rakugaki

大上由人

2024 年 6 月 29 日

Lem:

$A \underset{\text{cofibration}}{\subset} X$ であるならば、$X/A \underset{\text{cofibration}}{\supset} A/A$

Thm: 等価空間のオイラー数

$\phi \neq A \underset{\text{cofibration}}{\subset} X$ かつ $\mathcal{X}(A), \mathcal{X}(X), \mathcal{X}(X/A)$ のどれか二つが well-defined

Prf

$X \cup CA = M_\iota / A \times \{0\}$

$X(X \cup CA) = X(D) + X(E) - X(D \cap E)$

右辺第一項は可縮である、第二項は $E \simeq X$ であり、$D \cap E \equiv A \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \simeq S$

$(X \cup CA) \sqcup_p * \cong X/A$

左辺 $\simeq X \cup CA$

よって、求めるものを得る。

Top_0 起点つき位相空間の圏 (射は連続写像であって、基点を基点に移すもの)

$X \in Obj(Top_0)$ について、

$$\tilde{X}(X) = X(X) - 1(X(\{*\})) \tag{0.1}$$

と定義する。

Cor

$A, X \in Obj(Top_0)$ かつ $A \subset X$ について (つまり、X の基点が A の基点に移る)、

$$\tilde{X}(X/A) = \tilde{X}(X) - \tilde{X}(A) \tag{0.2}$$

ただし、3 項のうちどれか二つが well-defined である。

$A, B \in Obj(Top_0)$ について、

$$A \vee B := A \sqcup B / \{A^* \sim B^*\} \tag{0.3}$$

$$A \wedge B := A \times B / \{A \times \{*_B\} \cup \{*_A\} \times B\} \tag{0.4}$$

と定義する。

Thm:$\tilde{\mathcal{X}}$ **の性質**

すべて基点つき空間で考える。$A, B \in X \mathrm{s.t.} X = A \cup B$ かつ、

$$A \underset{\text{cofibration}}{\supset} A \cap B \tag{0.5}$$

かつ

$$A \cap B \underset{\text{cofibration}}{\subset} B \tag{0.6}$$

であるとする。このとき、$\mathcal{X}(A), \mathcal{X}(B), \mathcal{X}(X), \mathcal{X}(A \cap B)$ のうちどれか三つが well-defined であるならヴぁ

$$\tilde{X}(X) = \tilde{X}(A) + \tilde{X}(B) - \tilde{X}(A \cap B) \tag{0.7}$$

が成り立つ。

Prf

仮定より、

$$A \underset{\text{cofibration}}{\subset} X \underset{\text{cofibration}}{\supset} A \tag{0.8}$$

$$X/A \cong B/A \cap B \quad X/B \cong A/A \cap B \tag{0.9}$$

先のことから、

$$\tilde{\mathcal{X}}(X/A) = \tilde{\mathcal{X}}(X) - \tilde{\mathcal{X}}(A) \tag{0.10}$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(X/A) = \tilde{\mathcal{X}}(B/A \cap B) = \tilde{\mathcal{X}}(B) - \tilde{\mathcal{X}}(A \cap B) \tag{0.11}$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(X/B) = \tilde{\mathcal{X}}(X) - \tilde{\mathcal{X}}(B) \tag{0.12}$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(A/A \cap B) = \tilde{\mathcal{X}}(A) - \tilde{\mathcal{X}}(A \cap B) \tag{0.13}$$

よって、

$$\tilde{\mathcal{X}}(X) - \tilde{\mathcal{X}}(A) = \tilde{\mathcal{X}}(B) - \tilde{\mathcal{X}}(A \cap B) \tag{0.14}$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(X) - \tilde{\mathcal{X}}(B) = \tilde{\mathcal{X}}(A) - \tilde{\mathcal{X}}(A \cap B) \tag{0.15}$$

であるから、(0.14)-(0.15) を辺々足して 2 で割ることで、求めるものを得る。

Def: 退化

$A \in Obj(Top_0)$ について、A の基点 $\{*_A\} \in A$ が非退化であるとは、(A が well-pointed であるとは)、$\{*_A\} \in A$ が cofibration であることをいう。

Prop:

A, B が well-pointed であるならば、$A \wedge B, A \vee B$ も well-pointed である。

Cor

$A, B \in Obj(Top_0)$ が well-pointed であるかつ、$\tilde{\mathcal{X}}(A), \tilde{\mathcal{X}}(B)$ が well-defined であるならば、

$$\tilde{\mathcal{X}}(A \wedge B) = \tilde{\mathcal{X}}(A) + \tilde{\mathcal{X}}(B) - 1 \tag{0.16}$$
$$\tilde{\mathcal{X}}(A \vee B) = \tilde{\mathcal{X}}(A) + \tilde{\mathcal{X}}(B) - 1 \tag{0.17}$$

が成り立つ。

Prf

$A \subset A \vee B \supset B$ と思う。仮定より、$A \cap B \in A \vee B = A \cup B$ であり、

$$A \underset{\text{cofibration}}{\subset} A \cap B (= \{*_A\} = \{*_B\}) \underset{\text{cofibration}}{\subset} B \tag{0.18}$$

$$A \underset{\text{cofibration}}{\subset} A \cup B (\equiv A \vee B) \underset{\text{cofibration}}{\supset} B \tag{0.19}$$

前の定理より、

$$\tilde{\mathcal{X}}(A \vee B) = \tilde{\mathcal{X}}(A) + \tilde{\mathcal{X}}(B) - \tilde{\mathcal{X}}(A \cap B) \tag{0.20}$$

である。いま、第三項が 0 であることに注意すると、求めるものを得る。
また、

$$A \wedge B = A \times B / \{A \vee B\} \tag{0.21}$$

である、このとき、$A = A \times \{*_B\} \subset A \times B \supset \{*_A\} \times B = B$ であり、A と B の $A \times B$ における合併は $A \vee B$ と同じ。
A, B が well-pointed であることから、$A \vee B \underset{\text{cofibration}}{\subset} A \times B$ である。
2 つ前の定理より、

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{X}}(A \wedge B) &= \tilde{\mathcal{X}}(A \times B) / \tilde{\mathcal{X}}(A \vee B) && (0.22)\\
&= \tilde{\mathcal{X}}(A \times B) - \tilde{\mathcal{X}}(A \vee B) && (0.23)\\
&= (\mathcal{X}(A)\mathcal{X}(B) - 1) - (\mathcal{X}(A) + \mathcal{X}(B) - 2) && (0.24)\\
&= (\mathcal{X}(A) - 1)(\mathcal{X}(B) - 1) && (0.25)\\
&= (\tilde{\mathcal{X}}(A)(\tilde{\mathcal{X}}(B))) && (0.26)
\end{aligned}$$

となる。

ex

Top_0 における suspension を、$A \in Obj(Top_0)$ について、

$$SA = S^1 \wedge A \tag{0.27}$$

と定義する。

$$S^nA = S(S(\cdots S(SA)\cdots)) \tag{0.28}$$

と定義する。
このとき、

$$S^n \cong S^nS^0 \tag{0.29}$$

である。

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{X}}(S^n) &= \tilde{\mathcal{X}}(S^nS^0) &(0.30)\\
&= \tilde{\mathcal{X}}(S^1 \wedge \cdots \wedge S^1 \wedge S^0) &(0.31)\\
&= (\tilde{\mathcal{X}}(S^1))^n \tilde{\mathcal{X}}(S^0) &(0.32)\\
&\because &(0.33)\\
&\tilde{\mathcal{X}}(S^0) = \mathcal{X}(S^0) - 1 = 2 - 1 = 1 &(0.34)\\
&\tilde{\mathcal{X}}(S^1) = \mathcal{X}(S^1) - 1 = 0 - 1 = -1 &(0.35)\\
&\tilde{\mathcal{X}}(S^n) = (-1)^n &(0.36)
\end{aligned}$$

Def: 位相多様体

M が位相多様体であるとは、

1. M は Hausdorff である
2. 任意の点 $p \in M$ について、p の近傍 U であって、

$$(U, p) \cong (\mathbb{R}^n, 0) \tag{0.37}$$

または、

$$(U, p) \cong (H^n_+, 0) \tag{0.38}$$

ただし、

$$H^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\} \tag{0.39}$$

となるものをいう。このとき、(0.37) と (0.38) は排反事象である。

Def:

位相多様体が閉であるとは、

1. M はコンパクト
2. $\partial M = \varnothing$

となるものをいう。

$\partial M = M$ の境界点 とおき、これを M の境界という。

ex
$\mathbb{R}^n, H_+^n$ はそれぞれ n 次元多様体であり、

$$\partial \mathbb{R}^n = \varnothing, \quad \partial H_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \tag{0.40}$$

である。

ex
S^n は閉多様体

ex
A, B が多様体ならば、$A \times B$ も閉多様体である。

1 実験 6.2 の計算

今、RC ローパスフィルター 1 段での入力 (v_1, i_1) と出力 (v_2, i_2) の関係は F 行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + i\omega RC & R \\ i\omega C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

と表される。
これを 3 段噛ませたものが、位相 π だけ反転してくれればよい。今、3 段噛ませる前後での関係は、F 行列を用いて、

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + i\omega RC & R \\ i\omega C & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

と表される。ここで、計算の便宜のために、$t = 1 + i\omega RC = 1 + is$ とおくと、

$$F^3 = \begin{pmatrix} t^3 + 2t^2 - t & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

となる。ただし、O は適当な数である。したがって、

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 + 2t^2 - t & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

となる。電圧について計算することにより、

$$v_1 = (t^3 + 2t^2 - t)v_2 \tag{1.5}$$

となる。ここで、位相差が π であるためには、

$$\mathrm{Im}(t^3 + 2t^2 - t) = 0 \tag{1.6}$$

である必要がある。

$$\mathrm{Im}(t^3+2t^2-t) = \mathrm{Im}((1+is)^3+2(1+is)^2-(1+is)) \tag{1.7}$$

$$= -s^3+6s \qquad = 0 \tag{1.8}$$

よって、$s=\sqrt{6}$ である。いま、$s=\omega RC$ であるから、

$$\omega = \frac{\sqrt{6}}{RC} \tag{1.9}$$

である。

2 実験 6.3 の計算

今、正入力と出力の関係は、

$$V_+ = \frac{Z_1}{Z_1+Z_2}V_{\mathrm{out}} \tag{2.1}$$

である。ここで、

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{i\omega C_1} \tag{2.2}$$

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{i\omega C_2} \tag{2.3}$$

カノニカル分布の裏づけ

注目する部分系 S と熱浴 B が弱く相互作用しているとする。全系のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_S + \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_{\mathrm{int}}. \tag{2.4}$$

ここで、相互作用のオーダーは、$o(V^{\frac{2}{3}})$ なので、無視できるとする。全系の状態は S の状態を表す Hilbert 空間と B の状態を表す Hilbert 空間の直積で表され

$$\mathcal{H}\left|\Psi_k\right\rangle = (\mathcal{H}_S+\mathcal{H}_B)\left|\psi_i\right\rangle\left|\phi_j\right\rangle = E_k\left|\Psi_k\right\rangle \tag{2.5}$$

である。ここで $\left|\psi_i\right\rangle\left|\phi_j\right\rangle$ は $\mathcal{H}_S\left|\psi_i\right\rangle = E_i^S\left|\psi_i\right\rangle$ と $\mathcal{H}_B\left|\phi_j\right\rangle = E_j^B\left|\phi_j\right\rangle$ を満たす系 S と熱浴 B の固有状態で、$E_k = E_i^S + E_j^B$, $\left|\Psi_k\right\rangle = \left|\psi_i\right\rangle\left|\phi_j\right\rangle$ である。全系がミクロカノニカル分布で記述されるとすると、

$$\hat{\rho}_{U,\delta U} = \frac{1}{W(U,\delta U)}\sum_{U-\delta U\le E_k\le U}\left|\Psi_k\right\rangle\left\langle\Psi_k\right|. \tag{2.6}$$

である。ここで $W(U,\delta U)$ は $[U-\delta U, U]$ にある固有状態数である。熱浴について対角和をとると

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}^S &= \mathrm{Tr}_B \hat{\rho}_{U,\delta U} && (2.7)\\
&= \frac{1}{W(U,\delta U)} \sum_{U-\delta U \le E_k \le U} \sum_l \langle \phi_l | \Psi_k \rangle \langle \Psi_k | \phi_l \rangle && (2.8)\\
&= \frac{1}{W(U,\delta U)} \sum_{U-\delta U - E_i^S \le E_j^B \le U - E_i^s} \sum_l \sum_i \langle \phi_l | \phi_j \rangle |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \langle \phi_j | \phi_l \rangle && (2.9)\\
&= \frac{1}{W(U,\delta U)} \sum_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \sum_i \sum_{U-\delta U - E_i^S \le E_j^B \le U - E_i^S} 1 && (2.10)\\
&= \frac{1}{W(U,\delta U)} \sum_i W^B(U - E_i^S, \delta U) |\psi_i\rangle \langle \psi_i| . && (2.11)
\end{aligned}
$$

となる。状態数とエントロピーの関係 $S(E) = k_B \ln W(U, \Delta U)$ から

$$
\begin{aligned}
W^B(U - E_i^S) &= e^{S^B(U-E_i^S)/k_B} && (2.12)\\
&\approx \exp\left[\frac{1}{k_B}\left(S^B(U) - \frac{dS^B(U)}{dU} E_i^S\right)\right] && (2.13)\\
&= e^{S^B(U)/k_B - \beta E_i^S} && (2.14)\\
&\propto e^{-\beta E_i^S} && (2.15)
\end{aligned}
$$

となる。ただし、$E_i^S \ll U$ を用いた。したがって、規格化を考慮して、

$$
\begin{aligned}
\hat{\rho}^S &\approx \frac{\sum_i e^{-\beta E_i^S} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|}{\sum_i e^{-\beta E_i^S}} && (2.16)\\
&= \frac{e^{-\beta \mathcal{H}_S}}{\mathrm{Tr} e^{-\beta \mathcal{H}_S}} && (2.17)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、

$$
\beta = \frac{1}{k_B} \frac{\mathrm{d}S^B}{\mathrm{d}U} = \frac{1}{k_B T} \qquad (2.18)
$$

である。ただし、T は熱浴の温度である。以上より、系 S はカノニカル分布で記述される。