

B4 ゼミ #5

大上由人

2025 年 5 月 15 日

4 連続空間における確率過程

前節では、離散状態に対する確率過程について述べたが、今回は連続時間の確率過程を考える。

4.1 数学的基礎

4.1.1 Wiener 過程

標準的な連続空間の Markov 過程として、Wiener 過程が知られている。

Def. Wiener 過程

Wiener 過程 $\hat{W}(t)$ は、

$$P(\hat{W}(t + \Delta t) = x \mid \hat{W}(t) = x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2\Delta t}\right) \quad (4.1)$$

$$P(x, 0) = \delta(x) \quad (4.2)$$

を満たす確率過程である。

Wiener 過程が確かに存在することを直感的に確かめる。一次元格子におけるランダムウォークを考える。格子定数を a 、時間間隔を $\Delta\tau$ とする。各界のステップでは、確率 $1/2$ で右に a 、 $1/2$ で左に a 移動するものとする。すなわち、

$$T_{x \rightarrow x+a} = T_{x \rightarrow x-a} = \frac{1}{2} \quad (4.3)$$

とする。初期条件を $P(x, 0) = \delta_{x,0}$ とすると、時刻 t における x の期待値は常に 0 である。このとき、拡散定数は、

$$D := \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} \quad (4.4)$$

$$= \sum_x \frac{x^2 P(x, t + \Delta t) - P(x, t)}{\Delta t} \quad (4.5)$$

$$= \sum_x \frac{x^2}{\Delta t} [P_{x-a \rightarrow a} P(x-a, t) + P_{x+a \rightarrow a} P(x+a, t) - P(x, t)] \quad (4.6)$$

$$= \sum_x \frac{x^2}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} P(x-a, t) + \frac{1}{2} P(x+a, t) - P(x, t) \right] \quad (4.7)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} \sum_x x^2 P(x-a, t) + \frac{1}{2} \sum_x x^2 P(x+a, t) - \sum_x x^2 P(x, t) \right] \quad (4.8)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{1}{2} \sum_{x'} (x' + a)^2 P(x', t) + \frac{1}{2} \sum_{x''} (x'' - a)^2 P(x'', t) - \sum_x x^2 P(x, t) \right] \quad (4.9)$$

$$= \frac{1}{\Delta t} \sum_x \left[\frac{(x-a)^2 + (x+a)^2}{2} - x^2 \right] P(x, t) \quad (4.10)$$

$$= \frac{a^2}{\Delta t} \quad (4.11)$$

このとき、確率分布は、中心極限定理により、ガウス分布に収束する。

Recall. 中心極限定理

N 個の独立同一分布の確率変数 X_i の平均値は、 $N \rightarrow \infty$ で、平均 μ 、分散 σ^2/N の正規分布に収束する。ただし、 μ は X_i の平均、 σ^2 は X_i の分散である。

TODO: 証明つける

Wiener 過程の極限として白色 Gauss ノイズを導入する。

Def. 白色 Gauss ノイズ

白色ガウスノイズは、以下のように与えられる。

$$\hat{\xi}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{W}(t + \Delta t) - \hat{W}(t)}{\Delta t} \quad (4.12)$$

また、のちの便宜のため、時間 Δt の間で離散化した白色ガウスノイズを

$$\hat{\xi}_{\Delta t}(t) := \hat{W}(t + \Delta t) - \hat{W}(t) \quad (4.13)$$

と定義する。このとき、ノイズの定義から

$$\langle \hat{\xi}(t) \rangle = 0 \quad (4.14)$$

$$\langle \hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t') \rangle = 0 \quad (t \neq t') \quad (4.15)$$

$$(4.16)$$

が成り立つ。第一式は、Wiener 過程の期待値が 0 であることと期待値の線形性から従う。また、Wiener 過程は時間に依らないことから、時間相関がないことから第二式が成り立つ。

また、Wiener 過程を

$$\hat{W}(\tau) = \int_0^\tau dt \hat{\xi}(t) \quad (4.17)$$

と復元できる。上記の関係を、正式に、

$$d\hat{W}(t) = \hat{\xi}(t) dt \quad (4.18)$$

と表す。

(4.15) より、より、 $\langle \hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t') \rangle = k\delta(t-t')$ と仮定する。以下、この係数 k の値を決める。

$$\langle \hat{W}^2(\tau) \rangle = \int dx x^2 P(\hat{W}(\tau) = x) \quad (4.19)$$

$$= \int dx x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{2\tau}} \quad (4.20)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(2\tau)^3 \pi} \quad (4.21)$$

$$= \tau \quad (4.22)$$

また、

$$\langle \hat{W}^2(\tau) \rangle = \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' \langle \hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t') \rangle \quad (4.23)$$

$$= \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt' k\delta(t-t') \quad (4.24)$$

$$= k\tau \quad (4.25)$$

よって、 $k = 1$ となる。すなわち、

$$\langle \hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t') \rangle = \delta(t-t') \quad (4.26)$$

が成り立つ。

特に、Wiener 過程の二乗はアンサンブル平均をとることなく

$$(d\hat{W}(t))^2 = dt \quad (4.27)$$

が成り立つ。より正確には、 $(d\hat{W}(t))^2$ による積分は、二乗平均の極限の意味で普通の時間積分と同等である。^{*1}

Thm.Ito 則

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^2 f(n\Delta t) - \int_0^\tau dt f(t) \right)^2 \right\rangle = 0, \quad (4.28)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t) \Delta t f(n\Delta t) \right)^2 \right\rangle = 0, \quad (4.29)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^k f(n\Delta t) \right)^2 \right\rangle = 0, \quad (4.30)$$

ここで $N := \tau/\Delta t$, $k \geq 3$ とする。これらの関係式は形式的には次のように書ける：

$$(d\hat{W}(t))^2 = dt, \quad (4.31)$$

$$d\hat{W}(t) dt = (d\hat{W}(t))^k = 0. \quad (4.32)$$

Prf.

$\xi_{\Delta t}$ の 4 次のモーメントは、

$$\begin{aligned} \langle \xi_{\Delta t}^4 \rangle &= \left\langle \left(\hat{W}(t + \Delta t) - \hat{W}(t) \right)^4 \right\rangle \\ &= \iint dx dx' (x' - x)^4 P(\hat{W}(t + \Delta t) = x', \hat{W}(t) = x) \\ &= \iint dx dx' (x' - x)^4 P(\hat{W}(t + \Delta t) = x' | \hat{W}(t) = x) P(\hat{W}(t) = x) \\ &\quad (\because \omega \equiv x' - x, \quad dx' = d\omega) \\ &= \int dx \int d\omega \omega^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\omega^2/(2\Delta t)} P(\hat{W}(t) = x) \\ &= \int d\omega \omega^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\omega^2/(2\Delta t)} \quad (\because \text{規格化}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{(2\Delta t)^5 \pi} \quad (\because \text{ガウス積分}) \\ &= 3\Delta t^2 \end{aligned} \quad (4.33)$$

^{*1} $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} g_{\Delta t} = g$ が平均二乗収束の意味で成り立つとは、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle (g_{\Delta t} - g)^2 \rangle = 0$$

が成り立つことをいう。

また、 $\xi_{\Delta t}$ の 2 次のモーメントは、

$$\begin{aligned}\langle \xi_{\Delta t}^2 \rangle &= \int d\omega \omega^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\omega^2/(2\Delta t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(2\Delta t)^3 \pi} \\ &= \Delta t\end{aligned}\tag{4.34}$$

よって、

$$\begin{aligned}\langle (\xi_{\Delta t}^2 - \Delta t)^2 \rangle &= \langle \xi_{\Delta t}^4 - 2\xi_{\Delta t}^2 \Delta t + (\Delta t)^2 \rangle \\ &= 3(\Delta t)^2 - 2(\Delta t)^2 + (\Delta t)^2 \\ &= 2(\Delta t)^2\end{aligned}\tag{4.35}$$

また、

$$D_{\Delta t} := \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t) \Delta t - \int_0^\tau dt f(t)\tag{4.36}$$

とする。このとき、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{N-1} (\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t))^2 f(n\Delta t) - \int_0^\tau dt f(t) \right)^2 \right\rangle\tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{N-1} (\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^2 - \Delta t) f(n\Delta t) + D_{\Delta t} \right)^2 \right\rangle \\ &\quad (\because \langle \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t) \hat{\xi}_{\Delta t}(n'\Delta t) \rangle = 0 \quad (n \neq n')) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \left\langle (\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^2 - \Delta t)^2 \right\rangle f(n\Delta t)^2 + O(D_{\Delta t}) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2(\Delta t)^2 \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t)^2 + O(D_{\Delta t}) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} O(\Delta t^2) \times O(\Delta t^{-1}) + O(D_{\Delta t}) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} O(\Delta t) + O(D_{\Delta t}) \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.38}$$

がいええる。

また、同様にして、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t) \Delta t f(n\Delta t) \right)^2 \right\rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \left\langle \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^2 \right\rangle (\Delta t)^2 f(n\Delta t)^2\tag{4.39}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} O(\Delta t^3) \times O(\Delta t^{-1})\tag{4.40}$$

$$= 0\tag{4.41}$$

および

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^k f(n\Delta t) \right)^2 \right\rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \left\langle \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^k \right\rangle f(n\Delta t)^2 \quad (4.42)$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} O(\Delta t^{k/2}) \times O(\Delta t^{-1}) \quad (4.43)$$

$$= 0 \quad (4.44)$$

が成り立つ。□

この教科書の以降では、単純な 2 乗 $(\hat{\xi}_{\Delta\tau}(t))^2$ を意味するのではなく、以下のように形式的に $\hat{\xi}_{\Delta\tau}^2(t)$ と記述する。

$$\hat{\xi}_{\Delta\tau}^2(t) := \sum_{n=0}^{N_{\Delta\tau}-1} \left(\hat{\xi}_{\Delta t}(t + n\Delta t) \right)^2 \quad (4.45)$$

ここで $N_{\Delta\tau} := \Delta\tau/\Delta t$ は、アンサンブル平均を取ることなく $\Delta\tau$ に収束する。

4.1.2 確率微分方程式と確率積分

特異点

Wiener 過程における微分や積分について考える。Wiener 過程はほとんどいたるところで特異点を持つため、取り扱いに注意が必要である。 $f(t, \hat{W}(t))$ のような、Wiener 過程に陽に依存する量を考える。このとき、 $f(t, \hat{W}(t))$ の $\hat{W}(t)$ に関する積分は以下のように定義される。

$$\int_0^\tau d\hat{W}(t) f(t, \hat{W}(t)) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t'_n)) \quad (4.46)$$

ここで、 $t_n = n\Delta t$ とし、 $t'_n = t_n + \alpha\Delta t$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) とする。現時点では、 α の任意性を残しておく。また、離散化した Wiener 過程を以下のように定義する。TODO 上の日本語微妙そう

$$\hat{W}_{\Delta t}(t_n) := \sum_{m=0}^{n-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(t_m) \quad (4.47)$$

$$\hat{W}_{\Delta t}(t'_n) := \hat{W}_{\Delta t}(t_n) + \alpha \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) \quad (4.48)$$

ここで、どのように α を選ぶかの問題が生じる。普通の積分では、 $\Delta \rightarrow 0$ の極限をとれば、 α の値に関係なく一意に積分が定まる。しかし、Wiener 過程の積分では、 α の値によって積分結果が異なってしまう。これを見るために、 $f(t, \hat{W}(t)) = \hat{W}(t)$ としてみる。このとき、

$$\left\langle \int_0^\tau d\hat{W}(t) \hat{W}(t) \right\rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) \left(\hat{W}_{\Delta t}(t_n) + \alpha \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) \right) = \alpha\tau \quad (4.49)$$

となり、明らかに α の値によって積分結果が異なる。^{*2}

^{*2} 第一項が消えることは、 $\hat{W}_{\Delta t}(t_n)$ が $\hat{\xi}_{\Delta t}(t_n)$ にの項を持たないことから従う。和の範囲を見よ。

この性質は、確率過程であることに起因するわけではなく、あくまでも特異性に起因することに注意する。例えば、以下のような決定論的な微分方程式を考えてみる。

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\delta(t-1) \quad (4.50)$$

初期条件 $x(0) = 1$ のもとで、デルタ関数の積には任意性が現れる。 $t = 1$ における積の取り扱いが時間発展に影響を与え、

$$\lim_{t \rightarrow 1} x(t)\delta(t-1) = (1-\alpha) \left[\lim_{t \rightarrow 1-0} x(t) \right] \delta(t-1) + \alpha \left[\lim_{t \rightarrow 1+0} x(t) \right] \delta(t-1) \quad (4.51)$$

となる。これを解くことで、

$$x(t) = 1 + \frac{1}{1-\alpha} \quad (t > 1) \quad (4.52)$$

となり、 α の値によって解が異なることがわかる。

Ito 積と Stratonovich 積

二つの重要な積のルールを導入する。初めは $\alpha = 0$ に対応するものを考える。これは Ito 積と呼ばれる。

Def.Ito 積

伊藤積分 (Itô 積分) は、積の記号 “ \cdot ” を用いて以下のように定義される：

$$\int_0^\tau d\hat{W}(t) \cdot f(t, \hat{W}(t)) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t_n)) \quad (4.53)$$

また、 $\alpha = 1/2$ に対応するものを考える。これは Stratonovich 積と呼ばれる。

Def.Stratonovich 積

Stratonovich 積分は、積の記号 “ \circ ” を用いて、以下のように定義される：

$$\int_0^\tau d\hat{W}(t) \circ f(t, \hat{W}(t)) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f\left(t_n, \hat{W}_{\Delta t}\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}\right)\right) \quad (4.54)$$

Ito 積の定義は時間順序に重点を置いている。というのも、新しいノイズ $\hat{\xi}_{\Delta t}(t)$ が生成され、 f に段階的に作用する。ただし、 $\hat{\xi}_{\Delta t}(t)$ はこのノイズが生成される直前の関数に作用する。言い換えれば、Ito 積によって与えられる確率過程 $\hat{X}(t) = \int_0^\tau d\hat{W}(t) \cdot f(t, \hat{W}(t))$ はマルチンゲールである。^{*3} 一方、Stratonovich 積は平均に重点を置いている。すなわち、ノイズ $\hat{\xi}_{\Delta t}(t)$ は、 f に作用する直前と直後の平均に作用する。

^{*3} 期待値が時間に依存しないということ。

Ito 積と Stratonovich 積は相互変換可能である。実際、

$$\hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f\left(t_n, \hat{W}_{\Delta t}\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}\right)\right) \quad (4.55)$$

$$= \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f\left(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t_n) + \frac{1}{2}\hat{\xi}_{\Delta t}(t_n)\right) \quad (4.56)$$

$$= \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) \left[f(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t_n)) + \frac{1}{2}\hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) \frac{\partial f(t_n, W)}{\partial W} \Big|_{W=\hat{W}_{\Delta t}(t_n)} + o(\Delta t) \right] \quad (4.57)$$

$$= \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t_n)) + \frac{1}{2}\hat{\xi}_{\Delta t}^2(t_n) \frac{\partial f(t_n, W)}{\partial W} \Big|_{W=\hat{W}_{\Delta t}(t_n)} + o(\Delta t) \quad (4.58)$$

$$= \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t_n)) + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial f(t_n, W)}{\partial W} \Big|_{W=\hat{W}_{\Delta t}(t_n)} + o(\Delta t) \quad (4.59)$$

$\Delta t \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ の極限を取ると、

$$d\hat{W}(t) \circ f(t, \hat{W}(t)) = d\hat{W}(t) \cdot f(t, \hat{W}(t)) + \frac{1}{2}dt \frac{\partial f(t, W)}{\partial W} \Big|_{W=\hat{W}(t)} \quad (4.60)$$

となる。

hoge

Thm.Ito 積の非予測性

$$\left\langle \int_0^\tau d\hat{W}(t) \cdot f(t, \hat{W}(t)) \right\rangle = \int_0^\tau \left\langle d\hat{W}(t) \right\rangle \left\langle f(t, \hat{W}(t)) \right\rangle = 0 \quad (4.61)$$

Prf.

hoge

□

Thm.Stratonovich 積における連鎖律

$$df(t, \hat{W}(t)) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \hat{W}} \circ d\hat{W}(t) \quad (4.62)$$

これは、正確には以下の意味である。

$$\begin{aligned} \Delta f(t, \hat{W}(t)) &:= f(t + \Delta t, \hat{W}_{\Delta t}(t) + \hat{\xi}_{\Delta t}(t)) - f(t, \hat{W}_{\Delta t}(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial \hat{W}_{\Delta t}} \Big|_{\hat{W}=\hat{W}_{\Delta t}(t)+\hat{\xi}_{\Delta t}(t)/2} \hat{\xi}_{\Delta t}(t) + o(\Delta t) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Prf.

$$\begin{aligned}
f(t + \Delta t, \hat{W}_{\Delta t}(t) + \hat{\xi}_{\Delta t}(t)) &= f + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial \hat{W}_{\Delta t}} \Big|_{\hat{W}_{\Delta t}(t)} \hat{\xi}_{\Delta t}(t) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \hat{W}_{\Delta t}^2} \Big|_{\hat{W}_{\Delta t}(t)} \hat{\xi}_{\Delta t}(t)^2 + o(\Delta t)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$= f + \frac{\partial f}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial f}{\partial \hat{W}_{\Delta t}} \Big|_{\hat{W}_{\Delta t}(t) + \hat{\xi}_{\Delta t}(t)/2} \hat{\xi}_{\Delta t}(t) + o(\Delta t) \tag{4.65}$$

□

一方で、Stratonovich 積分は非予測性を満たさない。

$$\left\langle \int_0^\tau d\hat{W}(t) \circ f(t, \hat{W}(t)) \right\rangle \neq 0 \tag{4.66}$$

また、Ito 積は連鎖律を満たさない。

$$df(t, \hat{W}(t)) \neq \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial \hat{W}} \cdot d\hat{W}(t) \tag{4.67}$$

Ito 積分への連鎖律の拡張は Ito の補題と呼ばれ、後の章で述べる。