$

すなわち、$Z(H)$ は H の共役変換に対して不変な元全体の集合である。$Z(H)$ は G の部分群である。また、$Z(H)$ は H の中心とも呼ばれる。

def: 右側剰余類/左側剰余類

$a \in G$ に対して、G の部分群 H に対して、

$$aH = \{ah | h \in H\}, \quad Ha = \{ha | h \in H\} \tag{5}$$

をそれぞれ a の右側剰余類、左側剰余類という。ただし、不変部分群の場合は、右側剰余類と左側剰余類は一致する。というのも、

$$aH = Ha \tag{6}$$

が成り立つからである。

prop

異なる剰余類は互いに交わらない。

Prf

二つの異なる剰余類 Hg_1 と Hg_2 が交わるとする。すなわち、$Hg_1 \cap Hg_2 \neq \emptyset$ とする。このとき、$h_1 g_1 = h_2 g_2$ となる $h_1, h_2 \in H$ が存在する。このとき、

$$g_1 = h_1^{-1} h_2 g_2 \tag{7}$$

となるが、$h_1^{-1} h_2 \in H$ であるから、$g_1 \in Hg_2$ となる。よって、$Hg_1 \subset Hg_2$ である。同様にして、$Hg_2 \subset Hg_1$ であるから、$Hg_1 = Hg_2$ である。よって、異なる剰余類は互いに交わらない。
以上の事実から、群 G は、互いに交わらない剰余類の和集合である。
剰余類分解の一般の方法は、次のようになる。
まず、H に属さない元 g_1 を選び、Hg_1 を考える。次に、H にも Hg_1 にも属さない元 g_2 を選び、Hg_2 を考える。このようにして、G の全ての元を剰余類に分解することができる。

ex

正六角形の合同変換群について考える。

ここで、剰余類の集合の積を考える。

def: 剰余類の積

G を群、H を G の部分群、$a, b \in G$ に対して、Hg_1 と Hg_2 の積を次のように定義する。

$$Hg_1 \cdot Hg_2 = Hg_1 g_2 \tag{8}$$

ただし、$g_1, g_2 \in G$ である。この積は well-defined である。すなわち、$Hg_1 = Hg'_1$、$Hg_2 = Hg'_2$ のとき、$Hg_1 g_2 = Hg'_1 g'_2$ が成り立つ。
また、この積は結合的である。すなわち、

$$(Hg_1 \cdot Hg_2) \cdot Hg_3 = Hg_1 \cdot (Hg_2 \cdot Hg_3) \tag{9}$$

が成り立つ。

def: 商群

G を群、H を G の部分群とする。このとき、H の左側剰余類全体を集めた集合を G/H と書く。G/H は G の部分群 H による商群である。

ex
正六角形の合同変換群について考える。

thm: 準同型定理

G を群、H を G の部分群、$\phi : G \to H$ を G から H への準同型写像とする。また、ϕ の核を次のように定義する。

$$N = \ker(\phi) = \{g \in G | \phi(g) = e\} \tag{10}$$

このとき、剰余類群 G/H と $\phi(G)$ は同型である。すなわち、$G/H \simeq \phi(G)$ である。

Prf
まず、$\psi : G/N \to \phi(G)$ を次のように定義する。

$$\psi(gN) = \phi(g) \tag{11}$$

このとき、ψ が準同型かつ全単射であることを示す。
まず、ψ が準同型であることを示す。$g_1, g_2 \in G$ に対して、

$$\psi(g_1 N g_2 N) = \psi(g_1 g_2 N) = \phi(g_1 g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2) = \psi(g_1 N)\psi(g_2 N) \tag{12}$$

となるからである。
次に、ψ が全単射であることを示す。ψ が全射であることは、

$$\forall g \in G, \quad \phi(g) = \psi(gN) \tag{13}$$

となるからである。また、ψ が単射であることは、

$$\psi(g_1 N) = \psi(g_2 N) \Rightarrow \phi(g_1) = \phi(g_2) \tag{14}$$

ここで、

$$\phi(g_1^{-1}g_2) = \phi(g_1)^{-1}\phi(g_2) = \phi(g_1)^{-1}\phi(g_1) = e \tag{15}$$

となるから、$g_1^{-1}g_2 \in N$ である。よって、$g_1N = g_2N$ である。
以上より、ψ は準同型かつ全単射であるから、$G/N \simeq \phi(G)$ である。

ex

正六角形の合同変換群について考える。
対称群と、それに準同型な位数 2 の巡回群について考える。
$E = \{e, \theta, \theta^2, \theta^3, \theta^4, \theta^5\}$ とし、$C = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$ とする。
また、$D = \{e, c\}$ とする。ここで、写像 $\phi : G \to D$ を次のように定義する。

$$\phi(g) = \begin{cases} e & (g \in E) \\ c & (g \in C) \end{cases} \tag{16}$$

このとき、ϕ は準同型である。また、$\ker(\phi) = E$ であるから、$G/E \simeq D$ である。

3　群の表現

ベクトル空間内で、群の操作を表現することを考える。

def: 群の表現

群 G から一般線形群 $GL(n, \mathbb{C})$ への群準同型写像 D を、群 G の n 次表現という。D は次のように表される。

$$D : G \to GL(n, \mathbb{C}) \tag{17}$$

def: 表現行列

群 G の n 次表現 D に対して、$D(g)$ の成分を次のように表す。

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_{11}(g) & D_{12}(g) & \cdots & D_{1n}(g) \\ D_{21}(g) & D_{22}(g) & \cdots & D_{2n}(g) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}(g) & D_{n2}(g) & \cdots & D_{nn}(g) \end{pmatrix} \tag{18}$$

このとき、$D_{ij}(g)$ を表現行列という。

def: 同値

二つの表現 D_1 と D_2 が同値であるとは、次のような行列 S が存在することである。

$$D_2(g) = S^{-1}D_1(g)S \tag{19}$$

def: 可約表現

表現 D が可約であるとは、次のような行列 S が存在することである。

$$S^{-1}D(g)S = \begin{pmatrix} D_1(g) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2(g) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_n(g) \end{pmatrix} \tag{20}$$

とくに、$D_1, D_2, \cdots, D_n$ がこれ以上小さな部分行列に分解できないとき、D は完全可約であるという。

def: 既約表現

表現 D が既約であるとは、D が可約でないことである。

たとえば、完全可約な表現の $D_1, D_2, \cdots, D_n$ は、既約表現である。

ex

正三角形の合同変換群について考える。