一次元束縛状態の性質

大上由人

2024 年 4 月 1 日

1　一次元束縛状態には縮退が存在しない

　一次元束縛状態には縮退が存在しないことを示す。
同じ固有値に属する、線形独立な二つの固有関数 $\psi_1(x)$ と $\psi_2(x)$ が存在するとする。
このとき、ロンスキー行列式は

$$W(x) = \begin{vmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{vmatrix} \tag{1}$$

である。
このとき、この一回微分を計算すると、

$$\begin{aligned} W'(x) &= \psi_1(x)\psi_2''(x) - \psi_1''(x)\psi_2(x) && (2) \\ &= \psi_1(x)\frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E)\psi_2(x) - \frac{2m}{\hbar^2}(V(x)-E)\psi_1(x)\psi_2(x) && (3) \\ &= 0 && (4) \end{aligned}$$

となる。ただし、ここで固有関数が縮退していることを用いていることに注意せよ。
したがって、$W(x)$ は一定である。
また、$W(x)$ は束縛条件を満たすため、$W(x) = 0$ である。
ゆえに、

$$\psi_1(x)\psi_2'(x) = \psi_1'(x)\psi_2(x) \tag{5}$$

となる。
この両辺を積分すると、

$$\int \frac{\psi_1'(x)}{\psi_1(x)}dx = \int \frac{\psi_2'(x)}{\psi_2(x)}dx \tag{6}$$

となる。
したがって、

$$\log|\psi_1(x)| = \log|\psi_2(x)| + C \tag{7}$$

となる。
したがって、

$$\psi_1(x) = \pm e^C \psi_2(x) \tag{8}$$

となり、$\psi_1(x)$ と $\psi_2(x)$ は比例関係にあることがわかる。
したがって、$\psi_1(x)$ と $\psi_2(x)$ は線形独立であることに矛盾する。
したがって、一次元束縛状態には縮退が存在しないことが示された。