B4 ゼミ #5

大上由人

2025 年 5 月 10 日

4　連続空間における確率過程

前節では、離散状態に対する確率過程について述べたが、今回は連続時間の確率過程を考える。

4.1　数学的基礎

4.1.1　Wiener 過程

標準的な連続空間の Markov 過程として、Wiener 過程が知られている。

Def.Wiener 過程

Wiener 過程 $\hat{W}(t)$ は、

$$P(\hat{W}(t+\Delta t)=x \mid \hat{W}(t)=x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}}\exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2\Delta t}\right) \tag{4.1}$$

$$P(x,0)=\delta(x) \tag{4.2}$$

を満たす確率過程である。

Wiener 過程が確かに存在することを直感的に確かめる。一次元格子におけるランダムウォークを考える。格子定数を a、時間間隔を $\Delta\tau$ とする。各界のステップでは、確率 1/2 で右に a、1/2 で左に a 移動するものとする。すなわち、

$$T_{x\to x+a} = T_{x\to x-a} = \frac{1}{2} \tag{4.3}$$

とする。初期条件を $P(x,0)=\delta_{x,0}$ とすると、時刻 t における x の期待値は常に 0 である。このとき、拡散定数は、

$$\begin{aligned}
D &:= \frac{d\langle x^2\rangle}{dt} && (4.4)\\
&= \sum_x \frac{x^2 P(x,t+\Delta t) - P(x,t)}{\Delta t} && (4.5)\\
&= \sum_x \frac{x^2}{\Delta t}\left[P_{x-a\to a}P(x-a,t) + P_{x+a\to a}P(x+a,t) - P(x,t)\right] && (4.6)\\
&= \sum_x \frac{x^2}{\Delta t}\left[\frac{1}{2}P(x-a,t) + \frac{1}{2}P(x+a,t) - P(x,t)\right] && (4.7)\\
&= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{2}\sum_x x^2 P(x-a,t) + \frac{1}{2}\sum_x x^2 P(x+a,t) - \sum_x x^2 P(x,t)\right] && (4.8)\\
&= \frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{2}\sum_{x'} (x'+a)^2 P(x',t) + \frac{1}{2}\sum_{x''} (x''-a)^2 P(x'',t) - \sum_x x^2 P(x,t)\right] && (4.9)\\
&= \frac{1}{\Delta t}\sum_x \left[\frac{(x-a)^2 + (x+a)^2}{2} - x^2\right] P(x,t) && (4.10)\\
&= \frac{a^2}{\Delta t} && (4.11)
\end{aligned}$$

このとき、確率分布は、中心極限定理により、ガウス分布に収束する。

Recall. 中心極限定理

N 個の独立同一分布の確率変数 X_i の平均値は、$N\to\infty$ で、平均 μ、分散 σ^2/N の正規分布に収束する。ただし、μ は X_i の平均、σ^2 は X_i の分散である。

TODO: 証明つける

Wiener 過程の極限として白色 Gauss ノイズを導入する。

Def. 白色 Gauss ノイズ

白色ガウスノイズは、以下のように与えられる。

$$\hat{\xi}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\hat{W}(t+\Delta t) - \hat{W}(t)}{\Delta t} \tag{4.12}$$

また、のちの便宜のため、時間 Δt の間で離散化した白色ガウスノイズを

$$\hat{\xi}_{\Delta t}(t) := \hat{W}(t+\Delta t) - \hat{W}(t) \tag{4.13}$$

と定義する。このとき、

$$\left\langle \hat{\xi}(t) \right\rangle = 0 \tag{4.14}$$

$$\left\langle \hat{\xi}(t)\hat{\xi}(t') \right\rangle = \delta(t-t') \tag{4.15}$$

が成り立つ。
$(\because)$
TODO: 証明つける
　また、Wiener 過程を

$$\hat{W}(\tau) = \int_0^\tau \mathrm{d}t\, \hat{\xi}(t) \tag{4.16}$$

と復元できる。上記の関係を、正式に、

$$\mathrm{d}\hat{W}(t) = \hat{\xi}(t)\, \mathrm{d}t \tag{4.17}$$

と表す。
　特に、Wiener 過程の二乗はアンサンブル平均をとることなく

$$(\mathrm{d}\hat{W}(t))^2 = \mathrm{d}t \tag{4.18}$$

が成り立つ。より正確には、$(\mathrm{d}\hat{W}(t))^2$ による積分は、二乗平均の極限の意味で普通の時間積分と同等である。[*1]

Thm.Ito 則

$$\lim_{\Delta t\to 0} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^2 f(n\Delta t) - \int_0^\tau \mathrm{d}t\, f(t) \right)^2 \right\rangle = 0, \tag{4.19}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)\Delta t f(n\Delta t) \right)^2 \right\rangle = 0, \tag{4.20}$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \left\langle \left(\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^k f(n\Delta t) \right)^2 \right\rangle = 0, \tag{4.21}$$

ここで $N := \tau/\Delta t,\ k \geq 3$ とする。これらの関係式は形式的には次のように書ける：

$$(\mathrm{d}\hat{W}(t))^2 = \mathrm{d}t\,, \tag{4.22}$$

$$\mathrm{d}\hat{W}(t)\, \mathrm{d}t = (\mathrm{d}\hat{W}(t))^k = 0. \tag{4.23}$$

Prf.

[*1] $\lim_{\Delta t\to 0} g_{\Delta t} = g$ が平均二乗収束の意味で成り立つとは、

$$\lim_{\Delta t\to 0} \left\langle (g_{\Delta t} - g)^2 \right\rangle = 0$$

が成り立つことをいう。

$\xi_{\Delta t}$ の 4 次のモーメントは、

$$
\begin{aligned}
\langle \xi_{\Delta t}^4 \rangle &= \left\langle \left(\hat{W}(t+\Delta t) - \hat{W}(t) \right)^4 \right\rangle \\
&= \iint dx dx' (x'-x)^4 P(\hat{W}(t+\Delta t) = x', \hat{W}(x) = x) \\
&= \iint dx dx' (x'-x)^4 P(\hat{W}(t+\Delta t) = x' | \hat{W}(t) = x) P(\hat{W}(t) = x) \\
&\quad (\because \omega \equiv x' - x,\ dx' = d\omega) \\
&= \int dx \int d\omega\, \omega^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\omega^2/(2\Delta t)} P(\hat{W}(t) = x) \\
&= \int d\omega\, \omega^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\omega^2/(2\Delta t)} \quad (\because \text{規格化}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \cdot \frac{3}{4} \sqrt{(2\Delta t)^5 \pi} \quad (\because \text{ガウス積分}) \\
&= 3\Delta t^2
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

また、$\xi_{\Delta t}$ の 2 次のモーメントは、

$$
\begin{aligned}
\langle \xi_{\Delta t}^2 \rangle &= \int d\omega\, \omega^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\omega^2/(2\Delta t)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{(2\Delta t)^3 \pi} \\
&= \Delta t
\end{aligned}
\tag{4.25}
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
\left\langle \left(\xi_{\Delta t}^2 - \Delta t \right)^2 \right\rangle &= \langle \xi_{\Delta t}^4 - 2\xi_{\Delta t}^2 \Delta t + (\Delta t)^2 \rangle \\
&= 3(\Delta t)^2 - 2(\Delta t)^2 + (\Delta t)^2 \\
&= 2(\Delta t)^2
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

また、

$$
D_{\Delta t} := \sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta t)\Delta t - \int_0^\tau dt f(t) \tag{4.27}
$$

とする。このとき、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle\left(\sum_{n=0}^{N-1}(\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t))^2 f(n\Delta t)-\int_0^\tau dt f(t)\right)^2\right\rangle \qquad (4.28)\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle\left(\sum_{n=0}^{N-1}\left(\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^2-\Delta t\right)f(n\Delta t)+D_{\Delta t}\right)^2\right\rangle\\
&\quad(\because \langle\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)\hat{\xi}_{\Delta t}(n'\Delta t)\rangle=0 \quad (n\neq n'))\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{n=0}^{N-1}\left\langle\left(\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^2-\Delta t\right)^2\right\rangle f(n\Delta t)^2+O(D_{\Delta t})\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}2(\Delta t)^2\sum_{n=0}^{N-1}f(n\Delta t)^2+O(D_{\Delta t})\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}O(\Delta t^2)\times O(\Delta t^{-1})+O(D_{\Delta t})\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}O(\Delta t)+O(D_{\Delta t})\\
&=0 \qquad (4.29)
\end{aligned}
$$

がいえる。

また、同様にして、

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle\left(\sum_{n=0}^{N-1}\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)\Delta t f(n\Delta t)\right)^2\right\rangle &=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{n=0}^{N-1}\left\langle\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^2\right\rangle(\Delta t)^2 f(n\Delta t)^2 \qquad (4.30)\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}O(\Delta t^3)\times O(\Delta t^{-1}) \qquad (4.31)\\
&=0 \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0}\left\langle\left(\sum_{n=0}^{N-1}\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^k f(n\Delta t)\right)^2\right\rangle &=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{n=0}^{N-1}\left\langle\hat{\xi}_{\Delta t}(n\Delta t)^k\right\rangle f(n\Delta t)^2 \qquad (4.33)\\
&=\lim_{\Delta t\to 0}O(\Delta t^{k/2})\times O(\Delta t^{-1}) \qquad (4.34)\\
&=0 \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。 □

4.1.2 確率微分方程式と確率積分