線形代数

大上由人

2024 年 9 月 23 日

1　線形代数

1.1　行列の積

Thm. 行列の積の分割

行列 A, B の積は、ベクトルを用いることで以下のように分割できる。

1.
$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}'_1 & \mathbf{b}'_2 & \cdots & \mathbf{b}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1\mathbf{b}'_1 & \mathbf{a}_1\mathbf{b}'_2 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{b}'_n \\ \mathbf{a}_2\mathbf{b}'_1 & \mathbf{a}_2\mathbf{b}'_2 & \cdots & \mathbf{a}_2\mathbf{b}'_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_m\mathbf{b}'_1 & \mathbf{a}_m\mathbf{b}'_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\mathbf{b}'_n \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

2.
$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1 & \mathbf{a}'_2 & \cdots & \mathbf{a}'_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}'_1\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}'_1\mathbf{b}_n \\ \mathbf{a}'_2\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}'_2\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}'_2\mathbf{b}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}'_m\mathbf{b}_1 & \mathbf{a}'_m\mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{a}'_m\mathbf{b}_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

3.
$$AB = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 B \\ \mathbf{a}_2 B \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m B \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

4.
$$AB = A \begin{pmatrix} \mathbf{b}'_1 & \mathbf{b}'_2 & \cdots & \mathbf{b}'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{b}'_1 & A\mathbf{b}'_2 & \cdots & A\mathbf{b}'_n \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

1.2　行列式

1.2.1　置換

Def. 置換

n 個の文字 $1, 2, \cdots, n$ からなる集合を

$$M_n = \{1, 2, \cdots, n\} \tag{1.5}$$

とする。このとき、写像 $\sigma : M_n \to M_n$ が置換であるとは、この写像が全単射であることをいう。このとき、

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

と表す。また、n 個の文字の置換全体の集合を S_n と書く。

Def. 置換の積

置換 σ, τ に対して、その積 $\tau\sigma$ を以下のように定義する。

$$\tau\sigma := \tau \circ \sigma \tag{1.7}$$

Def. 巡回置換/互換

$M_n = \{1, 2, \cdots, n\}$ のうち、$i_1, i_2, \cdots, i_m$ 以外を動かさないで、$i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, \cdots, i_m \mapsto i_1$ のように一巡させる置換

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_m & i_{m+1} & \cdots & i_n \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_1 & i_{m+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

を巡回置換といい、

$$(i_1, i_2, \cdots, i_m) \tag{1.9}$$

と表す。また、2 つの文字を入れ替える置換

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ i_2 & i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

を互換といい、

$$(i_1, i_2) \tag{1.11}$$

と表す。

Thm. 巡回置換による置換の分解

任意の置換は共通の文字を含まない巡回置換の積に分解できる。

Prf.

適当な置換

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

を考える。このとき、例えば 1 がどのように移るかを考える。1 を何回も移したときにもどって来ないと仮定する。いま、M_n は有限だから、1 を移す操作を繰り返すと、1 以外のある数字が繰り返し出てくる。この数字を j_k とする。そうすると、ある二つの数字 j_{k-1}, j_m について、$j_{k-1} \to j_k, j_m \to j_k$ となる。これは、置換が全単射なことに矛盾する。したがって、1 を何回も移してもとに戻る。同様に、他の数字についても同様の議論ができる。以上より、示された。 □

Thm. 互換による巡回置換の分解

巡回置換 $(i_1, i_2, \cdots, i_m)$ は以下のように $m-1$ 個の互換の積に分解できる。

$$(i_1, i_2, \cdots, i_m) = (i_1, i_m)(i_1, i_{m-1}) \cdots (i_1, i_3)(i_1, i_2) \tag{1.13}$$

Prf.

手を動かせば明らかである。 □

Cor. 互換による置換の分解

任意の置換は互換の積に分解できる。

Prf.

上二つの定理から明らかである。 □

Def. 置換の符号

置換 σ に対して、その符号 $\mathrm{sgn}(\sigma)$ を以下のように定義する。

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)} \tag{1.14}$$

ただし、$N(\sigma)$ は σ を互換の積に分解したときの互換の個数である。

置換の符号の定義が well-defined であることが以下で示される。

Thm. 置換の符号の不変性

互換への分解の仕方によらず、置換の符号は一意である。

Prf.

1.2.2 行列式の定義

Def. 行列式

n 次正方行列 A に対して、その行列式 $\det A$ は以下のように定義される。

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{1.15}$$

ただし、$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号であり、σ が偶置換のとき $+1$、奇置換のとき -1 となる。

Ex.

2 次正方行列 A に対して、

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

について、

$$\det A = 1 \cdot a_{11} a_{22} + (-1) \cdot a_{12} a_{21} \tag{1.17}$$

$$= a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \tag{1.18}$$

である。

1.2.3 行列式の性質

Thm.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.19}$$

Prf.

行列式の定義は、

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{1.20}$$

であった。ここで、$k > 1$ について、$\sigma(k) = 1$ だとすると、

$$\mathrm{sgn} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0 \tag{1.21}$$

となるから、和の中で考える必要がない。したがって、$\sigma(1)=1$ となる部分だけ和を考えればよい。このとき、

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{1.22}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1)=1} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{1.23}$$

$$= a_{11} \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(1)=1} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{1.24}$$

$$= a_{11} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{22} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{1.25}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.26}$$

である。以上より、示された。 □

Cor.

上三角行列 A の行列式は、対角成分の積に等しい。すなわち、

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \tag{1.27}$$

Prf.

上の定理を繰り返し用いればよい。 □

Thm.

A を r 次正方行列とし、D を s 次正方行列とする。このとき、

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \det A \det D \tag{1.28}$$

が成り立つ。

Prf.

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ O & D \end{pmatrix} = (a)_{ij} \tag{1.29}$$

とし、$n=r+s$ とする。このとき、行列式の定義から、

$$\det X = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) (a)_{1\sigma(1)} (a)_{2\sigma(2)} \cdots (a)_{n\sigma(n)} \tag{1.30}$$

である。上の定理を参考に、置換を分解して考えると、

Thm.

行列 A の一つのを c 倍すると、行列式も c 倍される。すなわち、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.31}$$

が成り立つ。

Prf.

左辺を計算すると、行列式の定義より、

$$\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots ca_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = c \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{1.32}$$

となることがわかる。したがって、示された。 □

Cor.

行列 A の一つの成分がすべて 0 であるとき、行列式は 0 である。

Prf.

$0 = 0 \times 0$ として上の定理を用いればよい。 □

Thm.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.33}$$

Prf.

略。 □

Thm. 二つの行の入れ替え

行列式の二つの行を入れ替えると、行列式は -1 倍される。すなわち、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.34}$$

Prf.

$\tau := \sigma(i,j)$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}(\tau) &= \mathrm{sgn}(\sigma(i,j)) && (1.35) \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(i,j) && (1.36) \\ &= -\mathrm{sgn}(\sigma) && (1.37) \end{aligned}$$

となる。これを用いて計算すると、

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} && (1.38) \\ & (\sigma(i) = j, \sigma(j) = i) \text{ より、} && (1.39) \\ &= -\sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau) a_{1\tau(1)} a_{2\tau(2)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{j\tau(j)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{n\tau(n)} && (1.40) \\ &= (\text{右辺}) && (1.41) \end{aligned}$$

である。したがって、示された。 □

Thm.

二つの行が等しい行列の行列式は 0 である。

Prf.

上の定理を用いれば、

$$\det A = -\det A \tag{1.42}$$

となるから、$\det A = 0$ である。したがって、示された。 □

Thm.

行列の 1 つの行に任意の数をかけて、他の行に加えても、行列式の値は変わらない。すなわち、

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+ca_{j1} & a_{i2}+ca_{j2} & \cdots & a_{in}+ca_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.43}$$

が成り立つ。

Prf.

$$左辺 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.44}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.45}$$

である。したがって、示された。 □

Thm.

$$\det A = \det A^T \tag{1.46}$$

Prf.

1.2.4 行列式の展開

Def. 余因子

n 次正方行列 $A=(a_{ij})$ に対して、その第 i 行および第 j 列を取り除いた $n-1$ 次正方行列 A_{ij} を考える。このとき、

$$\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij} \tag{1.47}$$

を A の (a_{ij}) に対する余因子という。

Thm. 余因子展開

n 次正方行列 A に対して、

$$\det A=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{a}_{ij} \tag{1.48}$$

が成り立つ。これを、第 i 行に対する余因子展開という。また、

$$\sum_{j=1}a_{ij}\tilde{a}_{kj}=0 \quad (i\neq k) \tag{1.49}$$

が成り立つ。

Prf.

与えられた行列 A の第 i 行は、

$$\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{i1} & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a_{i2} & \cdots & 0\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & a_{in}\end{pmatrix} \tag{1.50}$$

と書ける。したがって、行列式は、

$$\det A=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \tag{1.51}$$

となる。行と列をうまく入れ替えて計算することで、

$$\det A=\sum_{j=1}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij} \tag{1.52}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{a}_{ij} \tag{1.53}$$

が示される。第二の式は気が向いたら証明する。 □

Thm.

n 次正方行列 A, B に対して、

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{1.54}$$

が成り立つ。

Prf.

行列 A, B をそれぞれ $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ と書くことにする。そして、行列 B のベクトルを $b_1, b_2, \ldots, b_n$ とする。すなわち、

$$\mathbf{b}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} & b_{2j} & \ldots & b_{nj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.55}$$

ブロックに分けての計算法によって、

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}\mathbf{b}_j \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}\mathbf{b}_j \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

である。したがって、次の等式を得る。

$$\det(AB) = \sum_{j_n=1}^n \sum_{j_{n-1}=1}^n \cdots \sum_{j_2=1}^n \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} \ldots a_{nj_n} \begin{vmatrix} \mathbf{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{j_n} \end{vmatrix} \tag{1.57}$$

ここで、和は $j_1, j_2, \ldots, j_n$ がそれぞれ 1 から n まで動くので n^n 個の項になる。しかし、$b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}$ のうちに同じものがあれば、行列式

$$\begin{vmatrix} \mathbf{b}_{j_1} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{j_n} \end{vmatrix} = 0 \tag{1.58}$$

となるから、$j_1, j_2, \ldots, j_n$ がすべて異なる場合の和を考えればよい。すなわち $j_1, j_2, \ldots, j_n$ の順列となる場合に他ならない。しかも、和はちょうど $n!$ の順列をわたる。ゆえに、

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \begin{vmatrix} \mathbf{b}_{1\sigma(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{n\sigma(n)} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)} \begin{vmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{vmatrix} \tag{1.59}$$

となるので、

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{1.60}$$

が示された。 □

1.3　ベクトル空間

1.3.1　基底間の関係

Thm. 基底の変換

基底ベクトル間の変換は、2 つの基底を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ と $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n$ とすると、ある正則行列 P によって

$$\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij}\mathbf{a}_i \tag{1.61}$$

と表される。行列表記すると、

$$\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} P \tag{1.62}$$

となる。

Prf.

hoge □

このもとで、成分の変化を見る。今、

$$\begin{aligned}
y_1\mathbf{b}_1 + y_2\mathbf{b}_2 + \cdots + y_n\mathbf{b}_n &= \begin{pmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \dots & \mathbf{b}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} & (1.63)\\
&= \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} P \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} & (1.64)\\
&= \begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} & (1.65)
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \tag{1.66}$$

を得る。

1.3.2 線形写像の行列表現

線形写像の行列表現を考える。V を n 次元ベクトル空間、W を m 次元ベクトル空間とし、V の基底を $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$、$W$ の基底を $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m$ とする。このとき、線形写像 $f : V \to W$ について、

$$f(\mathbf{a}_j) = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\mathbf{b}_i \tag{1.67}$$

により行列 A を定義する。このとき、

$$f\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \ldots & \mathbf{a}_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \ldots & \mathbf{b}_m\end{pmatrix} A \tag{1.68}$$

が成り立つ。この行列 A を線形写像 f の行列表現という。このもとで、

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &= f(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n) && (1.69)\\
&= f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{a}_j\right) && (1.70)\\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j f(\mathbf{a}_j) && (1.71)\\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\mathbf{b}_i && (1.72)\\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j\right)\mathbf{b}_i && (1.73)\\
&= \sum_{i=1}^{m} y_i\mathbf{b}_i && (1.74)
\end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{1.75}$$

となる。

Thm.

$f: V \to W$ を線形写像とする。V の基底 $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ と W の基底 $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ に関する f の表現行列を A とし、V の基底 $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n$ と W の基底 $\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_m$ に関する f の表現行列を B とする。また、基底変換の行列をそれぞれ P, Q とする。すなわち、

$$(\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n) = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)P, \tag{1.76}$$

$$(\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_m) = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m)Q, \tag{1.77}$$

とおく。このとき、

$$B = Q^{-1}AP \tag{1.78}$$

が成り立つ。

Prf.

表現行列と基底の変換の行列の定義より

$$(f(\mathbf{a}'_1), \ldots, f(\mathbf{a}'_n)) = (f(\mathbf{a}_1), \ldots, f(\mathbf{a}_n))B = (\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_m)QB \tag{1.79}$$

また、線形性から、

$$(f(\mathbf{a}'_1), \ldots, f(\mathbf{a}'_n)) = (f(\mathbf{a}_1), \ldots, f(\mathbf{a}_n))P = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m)AP \tag{1.80}$$

であるから、

$$(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m)QB = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m)AP \tag{1.81}$$

が得られる。$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ は一次独立だから、定理 6.4.8 より $QB = AP$ が成り立つ。Q は正則だから、

$$B = Q^{-1}AP \tag{1.82}$$

□

1.4 ランク

Def. ランク

$m \times n$ 行列 A に対して、A のランクとは、

$$\mathrm{rank}A = \mathrm{dim}\mathrm{Im}A \tag{1.83}$$

で定義される。

Thm. ランクの特徴づけ

$m \times n$ 行列 A に対して、以下の (1) 〜 (5) の数は一致する。

1. A のランク
2. A の列ベクトルのうち一次独立な最大個数
3. A の行ベクトルのうち一次独立な最大個数
4. A の t 次の小行列式の中には 0 でないものがあり、$t+1$ 次以上の小行列式はすべて 0 であるような最大の t
5. A の行ベクトルが生成する部分空間の次元

Prf.

1.5 その他

Thm:

実 n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の任意の部分ベクトル空間 W_1, W_2 に対して、

$$W_1 \subset W_2 \Rightarrow \dim W_1 \leq \dim W_2 \tag{1.84}$$

が成立する。また、

$$W_1 \subset W_2 \quad \text{and} \quad \dim W_1 = \dim W_2 \quad \Rightarrow \quad W_1 = W_2 \tag{1.85}$$

が成立する。

Prf