Cross asymmetry

大上由人

2025 年 10 月 22 日

1 モチベーション

$a(t), b(t)$ をそれぞれ時刻 t における物理量とする。このとき、cross-correlation を

$$C_{ba}^{\tau} = \langle b(t+\tau)a(t)\rangle \tag{1.1}$$

で定義する。系が奇変数を持たないときを考える。このとき、平衡状態ならば、

$$C_{ab}^{\tau} = C_{ba}^{\tau} \tag{1.2}$$

が成り立つことが知られている。しかし、非平衡定常状態においては一般に

$$C_{ab}^{\tau} \neq C_{ba}^{\tau} \tag{1.3}$$

であることが知られている。このことを踏まえると、cross-correlation の非対称性は系の非平衡性度合いを示す指標となりうる。

一般に非平衡定常状態を維持するためには Thermodynamic force が必要である (温度勾配、化学ポテンシャル勾配など)。このことを踏まえると、**cross-correlation の非対称性と Thermodynamic force の間には何らかの関係がある**と予想される。

2 準備

以下、Markov jump process を考える。確率分布を $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)^T$ と表す。これが従うマスター方程式は、

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = R\mathbf{p} \tag{2.1}$$

である。ただし R は遷移レートである。また、特に定常状態を $\mathbf{q}$ と表す。これは、

$$R\mathbf{q} = 0 \tag{2.2}$$

を満たす。定常状態における一方向確率流を

$$\mathcal{T}_{ij} := R_{ij} q_j \tag{2.3}$$

と定義する。

また、状態を頂点としてグラフを作ることを考える。状態間を結んでできるサイクルを c と表す。単純サイクル $c = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ に注目する。以下、$R_{i_{k+1}i_k} > 0$ が成り立つことを仮定する。このとき、サイクル c に沿った Thermodynamic force を

$$\mathcal{F}_c = \ln \frac{R_{i_2 i_1} R_{i_3 i_2} \cdots R_{i_1 i_n}}{R_{i_1 i_2} R_{i_2 i_3} \cdots R_{i_n i_1}} \tag{2.4}$$

により定義する。これは 1 サイクルに沿った熱浴のエントロピー変化に対応する。

非対称性を測る無次元量の指標として以下の量を導入する:

$$\chi_{ba} := \lim_{\tau \to 0} \frac{C_{ba}^{\tau} - C_{ab}^{\tau}}{2\sqrt{(\Delta_\tau C_{aa})(\Delta_\tau C_{bb})}} \tag{2.5}$$

ただし、

$$\Delta_\tau C_{aa} := C_{aa}^{0} - C_{aa}^{\tau} \tag{2.6}$$

であり、これは自己相関の減少を表す。また、χ_{ba} はスケール不変である。[*1]

[*1] $a'(t) = \alpha a(t), b'(t) = \beta b(t)$ としたとき、

$$C_{b'a'}^{\tau} = \langle b'(t+\tau) a'(t) \rangle = \langle (\beta b(t+\tau))(\alpha a(t)) \rangle = \alpha\beta \langle b(t+\tau) a(t) \rangle = \alpha\beta C_{ba}^{\tau} \tag{2.7}$$

$$C_{a'b'}^{\tau} = \langle a'(t+\tau) b'(t) \rangle = \langle (\alpha a(t+\tau))(\beta b(t)) \rangle = \alpha\beta \langle a(t+\tau) b(t) \rangle = \alpha\beta C_{ab}^{\tau} \tag{2.8}$$

したがって、分子は、

$$C_{b'a'}^{\tau} - C_{a'b'}^{\tau} = \alpha\beta C_{ba}^{\tau} - \alpha\beta C_{ab}^{\tau} = \alpha\beta (C_{ba}^{\tau} - C_{ab}^{\tau}) \tag{2.9}$$

となる。また、分母は、

$$C_{a'a'}^{\tau} = \langle a'(t+\tau) a'(t) \rangle = \langle (\alpha a(t+\tau))(\alpha a(t)) \rangle = \alpha^2 C_{aa}^{\tau} \tag{2.10}$$

$$\Delta_\tau C_{a'a'} = C_{a'a'}^{0} - C_{a'a'}^{\tau} = \alpha^2 C_{aa}^{0} - \alpha^2 C_{aa}^{\tau} = \alpha^2 (C_{aa}^{0} - C_{aa}^{\tau}) = \alpha^2 \Delta_\tau C_{aa} \tag{2.11}$$

同様にして、

$$\Delta_\tau C_{b'b'} = \beta^2 \Delta_\tau C_{bb} \tag{2.12}$$

となる。以上を合わせればスケール不変性が示される:

$$\chi_{b'a'} = \lim_{\tau \to 0} \frac{\alpha\beta (C_{ba}^{\tau} - C_{ab}^{\tau})}{2\alpha\beta\sqrt{(\Delta_\tau C_{aa})(\Delta_\tau C_{bb})}} \tag{2.13}$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{C_{ba}^{\tau} - C_{ab}^{\tau}}{2\sqrt{(\Delta_\tau C_{aa})(\Delta_\tau C_{bb})}} \tag{2.14}$$

$$= \chi_{ba} \tag{2.15}$$

また、物理量の定数シフトに対しても不変であることが示せる。

τ が小さい時

$$C_{ba}^{\tau} = \sum_{i,j} e_{ij}^{\tau R} q_j b_i a_j \tag{2.16}$$

$$\simeq \sum_{i,j} (\delta_{ij} + \tau R_{ij}) q_j b_i a_j \tag{2.17}$$

$$= \sum_{i} q_i b_i a_i + \tau \sum_{i,j} R_{ij} q_j b_i a_j \tag{2.18}$$

と書ける。このとき、

$$\Delta_\tau C_{aa} = C_{aa}^{0} - C_{aa}^{\tau} \tag{2.19}$$

$$\simeq -\tau \sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij} a_i a_j \tag{2.20}$$

$$= \frac{\tau}{2} \sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij} (a_i - a_j)^2 \tag{2.21}$$

と書くことができる。ただし、最後の式変形では $\sum_i \mathcal{T}_{ij} = 0, \sum_j \mathcal{T}_{ij} = 0$ を用いた。
このとき、

$$\chi_{ba} = \frac{\sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij} (b_i a_j - b_j a_i)}{2\sqrt{-\sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij} a_i a_j}\sqrt{-\sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij} b_i b_j}} \tag{2.22}$$

と書くことができる。

3 主結果

3.1 主結果

以下の不等式が成り立つことが示される。

Thm.1

χ_{ba} について、以下の不等式が成り立つ:

$$|\chi_{ba}| \le \max_c \frac{\tanh(\mathcal{F}_c / 2n_c)}{\tan(\pi / n_c)} \le \max_c \frac{\mathcal{F}_c}{2\pi}, \tag{3.1}$$

ただし、$\max_c$ は取りうるすべての単純サイクルについてとる。また、n_c はサイクル c に含まれる状態の数である。また、等号成立条件は

$$\mathcal{T}_{12} = \mathcal{T}_{23} = \cdots = \mathcal{T}_{n1} \tag{3.2}$$

$$\mathcal{T}_{21} = \mathcal{T}_{32} = \cdots = \mathcal{T}_{1n} \tag{3.3}$$

および、ある γ が存在して、$(\gamma a_1, b_1), (\gamma a_2, b_2), \ldots, (\gamma a_n, b_n)$ が正 n 角形をなすことである。

すなわち、非対称性の大きさは Thermodynamic force によって上から抑えられる。

また、これよりタイトな不等式を得ることもできる。

Thm.2

Thm.1 よりタイトな不等式が成り立つ:

$$|\chi_{ba}| \leq \max_{c\in\mathcal{C}^*} \frac{n_c \tanh(\mathcal{F}_c/2n_c)}{n'_c \tan(\pi/n'_c)} \leq \max_{c\in\mathcal{C}^*} \frac{\mathcal{F}_c/2n'_c}{\tan(\pi/n'_c)} \leq \max_{c\in\mathcal{C}^*} \frac{\mathcal{F}_c}{2\pi} \tag{3.4}$$

ただし、n'_c はサイクル c において (a,b) の値が変化する回数であり、$n'_c \leq n_c$ である。また、

$$C^* = C_{\mathrm{asy}} \cap C_{\mathrm{uni}} \tag{3.5}$$

$$C_{\mathrm{asy}} := \left\{c \mid b_{i_{k+1}} a_{i_k} - b_{i_k} a_{i_{k+1}} \neq 0\right\} \tag{3.6}$$

$$C_{\mathrm{uni}} = \{c \mid \forall e \in c, e \in \mathcal{E}^+\} \tag{3.7}$$

$$\mathcal{E}^+ := \{e \mid \mathcal{J}_e = \mathcal{T}_e - \mathcal{T}_{-e} > 0\} \tag{3.8}$$

である。

証明は後述。

この不等式の応用例を見ていく。遷移レート R び固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とする。また、

$$\lambda_\alpha = -\lambda_\alpha^R + i\lambda_\alpha^I \tag{3.9}$$

とする。このとき、時間発展は以下のように書ける:

$$e^{\tau R} = \sum_\alpha \exp\left(-\lambda_\alpha^R \tau\right) \exp\left(i\lambda_\alpha^I \tau\right) \mathbf{u}^{(\alpha)} \mathbf{v}^{(\alpha)T} \tag{3.10}$$

ただし、$\mathbf{u}^\alpha, \mathbf{v}^\alpha$ はそれぞれ右固有ベクトル、左固有ベクトルである。このとき、以下の不等式が成り立つ。

Thm.3

$$\frac{\left|\lambda_\alpha^{\mathrm{I}}\right|}{2\pi\lambda_\alpha^{\mathrm{R}}} \leq \max_c \frac{\tanh(\mathcal{F}_c/2n_c)}{2\pi \tan(\pi/n_c)}. \tag{3.11}$$

これは振動があれば、その分だけ Thermodynamic force が必要であることを示している。[*2]

Prf.

$$a_i = \frac{\mathrm{Im}(u_i^\alpha)}{q_i} \tag{3.12}$$

$$b_i = \frac{\mathrm{Re}(u_i^\alpha)}{q_i} \tag{3.13}$$

[*2] 時間結晶との関連を考えてみると、固有値の実部が 0 に近づくわけだが、このとき左辺が発散する。したがって右辺も発散することとなるが、これは物理的におかしい。したがってこの系 (古典・詳細つり合いあり) では時間結晶はできなさそうである。

とおく。いま、

$$\sum_i |u_i^\alpha|^2/q_i = 1 \tag{3.14}$$

となるように固有ベクトルを規格化しておく。これを用いると、

$$\lambda = \sum_i \frac{u_i^*}{q_i}\lambda u_i = \sum_{i,j}\frac{u_i^*}{q_i}R_{ij}u_j = \sum_{i,j} R_{ij}q_j\frac{u_i^* u_j}{q_i q_j}. \tag{3.15}$$

と計算することができる。ここで、$\mathcal{T}_{ij} = R_{ij}q_j$ および $a_i = \mathrm{Im}(u_i^\alpha)/q_i, b_i = \mathrm{Re}(u_i^\alpha)/q_i$ を用いることで、

$$\lambda = \sum_{i,j}\mathcal{T}_{ij}(b_i - ia_i)(b_j + ia_j) \tag{3.16}$$

$$= \sum_{i,j}\mathcal{T}_{ij}(b_ib_j + a_ia_j + ib_ia_j - ia_ib_j). \tag{3.17}$$

と書くことができる。このことと、$\lambda_\alpha = -\lambda_\alpha^R + i\lambda_\alpha^I$ を合わせることで、

$$\lambda^{\mathrm{I}} = \sum_{i,j}\mathcal{T}_{ij}(b_ia_j - a_ib_j) = \lim_{\tau\to 0}\frac{C_{ba}^\tau - C_{ab}^\tau}{\tau}, \tag{3.18}$$

$$\lambda^{\mathrm{R}} = -\sum_{i,j}\mathcal{T}_{ij}(b_ib_j + a_ia_j) = \lim_{\tau\to 0}\frac{\Delta_\tau C_{aa} + \Delta_\tau C_{bb}}{\tau}. \tag{3.19}$$

が得られる。これを用いると、

$$|\chi_{ba}| = \left|\lim_{\tau\to 0}\frac{C_{ba}^\tau - C_{ab}^\tau}{2\sqrt{(\Delta_\tau C_{aa})(\Delta_\tau C_{bb})}}\right| \tag{3.20}$$

$$= \frac{|(C_{ba}^\tau - C_{ab}^\tau)/\tau|}{2\sqrt{(\Delta_\tau C_{aa}/\tau)(\Delta_\tau C_{bb}/\tau)}} \tag{3.21}$$

$$\geq \frac{|(C_{ba}^\tau - C_{ab}^\tau)/\tau|}{(\Delta_\tau C_{aa} + \Delta_\tau C_{bb})/\tau} \tag{3.22}$$

$$= \frac{|\lambda_\alpha^I|}{\lambda_\alpha^R} \tag{3.23}$$

が言える。あとは Thm.1 の不等式を用いればよい。 □

3.2 主結果の導出

3.2.1 記号のメモ

$$\mathcal{J}_{ij} := \mathcal{T}_{ij} - \mathcal{T}_{ji} \tag{3.24}$$
$$\mathcal{A}_{ij} := \mathcal{T}_{ij} + \mathcal{T}_{ji} \tag{3.25}$$
$$\Omega_{ij} := \frac{1}{2}(b_i a_j - b_j a_i) \tag{3.26}$$
$$L_{ij} := \sqrt{(a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2} \tag{3.27}$$

3.2.2 χ の書き換え

χ_{ba} のスケール不変性を利用することで、

$$\sum_{ij} \mathcal{T}_{ij} a_i a_j = \sum_{ij} \mathcal{T}_{ij} b_i b_j \tag{3.28}$$

となるようにとることができる。このことを用いて、χ_{ba} を以下のように書き換える:

$$\begin{aligned}
\chi_{ba} &= \frac{\sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij}(b_i a_j - b_j a_i)}{2\sqrt{-\sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij} a_i a_j}\sqrt{-\sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij} b_i b_j}} &(3.29)\\
&= \frac{\sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij}(b_i a_j - b_j a_i)}{-\sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij}(a_i a_j + b_i b_j)} = \frac{\sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij}(b_i a_j - b_j a_i)}{\frac{1}{2}\sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij}\left[(a_i - a_j)^2 + (b_i - b_j)^2\right]} &(3.30)\\
&= \frac{4\sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij}\Omega_{ij}}{\sum_{i,j} \mathcal{T}_{ij} L_{ij}^2} = \frac{4\sum_{i>j} \mathcal{J}_{ij}\Omega_{ij}}{\sum_{i>j} \mathcal{A}_{ij} L_{ij}^2}. &(3.31)
\end{aligned}$$

ただし、2 つ目の等号でスケール不変性からの条件を用いた。したがって、

$$|\chi_{ba}| = \frac{4\left|\sum_{i>j} \mathcal{J}_{ij}\Omega_{ij}\right|}{\sum_{i>j} \mathcal{A}_{ij} L_{ij}^2}. \tag{3.32}$$

と書ける。

3.2.3 サイクルの分解

正味の流れが正であるエッジの集合を

$$\mathcal{E}^+ := \{e \mid \mathcal{J}_e > 0\} \tag{3.33}$$

と定義する。また、C_{uni} を以下のように定義する:

$$C_{\mathrm{uni}} = \{c \mid \forall e \in c, e \in \mathcal{E}^+\} \tag{3.34}$$

辺 e のカレントを、C_{uni} に含まれる単純サイクル c のカレントの和として表すことができる。すなわち、

$$\mathcal{J}_e = \sum_{c \in C_{\mathrm{uni}}} S_{ec} J_c \tag{3.35}$$

$$S_{ec} = \begin{cases} 1 & e \in c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.36}$$

と書ける。

このとき、以下が成り立つ:

$$\sum_{e \in \mathcal{E}^+} \mathcal{J}_e X_e = \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathrm{uni}}} \mathcal{J}_c \left(\sum_{e \in \mathcal{E}^+} S_{ec} X_e \right) \tag{3.37}$$

$$= \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathrm{uni}}} \mathcal{J}_c \left(\sum_{e \in c} X_e \right). \tag{3.38}$$

このもとで、χ の分母と分子に関わる不等式をそれぞれ導いておく。

$$\left| \sum_{i>j} \mathcal{J}_{ij} \Omega_{ij} \right| = \left| \sum_{e \in \mathcal{E}^+} \mathcal{J}_e \Omega_e \right| \tag{3.39}$$

$$= \left| \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathrm{uni}}} \mathcal{J}_c \left(\sum_{e \in c} \Omega_e \right) \right| \tag{3.40}$$

$$= \left| \sum_{c \in \mathcal{C}^*} \mathcal{J}_c \left(\sum_{e \in c} \Omega_e \right) \right| \tag{3.41}$$

$$\leq \sum_{c \in \mathcal{C}^*} \mathcal{J}_c \left| \sum_{e \in c} \Omega_e \right|. \tag{3.42}$$

ただし、$C^* = C_{\mathrm{asy}} \cap C_{\mathrm{uni}}$ である。また、最後に三角不等式を用いた。また、以下も成り立つ:

$$\sum_{i>j} \mathcal{A}_{ij} L_{ij}^2 \geq \sum_{e \in \mathcal{E}^+} \mathcal{A}_e L_e^2 \tag{3.43}$$

$$= \sum_{e \in \mathcal{E}^+} \mathcal{J}_e \frac{\mathcal{A}_e}{\mathcal{J}_e} L_e^2 \tag{3.44}$$

$$= \sum_{c \in \mathcal{C}_{\mathrm{uni}}} \mathcal{J}_c \left(\sum_{e \in c} \frac{\mathcal{A}_e}{\mathcal{J}_e} L_e^2 \right) \tag{3.45}$$

$$\geq \sum_{c \in \mathcal{C}^*} \mathcal{J}_c \left(\sum_{e \in c} \frac{\mathcal{A}_e}{\mathcal{J}_e} L_e^2 \right). \tag{3.46}$$

3.3 一般化 TUR

Thermodynamic force の言葉で TUR like な不等式を示す。

Lem.

$\forall c \in C_{\text{uni}}$ に対して、

$$\frac{\left(\sum_{e\in c} X_e\right)^2}{\sum_{e\in c} X_e^2 \mathcal{A}_e/\mathcal{J}_e} \leq n_c \tanh\left(\frac{\mathcal{F}_c}{2n_c}\right). \tag{3.47}$$

が成立する。

Prf.

$(X_e\sqrt{\mathcal{A}_e/\mathcal{J}_e})_{e\in c}$ および $(\sqrt{\mathcal{J}_e/\mathcal{A}_e})_{e\in c}$ についての Schwarz の不等式を用いることで、

$$\left(\sum_{e\in c} X_e\right)^2 \leq \left(\sum_{e\in c} X_e^2 \frac{\mathcal{A}_e}{\mathcal{J}_e}\right)\left(\sum_{e\in c}\frac{\mathcal{J}_e}{\mathcal{A}_e}\right). \tag{3.48}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sum_{e\in c} X_e\right)^2}{\sum_{e\in c} X_e^2 \mathcal{A}_e/\mathcal{J}_e} \leq \sum_{e\in c}\frac{\mathcal{J}_e}{\mathcal{A}_e}. \tag{3.49}$$

が成り立つ。また、Thermodynamic force の定義から、

$$F_e = \sum_{e\in c} \ln\frac{\mathcal{T}_e}{\mathcal{T}_{-e}} \tag{3.50}$$

$$= \sum_{e\in c} \ln\frac{\mathcal{A}_e+\mathcal{J}_e}{\mathcal{A}_e-\mathcal{J}_e} \tag{3.51}$$

$$= 2n_c \sum_{e\in c} \frac{1}{n_c}\mathrm{artanh}\frac{\mathcal{J}_e}{\mathcal{A}_e} \tag{3.52}$$

が成り立つ。ただし、$\mathrm{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ である。Jensen の不等式を用いることで、

$$F_c \geq 2n_c \mathrm{artanh}\left(\frac{1}{n_c}\sum_{e\in c}\frac{\mathcal{J}_e}{\mathcal{A}_e}\right). \tag{3.53}$$

が得られる。これと、tanh の単調性を用いることで、

$$\frac{1}{n_c}\sum_{e\in c}\frac{\mathcal{J}_e}{\mathcal{A}_e} \leq \tanh\left(\frac{F_c}{2n_c}\right). \tag{3.54}$$

が得られる。これら二つの結果をわせることで示せる。 □

証明からわかるように、この結果の等号成立条件は Schwarz の不等式と Jensen の不等式の等号成立条件であり、

$$(X_e\sqrt{\mathcal{A}_e/\mathcal{J}_e})_{e\in c} \propto (\sqrt{\mathcal{J}_e/\mathcal{A}_e})_{e\in c} \tag{3.55}$$

$$\forall e \in c, \frac{\mathcal{J}_e}{\mathcal{A}_e} = \text{const} \tag{3.56}$$

である。

3.4 等周不等式

Thm. 等周不等式

$\mathbb{R}^2$ 上の点列 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ について、

$$\left(4n \tan \frac{\pi}{n}\right) \left| \sum_{i=1}^{n} \Omega_{i+1,i} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} L_{i+1,i} \right)^2, \tag{3.57}$$

が成立する。等号成立条件は、$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ が正 n 角形をなすことである。

Prf.

一旦略 □

この定理から直ちに以下の不等式も示せる。

Cor.

$\mathbb{R}^2$ 上の点列 $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$ について、

$$n' := |\{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid (a_i, b_i) \neq (a_{i+1}, b_{i+1})\}| \tag{3.58}$$

とする。このとき、

$$\left(4n' \tan \frac{\pi}{n'}\right) \left| \sum_{i=1}^{n} \Omega_{i+1,i} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} L_{i+1,i} \right)^2, \tag{3.59}$$

Prf.

$I = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid (a_i, b_i) \neq (a_{i+1}, b_{i+1})\}$ とする。これに対する等周不等式から、

$$\left(4n' \tan \frac{\pi}{n'}\right) \left| \sum_{i \in I} \Omega_{i+1,i} \right| \leq \left(\sum_{i \in I} L_{i+1,i} \right)^2, \tag{3.60}$$

が得られる。このことと、

$$\sum_{i=1}^{n} \Omega_{i+1,i} = \sum_{i \in I} \Omega_{i+1,i} \tag{3.61}$$

$$\sum_{i=1}^{n} L_{i+1,i} = \sum_{i \in I} L_{i+1,i}. \tag{3.62}$$

を用いれば示せる。 □

3.5 主結果の証明

主結果のタイトな場合の方を示す。初めの主結果はこの結果から直ちに従う。[*3]

Prf.

サイクル $C = \{i_1, i_2, \ldots, i_{n_c}\}$ に対して、等周不等式の系を用いることで、

$$\left(4n_c' \tan \frac{\pi}{n_c'}\right) \left|\sum_{e\in c} \Omega_e\right| \leq \left(\sum_{e\in c} L_e\right)^2 \tag{3.64}$$

た、グラフの分解のところで得られた不等式を用いることで、

$$\left|\sum_{i>j} \mathcal{T}_{ij}\Omega_{ij}\right| \leq \sum_{c\in\mathcal{C}^*} \mathcal{J}_c \left|\sum_{e\in c} \Omega_e\right| \leq \sum_{c\in\mathcal{C}^*} \mathcal{J}_c \left(\sum_{e\in c} L_e\right)^2 \left(4n_c' \tan \frac{\pi}{n_c'}\right)^{-1} \tag{3.65}$$

が成立する。

また、一般化 TUR において、$X_e = L_e$ とすることで、

$$\frac{\left(\sum_{e\in c} L_e\right)^2}{\sum_{e\in c} L_e^2 \mathcal{A}_e/\mathcal{J}_e} \leq n_c \tanh\left(\frac{\mathcal{F}_c}{2n_c}\right). \tag{3.66}$$

$$\Leftrightarrow \left(n_c \tanh\left(\frac{\mathcal{F}_c}{2n_c}\right)\right)^{-1} \left(\sum_{e\in c} L_e\right)^2 \leq \sum_{e\in c} L_e^2 \frac{\mathcal{A}_e}{\mathcal{J}_e} \tag{3.67}$$

が得られる。さらに、グラフの分解のところで得られた不等式を用いることで、

$$\sum_{c\in\mathcal{C}^*} \mathcal{J}_c \left(n_c \tanh\left(\frac{\mathcal{F}_c}{2n_c}\right)\right)^{-1} \left(\sum_{e\in c} L_e\right)^2 \leq \sum_{c\in\mathcal{C}^*} \mathcal{J}_c \sum_{e\in c} L_e^2 \frac{\mathcal{A}_e}{\mathcal{J}_e} \tag{3.68}$$

$$\leq \sum_{i>j} \mathcal{A}_{ij} L_{ij}^2. \tag{3.69}$$

が成立する。これら二つの不等式を用いることで、

$$|\chi_{ba}| \leq \frac{4\sum_{c\in\mathcal{C}^*} \mathcal{J}_c (\sum_{e\in c} L_e)^2 \left[4n_c' \tan(\pi/n_c')\right]^{-1}}{\sum_{c\in\mathcal{C}^*} \mathcal{J}_c (\sum_{e\in c} L_e)^2 \left[n_c \tanh(\mathcal{F}_c/2n_c)\right]^{-1}} \tag{3.70}$$

ここで、

$$\frac{\sum_{c\in\mathcal{C}^*} y_c}{\sum_{c\in\mathcal{C}^*} x_c} = \max_{c\in\mathcal{C}^*} \frac{y_c}{x_c} \tag{3.71}$$

[*3] $n_c' \leq n_c$ より、

$$n_c' \tan(\pi/n_c') \geq n_c \tan(\pi/n_c) \tag{3.63}$$

が成り立つため。

が成り立つことを用いると、[*4]

$$|\chi_{ba}| \le \max_{c\in\mathcal{C}^*} \frac{4\mathcal{J}_c(\sum_{e\in c} L_e)^2\left[4n'_c\tan(\pi/n'_c)\right]^{-1}}{\mathcal{J}_c(\sum_{e\in c} L_e)^2\left[n_c\tanh(\mathcal{F}_c/2n_c)\right]^{-1}} = \max_{c\in\mathcal{C}^*} \frac{n_c\tanh(\mathcal{F}_c/2n_c)}{n'_c\tan(\pi/n'_c)} \tag{3.76}$$

が示される。 □

[*4] $M = \max_{c\in\mathcal{C}^*} \frac{y_c}{x_c}$ とする。このとき、

$$\frac{y_c}{x_c} \le M \tag{3.72}$$

$$\Leftrightarrow y_c \le Mx_c \tag{3.73}$$

$$\Rightarrow \sum_{c\in\mathcal{C}^*} y_c \le M \sum_{c\in\mathcal{C}^*} x_c \tag{3.74}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{c\in\mathcal{C}^*} y_c}{\sum_{c\in\mathcal{C}^*} x_c} \le M \tag{3.75}$$