解析

大上由人

2024 年 11 月 16 日

小平解析ゼミの内容を可能な限り簡潔にまとめたい。

0.1 数列の極限

Def. 数列の極限

数列 $\{a_n\}$ がある実数 α に収束するとは、任意の正の実数 ε に対応して、ある自然数 $n_0(\varepsilon)$ が定まって

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \tag{0.1}$$

が成り立つことである。また、このとき α を数列 $\{a_n\}$ の極限といい、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \tag{0.2}$$

と書く。

Thm.

数列 $\{a_n\}$ が実数 α に収束するための必要十分条件は、$\rho < \alpha < \sigma$ なる実数 ρ, σ が任意に与えられたとき、不等式

$$\rho < a_n < \sigma \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{0.3}$$

が有限個の自然数 n を除いて成立することである。

Prf.

$(\Rightarrow)$

$\{a_n\}$ が α に収束すると仮定する。$\rho < \alpha < \sigma$ なる実数 ρ, σ が任意に与えられたとする。$\min\{\alpha - \rho, \sigma - \alpha\} = \varepsilon$ とおくと、

$$\rho \leq \alpha - \varepsilon \leq \sigma \tag{0.4}$$

が成り立つ。仮定により、$n > n_0(\varepsilon)$ のとき、$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ である。すなわち、

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \tag{0.5}$$

が成り立つ。したがって、有限個の自然数 n を除いて、

$$\rho \leq \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \leq \sigma \tag{0.6}$$

が成り立つ。

$(\Leftarrow)$

正の実数 ε が任意に与えられたとする。このとき、条件より、有限個の自然数 n を除いて、

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \tag{0.7}$$

が成り立つ。[*1] したがって、この有限個の自然数のうち最大のものを $n_0(\varepsilon)$ とおくと、

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon \tag{0.8}$$

が成り立つ。したがって、$\{a_n\}$ は α に収束する。 □

Cor. 極限の一意性

数列 $\{a_n\}$ がある実数 α に収束するとき、その極限は一意的である。

Prf.

背理法により示す。$\{a_n\}$ が異なる実数 α と β に収束すると仮定し、$\alpha < \beta$ とする。このとき、有理数の稠密性から、$\alpha < r < \beta$ なる有理数 r が存在する。このとき、前の定理より、有限個の自然数 n を除いて、$a_n < r$ が成り立つ。また、有限個の自然数 n を除いて、$a_n > r$ が成り立つ。これは矛盾である。したがって、$\alpha = \beta$ である。 □

Thm.Cauthy の収束条件

数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は、任意の正の実数 ε に対応して一つの自然数 $n_0(\varepsilon)$ が定まって、

$$m, n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon \tag{0.9}$$

が成り立つことである。

Prf.

$(\Rightarrow)$

$\{a_n\}$ が α に収束すると仮定する。任意に与えられた正の実数 ε に対して、$0 < a < \varepsilon$ となるような有理数 a をとる。(これが存在することは、有理数の稠密性から明らか。) このとき、仮定より、

$$n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \frac{a}{2} \tag{0.10}$$

なる自然数 $n_0(\varepsilon)$ が定まる。(有理数にしか割り算が定まっていないのでこのように抑えている。) このとき、$m, n > n_0(\varepsilon)$ とすると、

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a < \varepsilon \tag{0.11}$$

[*1] 条件より、今みたいに都合よく ρ, σ を $\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon$ と取れる。

が成り立つ。

$(\Leftarrow)$

hoge(実数の連続性からわかる。) $\square$