B4 ゼミ #11

大上由人

2025 年 9 月 22 日

1 揺動散逸定理

記号を思い出しておく。

- $\hat{J}_X$: 示量変数 X のカレント $\frac{\partial X}{\partial t}$
- Π_X: X の共役変数
- $\Delta\Pi_X = \Pi_X^2 - \Pi_X^1$: bath1 と bath2 の Π_X の差
- $\hat{\mathcal{J}} = \int_0^\tau dt \hat{J}(t)$: 時間積分されたカレント
- $\langle\cdot\rangle$: $\Delta\Pi_X$ により駆動される非平衡定常状態でのアンサンブル平均
- $\langle\cdot\rangle_0$: 平衡状態におけるアンサンブル平均

1.1 高次における関係

磁場 B が存在する下でのアンサンブル平均を $\langle\cdot\rangle^B$ と表す。このもとで、IFT から導かれる高次の関係を示す。

Thm. 時間積分されたカレントの高次の関係

磁場中の $\hat{\mathcal{J}}$ は、以下の高次における関係を満たす:

$$\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle^+\bigg|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^+\bigg|_{\Delta\Pi_X=0} \tag{1}$$

ただし、$\langle\cdot\rangle^+ = \frac{1}{2}(\langle\cdot\rangle^B + \langle\cdot\rangle^{-B})$ である。

Prf

FDT を導出する途中の展開をより高次まで行うと、

$$1=\left\langle e^{-\hat{\sigma}}\right\rangle = 1-\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^{B}\Delta\Pi_X+\frac{1}{2}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle^{B}\Delta\Pi_X^2-\frac{1}{6}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^3\right\rangle^{B}\Delta\Pi_X^3+O(\Delta\Pi_X^4) \tag{2}$$

$$=1-\left(\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle_0^{B}\Delta\Pi_X+\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^{B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}\Delta\Pi_X^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^{B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}\Delta\Pi_X^3\right) \tag{3}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle_0^{B}\Delta\Pi_X^2+\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle^{B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}\Delta\Pi_X^3\right)-\frac{1}{6}\left(\left\langle\hat{\mathcal{J}}^3\right\rangle_0^{B}\Delta\Pi_X^3\right)+O(\Delta\Pi_X^4) \tag{4}$$

となる。ここで、$\hat{\mathcal{J}}$ は、

$$\hat{\mathcal{J}}=\int_0^{\tau}dt\hat{J}(t) \tag{5}$$

である。同様の手順を踏むことで、B を $-B$ としたときの展開は、

$$1=\left\langle e^{-\hat{\sigma}}\right\rangle = 1-\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^{-B}\Delta\Pi_X+\frac{1}{2}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle^{-B}\Delta\Pi_X^2-\frac{1}{6}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^3\right\rangle^{-B}\Delta\Pi_X^3+O(\Delta\Pi_X^4) \tag{6}$$

$$=1-\left(\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle_0^{-B}\Delta\Pi_X+\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^{-B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}\Delta\Pi_X^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^{-B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}\Delta\Pi_X^3\right) \tag{7}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle_0^{-B}\Delta\Pi_X^2+\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle^{-B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}\Delta\Pi_X^3\right)-\frac{1}{6}\left(\left\langle\hat{\mathcal{J}}^3\right\rangle_0^{-B}\Delta\Pi_X^3\right)+O(\Delta\Pi_X^4) \tag{8}$$

となる。

ここで、期待値の時間反転対称性から、

$$\left\langle\hat{\mathcal{J}}^3\right\rangle^{B}=-\left\langle\hat{\mathcal{J}}^3\right\rangle^{-B} \tag{9}$$

が成り立つことを用いて、上の二式を両辺足して、$\Delta\Pi_X$ の三次の項を比較すると、

$$\begin{aligned}0=&\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^{B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^{-B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle^{B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle^{-B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}-\frac{1}{6}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^3\right\rangle_0^{B}-\frac{1}{6}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^3\right\rangle_0^{-B}\end{aligned}$$

すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle^{B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}+\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle^{-B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}=\frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^{B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0}+\frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^{-B}\Big|_{\Delta\Pi_X=0} \tag{10}$$

を得る。新たに、$\langle\cdot\rangle^+ = \frac{1}{2}(\langle\cdot\rangle^B + \langle\cdot\rangle^{-B})$ と定義すると、

$$\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle^+\Big|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^+\Big|_{\Delta\Pi_X=0} \tag{11}$$

が成り立つ。 □

また、以下も成り立つ。

Thm. 高次における関係 (2)

IFT を満たす系について、以下が成り立つ:

$$2\,\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\int_0^\infty \mathrm{d}t\left\langle\Delta\hat{J}(t)\Delta\hat{J}(0)\right\rangle^+\Big|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle\Delta\hat{J}\right\rangle^+\Big|_{\Delta\Pi_X=0} \tag{12}$$

Prf

$\hat{\mathcal{J}}$ を J を用いて表すことで、

$$\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\int_0^\tau \mathrm{d}t'\int_0^\tau \mathrm{d}t\hat{J}(t')\hat{J}(t)\right\rangle^+|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle\int_0^\tau \mathrm{d}t\hat{J}(t)\right\rangle^+\Big|_{\Delta\Pi_X=0} \tag{13}$$

が成り立つ。ここで、左辺の被積分関数について、$\Delta\hat{J} = \hat{J} - \left\langle\hat{J}\right\rangle$ として展開すると、

$$\begin{aligned}
\left\langle\int_0^\tau \mathrm{d}t'\int_0^\tau \mathrm{d}t\hat{J}(t')\hat{J}(t)\right\rangle^+ &= \left\langle\int_0^\tau \mathrm{d}t'\int_0^\tau \mathrm{d}t(\Delta\hat{J}(t')+J(t'))(\Delta\hat{J}(t)+J(t))\right\rangle^+ && (14)\\
&= \left\langle\int_0^\tau \mathrm{d}t'\int_0^\tau \mathrm{d}t\Delta\hat{J}(t')\Delta\hat{J}(t)\right\rangle^+ && (15)\\
&\quad + 2\left\langle\int_0^\tau \mathrm{d}t'\int_0^\tau \mathrm{d}t\Delta\hat{J}(t')J(t)\right\rangle^+ && (16)\\
&\quad + \left\langle\int_0^\tau \mathrm{d}t'\int_0^\tau \mathrm{d}tJ(t')J(t)\right\rangle^+ && (17)
\end{aligned}$$

となる。ここで、第二項について、

$$\begin{aligned}
2\left\langle\int_0^\tau \mathrm{d}t'\int_0^\tau \mathrm{d}t\Delta\hat{J}(t')J(t)\right\rangle^+ &= 2\int_0^\tau\int_0^\tau \mathrm{d}t'\mathrm{d}tJ(t)\left\langle\Delta\hat{J}(t')\right\rangle^+ && (18)\\
&= 0 && (19)
\end{aligned}$$

である。というのも、$\left\langle\Delta\hat{J}(t')\right\rangle^+ = 0$ であるからである。よって、

$$\begin{aligned}
\left\langle\int_0^\tau \mathrm{d}t'\int_0^\tau \mathrm{d}t\hat{J}(t')\hat{J}(t)\right\rangle^+ &= \left\langle\int_0^\tau \mathrm{d}t'\int_0^\tau \mathrm{d}t(\Delta\hat{J}(t')+J(t'))(\Delta\hat{J}(t)+J(t))\right\rangle^+ && (20)\\
&= \left\langle\int_0^\tau \mathrm{d}t'\int_0^\tau \mathrm{d}t\Delta\hat{J}(t')\Delta\hat{J}(t)\right\rangle^+ && (21)\\
&\quad + \left\langle\int_0^\tau \mathrm{d}t'\int_0^\tau \mathrm{d}tJ(t')J(t)\right\rangle^+ && (22)
\end{aligned}$$

となる。ここで、この最後の式の第二項は、$\Delta\Pi_X = 0$ で、$\Delta\Pi_X$ について微分することで 0 になる。これは、$\int_0^\tau \mathrm{d}t \left\langle \hat{J}(t))^2 \right\rangle$ が、$\Delta\Pi_X$ についての偶関数であることからわかる。
したがって、

$$\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t \Delta\hat{J}(t')\Delta\hat{J}(t)\right\rangle^+ \Bigg|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t \hat{J}(t)\right\rangle^+ |_{\Delta\Pi_X=0} \tag{23}$$

が成り立つ。ここで、両辺 $\frac{1}{\tau}$ をかけ、$\tau\to\infty$ の極限を取ると、前回のゼミと同様の変形をすることで、

$$2\,\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\int_0^\infty \mathrm{d}t \left\langle \Delta\hat{J}(t)\Delta\hat{J}(0)\right\rangle^+ \Bigg|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle \Delta\hat{J}\right\rangle^+ \Bigg|_{\Delta\Pi_X=0} \tag{24}$$

を得る。 □

1.2 従来の線形応答理論との違い

従来の線形応答理論では、カレントはバルク、すなわち系で測定されるのに対し、今回は、熱浴側で測定される。考える系によってはこの二つの定義の違いが効いてくる場合があるらしく、前者は巨視的な導体に、後者はメゾスコピック伝導に有効らしい。(多分系のサイズが大事)

また、従来の線形応答理論における久保公式を得るためには別の定式化が必要となる。この場合は、単一の熱浴と外力 $F(x,t)$ を持つ系を考え、エントロピー生成を

$$\hat{\sigma} = -\beta \int_0^\tau dt \int \mathrm{d}x\, F(x,t)\hat{j}(x,t) \tag{25}$$

と定義すればよい。ここでは詳細な導出は追わない。

2 Onsager の相反定理

二つの示量変数 X と Y をもつ系を考える。対応する流れをそれぞれ J_X と J_Y とする。系が四つの bath と接触しているとする。そのうち二つが、Π_X に対応するものとし、残り二つが、Π_Y に対応するものとする。このとき、一般に、もし Π_X が 0 でないならば、$\Pi_Y = 0$ であっても、$J_Y = 0$ であるとは限らない。

Def.Onsager 行列

Onsager 行列 L は、

$$L_{ij} = \left.\frac{\partial J_i}{\partial \Delta\Pi_j}\right|_{\Delta\Pi_X=\Delta\Pi_Y=0} \quad (i,j=X,Y) \tag{26}$$

で定義される。

このとき、

$$J_X = L_{XX}\Delta\Pi_X + L_{XY}\Delta\Pi_Y \tag{27}$$

$$J_Y = L_{YX}\Delta\Pi_X + L_{YY}\Delta\Pi_Y \tag{28}$$

と書ける。

Thm.Onsager の相反定理

時間反転対称性を破るような場がないとする。このとき、$\Delta\Pi_Y$ に対する J_X の応答は、$\Delta\Pi_X$ に対する J_Y の応答と等しい。すなわち、

$$L_{XY} = L_{YX} \tag{29}$$

が成り立つ。

Prf

DFT を用いることで、

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle &= \int \mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_X \int \mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_Y \hat{\mathcal{J}}_X P(\hat{\mathcal{J}}_X, \hat{\mathcal{J}}_Y) && (30)\\
&= \int \mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_X \int \mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_Y (\hat{\mathcal{J}}_X P(-\hat{\mathcal{J}}_X, -\hat{\mathcal{J}}_Y)) \exp\Big(\hat{\mathcal{J}}_X \Delta\Pi_X + \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta\Pi_Y\Big) && (31)\\
&= -\int \mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_X \int \mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_Y \hat{\mathcal{J}}_X P(\hat{\mathcal{J}}_X, \hat{\mathcal{J}}_Y) \exp\Big(-\hat{\mathcal{J}}_X \Delta\Pi_X - \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta\Pi_Y\Big) && (32)\\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\langle \hat{\mathcal{J}}_X (-\hat{\mathcal{J}}_X \Delta\Pi_X - \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta\Pi_Y)^{k-1} \right\rangle}{(k-1)!} && (33)
\end{aligned}$$

が得られる (二行目で IFT, 最後はテイラー展開)。ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle}{\partial \Delta\Pi_Y} &= -\frac{\partial \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle}{\partial \Delta\Pi_Y} - \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_Y} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left\langle \hat{\mathcal{J}}_X (-\hat{\mathcal{J}}_X \Delta\Pi_X - \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta\Pi_Y)^{k-1} \right\rangle}{(k-1)!} && (34)\\
&= -\frac{\partial \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle}{\partial \Delta\Pi_Y} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y (-\hat{\mathcal{J}}_X \Delta\Pi_X - \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta\Pi_Y)^{k-2} \right\rangle}{(k-2)!} && (35)
\end{aligned}$$

となる。$\Delta\Pi_Y$ の 0 次の項を比較することで、

$$\frac{\partial \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle}{\partial \Delta\Pi_Y} = -\frac{\partial \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle}{\partial \Delta\Pi_Y} + \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle_0 \tag{36}$$

を得る。整理して、

$$2\frac{\partial\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle}{\partial\Delta\Pi_Y}=\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle_0 \tag{37}$$

を得る。同様にして、

$$2\frac{\partial\left\langle\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle}{\partial\Delta\Pi_X}=\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle_0 \tag{38}$$

を得る。これらを比較することで、

$$L_{XY}=L_{YX} \tag{39}$$

を得る。 □

Thm. 時間反転対称性を破る場があるときの Onsager の相反定理

例えば、磁場中の系を考えると、Onsager の相反定理は以下のように拡張される:

$$L_{XY}(B)=L_{YX}(-B) \tag{40}$$

Prf

磁場が時間反転対称性を破ることを考えると、DFT は、

$$P(\hat{\mathcal{J}}_X,\hat{\mathcal{J}}_Y;B)=P(-\hat{\mathcal{J}}_X,-\hat{\mathcal{J}}_Y;-B)\exp\left(\hat{\mathcal{J}}_X\Delta\Pi_X+\hat{\mathcal{J}}_Y\Delta\Pi_Y\right) \tag{41}$$

となる。このとき、

$$L_{XY}(B)+L_{XY}(-B)=\frac{1}{\tau}\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle_0^{-B} \tag{42}$$

となる。

(42) の証明

上で証明した Onsager の相反定理の証明を参考にすると、

$$\begin{aligned}\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle^B&=\int\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_X\int\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_Y\hat{\mathcal{J}}_XP(\hat{\mathcal{J}}_X,\hat{\mathcal{J}}_Y;B) &(43)\\&=\int\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_X\int\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_Y\hat{\mathcal{J}}_XP(-\hat{\mathcal{J}}_X,-\hat{\mathcal{J}}_Y;-B)\exp\left(\hat{\mathcal{J}}_X\Delta\Pi_X+\hat{\mathcal{J}}_Y\Delta\Pi_Y\right) &(44)\\&=-\int\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_X\int\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_Y\hat{\mathcal{J}}_XP(\hat{\mathcal{J}}_X,\hat{\mathcal{J}}_Y;-B)\exp\left(-\hat{\mathcal{J}}_X\Delta\Pi_X-\hat{\mathcal{J}}_Y\Delta\Pi_Y\right) &(45)\\&=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X(-\hat{\mathcal{J}}_X\Delta\Pi_X-\hat{\mathcal{J}}_Y\Delta\Pi_Y)^{k-1}\right\rangle^{-B}}{(k-1)!} &(46)\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle^B}{\partial\Delta\Pi_Y}=-\frac{\partial\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle^{-B}}{\partial\Delta\Pi_Y}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y(-\hat{\mathcal{J}}_X\Delta\Pi_X-\hat{\mathcal{J}}_Y\Delta\Pi_Y)^{k-2}\right\rangle^{-B}}{(k-2)!} \tag{47}$$

となる。$\Delta\Pi_Y$ の 0 次の項を比較することで、

$$\frac{\partial\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle^{B}}{\partial\Delta\Pi_Y}+\frac{\partial\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle^{-B}}{\partial\Delta\Pi_Y}=\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle_0^{-B} \tag{48}$$

を得る。したがって、

$$L_{XY}(B)+L_{XY}(-B)=\frac{1}{\tau}\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle_0^{-B} \tag{49}$$

を得る。

また、

$$L_{XY}(-B)+L_{YX}(-B)=\frac{1}{\tau}\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle_0^{-B} \tag{50}$$

となる。

(50) 式の証明

磁場が $-B$ のときの系について、IFT を用いることにより、

$$1=\left\langle e^{-\hat{\sigma}}\right\rangle^{-B}=\langle\exp(-\mathcal{J}_X\Delta\Pi_X-\mathcal{J}_Y\Delta\Pi_Y)\rangle^{-B} \tag{51}$$

$$=1-\langle\mathcal{J}_X\rangle^{-B}\Delta\Pi_X-\langle\mathcal{J}_Y\rangle^{-B}\Delta\Pi_Y \tag{52}$$

$$+\frac{1}{2}\left\langle\mathcal{J}_X^2\right\rangle^{-B}\Delta\Pi_X^2+\langle\mathcal{J}_X\mathcal{J}_Y\rangle^{-B}\Delta\Pi_X\Delta\Pi_Y \tag{53}$$

$$+\frac{1}{2}\left\langle\mathcal{J}_Y^2\right\rangle^{-B}\Delta\Pi_Y^2+O(\Delta\Pi^3) \tag{54}$$

を得る。ここで、

$$\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle^{-B}=\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle_0+\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle\bigg|_{\Delta\Pi_X=0}\Delta\Pi_X+\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_Y}\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle\bigg|_{\Delta\Pi_Y=0}\Delta\Pi_Y+O(\Delta\Pi^2) \tag{55}$$

と、

$$\left\langle\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle^{-B}=\left\langle\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle_0+\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle\bigg|_{\Delta\Pi_X=0}\Delta\Pi_X+\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_Y}\left\langle\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle\bigg|_{\Delta\Pi_Y=0}\Delta\Pi_Y+O(\Delta\Pi^2) \tag{56}$$

および、

$$\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle^{-B}=\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle_0^{-B}+O(\Delta\Pi) \tag{57}$$

であるから、(76) 式に代入して、$\Delta\Pi_X\Delta\Pi_Y$ の項を比較することで、

$$\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_Y}\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle^{-B}\bigg|_{\Delta\Pi_X=0}+\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle^{-B}\bigg|_{\Delta\Pi_Y=0}=\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle_0^{-B} \tag{58}$$

を得る。よって、

$$L_{XY}(-B) + L_{YX}(-B) = \frac{1}{\tau} \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle_0^{-B} \tag{59}$$

を得る。

この二式から、

$$L_{XY}(B) = L_{YX}(-B) \tag{60}$$

を得る。 □