B4 ゼミ #11

大上由人

2025 年 10 月 10 日

1 揺動散逸定理

記号を思い出しておく。

- $\hat{J}_X$: 示量変数 X のカレント $\frac{\partial X}{\partial t}$
- Π_X: X の共役変数
- $\Delta\Pi_X = \Pi_X^2 - \Pi_X^1$: bath1 と bath2 の Π_X の差
- $\hat{\mathcal{J}} = \int_0^\tau dt \hat{J}(t)$: 時間積分されたカレント
- $\langle\cdot\rangle$: $\Delta\Pi_X$ により駆動される非平衡定常状態でのアンサンブル平均
- $\langle\cdot\rangle_0$: 平衡状態におけるアンサンブル平均

1.1 高次における関係

磁場 B が存在する下でのアンサンブル平均を $\langle\cdot\rangle^B$ と表す。このもとで、IFT から導かれる高次の関係を示す。

Thm. 時間積分されたカレントの高次の関係

磁場中の $\hat{\mathcal{J}}$ は、以下の高次における関係を満たす:

$$\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X}\left\langle\hat{\mathcal{J}}^2\right\rangle^+\Big|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2}\left\langle\hat{\mathcal{J}}\right\rangle^+\Big|_{\Delta\Pi_X=0} \tag{1}$$

ただし、$\langle\cdot\rangle^+ = \frac{1}{2}(\langle\cdot\rangle^B + \langle\cdot\rangle^{-B})$ である。

Prf

いま、

$$\hat{\sigma} = \Delta\Pi_X \hat{\mathcal{J}} \tag{2}$$

$$= \Delta\Pi_X \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \tag{3}$$

$$\langle A \rangle = \langle A \rangle_0 + \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \langle A \rangle \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \Delta\Pi_X + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Delta\Pi_X^2} \langle A \rangle \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \Delta\Pi_X^2 + O(\Delta\Pi_X^3) \tag{4}$$

であった。FDT を導出する途中の展開をより高次まで行うと、

$$1 = \left\langle e^{-\hat{\sigma}} \right\rangle = 1 - \left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle^B \Delta\Pi_X + \frac{1}{2} \left\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \right\rangle^B \Delta\Pi_X^2 - \frac{1}{6} \left\langle \hat{\mathcal{J}}^3 \right\rangle^B \Delta\Pi_X^3 + O(\Delta\Pi_X^4) \tag{5}$$

$$= 1 - \left(\left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle_0^B \Delta\Pi_X + \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle^B \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \Delta\Pi_X^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Delta\Pi_X^2} \left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle^B \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \Delta\Pi_X^3 \right) \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\left\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \right\rangle_0^B \Delta\Pi_X^2 + \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \left\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \right\rangle^B \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \Delta\Pi_X^3 \right) - \frac{1}{6} \left(\left\langle \hat{\mathcal{J}}^3 \right\rangle_0^B \Delta\Pi_X^3 \right) + O(\Delta\Pi_X^4) \tag{7}$$

となる。ここで、$\hat{\mathcal{J}}$ は、

$$\hat{\mathcal{J}} = \int_0^\tau dt \hat{J}(t) \tag{8}$$

である。同様の手順を踏むことで、B を $-B$ としたときの展開は、

$$1 = \left\langle e^{-\hat{\sigma}} \right\rangle = 1 - \left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle^{-B} \Delta\Pi_X + \frac{1}{2} \left\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \right\rangle^{-B} \Delta\Pi_X^2 - \frac{1}{6} \left\langle \hat{\mathcal{J}}^3 \right\rangle^{-B} \Delta\Pi_X^3 + O(\Delta\Pi_X^4) \tag{9}$$

$$= 1 - \left(\left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle_0^{-B} \Delta\Pi_X + \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle^{-B} \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \Delta\Pi_X^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Delta\Pi_X^2} \left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle^{-B} \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \Delta\Pi_X^3 \right) \tag{10}$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\left\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \right\rangle_0^{-B} \Delta\Pi_X^2 + \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \left\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \right\rangle^{-B} \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \Delta\Pi_X^3 \right) - \frac{1}{6} \left(\left\langle \hat{\mathcal{J}}^3 \right\rangle_0^{-B} \Delta\Pi_X^3 \right) + O(\Delta\Pi_X^4) \tag{11}$$

となる。

ここで、平衡状態の時間反転対称性から、

$$\left\langle \hat{\mathcal{J}}^3 \right\rangle^B = - \left\langle \hat{\mathcal{J}}^3 \right\rangle^{-B} \tag{12}$$

が成り立つことを用いて、上の二式を両辺足して、$\Delta\Pi_X$ の三次の項を比較すると、

$$0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Delta\Pi_X^2} \left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle^B \Big|_{\Delta\Pi_X=0} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \Delta\Pi_X^2} \left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle^{-B} \Big|_{\Delta\Pi_X=0}$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \left\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \right\rangle^B \Big|_{\Delta\Pi_X=0} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \left\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \right\rangle^{-B} \Big|_{\Delta\Pi_X=0} - \frac{1}{6} \left\langle \hat{\mathcal{J}}^3 \right\rangle_0^B - \frac{1}{6} \left\langle \hat{\mathcal{J}}^3 \right\rangle_0^{-B}$$

すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X}\left\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \right\rangle^B \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} + \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X}\left\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \right\rangle^{-B} \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial \Delta\Pi_X^2}\left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle^B \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} + \frac{\partial^2}{\partial \Delta\Pi_X^2}\left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle^{-B} \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} \tag{13}$$

を得る。新たに、$\langle\cdot\rangle^+ = \frac{1}{2}(\langle\cdot\rangle^B + \langle\cdot\rangle^{-B})$ と定義すると、

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X}\left\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \right\rangle^+ \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial \Delta\Pi_X^2}\left\langle \hat{\mathcal{J}} \right\rangle^+ \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} \tag{14}$$

が成り立つ。 □

また、上の定理の系として、以下も成り立つ。

Thm. 高次における関係 (2)

IFT を満たす系について、以下が成り立つ:

$$2\frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X}\int_0^\infty \mathrm{d}t \left\langle \Delta\hat{J}(t)\Delta\hat{J}(0) \right\rangle^+ \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial \Delta\Pi_X^2}\left\langle \Delta\hat{J} \right\rangle^+ \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} \tag{15}$$

Prf

上の定理で $\hat{\mathcal{J}}$ を J を用いて表すことで、

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X}\left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t \hat{J}(t')\hat{J}(t) \right\rangle^+ \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial \Delta\Pi_X^2}\left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t \hat{J}(t) \right\rangle^+ \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} \tag{16}$$

が成り立つ。ここで、左辺の被積分関数について、$\Delta\hat{J} = \hat{J} - \left\langle \hat{J} \right\rangle$ として展開すると、[*1]

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t \hat{J}(t')\hat{J}(t) \right\rangle^+ &= \left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t (\Delta\hat{J}(t') + J(t'))(\Delta\hat{J}(t) + J(t)) \right\rangle^+ &(17)\\
&= \left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t \Delta\hat{J}(t')\Delta\hat{J}(t) \right\rangle^+ &(18)\\
&\quad + 2\left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t \Delta\hat{J}(t')J(t) \right\rangle^+ &(19)\\
&\quad + \left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t J(t')J(t) \right\rangle^+ &(20)
\end{aligned}$$

となる。ここで、第二項について、

$$\begin{aligned}
2\left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t \Delta\hat{J}(t')J(t) \right\rangle^+ &= 2\int_0^\tau \int_0^\tau \mathrm{d}t'\mathrm{d}t J(t) \left\langle \Delta\hat{J}(t') \right\rangle^+ &(21)\\
&= 0 &(22)
\end{aligned}$$

[*1] 以下 $\left\langle \hat{J} \right\rangle = J$ と書くことにする。

である。というのも、$\left\langle \Delta\hat{J}(t') \right\rangle^+ = 0$ であるからである。よって、

$$\left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t \hat{J}(t')\hat{J}(t) \right\rangle^+ = \left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t (\Delta\hat{J}(t') + J(t'))(\Delta\hat{J}(t) + J(t)) \right\rangle^+ \tag{23}$$

$$= \left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t \Delta\hat{J}(t')\Delta\hat{J}(t) \right\rangle^+ \tag{24}$$

$$+ \left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t J(t')J(t) \right\rangle^+ \tag{25}$$

となる。ここで、この最後の式の第二項は、$\Delta\Pi_X = 0$ で、$\Delta\Pi_X$ について微分することで 0 になる。これは、$\left\langle \hat{\mathcal{J}}^2 \right\rangle$ が、$\Delta\Pi_X$ についての偶関数であることからわかる。
したがって、

$$\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X} \left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t' \int_0^\tau \mathrm{d}t \Delta\hat{J}(t')\Delta\hat{J}(t) \right\rangle^+ \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2} \left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}t \hat{J}(t) \right\rangle^+ |_{\Delta\Pi_X=0} \tag{26}$$

が成り立つ。ここで、両辺 $\frac{1}{\tau}$ をかけ、$\tau \to \infty$ の極限を取ると、前回のゼミと同様の変形をすることで、

$$2\frac{\partial}{\partial\Delta\Pi_X} \int_0^\infty \mathrm{d}t \left\langle \Delta\hat{J}(t)\Delta\hat{J}(0) \right\rangle^+ \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} = \frac{\partial^2}{\partial\Delta\Pi_X^2} \left\langle \Delta\hat{J} \right\rangle^+ \bigg|_{\Delta\Pi_X=0} \tag{27}$$

を得る。 □

1.2 従来の線形応答理論との違い

従来の線形応答理論では、カレントはバルク、すなわち系で測定されるのに対し、今回は、熱浴側で測定される。考える系によってはこの二つの定義の違いが効いてくる場合があるらしく、前者は巨視的な導体に、後者はメゾスコピック伝導に有効らしい。(多分系のサイズが大事)

また、従来の線形応答理論における久保公式を得るためには別の定式化が必要となる。この場合は、単一の熱浴と外力 $F(x,t)$ を持つ系を考え、エントロピー生成を

$$\hat{\sigma} = -\beta \int_0^\tau dt \int \mathrm{d}x\, F(x,t)\hat{j}(x,t) \tag{28}$$

と定義すればよい。ここでは詳細な導出は追わない。

2 Onsager の相反定理

二つの示量変数 X と Y をもつ系を考える。対応する流れをそれぞれ J_X と J_Y とする。系が四つの bath と接触しているとする。そのうち二つが、Π_X に対応するものとし、残り二つが、Π_Y に対応するものとする。このとき、一般に、もし Π_X が 0 でないならば、$\Pi_Y = 0$ であっても、$J_Y = 0$ であるとは限らない。

Def.Onsager 行列

Onsager 行列 L は、

$$L_{ij} = \left.\frac{\partial J_i}{\partial \Delta\Pi_j}\right|_{\Delta\Pi_X=\Delta\Pi_Y=0} \qquad (i,j=X,Y) \tag{29}$$

で定義される。

このとき、

$$J_X = L_{XX}\Delta\Pi_X + L_{XY}\Delta\Pi_Y \tag{30}$$

$$J_Y = L_{YX}\Delta\Pi_X + L_{YY}\Delta\Pi_Y \tag{31}$$

と書ける。

Thm.Onsager の相反定理

時間反転対称性を破るような場がないとする。このとき、$\Delta\Pi_Y$ に対する J_X の応答は、$\Delta\Pi_X$ に対する J_Y の応答と等しい。すなわち、

$$L_{XY} = L_{YX} \tag{32}$$

が成り立つ。

Prf

DFT を用いることで、

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle &= \int \mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_X \int \mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_Y \hat{\mathcal{J}}_X P(\hat{\mathcal{J}}_X, \hat{\mathcal{J}}_Y) &(33)\\
&= \int \mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_X \int \mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_Y (\hat{\mathcal{J}}_X P(-\hat{\mathcal{J}}_X, -\hat{\mathcal{J}}_Y)) \exp\Big(\hat{\mathcal{J}}_X \Delta\Pi_X + \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta\Pi_Y\Big) &(34)\\
&= -\int \mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_X \int \mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_Y \hat{\mathcal{J}}_X P(\hat{\mathcal{J}}_X, \hat{\mathcal{J}}_Y) \exp\Big(-\hat{\mathcal{J}}_X \Delta\Pi_X - \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta\Pi_Y\Big) &(35)\\
&= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\langle \hat{\mathcal{J}}_X (-\hat{\mathcal{J}}_X \Delta\Pi_X - \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta\Pi_Y)^{k-1} \right\rangle}{(k-1)!} &(36)
\end{aligned}$$

が得られる (二行目で IFT, 最後はテイラー展開)。ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle}{\partial \Delta\Pi_Y} &= -\frac{\partial \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle}{\partial \Delta\Pi_Y} - \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_Y} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left\langle \hat{\mathcal{J}}_X (-\hat{\mathcal{J}}_X \Delta\Pi_X - \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta\Pi_Y)^{k-1} \right\rangle}{(k-1)!} &(37)\\
&= -\frac{\partial \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle}{\partial \Delta\Pi_Y} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y (-\hat{\mathcal{J}}_X \Delta\Pi_X - \hat{\mathcal{J}}_Y \Delta\Pi_Y)^{k-2} \right\rangle}{(k-2)!} &(38)
\end{aligned}$$

となる。$\Delta\Pi_Y$ の 0 次の項を比較することで、

$$\frac{\partial \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle}{\partial \Delta\Pi_Y} = -\frac{\partial \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle}{\partial \Delta\Pi_Y} + \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle_0 \tag{39}$$

を得る。整理して、

$$2\frac{\partial\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle}{\partial\Delta\Pi_Y}=\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle_0 \tag{40}$$

を得る。同様にして、

$$2\frac{\partial\left\langle\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle}{\partial\Delta\Pi_X}=\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle_0 \tag{41}$$

を得る。これらを比較することで、

$$L_{XY}=L_{YX} \tag{42}$$

を得る。 □

Thm. 時間反転対称性を破る場があるときの Onsager の相反定理

例えば、磁場中の系を考えると、Onsager の相反定理は以下のように拡張される:

$$L_{XY}(B)=L_{YX}(-B) \tag{43}$$

Prf

磁場が時間反転対称性を破ることを考えると、DFT は、

$$P(\hat{\mathcal{J}}_X,\hat{\mathcal{J}}_Y;B)=P(-\hat{\mathcal{J}}_X,-\hat{\mathcal{J}}_Y;-B)\exp\Big(\hat{\mathcal{J}}_X\Delta\Pi_X+\hat{\mathcal{J}}_Y\Delta\Pi_Y\Big) \tag{44}$$

となる。このとき、

$$L_{XY}(B)+L_{XY}(-B)=\frac{1}{\tau}\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y\right\rangle_0^{-B} \tag{45}$$

となる。

(45) の証明

上で証明した Onsager の相反定理の証明を参考にすると、

$$\begin{aligned}\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle^B&=\int\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_X\int\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_Y\,\hat{\mathcal{J}}_X P(\hat{\mathcal{J}}_X,\hat{\mathcal{J}}_Y;B) &(46)\\&=\int\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_X\int\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_Y\,\hat{\mathcal{J}}_X P(-\hat{\mathcal{J}}_X,-\hat{\mathcal{J}}_Y;-B)\exp\Big(\hat{\mathcal{J}}_X\Delta\Pi_X+\hat{\mathcal{J}}_Y\Delta\Pi_Y\Big) &(47)\\&=-\int\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_X\int\mathrm{d}\hat{\mathcal{J}}_Y\,\hat{\mathcal{J}}_X P(\hat{\mathcal{J}}_X,\hat{\mathcal{J}}_Y;-B)\exp\Big(-\hat{\mathcal{J}}_X\Delta\Pi_X-\hat{\mathcal{J}}_Y\Delta\Pi_Y\Big) &(48)\\&=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X(-\hat{\mathcal{J}}_X\Delta\Pi_X-\hat{\mathcal{J}}_Y\Delta\Pi_Y)^{k-1}\right\rangle^{-B}}{(k-1)!} &(49)\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{\partial\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle^B}{\partial\Delta\Pi_Y}=-\frac{\partial\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\right\rangle^{-B}}{\partial\Delta\Pi_Y}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\left\langle\hat{\mathcal{J}}_X\hat{\mathcal{J}}_Y(-\hat{\mathcal{J}}_X\Delta\Pi_X-\hat{\mathcal{J}}_Y\Delta\Pi_Y)^{k-2}\right\rangle^{-B}}{(k-2)!} \tag{50}$$

となる。$\Delta\Pi_Y$ の 0 次の項を比較することで、

$$\frac{\partial \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle^{B}}{\partial \Delta\Pi_Y} + \frac{\partial \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle^{-B}}{\partial \Delta\Pi_Y} = \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle_0^{-B} \tag{51}$$

を得る。したがって、

$$L_{XY}(B) + L_{XY}(-B) = \frac{1}{\tau} \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle_0^{-B} \tag{52}$$

を得る。

また、

$$L_{XY}(-B) + L_{YX}(-B) = \frac{1}{\tau} \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle_0^{-B} \tag{53}$$

となる。

(53) 式の証明

磁場が $-B$ のときの系について、IFT を用いることにより、

$$\begin{aligned} 1 = \left\langle e^{-\hat{\sigma}} \right\rangle^{-B} &= \langle \exp(-\mathcal{J}_X \Delta\Pi_X - \mathcal{J}_Y \Delta\Pi_Y) \rangle^{-B} && (54) \\ &= 1 - \langle \mathcal{J}_X \rangle^{-B} \Delta\Pi_X - \langle \mathcal{J}_Y \rangle^{-B} \Delta\Pi_Y && (55) \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \mathcal{J}_X^2 \rangle^{-B} \Delta\Pi_X^2 + \langle \mathcal{J}_X \mathcal{J}_Y \rangle^{-B} \Delta\Pi_X \Delta\Pi_Y && (56) \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle \mathcal{J}_Y^2 \rangle^{-B} \Delta\Pi_Y^2 + O(\Delta\Pi^3) && (57) \end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$\left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle^{-B} = \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle_0 + \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \Delta\Pi_X + \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_Y} \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle \Big|_{\Delta\Pi_Y=0} \Delta\Pi_Y + O(\Delta\Pi^2) \tag{58}$$

と、

$$\left\langle \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle^{-B} = \left\langle \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle_0 + \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \left\langle \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle \Big|_{\Delta\Pi_X=0} \Delta\Pi_X + \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_Y} \left\langle \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle \Big|_{\Delta\Pi_Y=0} \Delta\Pi_Y + O(\Delta\Pi^2) \tag{59}$$

および、

$$\left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle^{-B} = \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle_0^{-B} + O(\Delta\Pi) \tag{60}$$

であるから、(76) 式に代入して、$\Delta\Pi_X \Delta\Pi_Y$ の項を比較することで、

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_Y} \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \right\rangle^{-B} \Big|_{\Delta\Pi_X=0} + \frac{\partial}{\partial \Delta\Pi_X} \left\langle \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle^{-B} \Big|_{\Delta\Pi_Y=0} = \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle_0^{-B} \tag{61}$$

を得る。よって、

$$L_{XY}(-B) + L_{YX}(-B) = \frac{1}{\tau} \left\langle \hat{\mathcal{J}}_X \hat{\mathcal{J}}_Y \right\rangle_0^{-B} \tag{62}$$

を得る。

この二式から、

$$L_{XY}(B) = L_{YX}(-B) \tag{63}$$

を得る。 □