

rakugaki

大上由人

2024 年 6 月 10 日

Lem:

$A \underset{\text{cofibration}}{\subset} X$ であるならば、 $X/A \underset{\text{cofibration}}{\supset} A/A$

Thm: 等価空間のオイラー数

$\phi \neq A \underset{\text{cofibration}}{\subset} X$ かつ $\mathcal{X}(A), \mathcal{X}(X), \mathcal{X}(X/A)$ のどれか二つが well-defined

Prf

$$X \cup CA = M_l/A \times \{0\}$$

$$X(X \cup CA) = X(D) + X(E) - X(D \cap E)$$

右辺第一項は可縮である、第二項は $E \simeq X$ であり、 $D \cap E \equiv A \times (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \simeq S$

$$(X \cup CA) \sqcup_p * \cong X/A$$

$$\text{左辺} \simeq X \cup CA$$

よって、求めるものを得る。

Top_0 起点つき位相空間の圏 (射は連続写像であって、基点を基点に移すもの)
 $X \in Obj(Top_0)$ について、

$$\tilde{X}(X) = X(X) - 1(X(\{*\})) \quad (0.1)$$

と定義する。

Cor

$A, X \in Obj(Top_0)$ かつ $A \subset X$ について (つまり、 X の基点が A の基点に移る)、

$$\tilde{X}(X/A) = \tilde{X}(X) - \tilde{X}(A) \quad (0.2)$$

ただし、3 項のうちどれか二つが well-defined である。

$A, B \in Obj(Top_0)$ について、

$$A \vee B := A \sqcup B / \{A^* \sim B^*\} \quad (0.3)$$

$$A \wedge B := A \times B / \{A \times \{*_B\} \cup \{*_A\} \times B\} \quad (0.4)$$

と定義する。

Thm: $\tilde{\mathcal{X}}$ の性質

すべて基点つき空間で考える。 $A, B \in X$ s.t. $X = A \cup B$ かつ、

$$A \underset{\text{cofibration}}{\supset} A \cap B \quad (0.5)$$

かつ

$$A \cap B \underset{\text{cofibration}}{\subset} B \quad (0.6)$$

であるとする。このとき、 $\mathcal{X}(A), \mathcal{X}(B), \mathcal{X}(X), \mathcal{X}(A \cap B)$ のうちどれか三つが well-defined であるならヴァ

$$\tilde{X}(X) = \tilde{X}(A) + \tilde{X}(B) - \tilde{X}(A \cap B) \quad (0.7)$$

が成り立つ。

Prf

仮定より、

$$A \underset{\text{cofibration}}{\subset} X \underset{\text{cofibration}}{\supset} A \quad (0.8)$$

$$X/A \cong B/A \cap B \quad X/B \cong A/A \cap B \quad (0.9)$$

先のことから、

$$\tilde{\mathcal{X}}(X/A) = \tilde{\mathcal{X}}(X) - \tilde{\mathcal{X}}(A) \quad (0.10)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(X/A) = \tilde{\mathcal{X}}(B/A \cap B) = \tilde{\mathcal{X}}(B) - \tilde{\mathcal{X}}(A \cap B) \quad (0.11)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(X/B) = \tilde{\mathcal{X}}(X) - \tilde{\mathcal{X}}(B) \quad (0.12)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(A/A \cap B) = \tilde{\mathcal{X}}(A) - \tilde{\mathcal{X}}(A \cap B) \quad (0.13)$$

よって、

$$\tilde{\mathcal{X}}(X) - \tilde{\mathcal{X}}(A) = \tilde{\mathcal{X}}(B) - \tilde{\mathcal{X}}(A \cap B) \quad (0.14)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(X) - \tilde{\mathcal{X}}(B) = \tilde{\mathcal{X}}(A) - \tilde{\mathcal{X}}(A \cap B) \quad (0.15)$$

であるから、(0.14)-(0.15) を辺々足して 2 で割ることで、求めるものを得る。

Def: 退化

$A \in \text{Obj}(\text{Top}_0)$ について、 A の基点 $\{*_A\} \in A$ が非退化であるとは、 (A が well-pointed であるとは)、 $\{*_A\} \in A$ が cofibration であることをいう。

Prop:

A, B が well-pointed であるならば、 $A \wedge B, A \vee B$ も well-pointed である。

Cor

$A, B \in \text{Obj}(\text{Top}_0)$ が well-pointed であるかつ、 $\tilde{\mathcal{X}}(A), \tilde{\mathcal{X}}(B)$ が well-defined であるならば、

$$\tilde{\mathcal{X}}(A \wedge B) = \tilde{\mathcal{X}}(A) + \tilde{\mathcal{X}}(B) - 1 \quad (0.16)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(A \vee B) = \tilde{\mathcal{X}}(A) + \tilde{\mathcal{X}}(B) - 1 \quad (0.17)$$

が成り立つ。

Prf

$A \subset A \vee B \supset B$ と思う。仮定より、 $A \cap B \in A \vee B = A \cup B$ であり、

$$A \underset{\text{cofibration}}{\subset} A \cap B (= \{*_A\} = \{*_B\}) \underset{\text{cofibration}}{\subset} B \quad (0.18)$$

$$A \underset{\text{cofibration}}{\subset} A \cup B (\equiv A \vee B) \underset{\text{cofibration}}{\supset} B \quad (0.19)$$

前の定理より、

$$\tilde{\mathcal{X}}(A \vee B) = \tilde{\mathcal{X}}(A) + \tilde{\mathcal{X}}(B) - \tilde{\mathcal{X}}(A \cap B) \quad (0.20)$$

である。いま、第三項が 0 であることに注意すると、求めるものを得る。

また、

$$A \wedge B = A \times B / \{A \vee B\} \quad (0.21)$$

である、このとき、 $A = A \times \{*_B\} \subset A \times B \supset \{*_A\} \times B = B$ であり、 A と B の $A \times B$ における合併は $A \vee B$ と同じ。

A, B が well-pointed であることから、 $A \vee B \underset{\text{cofibration}}{\subset} A \times B$ である。

2 つ前の定理より、

$$\tilde{\mathcal{X}}(A \wedge B) = \tilde{\mathcal{X}}(A \times B) / \tilde{\mathcal{X}}(A \vee B) \quad (0.22)$$

$$= \tilde{\mathcal{X}}(A \times B) - \tilde{\mathcal{X}}(A \vee B) \quad (0.23)$$

$$= (\mathcal{X}(A)\mathcal{X}(B) - 1) - (\mathcal{X}(A) + \mathcal{X}(B) - 2) \quad (0.24)$$

$$= (\mathcal{X}(A) - 1)(\mathcal{X}(B) - 1) \quad (0.25)$$

$$= (\tilde{\mathcal{X}}(A)(\tilde{\mathcal{X}}(B))) \quad (0.26)$$

となる。

ex

Top_0 における suspension を、 $A \in \text{Obj}(\text{Top}_0)$ について、

$$SA = S^1 \wedge A \quad (0.27)$$

と定義する。

$$S^n A = S(S(\cdots S(SA) \cdots)) \quad (0.28)$$

と定義する。

このとき、

$$S^n \cong S^n S^0 \quad (0.29)$$

である。

$$\tilde{\mathcal{X}}(S^n) = \tilde{\mathcal{X}}(S^n S^0) \quad (0.30)$$

$$= \tilde{\mathcal{X}}(S^1 \wedge \cdots \wedge S^1 \wedge S^0) \quad (0.31)$$

$$= (\tilde{\mathcal{X}}(S^1))^n \tilde{\mathcal{X}}(S^0) \quad (0.32)$$

$$\vdots \quad (0.33)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(S^0) = \mathcal{X}(S^0) - 1 = 2 - 1 = 1 \quad (0.34)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(S^1) = \mathcal{X}(S^1) - 1 = 0 - 1 = -1 \quad (0.35)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(S^n) = (-1)^n \quad (0.36)$$

Def: 位相多様体

M が位相多様体であるとは、

1. M は Hausdorff である
2. 任意の点 $p \in M$ について、 p の近傍 U であって、

$$(U, p) \cong (\mathbb{R}^n, 0) \quad (0.37)$$

または、

$$(U, p) \cong (H_+^n, 0) \quad (0.38)$$

ただし、

$$H_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n | x_n \geq 0\} \quad (0.39)$$

となるものをいう。このとき、(0.37) と (0.38) は排反事象である。

Def:

位相多様体が閉であるとは、

1. M はコンパクト
2. $\partial M = \emptyset$

となるものをいう。

$\partial M = M$ の境界点 とおき、これを M の境界という。

ex

\mathbb{R}^n, H_+^n はそれぞれ n 次元多様体であり、

$$\partial \mathbb{R}^n = \emptyset, \quad \partial H_+^n = \mathbb{R}^{n-1} \quad (0.40)$$

である。

ex

S^n は閉多様体

ex

A, B が多様体ならば、 $A \times B$ も閉多様体である。