多様体

大上由人

2024 年 12 月 2 日

1　多様体の定義

Def. 多様体

m 次元可微分多様体とは、次の条件を満たす位相空間 M のことである。

1. M はハウスドルフかつパラコンパクトである。
2. 座標近傍と呼ばれる開集合と同相写像の組 (U_i, φ_i) と、その集合でアトラスと呼ばれる集合族 $\{(U_i, \varphi_i)\}$ が存在し、次の条件を満たす。
   (a) $\bigcup_i U_i = M$
   (b) $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^m$ は同相写像である。
   (c) $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ は C^∞ 級写像である。

多様体が Haussdorff であるご利益は、以下の命題による。

Prop.

位相空間 M がハウスドルフ空間であるとする。このとき、M の点列が極限点をもてば、その極限点はただ一つである。

すなわち、ハウスドルフ空間において、極限を定義できるようになる。多様体上での関数の収束や、微分などを考えるときに、この性質は非常に重要である。

2　多様体上の関数/写像

Def. 多様体の写像が C^r 級である

多様体 M から多様体 N への写像

$$f : M \to N \tag{2.1}$$

が、1 点 $p \in M$ において C^r 級であるとは、p の任意の座標近傍 (U, φ) と、$f(p)$ の任意の座標近傍 (V, ψ) が存在して、次の条件を満たすことをいう。

1. $f(U) \subset V$
2. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ が C^r 級である

また、$f : M \to N$ が C^r 級であるとは、f が M の任意の点 p において C^r 級であることをいう。

要するに、一旦座標近傍に引き戻して、$\mathbb{R}^m$ 上の関数として考えることで、C^r 級性を定義している。
とくに、多様体上の**関数**とは、N が $\mathbb{R}$ であるときの写像のことをいう。逆に、M が一次元空間 $\mathbb{R}$ であるとき、

$$c : \mathbb{R} \to N \tag{2.2}$$

を、N 上の**曲線**という。

3　接ベクトル空間

3.1　方向微分

多様体 M 上で、点 p を通るようななめらかな曲線 $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ を考える。p の周りで座標近傍 (U, φ) をとると、曲線の座標表示は、

$$c(t) = (x^1(t), x^2(t), \ldots, x^m(t)) \tag{3.1}$$

である。このとき、$t = 0$ における曲線の速度ベクトルは、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}c(t) = \left(\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}t}\right) \tag{3.2}$$

である。しかし、この速度ベクトルの表示は、局所座標の取り方に依存してしまう。そこで、速度ベクトルを一般化することを考える。
準備として、p の開近傍 U で定義された C^r 級関数 $f : U \to \mathbb{R}$ を考える。このとき、c と f の合

成関数

$$f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R} \tag{3.3}$$

を作ることができる。この、関数 f に対してこの微分係数を対応させる対応

$$f \mapsto \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ c)\right|_{t=0} \tag{3.4}$$

を、c における f の方向微分といい、

$$\mathbf{v}_c = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ c)\right|_{t=0} \tag{3.5}$$

で表す。このとき、方向微分は以下の性質を持つ。

方向微分の性質

1. f, g が点 p の開近傍 U で定義された C^r 級関数で、しかも、p のある十分小さな開近傍上で $f = g$ であるとする。このとき、

$$\mathbf{v}_c(f) = \mathbf{v}_c(g) \tag{3.6}$$

が成り立つ。

2. 線形性

$$\mathbf{v}_c(f + g) = \mathbf{v}_c(f) + \mathbf{v}_c(g) \tag{3.7}$$

が成り立つ。

3. Leibniz 則

$$\mathbf{v}_c(fg) = f(p)\mathbf{v}_c(g) + g(p)\mathbf{v}_c(f) \tag{3.8}$$

が成り立つ。

これらの性質を用いて、方向微分を定義する。

Def. 方向微分

点 p における方向微分 $\mathbf{v}$ とは、上の 1,2,3 の性質を満たす写像である。

このとき、方向微分すべての集合 $D(p)$ はベクトル空間をなす。

3.2　接ベクトル空間

Def. 接ベクトル空間

多様体 M の点 p における接ベクトル空間 T_pM とは、以下のベクトルが張る $D(p)$ の部分空間のことをいう。

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p \right\} \tag{3.9}$$

このとき、接ベクトル空間が、局所座標の取り方に寄らないことが示される。

以上の準備の下、速度ベクトルを一般化する。

Def. 速度ベクトル

$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ かつ $c(0) = p$ である曲線の $t = 0$ における速度ベクトルとは、

$$\mathbf{v}_c = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} c(t)\right|_{t=0} \tag{3.10}$$

で定義される接ベクトルである。

4　写像の微分

M, N を多様体、m, n 次元 C^r 級多様体とし、$f : M \to N$ を C^r 級写像とする。点 $p \in M$ を通るような M 上の C^r 級曲線

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \quad (c(0) = p) \tag{4.1}$$

を考える。この曲線を f でうつすと、$f(p)$ を通る N 上の C^r 級曲線

$$f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N \quad ((f \circ c)(0) = f(p)) \tag{4.2}$$

が得られる。ここでは、$t = 0$ での曲線 c の速度ベクトルと、$t = 0$ での曲線 $f \circ c$ の速度ベクトルの関係を調べる。

T_pM の任意の元 $\mathbf{v}$ をとる。このとき、$\left.\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \mathbf{v}$ となるような、p を通る C^r 級曲線

$$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \quad (c(0) = p) \tag{4.3}$$

が存在する。この曲線を写像 $f : M \to N$ でうつすと、$q = f(p)$ を通る C^r 級曲線

$$f \circ c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N \quad ((f \circ c)(0) = q) \tag{4.4}$$

が得られる。$t=0$ におけるこの曲線の速度ベクトルは、

$$\mathbf{w} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ c)\right|_{t=0} \tag{4.5}$$

である。このようにして、T_pM の元 $\mathbf{v}$ に対して T_qN の元 $\mathbf{w}$ が対応する。また、この対応は曲線の取り方によらないことが示せる。これにより、T_pM の元 $\mathbf{v}$ に対して T_qN の元 $\mathbf{w}$ が対応する写像として、微分が定義される。

Def. 写像の微分

上の対応で定まる写像

$$(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}N \tag{4.6}$$

を、$f : M \to N$ の p における微分という。[a]

[a] 以降、f_* と書くこともある。

この写像に"微分"という名前がついていることを納得するために、以下の例を考えてみる。

ex.

$M=\mathbb{R}$, $N=\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ とする。このとき、$p=1$ における f の微分 $(df)_1$ は、hoge

写像の微分を成分表示する。hogehoge

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \tag{4.7}$$