4 正規直交標構を使う方法 (orthonormal frame)

曲面 $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u, v)$ が与えられたとき、$\mathcal{S}$ の各点で接平面内の正規直交基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ をとる：

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \tag{0.1}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \quad :\text{単位法線ベクトル} \tag{0.2}$$

$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ は右手系 $\in SO(3)$

Rem. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の与え方の一例としては $\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v$ からシュミットの直交化法を使うとよい。

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{p}_u}{|\mathbf{p}_u|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{p}_v - (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}{|\mathbf{p}_v - (\mathbf{p}_v \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1|} \tag{0.3}$$

基底のとりかえ行列

$$(\mathbf{p}_u, \mathbf{p}_v) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)A \quad A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}_u = a_1^1\mathbf{e}_1 + a_1^2\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{p}_v = a_2^1\mathbf{e}_1 + a_2^2\mathbf{e}_2 \end{cases} \tag{0.5}$$

Rem ＋ 仮定 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ は $\det A > 0$ となるようにとる。

$\det A < 0$ のときは $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を入れ替えて改めて $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ とすればよい。このとき $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}$ となる。

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}_u du + \mathbf{p}_v dv = (a_1^1 du + a_1^2 dv)\mathbf{e}_1 + (a_2^1 du + a_2^2 dv)\mathbf{e}_2 \tag{0.6}$$

$$d\mathbf{p} = \theta^1\mathbf{e}_1 + \theta^2\mathbf{e}_2 \tag{0.7}$$

$$I = d\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} = \theta^1\theta^1 + \theta^2\theta^2 \tag{0.8}$$