Lieb-Yngvason ノート

大上由人

2024 年 4 月 21 日

1 状態と状態空間

Def: 状態と状態空間

状態は、状態空間 Γ の点であり、X, Y, Z などと表す。

Def: 状態空間の合成

状態空間 Γ_1 と Γ_2 の合成は、状態空間の直積 $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ である。

また、物理的直観から明らかなように、複数の状態空間を合成するとき、その合成の順序は問題にならない。すなわち、

$$(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \times \Gamma_3 = \Gamma_1 \times (\Gamma_2 \times \Gamma_3) \tag{1}$$

である。

Def: スケーリングコピー

$t > 0$ に対して、状態空間 $\Gamma(t)$ の構成要素を、tX とする。
このとき、$\Gamma(t)$ は、Γ のスケーリングコピーである。また、状態空間が $\mathbb{R}^n$ の部分集合であるときは、tX は、ベクトルのスカラー倍としての表現となる。このとき、$\Gamma(t) = t\Gamma$ と書く。

このとき、スケーリングコピーに関する以下の性質は、明らかである。

- $\Gamma(1) = \Gamma$
- $1X = X$
- $(\Gamma(t))(s) = \Gamma(ts)$
- $s(tX) = (st)X$
- $(\Gamma_1 \times \Gamma_2)(t) = \Gamma_1(t) \times \Gamma_2(t)$
- $t(X, Y) = (tX, tY)$

Def: 多重スケーリングコピー

状態空間が $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_n$ の直積であるとき、$t_1, t_2, \cdots, t_n > 0$ に対して、

$$\Gamma_1(t_1) \times \Gamma_2(t_2) \times \cdots \times \Gamma_n(t_n) \tag{2}$$

なる直積を形成できる。とくに、$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \cdots = \Gamma_n = \Gamma$ のとき、

$$\Gamma(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \Gamma(t_1) \times \Gamma(t_2) \times \cdots \times \Gamma(t_n) \tag{3}$$

と書く。これを多重スケーリングコピーという。

ex: 状態空間

(a) 水素が 1mol のとき、状態空間 Γ_a は、エネルギーと体積で表され、$\mathbb{R}^2$ の部分集合である。
(b) 水素が 0.5mol のとき、状態空間 Γ_b は、エネルギーと体積で表され、$\mathbb{R}^2$ の部分集合であり、$\Gamma_b = \frac{1}{2}\Gamma_a = \{(\frac{1}{2}U, \frac{1}{2}V) | U, V \in \Gamma_a\}$ である。
(c) 水素が 1mol、酸素が 0.5mol(混合されていない) のとき、状態空間 $\Gamma_c = \Gamma_a \times$ (酸素 $0.5mol$ の状態空間) であり、複合系である。
(d) 水 1mol のとき、状態空間 Γ_d (e) 水素 1mol と酸素 0.5mol(混合) のとき、$\Gamma_e \neq \Gamma_d$ であり、$\Gamma_e \neq \Gamma_c$ である。

2　順序関係