# B4 ゼミ #5

大上由人

2025 年 5 月 19 日

## 4　連続空間における確率過程

前節では、離散状態に対する確率過程について述べたが、今回は連続状態の確率過程を考える。

### 4.1　数学的基礎

#### 4.1.1　Wiener 過程

標準的な連続空間の Markov 過程として、Wiener 過程が知られている。

**Def.Wiener 過程**

Wiener 過程 $\hat{W}(t)$ は、

$$P(\hat{W}(t+\Delta t) = x \mid \hat{W}(t) = x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2\Delta t}\right) \tag{4.1}$$

$$P(x,0) = \delta(x) \tag{4.2}$$

を満たす確率過程である。

Wiener 過程が確かに存在することを直感的に確かめる。一次元格子におけるランダムウォークを考える。格子定数を $a$、時間間隔を $\Delta\tau$ とする。各回のステップでは、確率 1/2 で右に $a$、1/2 で左に $a$ 移動するものとする。すなわち、

$$T_{x\to x+a} = T_{x\to x-a} = \frac{1}{2} \tag{4.3}$$

とする。初期条件を $P(x,0)=\delta_{x,0}$ とすると、時刻 $t$ における $x$ の期待値は常に 0 である。このとき、拡散定数は、

$$
\begin{aligned}
D &:= \frac{\mathrm{d}\langle x^2\rangle}{\mathrm{d}t} && (4.4)\\
&= \sum_x \frac{x^2 P(x,t+\Delta t)-P(x,t)}{\Delta t} && (4.5)\\
&= \sum_x \frac{x^2}{\Delta t}\left[P_{x-a\to x}P(x-a,t)+P_{x+a\to x}P(x+a,t)-P(x,t)\right] && (4.6)\\
&= \sum_x \frac{x^2}{\Delta t}\left[\frac{1}{2}P(x-a,t)+\frac{1}{2}P(x+a,t)-P(x,t)\right] && (4.7)\\
&= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{2}\sum_x x^2P(x-a,t)+\frac{1}{2}\sum_x x^2P(x+a,t)-\sum_x x^2P(x,t)\right] && (4.8)\\
&= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{2}\sum_{x'}(x'+a)^2P(x',t)+\frac{1}{2}\sum_{x''}(x''-a)^2P(x'',t)-\sum_x x^2P(x,t)\right] && (4.9)\\
&= \frac{1}{\Delta t}\sum_x\left[\frac{(x-a)^2+(x+a)^2}{2}-x^2\right]P(x,t) && (4.10)\\
&= \frac{a^2}{\Delta t} && (4.11)
\end{aligned}
$$

このとき、確率分布は中心極限定理によりガウス分布に収束する。

**Recall. 中心極限定理**

$n$ 個の独立同一分布の確率変数 $X_i$ の平均値は、$n\to\infty$ で、平均 $\mu$、分散 $\sigma^2/n$ の正規分布に従う。ただし、$\mu$ は $X_i$ の平均、$\sigma^2$ は $X_i$ の分散である。

同じことであるが、$S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ とすると、$S_n$ は平均 $\mu n$、分散 $\sigma^2 n$ の正規分布に従う。これを用いると、

$$
\begin{aligned}
P(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a^2 n}}\exp\left[-\frac{x^2}{2a^2n}\right] && (4.12)\\
&\because a^2/\Delta t=1,\ t=n\Delta t && (4.13)\\
&\Rightarrow a^2n=t && (4.14)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left[-\frac{x^2}{2t}\right] && (4.15)
\end{aligned}
$$

が得られる。また,

$$
\begin{aligned}
P(x,t+\Delta t|x',t) &= P(x,\Delta t|x',0) \quad (\text{Markov 性}) && (4.16)\\
&= P(x-x',\Delta t|0,0) \quad (\text{並進不変性}) && (4.17)\\
&= \int \mathrm{d}x''\ P(x-x',\Delta t|x'',0)\,\delta(x'') && (4.18)\\
&= \int \mathrm{d}x''\ P(x-x',\Delta t|x'',0)\,P(x'',0) \quad (\text{初期条件}) && (4.19)\\
&= P(x-x',\Delta t) && (4.20)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\exp\left[-\frac{(x-x')^2}{2\Delta t}\right] && (4.21)
\end{aligned}
$$

となり、Wiener 過程の定義式と一致する。上の構成から、Wiener 過程は、ランダムウォークを粗視化したときに得られるものであることがわかる。

Wiener 過程の極限として白色 Gauss ノイズを導入する。

**Def. 白色 Gauss ノイズ**

白色 Gauss ノイズは、以下のように与えられる。

$$
\hat{\xi}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\hat{W}(t+\Delta t)-\hat{W}(t)}{\Delta t} \tag{4.22}
$$

また、後の便宜のため、時間 $\Delta t$ の間で離散化した白色ガウスノイズを

$$
\hat{\xi}_{\Delta t}(t) \coloneqq \hat{W}(t+\Delta t)-\hat{W}(t) \tag{4.23}
$$

と定義する。このとき、ノイズの定義から

$$
\begin{aligned}
\left\langle \hat{\xi}(t)\right\rangle &= 0 && (4.24)\\
\left\langle \hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t')\right\rangle &= 0 \quad (t\neq t') && (4.25)\\
& && (4.26)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。第一式は、Wiener 過程の期待値が 0 であることと期待値の線形性から従う。また、Markov 性により時間相関がないことから第二式が成り立つ。

また、Wiener 過程を

$$
\hat{W}(\tau) = \int_0^\tau \mathrm{d}t\,\hat{\xi}(t) \tag{4.27}
$$

と復元できる。上記の関係を、正式に、

$$
\mathrm{d}\hat{W}(t) = \hat{\xi}(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.28}
$$

(4.25) より、より、$\left\langle\hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t')\right\rangle = k\delta(t-t')$ と仮定する。以下、この係数 $k$ の値を決める。

$$\begin{aligned}
\left\langle\hat{W}^2(\tau)\right\rangle &= \int \mathrm{d}x\, x^2 P(\hat{W}(\tau)=x) && (4.29)\\
&= \int \mathrm{d}x\, x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{2\tau}} && (4.30)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{(2\tau)^3\pi} && (4.31)\\
&= \tau && (4.32)
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
\left\langle\hat{W}^2(\tau)\right\rangle &= \int_0^\tau \mathrm{d}t \int_0^\tau \mathrm{d}t' \left\langle\hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t')\right\rangle && (4.33)\\
&= \int_0^\tau \mathrm{d}t \int_0^\tau \mathrm{d}t'\, k\delta(t-t') && (4.34)\\
&= k\tau && (4.35)
\end{aligned}$$

よって、$k=1$ となる。すなわち、

$$\left\langle\hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t')\right\rangle = \delta(t-t') \tag{4.36}$$

が成り立つ。

特に、Wiener 過程の二乗はアンサンブル平均をとることなく

$$(\mathrm{d}\hat{W}(t))^2 = \mathrm{d}t \tag{4.37}$$

を満たす。正確には、$(\mathrm{d}\hat{W}(t))^2$ による積分は、二乗平均の極限の意味で、通常の時間積分と同等である。[*1]

[*1] $\lim_{\Delta t\to 0} g_{\Delta t} = g$ が平均二乗収束の意味で成り立つとは、

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle(g_{\Delta t}-g)^2\right\rangle = 0$$

が成り立つことをいう。

**Thm.Ito 則**

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle\left(\sum_{n=0}^{N-1}\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^2 f(n\Delta t)-\int_0^{\tau}\mathrm{d}t\,f(t)\right)^2\right\rangle=0, \tag{4.38}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle\left(\sum_{n=0}^{N-1}\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)\Delta t f(n\Delta t)\right)^2\right\rangle=0, \tag{4.39}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle\left(\sum_{n=0}^{N-1}\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^k f(n\Delta t)\right)^2\right\rangle=0, \tag{4.40}$$

ここで $N:=\tau/\Delta t$, $k\geq 3$ とする。これらの関係式は形式的には次のように書ける。

$$(\mathrm{d}\hat{W}(t))^2=\mathrm{d}t\,, \tag{4.41}$$

$$\mathrm{d}\hat{W}(t)\,\mathrm{d}t=(\mathrm{d}\hat{W}(t))^k=0. \tag{4.42}$$

**Prf.**

$\xi_{\Delta t}$ の 4 次のモーメントは、

$$\begin{aligned}
\left\langle\xi_{\Delta t}^4\right\rangle &= \left\langle\left(\hat{W}(t+\Delta t)-\hat{W}(t)\right)^4\right\rangle \\
&= \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\,(x'-x)^4 P(\hat{W}(t+\Delta t)=x',\hat{W}(t)=x) \\
&= \iint \mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'\,(x'-x)^4 P(\hat{W}(t+\Delta t)=x'|\hat{W}(t)=x)P(\hat{W}(t)=x) \\
&\quad (\because \omega\equiv x'-x,\ \mathrm{d}x'=\mathrm{d}\omega) \\
&= \int \mathrm{d}x\int \mathrm{d}\omega\ \omega^4\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}e^{-\omega^2/(2\Delta t)}P(\hat{W}(t)=x) \\
&= \int \mathrm{d}\omega\ \omega^4\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}e^{-\omega^2/(2\Delta t)} \quad (\because \text{規格化}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\cdot\frac{3}{4}\sqrt{(2\Delta t)^5\pi} \quad (\because \text{ガウス積分}) \\
&= 3\Delta t^2
\end{aligned} \tag{4.43}$$

また、$\xi_{\Delta t}$ の 2 次のモーメントは、

$$\begin{aligned}
\left\langle\xi_{\Delta t}^2\right\rangle &= \int \mathrm{d}\omega\ \omega^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}e^{-\omega^2/(2\Delta t)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{(2\Delta t)^3\pi} \\
&= \Delta t
\end{aligned} \tag{4.44}$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\left\langle \left(\xi_{\Delta t}^2 - \Delta t\right)^2 \right\rangle &= \left\langle \xi_{\Delta t}^4 - 2\xi_{\Delta t}^2 \Delta t + (\Delta t)^2 \right\rangle \\
&= 3(\Delta t)^2 - 2(\Delta t)^2 + (\Delta t)^2 \\
&= 2(\Delta t)^2 \qquad (4.45)
\end{aligned}
$$

また、

$$
D_{\Delta t} := \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t)\Delta t - \int_0^\tau \mathrm{d}t\, f(t) \qquad (4.46)
$$

とする。このとき、

$$
\lim_{\Delta t\to 0} \left\langle \left( \sum_{n=0}^{N-1} (\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t))^2 f(n\Delta t) - \int_0^\tau \mathrm{d}t\, f(t) \right)^2 \right\rangle \qquad (4.47)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t\to 0} \left\langle \left( \sum_{n=0}^{N-1} \left( \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^2 - \Delta t \right) f(n\Delta t) + D_{\Delta t} \right)^2 \right\rangle \\
&\quad (\because \langle \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)\hat{\xi}_{\Delta t}(n'\Delta t) \rangle = 0 \quad (n \neq n')) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{n=0}^{N-1} \left\langle \left( \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^2 - \Delta t \right)^2 \right\rangle f(n\Delta t)^2 + O(D_{\Delta t}) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} 2(\Delta t)^2 \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t)^2 + O(D_{\Delta t}) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} O(\Delta t) + O(D_{\Delta t}) \\
&= 0 \qquad (4.48)
\end{aligned}
$$

がいえる。[*2]

また、同様にして、

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0} \left\langle \left( \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)\Delta t f(n\Delta t) \right)^2 \right\rangle &= \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{n=0}^{N-1} \left\langle \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^2 \right\rangle (\Delta t)^2 f(n\Delta t)^2 \qquad (4.49) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} O(\Delta t^2) \qquad (4.50) \\
&= 0 \qquad (4.51)
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0} \left\langle \left( \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^k f(n\Delta t) \right)^2 \right\rangle &= \lim_{\Delta t\to 0} \sum_{n=0}^{N-1} \left\langle \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^k \right\rangle f(n\Delta t)^2 \qquad (4.52) \\
&= \lim_{\Delta t\to 0} O(\Delta t^{k/2-1}) \qquad (4.53) \\
&= 0 \qquad (4.54)
\end{aligned}
$$

---

[*2] $N\Delta t = \tau$ を用いた。

が成り立つ。 $\square$

#### 4.1.2 確率微分方程式と確率積分

**特異点**

Wiener 過程における微分や積分について考える。Wiener 過程はほとんどいたるところで特異点を持つため、取り扱いに注意が必要である。$f(t, \hat{W}(t))$ のような、Wiener 過程に陽に依存する量を考える。このとき、$f(t, \hat{W}(t))$ の $\hat{W}(t)$ に関する積分は以下のように定義される。

$$\int_0^\tau \mathrm{d}\hat{W}(t)\ f(t, \hat{W}(t)) := \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t'_n)) \tag{4.55}$$

ここで、$t_n = n\Delta t$ とし、$t'_n = t_n + \alpha \Delta t \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$ とする。現時点では、$\alpha$ の任意性を残しておく。また、離散化した Wiener 過程を以下のように定義する。

$$\hat{W}_{\Delta t}(t_n) := \sum_{m=0}^{n-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(t_m) \tag{4.56}$$

$$\hat{W}_{\Delta t}(t'_n) := \hat{W}_{\Delta t}(t_n) + \alpha \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) \tag{4.57}$$

ここで、どのように $\alpha$ を選ぶかの問題が生じる。普通の積分では、$\Delta t \to 0$ の極限をとれば、$\alpha$ の値に関係なく一意に積分が定まる。しかし、Wiener 過程の積分では、$\alpha$ の値によって積分結果が異なってしまう。これを見るために、$f(t, \hat{W}(t)) = \hat{W}(t)$ としてみる。このとき、

$$\left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}\hat{W}(t)\, \hat{W}(t) \right\rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} \left\langle \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) \left( \hat{W}_{\Delta t}(t_n) + \alpha \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) \right) \right\rangle = \alpha \tau \tag{4.58}$$

となり、明らかに $\alpha$ の値によって積分結果が異なる。[*3]

この性質は、確率過程であることに起因するわけではなく、あくまでも特異性に起因することに注意する。例えば、以下のような決定論的な微分方程式を考えてみる。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(t)\delta(t-1) \tag{4.59}$$

初期条件 $x(0) = 1$ のもとで、デルタ関数の積には任意性が現れる。$t = 1$ における積の取り扱いが時間発展に影響を与え、

$$\lim_{t \to 1} x(t)\delta(t-1) = (1-\alpha) \left[ \lim_{t \to 1-0} x(t) \right] \delta(t-1) + \alpha \left[ \lim_{t \to 1+0} x(t) \right] \delta(t-1) \tag{4.60}$$

[*3] 第一項が消えることは、$\hat{W}_{\Delta t}(t_n)$ が $\hat{\xi}_{\Delta t}(t_n)$ にの項を持たないことから従う。和の範囲を見よ。

となる。これを解くことで、

$$x(t) = 1 + \frac{1}{1-\alpha} \quad (t > 1) \tag{4.61}$$

となり、$\alpha$ の値によって解が異なることがわかる。

#### Ito 積と Stratonovich 積

二つの重要な積のルールを導入する。すなわち、$\alpha$ の値を定めてみる。初めは $\alpha = 0$ に対応するものを考える。これは Ito 積と呼ばれる。

**Def.Ito 積**

伊藤積分（Itô 積分）は、積の記号 “$\cdot$” を用いて以下のように定義される。

$$\int_0^\tau \mathrm{d}\hat{W}(t) \cdot f(t, \hat{W}(t)) := \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t_n)) \tag{4.62}$$

また、$\alpha = 1/2$ に対応するものを考える。これは Stratonovich 積と呼ばれる。

**Def.Stratonovich 積**

Stratonovich 積分は、積の記号 “$\circ$” を用いて、以下のように定義される。

$$\int_0^\tau \mathrm{d}\hat{W}(t) \circ f(t, \hat{W}(t)) := \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f\left(t_n, \hat{W}_{\Delta t}\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}\right)\right) \tag{4.63}$$

Ito 積の定義は時間順序に重点を置いている。というのも、新しいノイズ $\hat{\xi}_{\Delta t}(t)$ が生成され、$f$ に段階的に作用する。ただし、$\hat{\xi}_{\Delta t}(t)$ はこのノイズが生成される直前の関数に作用する。言い換えれば、Ito 積によって与えられる確率過程 $\hat{X}(t) = \int_0^\tau \mathrm{d}\hat{W}(t) \cdot f(t, \hat{W}(t))$ はマルチンゲールである。[*4]
一方、Stratonovich 積は平均に重点を置いている。すなわち、ノイズ $\hat{\xi}_{\Delta t}(t)$ は、$f$ に作用する直前と直後の平均に作用する。

[*4] 期待値が時間に依存しないということ。

Ito 積と Stratonovich 積は相互変換可能である。実際、

$$\hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f\left(t_n, \hat{W}_{\Delta t}\left(\frac{t_n + t_{n+1}}{2}\right)\right) \tag{4.64}$$

$$= \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f\left(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t_n) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial \hat{W}(t_n)}{\partial t}\right) \tag{4.65}$$

$$= \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f\left(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t_n) + \frac{1}{2}\hat{\xi}_{\Delta t}(t_n)\right) \tag{4.66}$$

$$= \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n)\left[f(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t_n)) + \frac{1}{2}\hat{\xi}_{\Delta t}(t_n)\left.\frac{\partial f(t_n, W)}{\partial W}\right|_{W=\hat{W}_{\Delta t}(t_n)} + o(\Delta t)\right] \tag{4.67}$$

$$= \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t_n)) + \frac{1}{2}\hat{\xi}^2_{\Delta t}(t_n)\left.\frac{\partial f(t_n, W)}{\partial W}\right|_{W=\hat{W}_{\Delta t}(t_n)} + o(\Delta t) \tag{4.68}$$

$$= \hat{\xi}_{\Delta t}(t_n) f(t_n, \hat{W}_{\Delta t}(t_n)) + \frac{1}{2}\Delta t\left.\frac{\partial f(t_n, W)}{\partial W}\right|_{W=\hat{W}_{\Delta t}(t_n)} + o(\Delta t) \tag{4.69}$$

$\Delta t \to 0,\ N \to \infty$ の極限を取ると、

$$\mathrm{d}\hat{W}(t) \circ f(t, \hat{W}(t)) = \mathrm{d}\hat{W}(t) \cdot f(t, \hat{W}(t)) + \frac{1}{2}\mathrm{d}t\left.\frac{\partial f(t, W)}{\partial W}\right|_{W=\hat{W}(t)} \tag{4.70}$$

となる。

Ito 積が持つ重要な性質として、非予測性が挙げられる。

**Thm.Ito 積の非予測性**

$$\left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}\hat{W}(t) \cdot f(t, \hat{W}(t)) \right\rangle = \int_0^\tau \left\langle \mathrm{d}\hat{W}(t) \right\rangle \left\langle f(t, \hat{W}(t)) \right\rangle = 0 \tag{4.71}$$

**Prf.**

1 つ目の等式は、$f$ の引数が $\hat{W}(t), t$ であることと、$\mathrm{d}\hat{W}(t)$ が $\hat{W}(t), t$ に依存しないことから従う。二本目の等号は、$\hat{W}(t)$ の期待値が 0 であることから従う。 □

また、Stratonovich 積は、以下の性質を満たす。

**Thm.Stratonovich 積における連鎖律**

$$\mathrm{d}f(t, \hat{W}(t)) = \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial \hat{W}} \circ \mathrm{d}\hat{W}(t) \tag{4.72}$$

これは、正確には以下の意味である。

$$\begin{aligned}\Delta f(t,\hat{W}(t)) &:= f(t+\Delta t,\hat{W}_{\Delta t}(t)+\hat{\xi}_{\Delta t}(t)) - f(t,\hat{W}_{\Delta t}(t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \left.\frac{\partial f}{\partial \hat{W}_{\Delta t}}\right|_{\hat{W}=\hat{W}_{\Delta t}(t)+\hat{\xi}_{\Delta t}(t)/2}\hat{\xi}_{\Delta t}(t) + o(\Delta t) \end{aligned} \tag{4.73}$$

**Prf.**

$$\begin{aligned} f(t+\Delta t,\hat{W}_{\Delta t}(t)+\hat{\xi}_{\Delta t}(t)) &= f + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \left.\frac{\partial f}{\partial \hat{W}_{\Delta t}}\right|_{\hat{W}_{\Delta t}(t)}\hat{\xi}_{\Delta t}(t) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial \hat{W}_{\Delta t}^2}\right|_{\hat{W}_{\Delta t}(t)}\hat{\xi}_{\Delta t}(t)^2 + o(\Delta t) && (4.74) \\ &= f + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \left.\frac{\partial f}{\partial \hat{W}_{\Delta t}}\right|_{\hat{W}_{\Delta t}(t)+\hat{\xi}_{\Delta t}(t)/2}\hat{\xi}_{\Delta t}(t) + o(\Delta t) && (4.75) \end{aligned}$$

$\because$ Taylor 展開の逆

$\square$

一方で、Stratonovich 積分は非予測性を満たさない。

$$\left\langle \int_0^\tau \mathrm{d}\hat{W}(t) \circ f(t,\hat{W}(t)) \right\rangle \neq 0 \tag{4.76}$$

また、Ito 積は連鎖律を満たさない。

$$\mathrm{d}f(t,\hat{W}(t)) \neq \frac{\partial f}{\partial t}\,\mathrm{d}t + \frac{\partial f}{\partial \hat{W}}\cdot \mathrm{d}\hat{W}(t) \tag{4.77}$$

Ito 積分への連鎖律の拡張は Ito の補題と呼ばれ、後の章で述べる。