多様体

大上由人

2024 年 11 月 6 日

1　写像の微分

M, N を多様体、m, n 次元 C^r 級多様体とし、$f : M \to N$ を C^r 級写像とする。点 $p \in M$ を通るような M 上の C^r 級曲線

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \quad (c(0) = p) \tag{1.1}$$

を考える。この曲線を f でうつすと、$f(p)$ を通る N 上の C^r 級曲線

$$f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N \quad ((f \circ c)(0) = f(p)) \tag{1.2}$$

が得られる。ここでは、$t = 0$ での曲線 c の速度ベクトルと、$t = 0$ での曲線 $f \circ c$ の速度ベクトルの関係を調べる。

T_pM の任意の元 $\mathbf{v}$ をとる。このとき、$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \mathbf{v}$ となるような、p を通る C^r 級曲線

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \quad (c(0) = p) \tag{1.3}$$

が存在する。この曲線を写像 $f : M \to N$ でうつすと、$q = f(p)$ を通る C^r 級曲線

$$f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N \quad ((f \circ c)(0) = q) \tag{1.4}$$

が得られる。$t = 0$ におけるこの曲線の速度ベクトルは、

$$\mathbf{w} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ c)\Big|_{t=0} \tag{1.5}$$

である。このようにして、T_pM の元 $\mathbf{v}$ に対して T_qN の元 $\mathbf{w}$ が対応する。また、この対応は曲線の取り方によらないことが示せる。これにより、T_pM の元 $\mathbf{v}$ に対して T_qN の元 $\mathbf{w}$ が対応する写像として、微分が定義される。

Def. 写像の微分

上の対応で定まる写像

$$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N \tag{1.6}$$

を、$f : M \to N$ の p における微分という。

この写像に”微分”という名前がついていることを納得するために、以下の例を考えてみる。**ex.**
$M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ とする。このとき、$p = 1$ における f の微分 $(df)_1$ は、

$$(df)_1 : T_1\mathbb{R} \to T_1\mathbb{R} \tag{1.7}$$

である。$T_1\mathbb{R}$ の元は、1 における接ベクトルである。1 における接ベクトルは、1 を通る曲線の速度ベクトルである。1 を通る曲線は、$c(t) = 1 + t$ である。この曲線を f でうつすと、

$$f \circ c(t) = f(1 + t) = (1 + t)^2 \tag{1.8}$$

となる。$t = 0$ におけるこの曲線の速度ベクトルは、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ c)\bigg|_{t=0} = 2 \tag{1.9}$$

である。したがって、$(df)_1$ は、

$$(df)_1(2) = 2 \tag{1.10}$$

写像の微分を成分表示する。hogehoge

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \tag{1.11}$$