問題 1

平面波を重み $g(\boldsymbol{k})$ で重ね合わせた波束

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint g(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-i\omega(\boldsymbol{k})t}d^3k \tag{1}$$

を考える。

(1) $t=0$ において、

$$\phi(\boldsymbol{x},0)=Ce^{i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{x}}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2\sigma}\right) \tag{2}$$

であるとする。（C は複素定数、$\boldsymbol{k}_0$, σ は実定数。）

この $\phi(\boldsymbol{x},0)$ を Fourier 変換することで重み $g(\boldsymbol{k})$ が

$$g(\boldsymbol{k})=C\sigma^{3/2}\exp\left(-\frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)^2\right) \tag{3}$$

と表されることを示せ。

関数 $f(\boldsymbol{x})$ の Fourier 変換は

$$F(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint f(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d^3x \tag{4}$$

Fourier 逆変換は

$$f(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint F(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d^3k \tag{5}$$

で定義する。

解答

与えられた $\phi(\boldsymbol{x},0)$ を Fourier 変換する。Fourier 変換の定義より、

$$\begin{aligned}
g(\boldsymbol{k})&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint \phi(\boldsymbol{x},0)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d^3x \qquad (6)\\
&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint Ce^{i\boldsymbol{k}_0\cdot\boldsymbol{x}}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2\sigma}\right)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}d^3x \qquad (7)\\
&=\frac{C}{(2\pi)^{3/2}}\iiint \exp\left(i(\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}\right)\exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2\sigma}\right)d^3x \qquad (8)
\end{aligned}$$

ここで、指数関数の積をまとめて書き直すと、

$$g(\boldsymbol{k})=\frac{C}{(2\pi)^{3/2}}\iiint \exp\left(-\frac{\boldsymbol{x}^2}{2\sigma}+i(\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}\right)d^3x \tag{9}$$

次に、$\boldsymbol{x}$ のガウス積分を評価する。一般的なガウス積分の公式

$$\iiint \exp\left(-a\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}\right) d^3x = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\boldsymbol{b}^2}{4a}\right) \tag{10}$$

を用いると、ここで $a = \frac{1}{2\sigma}$、$\boldsymbol{b} = i(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k})$ であるため、

$$g(\boldsymbol{k}) = \frac{C}{(2\pi)^{3/2}} (2\pi\sigma)^{3/2} \exp\left(-\frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)^2\right) \tag{11}$$

以上から、

$$g(\boldsymbol{k}) = C\sigma^{3/2} \exp\left(-\frac{\sigma}{2}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_0)^2\right) \tag{12}$$

が得られる。証明終了。