

6 章

大上由人

2024 年 5 月 1 日

1 揺動散逸定理

1.1 周波数 0 の場合

前回のゼミで得た、周波数 0 の場合の揺動散逸定理の復習をする。

Thm: 揺動散逸定理

IFT を満たす確率的な系で、示量変数 X をもつ二つの熱浴と接触している。平衡状態での X のカレントの自己相関関数 $\langle \hat{J}(t)\hat{J}(0) \rangle_0$ は、 t が大きくなるにつれ、急速に 0 に緩和すると仮定する。

このとき、平衡状態における揺動と、共役変数が変化したときの X のカレントの応答は、

$$\int_0^\infty dt \langle \hat{J}(t)\hat{J}(0) \rangle_0 = \frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \langle \hat{J} \rangle_0 |_{\Delta \Pi_X=0} = T \frac{\partial}{\partial \Delta P_X} \langle \hat{J} \rangle_0 |_{\Delta P_X=0} \quad (1)$$

のように書ける。ただし、 $\langle \rangle_0$ は平衡状態におけるアンサンブル平均を表し、 $\langle \rangle$ は $\Delta \Pi_X$ により駆動される非平衡定常状態でのアンサンブル平均を表す。

Prf

$0 \leq t \leq \tau$ 間のエントロピー生成は、

$$\hat{\sigma} = \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \quad (2)$$

により書くことができる。(証明略) これと、IFT により、

$$1 = \langle e^{-\hat{\sigma}} \rangle = 1 - \left\langle \Delta \Pi_X \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \Delta \Pi_X^2 \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \hat{J}(t') \hat{J}(t) \right\rangle + O(\Delta \Pi_X^3) \quad (3)$$

$$(4)$$

を得る。ここで、

$$\langle \hat{A} \rangle_{\Delta \Pi_X} = \langle \hat{A} \rangle_0 + \frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \langle \hat{A} \rangle \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \Delta \Pi_X + O(\Delta \Pi_X^2) \quad (5)$$

と展開できることを用いると、

中略

$\Delta\Pi_X$ の一次の項について、

$$\left\langle \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \right\rangle_0 = 0 \quad (6)$$

が成り立つ。また、二次の項について、

$$\left\langle \frac{1}{2} \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \hat{J}(t') \hat{J}(t) \right\rangle_0 = \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \left\langle \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \right\rangle \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \quad (7)$$

が成り立つ。(7) 式の両辺に $\frac{1}{\tau}$ をかけ、 $\tau \rightarrow \infty$ の極限を取ると、

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left\langle \frac{1}{2} \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \hat{J}(t') \hat{J}(t) \right\rangle_0 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \left\langle \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \right\rangle \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \quad (8)$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\infty dt'' (\tau - t'') \left\langle \hat{J}(t'') \hat{J}(0) \right\rangle_0 \quad (9)$$

$$\simeq \int_0^\infty dt \left\langle \hat{J}(t) \hat{J}(0) \right\rangle_0 \quad (10)$$

また、

$$\int_0^\infty dt \left\langle \hat{J}(t) \hat{J}(0) \right\rangle_0 = \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \left\langle \hat{J}(0) \right\rangle_0 \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \quad (11)$$

が成り立つ。

$\frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} = T \frac{\partial}{\partial \Delta P_X}$ であることを用いると、

$$\int_0^\infty dt \left\langle \hat{J}(t) \hat{J}(0) \right\rangle_0 = T \frac{\partial}{\partial \Delta P_X} \left\langle \hat{J}(0) \right\rangle_0 \Big|_{\Delta P_X=0} \quad (12)$$

を得る。 □

1.2 有限周波数の場合

有限周波数の場合の FDT を扱う。いま、bath1 と bath2 の示強変数が、

$$\Pi_X^2(t) = \Pi_X^1 + \epsilon \sin(\omega t) \quad (13)$$

となっているとする。このとき、エントロピー生成は以下のように書ける。

$$\hat{\sigma} = \epsilon \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \sin(\omega t) \quad (14)$$

ただし、 $\delta \hat{s}$ の項は、後で無視するので消去した。

(\because)

bath1 について、

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{\partial S_1}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} \quad (15)$$

$$= \frac{\partial S_1}{\partial X} \int dV \frac{\partial x}{\partial t} \quad (16)$$

$$= \frac{\partial S_1}{\partial X} \int d\mathbf{S} \cdot (-\mathbf{j}) \quad (17)$$

$$= \frac{\partial S_1}{\partial X} \quad (18)$$

$$(19)$$

となる。両辺積分することで、

$$S_1(\tau) - S_1(0) = \int_0^\tau \frac{\partial S_1}{\partial X} dt \quad (20)$$

$$= \int_0^\tau \Pi_X^1 \hat{J}(t) dt \quad (21)$$

bath2 についても同様にして、

$$S_2(\tau) - S_2(0) = \int_0^\tau \Pi_X^2 \hat{J}(t) dt \quad (22)$$

を得る。

よって、

$$(S_1(\tau) + S_2(\tau)) - (S_1(0) + S_2(0)) = \int_0^\tau (\Pi_X^2 - \Pi_X^1) \hat{J}(t) dt \quad (23)$$

$$= \epsilon \int_0^\tau \sin(\omega t) \hat{J}(t) dt \quad (24)$$

となる。

□

以下、この式を用いて、有限周波数の場合の FDT を導く。

Thm: 有限周波数の場合の FDT

IFT を満たす確率的な系で、周波数 ω による揺動と、共役変数が変化したときの X のカレントの応答は、

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left\langle \left(\int_0^\tau dt \hat{J}(t) \sin(\omega t) \right)^2 \right\rangle_0 = 2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\langle \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \sin(\omega t) \right\rangle \Big|_{\epsilon=0} \quad (25)$$

のように書ける。

Prf

周波数が 0 のときの証明をまねする。IFT を用いてから、 ϵ について展開することで、

$$1 = \langle e^{-\hat{\sigma}} \rangle = 1 - \left\langle \epsilon \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \sin(\epsilon t) \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \epsilon^2 \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \hat{J}(t') \hat{J}(t) \sin(\omega t') \sin(\omega t) \right\rangle + O(\epsilon^3) \quad (26)$$

$$(27)$$

を得る。ここで、

$$\langle \hat{A} \rangle_\epsilon = \langle \hat{A} \rangle_0 + \frac{\partial}{\partial \epsilon} \langle \hat{A} \rangle \Big|_{\epsilon=0} \epsilon + O(\epsilon^2) \quad (28)$$

と展開して、上の式に代入すると、 ϵ の二次の項を比較することにより、

$$\frac{1}{2} \left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \hat{J}(t') \hat{J}(t) \sin(\omega t') \sin(\omega t) \right\rangle_0 = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\langle \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \sin(\omega t) \right\rangle \Big|_{\epsilon=0} \quad (29)$$

であるから、両辺 $\frac{1}{\tau}$ をかけ、 $\tau \rightarrow \infty$ の極限を取ると、

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \left\langle \left(\int_0^\tau dt \hat{J}(t) \sin(\omega t) \right)^2 \right\rangle_0 = 2 \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\langle \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \hat{J}(t) \sin(\omega t) \right\rangle \Big|_{\epsilon=0} \quad (30)$$

を得る。 □

1.3 高次における関係

Thm: 時間積分されたカレントの高次の関係

磁場中の \mathcal{J} は、以下の高次における関係を満たす:

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial \Delta \Pi_X^2} \langle \hat{\mathcal{J}} \rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (31)$$

Prf

FDT を導出する途中の展開をより高次まで行くと、

$$1 = \langle e^{-\hat{\sigma}} \rangle = 1 - \langle \hat{\mathcal{J}} \rangle^B \Delta \Pi_X + \frac{1}{2} \langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle^B \Delta \Pi_X^2 + \frac{1}{6} \langle \hat{\mathcal{J}}^3 \rangle^B \Delta \Pi_X^3 + O(\Delta \Pi_X^4) \quad (32)$$

$$= 1 - \left(\langle \hat{\mathcal{J}} \rangle_0^B \Delta \Pi_X + \frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \langle \hat{\mathcal{J}} \rangle^B \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \Delta \Pi_X^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Delta \Pi_X^2} \langle \hat{\mathcal{J}} \rangle^B \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \Delta \Pi_X^3 \right) \quad (33)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle_0^B \Delta \Pi_X^2 + \frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle^B \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \Delta \Pi_X^3 \right) - \frac{1}{6} \left(\langle \hat{\mathcal{J}}^3 \rangle_0^B \Delta \Pi_X^3 \right) + O(\Delta \Pi_X^4) \quad (34)$$

となる。ここで、 $\hat{\mathcal{J}}$ は、

$$\hat{\mathcal{J}} = \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \quad (35)$$

である。同様の手順を踏むことで、 B を $-B$ としたときの展開は、

$$1 = \langle e^{-\hat{\sigma}} \rangle = 1 - \langle \hat{\mathcal{J}} \rangle^{-B} \Delta \Pi_X + \frac{1}{2} \langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle^{-B} \Delta \Pi_X^2 + \frac{1}{6} \langle \hat{\mathcal{J}}^3 \rangle^{-B} \Delta \Pi_X^3 + O(\Delta \Pi_X^4) \quad (36)$$

$$= 1 - \left(\langle \hat{\mathcal{J}} \rangle_0^{-B} \Delta \Pi_X + \frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \langle \hat{\mathcal{J}} \rangle^{-B} \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \Delta \Pi_X^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Delta \Pi_X^2} \langle \hat{\mathcal{J}} \rangle^{-B} \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \Delta \Pi_X^3 \right) \quad (37)$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle_0^{-B} \Delta \Pi_X^2 + \frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle^{-B} \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \Delta \Pi_X^3 \right) + \frac{1}{6} \left(\langle \hat{\mathcal{J}}^3 \rangle_0^{-B} \Delta \Pi_X^3 \right) + O(\Delta \Pi_X^4) \quad (38)$$

となる。

ここで、期待値の時間反転対称性から、

$$\langle \hat{\mathcal{J}}^3 \rangle^B = - \langle \hat{\mathcal{J}}^3 \rangle^{-B} \quad (39)$$

が成り立つことを用いて、上の二式を両辺足して、 $\Delta \Pi_X$ の三次の項を比較すると、

$$0 = - \frac{\partial^2}{\partial \Delta \Pi_X^2} \langle \hat{\mathcal{J}} \rangle^B \Big|_{\Delta \Pi_X=0} - \frac{\partial^2}{\partial \Delta \Pi_X^2} \langle \hat{\mathcal{J}} \rangle^{-B} \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \\ + \frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle^B \Big|_{\Delta \Pi_X=0} + \frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle^{-B} \Big|_{\Delta \Pi_X=0} - \frac{1}{6} \langle \hat{\mathcal{J}}^3 \rangle_0^B - \frac{1}{6} \langle \hat{\mathcal{J}}^3 \rangle_0^{-B}$$

すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle^B \Big|_{\Delta \Pi_X=0} + \frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle^{-B} \Big|_{\Delta \Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial \Delta \Pi_X^2} \langle \hat{\mathcal{J}} \rangle^B \Big|_{\Delta \Pi_X=0} + \frac{\partial^2}{\partial \Delta \Pi_X^2} \langle \hat{\mathcal{J}} \rangle^{-B} \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (40)$$

を得る。新たに、 $\langle \cdot \rangle^+ = \frac{1}{2} (\langle \cdot \rangle^B + \langle \cdot \rangle^{-B})$ と定義すると、

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \langle \hat{\mathcal{J}}^2 \rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial \Delta \Pi_X^2} \langle \hat{\mathcal{J}} \rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (41)$$

が成り立つ。

□

また、以下も成り立つ。

Thm: 高次元における関係 (2)

IFT を満たす系について、以下が成り立つ:

$$2 \frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \int_0^\infty dt \langle \Delta \hat{J}(t) \Delta \hat{J}(0) \rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial \Delta \Pi_X^2} \langle \Delta \hat{J} \rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (42)$$

Prf

\hat{J} を J を用いて表すことで、

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \hat{J}(t') \hat{J}(t) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial \Delta \Pi_X^2} \left\langle \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (43)$$

が成り立つ。ここで、左辺の被積分関数について、 $\Delta \hat{J} = \hat{J} - \langle \hat{J} \rangle$ として展開すると、

$$\left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \hat{J}(t') \hat{J}(t) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} = \left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt (\Delta \hat{J}(t') + \hat{J}(t')) (\Delta \hat{J}(t) + \hat{J}(t)) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (44)$$

$$= \left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \Delta \hat{J}(t') \Delta \hat{J}(t) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (45)$$

$$+ 2 \left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \Delta \hat{J}(t') \hat{J}(t) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (46)$$

$$+ \left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \hat{J}(t') \hat{J}(t) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (47)$$

$$(48)$$

となる。ここで、第二項について、

$$2 \left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \Delta \hat{J}(t') \hat{J}(t) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} = 2 \int_0^\tau \int_0^\tau dt' dt J(t) \langle \Delta \hat{J}(t') \rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (49)$$

$$= 0 \quad (50)$$

である。というのも、 $\langle \Delta \hat{J}(t') \rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} = 0$ であるからである。よって、

$$\left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \hat{J}(t') \hat{J}(t) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} = \left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt (\Delta \hat{J}(t') + \hat{J}(t')) (\Delta \hat{J}(t) + \hat{J}(t)) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (51)$$

$$= \left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \Delta \hat{J}(t') \Delta \hat{J}(t) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (52)$$

$$+ \left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \hat{J}(t') \hat{J}(t) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (53)$$

$$(54)$$

となる。ここで、この最後の式の第二項は、 $\Delta \Pi_X = 0$ となるてんで、 $\Delta \Pi_X$ について微分することで 0 になるらしい。よーわからん。

したがって、

$$\frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \left\langle \int_0^\tau dt' \int_0^\tau dt \Delta \hat{J}(t') \Delta \hat{J}(t) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial \Delta \Pi_X^2} \left\langle \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \right\rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (55)$$

が成り立つ。ここで、両辺 $\frac{1}{\tau}$ をかけ、 $\tau \rightarrow \infty$ の極限を取ると、前回のゼミと同様の変形をすることで、

$$2 \frac{\partial}{\partial \Delta \Pi_X} \int_0^\infty dt \langle \Delta \hat{J}(t) \Delta \hat{J}(0) \rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial \Delta \Pi_X^2} \langle \Delta \hat{J} \rangle^+ \Big|_{\Delta \Pi_X=0} \quad (56)$$

を得る。 \square

1.4 従来の線形応答理論との違い

いろいろ書いてる。

2 Onsager の相反定理

二つの示量変数 X と Y をもつ系を考える。対応する流れをそれぞれ J_X と J_Y とする。系が四つの bath と接触しているとする。そのうち二つが、 Π_X に対応するものとし、残り二つが、 Π_Y に対応するものとする。このとき、一般に、もし Π_X が 0 でないならば、 $\Pi_Y = 0$ であっても、 $J_Y = 0$ であるとは限らない。

Def: Onsager 行列

Onsager 行列 L は、

$$L_{ij} = \frac{\partial J_i}{\partial \Pi_j} \Big|_{\Pi_X = \Pi_Y = 0} \quad (i, j = X, Y) \quad (57)$$

で定義される。

このとき、

$$J_X = L_{XX} \Pi_X + L_{XY} \Pi_Y \quad (58)$$

$$J_Y = L_{YX} \Pi_X + L_{YY} \Pi_Y \quad (59)$$

と書ける。

Thm: Onsager の相反定理

時間反転対称性を破るような場がないとする。このとき、 ΔY に対する J_X の応答は、 ΔX に対する J_Y の応答と等しい。すなわち、

$$L_{XY} = L_{YX} \quad (60)$$

が成り立つ。

Prf

$$\langle \hat{\mathcal{J}}_X \rangle = \int d\hat{\mathcal{J}}_X \int d\hat{\mathcal{J}}_Y \hat{\mathcal{J}}_X P(\hat{\mathcal{J}}_X, \hat{\mathcal{J}}_Y) \quad (61)$$

$$= \int d\hat{\mathcal{J}}_X \int d\hat{\mathcal{J}}_Y (\hat{\mathcal{J}}_X P(-\hat{\mathcal{J}}_X, -\hat{\mathcal{J}}_Y)) \exp(\hat{\mathcal{J}}_X \Delta \Pi_X + \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta \Pi_Y) \quad (62)$$

$$= - \int d\hat{\mathcal{J}}_X \int d\hat{\mathcal{J}}_Y \hat{\mathcal{J}}_X P(\hat{\mathcal{J}}_X, \hat{\mathcal{J}}_Y) \exp(-\hat{\mathcal{J}}_X \Delta \Pi_X - \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta \Pi_Y) \quad (63)$$

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \hat{\mathcal{J}}_X (-\hat{\mathcal{J}}_X \Delta \Pi_X - \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta \Pi_Y)^{k-1} \rangle}{(k-1)!} \quad (64)$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial \langle \hat{\mathcal{J}}_X \rangle}{\partial \Delta \Pi_Y} = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{J}}_X \rangle}{\partial \Delta \Pi_Y} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\langle \hat{\mathcal{J}}_X (-\hat{\mathcal{J}}_X \Delta \Pi_X - \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta \Pi_Y)^{k-1} \rangle}{(k-1)!} \quad (65)$$

$$= - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{J}}_X \rangle}{\partial \Delta \Pi_Y} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y (-\hat{\mathcal{J}}_X \Delta \Pi_X - \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta \Pi_Y)^{k-2} \rangle}{(k-2)!} \quad (66)$$

となる。 $\Delta \Pi_Y$ の 0 次の項を比較することで、

$$\frac{\partial \langle \hat{\mathcal{J}}_X \rangle}{\partial \Delta \Pi_Y} = - \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{J}}_X \rangle}{\partial \Delta \Pi_Y} + \langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \rangle_0 \quad (67)$$

を得る。整理して、

$$2 \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{J}}_X \rangle}{\partial \Delta \Pi_Y} = \langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \rangle_0 \quad (68)$$

を得る。同様に、

$$2 \frac{\partial \langle \hat{\mathcal{J}}_Y \rangle}{\partial \Delta \Pi_X} = \langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \rangle_0 \quad (69)$$

を得る。これらを比較することで、

$$L_{XY} = L_{YX} \quad (70)$$

を得る。 □

Thm: 時間反転対称性を破る場があるときの Onsager の相反定理

例えば、磁場中の系を考えると、Onsager の相反定理は以下のように拡張される:

$$L_{XY}(B) = L_{YX}(-B) \quad (71)$$

Prf

磁場が時間反転対称性を破ることを考えると、DFT は、

$$P(\hat{\mathcal{J}}_X, \hat{\mathcal{J}}_Y; B) = P(-\hat{\mathcal{J}}_X, -\hat{\mathcal{J}}_Y; -B) \exp(\hat{\mathcal{J}}_X \Delta \Pi_X + \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta \Pi_Y) \quad (72)$$

となる。このとき、

$$L_{XY}(B) + L_{XY}(-B) = \frac{1}{\tau} \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle_0^{-B} \quad (73)$$

となる。また、

$$L_{XY}(-B) + L_{YX}(-B) = \frac{1}{\tau} \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle_0^{-B} \quad (74)$$

となる。