

Algoritmo para o problema do brigadista em grafos com enfoque nas adjacências dos focos de incêndio

Halliday Gauss Costa dos Santos
Departamento de Computação
Universidade Federal de Ouro Preto
Ouro Preto, Brasil
halliday.santos@aluno.ufop.edu.br

Resumo—O Problema do Brigadista em Grafos ou FFP é um modelo determinístico e em tempo discreto para simular a propagação de queimadas e contenção de incêndios em grafos. Esse problema é representado em um grafo não direcionado e não ponderado $G(V, A)$, que contém um subconjunto de V chamado Q , o qual representa os focos de incêndio, e um inteiro D que representa a quantidade de brigadistas disponíveis. A propagação do fogo acontece em rodadas e, em cada rodada, o fogo se espalha para as adjacências dos vértices do conjunto Q , desde que esses vértices não estejam defendidos enquanto os brigadistas defendem os vértices intocados procurando minimizar a quantidade de vértices queimados. Como o FFP está contido na classe dos problemas NP-difícil, então os algoritmos existentes são baseados em heurísticas de aproximação, e mesmo que seja executado um algoritmo de aproximação, pelas aplicações do problema, a resolução do mesmo tem que ser dada de forma breve. Porém esses algoritmos abordam heurísticas complexas mesmo em instâncias em que a melhor solução é defender os vértices das adjacências dos focos de incêndio, ou quando as adjacências tem preferência. Geralmente problemas como incêndios em áreas florestais, disseminação de vírus em um computador ou de doenças entre pessoas, e propagação de desinformação ou discurso de ódio em redes sociais podem ser modelados em grafos e resolvidos de maneira a minimizar os danos por meio de uma solução aproximada do FFP. Visto que aplicações importantes estão ligadas ao problema do brigadista, é possível construir uma heurística que permita chegar a uma aproximação do melhor resultado para as instâncias em que a melhor solução é garantida ao defender os vértices próximos dos focos de incêndio? O objetivo desse trabalho é apresentar um algoritmo com uma heurística simples que utiliza lógica matemática e garanta bons resultados nas instâncias em que a melhor solução é garantida defendendo os vértices adjacentes aos vértices queimados.

Palavras-chave—grafo, FFP, algoritmo, heurística.

I. INTRODUÇÃO

O Problema do Brigadista em Grafos, ou FFP (Firefighter Problem.), foi proposto em 1995 por Hartnell como um modelo determinístico e em tempo discreto para simular a propagação de queimadas e contenção de incêndios em grafos. Esse problema é representado em um grafo não direcionado $G(V, A)$ onde V é o conjunto de vértices desse grafo e A é o conjunto de arestas não ponderadas. É definido um subconjunto de V chamado de Q e os vértices de Q são os focos de incêndio, ou seja, os vértices que estão queimando. É definido também um inteiro D que representa a quantidade de brigadistas disponíveis para evitar a propagação

das queimadas. Os vértices podem possuir um desses três estados: intocado, queimado ou defendido. Inicialmente todos os vértices estão intocados até que seja inserido os focos de incêndio.

Dado um grafo com os focos de incêndio, o procedimento em rodadas de defesa dos vértices intocados começa. A quantidade de brigadistas disponível é a quantidade de vértices que serão defendidos em uma rodada, a menos que a quantidade de vértices intocados adjacentes aos focos de incêndio seja inferior a quantidade de defensores. Após a defesa, uma nova rodada se inicia e o fogo se espalha para as adjacências dos focos, desde que nenhuma adjacência esteja defendida. Em seguida, o processo de defesa recomeça. Esse processo se repete até que não haja vértices para serem queimados. Cabe ressaltar que a defesa deve ser feita de maneira que minimize quantidade de vértices queimados no grafo.

A figura abaixo apresenta um exemplo de execução da melhor solução para o problema em um grafo específico, com um foco de incêndio e um brigadista disponível. O conjunto Q inicialmente é um único vértice (vértice 5), na primeira rodada o vértice 6 é defendido e o fogo se propaga para os vértices 2 e 4. Na segunda rodada o vértice 7 é defendido e os vértices 1 e 3 são queimados, terminando a execução do problema, pois não há mais vértices a serem queimados totalizando 4 vértices defendidos e 5 vértices perdidos.

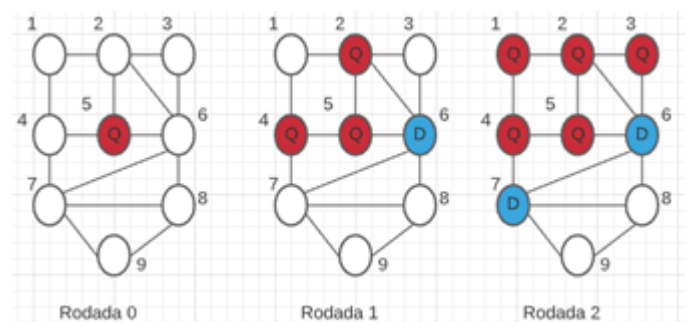


Figura 1. Exemplo de uma resolução ótima para o FFP.

O FFP está contido na classe dos problemas NP-difícil, ou seja, classe de problemas que não possuem solução em tempo polinomial. Portanto, os algoritmos existentes são baseados em heurísticas de aproximação, e mesmo que seja executado

tal algoritmo, pelas aplicações do problema, a resolução do mesmo deve se dar de forma breve. Porém esses algoritmos abordam heurísticas complexas mesmo em grafos em que a melhor solução é defender os vértices das adjacências dos focos de incêndio, como na Figura 1, ou em grafos em que as adjacências dos focos tenham preferência a ser defendidas. Em inúmeras vezes, problemas como incêndios em áreas florestais, disseminação de vírus em um computador ou de doenças entre pessoas e propagação de desinformação, tais como: fake News ou discurso de ódio em redes sociais podem ser modelados em grafos e resolvidos de maneira a minimizar os danos por meio de uma solução aproximada do FFP.

Por exemplo, caso aconteça uma propagação de um incêndio em uma floresta e haja um número limitado de bombeiros para tentar conter o fogo, sendo que as adjacências dos focos de incêndios têm maior prioridade a serem defendidas, o problema poderia ser modelado em grafos da seguinte maneira:

- Cada área florestal seria considerada um vértice desse grafo.
- As arestas conectariam duas áreas florestais próximas.
- O número de bombeiros é a quantidade de brigadistas.

Considerando essa modelagem, o algoritmo tem que resolver o problema que é o FFP, em um tempo ágil, e teria que defender as adjacências do grafo de maneira a minimizar os danos. Outro exemplo de aplicação desse problema seria a invasão de um hacker ou um vírus em um computador. Dado que o vírus está mais próximo de funções vitais ou privadas da máquina, a modelagem poderia ser feita da seguinte forma:

- Cada recurso crítico ou privado seria um vértice do grafo
- As arestas conectariam cada recurso que permite acesso a outros recursos
- O número de brigadistas seria a quantidade máxima de vértices que o computador consegue defender em um curto intervalo de tempo.

Nessa modelagem o algoritmo tem que defender os vértices intocáveis dando preferência aos vértices adjacentes ao incêndio, pois o ataque ao sistema começou de funções vitais da máquina que dão acesso a outras funções valorosas.

Sabe-se que aplicações importantes estão ligadas ao problema do brigadista, dessa forma seria possível construir uma heurística que permitisse chegar a uma aproximação da melhor solução para as instâncias em que o melhor resultado é garantido ao marcar perto dos focos de incêndio? O objetivo desse trabalho é desenvolver um algoritmo com uma heurística simples que utiliza lógica matemática e garanta um bom resultado nas instâncias em que a melhor solução é garantida ao defender os vértices intocados das adjacências dos focos de incêndios.

O algoritmo proposto foi desenvolvido e testado em diversas instâncias, e com a heurística desenvolvida foi possível obter bons resultados nos testes realizados. Cabe ressaltar que esse artigo não aborda o quão perto ou longe da melhor solução esse algoritmo é capaz chegar, necessita-se de um estudo mais aprofundado para isso.

II. TRABALHOS RELACIONADOS

O problema do brigadista em grafos já foi abordado em diversos artigos científicos, nos quais foram apresentados algoritmos que visam chegar a uma aproximação da resolução ótima do problema ou suas variantes. Os algoritmos abordados nos artigos das referências [1] e [2] buscam encontrar uma aproximação da solução ótima do problema do brigadista visando minimizar a quantidade de vértices queimados no grafo. As heurísticas apresentadas nesses artigos pretendem chegar nessa aproximação desconsiderando que somente as adjacências dos focos de incêndio devem ser defendidas. Na Figura 2 é possível perceber a ideia dos algoritmos apresentados nesses artigos. Considerando a existência de somente 1 brigadista por rodada, na rodada 1 o vértice 3 é defendido, mas somente os vértices 1 e 2 são adjacentes ao foco, e na rodada seguinte o vértice 4 é protegido encerrando o problema através de uma solução ótima com somente 3 vértices queimados. No entanto, ao escolher um vértice a ser defendido na rodada 1, os algoritmos não dão preferência aos vértices 1 e 2 e, portanto, para as aplicações citadas na seção anterior, as ideias desses algoritmos não buscam a melhor solução.

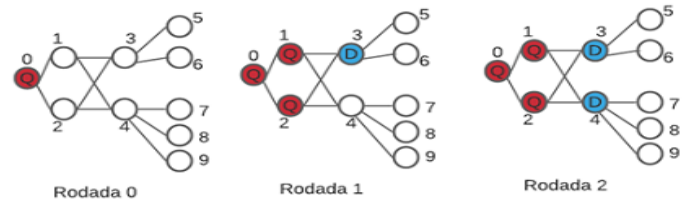


Figura 2. Resolução ótima do FFP sem dar preferência de defesa aos vértices adjacentes ao foco.

A melhor solução que satisfaz o problema encontrado é representada na Figura 3. É possível perceber que na primeira rodada o vértice 2, que é adjacente ao foco de incêndio, é defendido, na segunda e terceira rodada são defendidos os vértices 4 e 6 respectivamente, que também são adjacentes aos focos de incêndio. No final 4 vértices foram queimados e a solução ótima foi atingida.

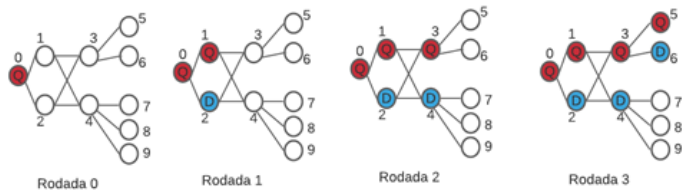


Figura 3. Resolução ótima do FFP com preferência de defesa aos vértices adjacentes ao foco.

Já na Figura 4 é apresentada uma resolução não ótima para o problema, pois 5 vértices são queimados. Ou seja, são queimados mais vértices que no caso da Figura 3.

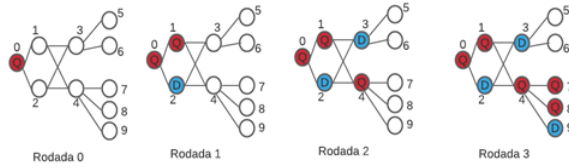


Figura 4. Resolução não ótima do FFP com preferência de defesa aos vértices adjacentes ao foco.

Alguns artigos abordam algoritmos de aproximação para o FFP em árvores, como nos artigos [3] de Leizhen e [4] de Yutaka, porém em muitas situações, como nas figuras acima e nas aplicações apresentadas, os grafos podem possuir ciclo, portanto esses algoritmos não são aplicáveis a esse tipo de situação ou não atingirão a solução esperada.

Existem também algoritmos gulosos para o problema do brigadista e um deles utiliza a estratégia de defender os vértices adjacentes aos focos de incêndio dando prioridade aos vértices que possuem a maior quantidade de vértices intocados em suas adjacências. Essa abordagem é interessante e simples, mas em diversas instâncias não consegue minimizar a quantidade de vértices queimados. Considerando um brigadista disponível na instância representada pela Figura 5, a melhor solução partir da rodada 0 resulta em 4 vértices queimados.

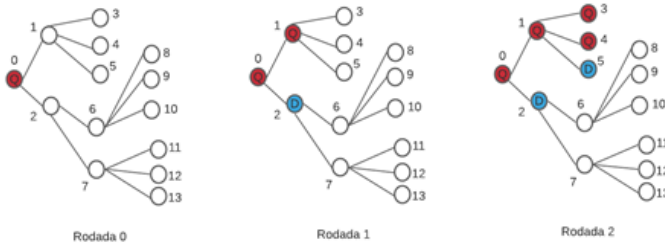


Figura 5. Resolução ótima do FFP defendendo o vértice adjacente ao foco que possui a menor quantidade de vértices intocados nas adjacências.

No entanto ao utilizar a estratégia do algoritmo guloso citado anteriormente, defendendo o vértice 1 na primeira rodada, resulta em um total de 5 vértices queimados. A diferença é mínima em relação a solução ótima, mas se os vértices 11 e 12 possuísssem 100 vértices adjacentes que não se conectam a nenhum outro vértice, então o total de vértices queimados utilizando a estratégia do algoritmo guloso seria 104 enquanto a solução ótima permaneceria com 4 vértices queimados. A execução do algoritmo guloso é apresentada na Figura 6.

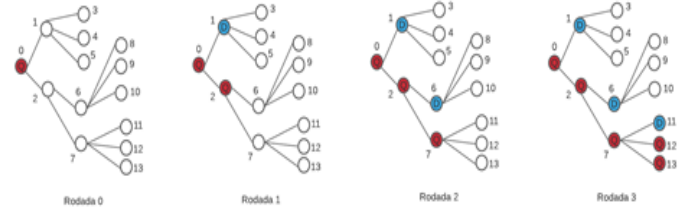


Figura 6. Resolução não ótima do FFP defendendo o vértice adjacente ao foco que possui a maior quantidade de vértices intocados nas adjacências (Algoritmo Guloso).

Percebe-se que os artigos supracitados não utilizam boas estratégias de minimização para o FFP considerando a prioridade de defesa aos vértices adjacentes aos focos e qualquer estrutura de grafo, portanto, pelas diversas aplicações que esse problema possui, um algoritmo que realiza a aproximação da solução ótima em qualquer grafo seria de grande valia.

III. ALGORITMO APROXIMADO

Dado um grafo com focos de incêndio em alguns vértices e ‘D’ brigadistas a serem utilizados no intuito de minimizar a quantidade de vértices queimados nesse grafo dando preferência aos vértices adjacentes aos focos de incêndio, é possível chegar a uma aproximação de uma boa solução através de um algoritmo que se baseia na seguinte pergunta: Qual o vértice que após ser defendido causa o menor estrago no grafo? Respondendo essa pergunta chega-se a uma boa solução do problema.

Uma estratégia para calcular os estragos que podem ser causados após supor a defesa de um vértice intocado, é o cálculo da média de vértices queimados. Calculando a média de vértices queimados de cada vértice intocado adjacente aos focos em cada rodada, o vértice com menor média deve ser defendido, pois, caso esse vértice seja defendido, causará em média menos estragos no grafo. Após a defesa de um vértice toda as médias devem ser recalculadas caso haja mais de um defensor, visto que, o grafo terá um novo vértice defendido, e novamente é escolhido para ser defendido o vértice intocado e adjacente aos focos que tem a menor média, isso se repete até alocar todos os defensores. Repetindo esse processo citado anteriormente a cada rodada uma boa solução pode ser encontrada.

Para o algoritmo ficar completo, deve-se definir uma heurística para calcular a média de vértices queimados a partir de um vértice ‘X’. Dado um vértice de análise:

- É definido uma ‘soma’ iniciada em 0, essa ‘soma’ será responsável por guardar todos os valores das iterações médias, ou seja, o estrago causado no grafo.
- É definido ‘antecessores’ iniciada em 0, ‘antecessores’ é a quantidade de vértices que foram queimados anteriormente.
- É definido ‘sucessores’ também iniciada em 0, ‘sucessores’ é a quantidade de vértices que serão queimados na próxima iteração.

- Também é definido ‘anteriores’ que é iniciada em 0, ‘anteriores’ é a quantidade média de vértices que passaram da iteração anterior para a iteração atual.
- O vértice da análise é considerado previamente como defendido.

Após todas essas inicializações e a consideração que o vértice da análise está defendido, os vértices intocados adjacentes aos focos são queimados, e as variáveis ‘soma’, ‘antecessores’ e ‘anteriores’ incrementam em seu valor a quantidade de vértices que acabaram de ser queimados. Isso acontece porque a ‘soma’ é a variável que armazena o estrago causado no grafo, portanto, após considerar um vértice ‘X’ como defendido, os outros vértices adjacentes aos focos serão queimados gerando um estrago que é armazenado em ‘soma’. A variável ‘antecessores’ também recebe essa quantidade pois na próxima iteração essa é a quantidade de vértices que foram queimados anteriormente. E como esses vértices são queimados, a variável ‘anteriores’ também deve receber a mesma quantidade porque essa é a quantidade média de vértices que passaram pela iteração.

Antes do algoritmo continuar é conferido se há mais vértices a serem queimados. Se não existe mais vértices a serem queimados então é retornado o valor armazenado na variável ‘soma’, caso contrário o algoritmo continua sua execução.

Na próxima etapa a variável ‘sucessores’ incrementa em seu valor a quantidade de vértices que serão queimados, ou seja, a quantidade de vértices intocados adjacentes aos focos de incêndio, e a variável ‘anteriores’ recebe a média de vértices que serão queimados através da fórmula: $(\text{‘sucessores’} / \text{‘antecessores’}) * \text{‘anteriores’} - \text{‘D’}$, onde ‘D’ é a quantidade de brigadistas disponíveis. Após esse cálculo é conferido se a variável ‘anteriores’ é menor ou igual a 0, caso isso ocorra é retornado a variável ‘soma’ como média de estragos a partir do vértice ‘X’, caso contrário o algoritmo continua sua execução incrementando o valor armazenado na variável ‘anteriores’ na variável ‘soma’, desse modo, ‘soma’ contém todo o estrago médio causado até então e ‘anteriores’ contém a quantidade média de vértices queimados na iteração atual, e que será utilizado na iteração posterior. Depois desse processo os vértices intocados adjacentes aos focos de incêndio são queimados.

Posteriormente inicia-se um loop, que se repete enquanto houver focos de incêndio, com os seguintes passos:

- A variável ‘antecessores’ recebe o valor armazenado na variável ‘sucessores’, ou seja, os vértices que eram ‘sucessores’ agora são ‘antecessores’.
- É calculado a quantidade de vértices intocados adjacentes aos novos focos de incêndio que é armazenada em ‘sucessores’.
- Se ‘antecessores’ (quantidade de vértices que foram queimados anteriormente), for menor ou igual a ‘D’ (número de brigadistas disponíveis), então o loop é encerrado, pois na iteração anterior é possível defender todos os vértices e terminar a execução.
- Se não houver vértices a serem queimados, ou seja, sucessores = 0, então o loop também é interrompido.

- Caso contrário deve-se calcular o estrago médio que pode ser causado no grafo através da seguinte fórmula: $(\text{‘sucessores’} / \text{‘antecessores’}) * \min(\text{‘anteriores’}, \text{‘antecessores’}) - \text{‘D’}$.
- A parte: $(\text{‘sucessores’} / \text{‘antecessores’}) * \min(\text{‘anteriores’}, \text{‘antecessores’})$ da fórmula serve para calcular quantos vértices intocados em média saem de cada vértice antecessor, que é multiplicada pelo valor mínimo entre ‘anteriores’ ou ‘antecessores’, ou seja, a quantidade média de vértices que passaram pela iteração anterior, então é subtraído desse resultado o valor de ‘D’, quantidade de vértices que serão defendidos, então restará somente a quantidade média de vértices que passaram como queimados.
- O resultado da fórmula supracitada é armazenado em ‘anteriores’.
- Se o valor de ‘anteriores’ for menor ou igual a 0, significa que em média não existem vértices intocados que serão queimados, portanto o loop é encerrado.
- Caso contrário o valor de ‘soma’ é incrementado com o valor de ‘anteriores’, e os vértices intocados adjacentes aos focos de incêndio são queimados e o loop se repete.

Após sair do loop é retornado o estrago que pode ser causado ao defender o vértice ‘X’, ou seja, é retornado o valor armazenado em ‘soma’. Cabe ressaltar que logo após a execução do cálculo do estrago médio o grafo deve retornar ao estado que estava antes da análise do vértice ‘X’.

A partir da instância da figura abaixo, considerando 1 defensor e um vértice como foco de incêndio (vértice 4), será aplicado o passo a passo do algoritmo supracitado. O primeiro passo do algoritmo é calcular a média de estragos a partir de cada vértice intocado adjacente ao foco de incêndio, isso significa que deverá ser calculada a média de estragos para os vértices 1, 3 e 5.

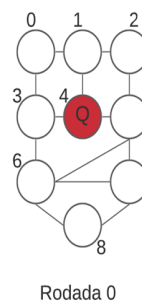


Figura 7. Instância I para resolução do FFP usando o algoritmo aproximado.

Analisando o vértice 1 como possível ponto de defesa na rodada 1, as variáveis ‘soma’, ‘antecessores’, ‘sucessores’ e ‘anteriores’ são inicializadas com o valor 0 (Figura 8).

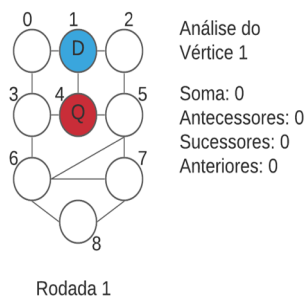


Figura 8. Primeira iteração na análise do vértice 1 da Instância I na 1ª rodada.

Em seguida, o fogo se espalha para os vértices intocados adjacentes ao foco, ou seja, os vértices 3 e 5 são queimados, e a variável ‘soma’ que armazena a quantidade de estragos é incrementada em 2 unidades, assim como as variáveis ‘anteriores’ e ‘antecessores’ (Figura 9).

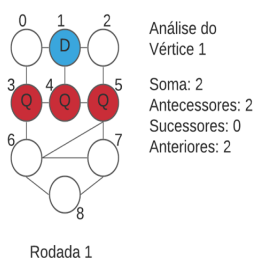


Figura 9. Segunda iteração na análise do vértice 1 da Instância I na 1ª rodada.

Agora pode ser calculado os ‘sucessores’, que nada mais são que a quantidade de vértices intocados adjacentes aos focos, nesse exemplo os vértices 0, 2, 6 e 7 que são adjacentes aos focos, portanto ‘sucessores’ recebe o valor 4. Em seguida é calculado o valor de ‘anteriores’ pela fórmula mostrada na figura abaixo e o novo valor de ‘anteriores’ é incrementado no valor da ‘soma’.

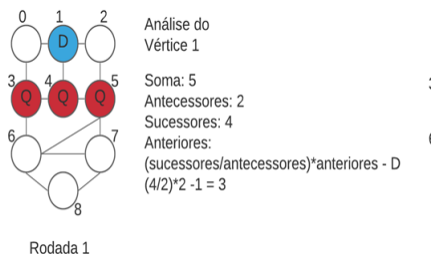


Figura 10. Terceira iteração na análise do vértice 1 da Instância I na 1ª rodada.

Então o fogo se espalha para os vértices intocados das adjacências dos focos de incêndio, ou seja, os vértices 0, 2, 6 e 7 são queimados (Figura 11).

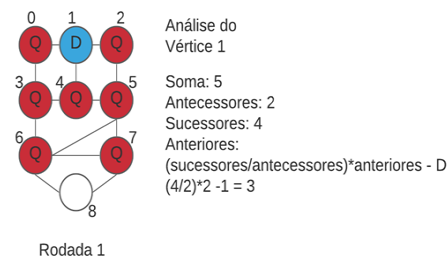


Figura 11. Quarta iteração na análise do vértice 1 da Instância I na 1ª rodada.

Finalmente, ‘antecessores’ recebe ‘sucessores’, e o novo valor de ‘sucessores’ é calculado e é igual a 1, pois há somente um vértice intocado adjacente aos focos de incêndio (vértice 8). Também é calculado o novo valor de ‘anteriores’ a partir da fórmula da figura abaixo. E como o valor de ‘anteriores’ é -0.25 que é menor ou igual a 0, então a execução do cálculo da média do vértice 1 termina e o estrago associado a ele é igual ao valor na armazenado na variável ‘soma’, ou seja, ao defender o vértice 1 na rodada 1 gerará aproximadamente 5 vértices queimados.

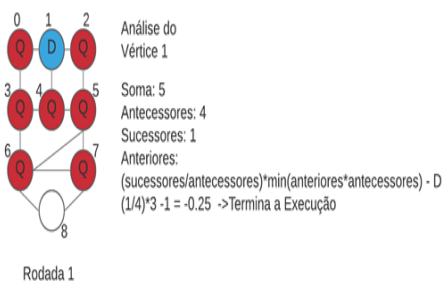


Figura 12. Quinta iteração na análise do vértice 1 da Instância I na 1ª rodada.

Analisando o vértice 3 como possível ponto de defesa na rodada 1, as variáveis ‘soma’, ‘antecessores’, ‘sucessores’ e ‘anteriores’ são inicializadas com o valor 0 (Figura 13).

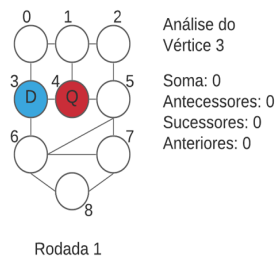


Figura 13. Primeira iteração na análise do vértice 3 da Instância I na 1ª rodada.

Em seguida, o fogo se espalha para os vértices intocados adjacentes ao foco, ou seja, os vértices 1 e 5 são queimados, e a variável ‘soma’ que armazena a quantidade de estragos

é incrementada em 2 unidades, assim como as variáveis ‘anteriores’ e ‘antecessores’ (Figura 14).

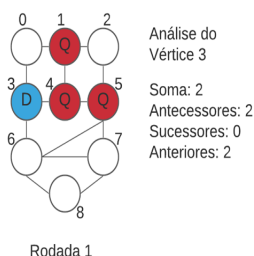


Figura 14. Segunda iteração na análise do vértice 3 da Instância I na 1ª rodada.

Agora pode ser calculado os ‘sucessores’, que nada mais são que a quantidade de vértices intocados adjacentes aos focos, nesse exemplo os vértices 0, 2, 6 e 7 que são adjacentes aos focos, portanto ‘sucessores’ recebe o valor 4. Em seguida é calculado o valor de ‘anteriores’ pela fórmula mostrada na figura abaixo e o novo valor de ‘anteriores’ é incrementado no valor da ‘soma’.

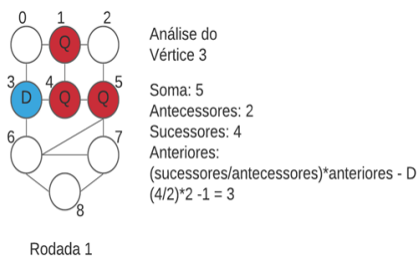


Figura 15. Terceira iteração na análise do vértice 3 da Instância I na 1ª rodada.

Então o fogo se espalha para os vértices intocados das adjacências dos focos de incêndio, ou seja, os vértices 0, 2, 6 e 7 são queimados (Figura 16).

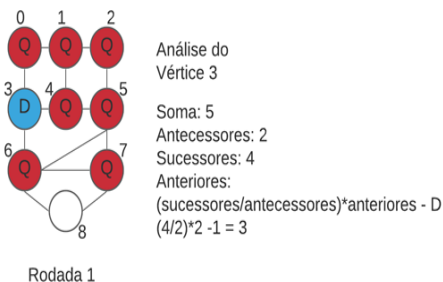


Figura 16. Quarta iteração na análise do vértice 3 da Instância I na 1ª rodada.

Finalmente, ‘antecessores’ recebe ‘sucessores’, e o novo valor de ‘sucessores’ é calculado e é igual a 1, pois há somente um vértice intocado adjacente aos focos de incêndio (vértice

8). Também é calculado o novo valor de ‘anteriores’ a partir da fórmula da figura abaixo. E como o valor de ‘anteriores’ é -0.25 que é menor ou igual a 0, então a execução do cálculo da média do vértice 3 termina e o estrago associado a ele é igual ao valor na armazenado na variável ‘soma’, ou seja, ao defender o vértice 3 na rodada 1 gerará aproximadamente 5 vértices queimados.

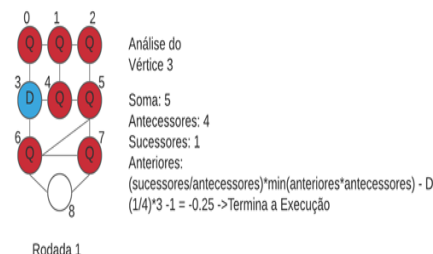


Figura 17. Quinta iteração na análise do vértice 3 da Instância I na 1ª rodada.

Analisando o vértice 5 como possível ponto de defesa na rodada 1, as variáveis ‘soma’, ‘antecessores’, ‘sucessores’ e ‘anteriores’ são inicializadas com o valor 0 (Figura 18).

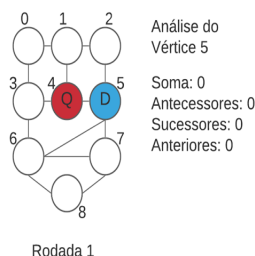


Figura 18. Primeira iteração na análise do vértice 5 da Instância I na 1ª rodada.

Em seguida, o fogo se espalha para os vértices intocados adjacentes ao foco, ou seja, os vértices 1 e 3 são queimados, e a variável ‘soma’ que armazena a quantidade de estragos é incrementada em 2 unidades, assim como as variáveis ‘anteriores’ e ‘antecessores’ (Figura 19).

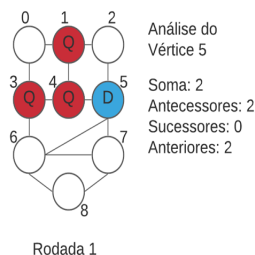


Figura 19. Segunda iteração na análise do vértice 5 da Instância I na 1ª rodada.

Agora pode ser calculado os ‘sucessores’, que nada mais são que a quantidade de vértices intocados adjacentes aos focos, nesse exemplo os vértices 0, 2 e 6 que são adjacentes aos focos, portanto ‘sucessores’ recebe o valor 3. Em seguida é calculado o valor de ‘anteriores’ pela fórmula mostrada na figura abaixo e o novo valor de ‘anteriores’ é incrementado no valor da ‘soma’.

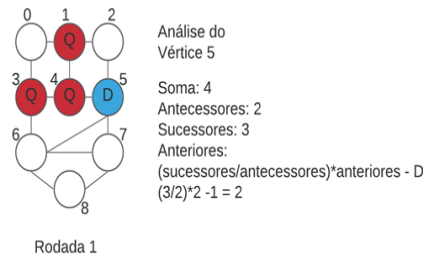


Figura 20. Terceira iteração na análise do vértice 5 da Instância I na 1ª rodada.

Então o fogo se espalha para os vértices intocados das adjacências dos focos de incêndio, ou seja, os vértices 0, 2 e 6 são queimados (Figura 21).

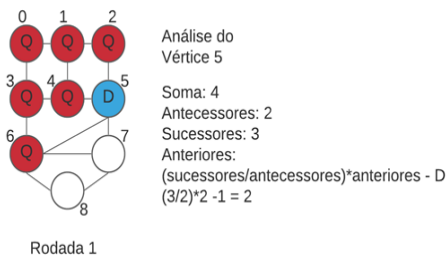


Figura 21. Quarta iteração na análise do vértice 5 da Instância I na 1ª rodada.

Seguidamente, ‘antecessores’ recebe ‘sucessores’, e o novo valor de ‘sucessores’ é calculado e é igual a 2, pois há somente dois vértices intocados adjacentes aos focos de incêndio (vértices 7 e 8). Também é calculado o novo valor de ‘anteriores’ a partir da fórmula da figura abaixo, que é igual a 0.33333. Como ‘antecessores’ não é menor ou igual ao número de defensores, e ‘sucessores’ não é igual a 0, e anteriores não é menor que 0, então o loop repete mais uma vez (Figura 22).

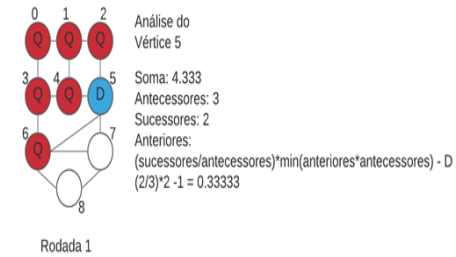


Figura 22. Quinta iteração na análise do vértice 5 da Instância I na 1ª rodada.

Na sequência, o fogo se espalha para os vértices 7 e 8, pois são intocados e adjacentes aos focos de incêndio. Nesse momento o valor de ‘sucessores’ é igual a 0, então a execução do cálculo da média do vértice 5 termina e o estrago associado a ele é igual ao valor na armazenado na variável ‘soma’, ou seja, ao defender o vértice 5 na rodada 1 gerará aproximadamente 4.33 vértices queimados (Figura 23).

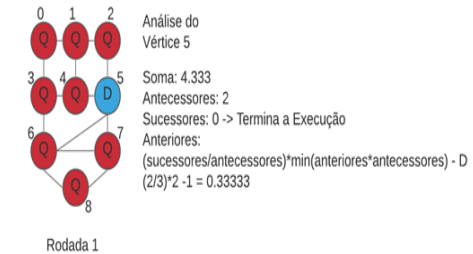


Figura 23. Sexta iteração na análise do vértice 5 da Instância I na 1ª rodada.

Após concluir o cálculo das médias, os vértices 1 e 3 obtiveram média 5, e o vértice 5 obteve média 4.333. Como o vértice 5 obteve a menor média então ele é escolhido para ser defendido na rodada 1 e o fogo se espalha para os vértices 1 e 3. Ainda há vértices adjacentes aos focos a serem defendidos, portanto o algoritmo deve realizar o cálculo das médias para os vértices 0, 2 e 6 na rodada 2 (Figura 24).

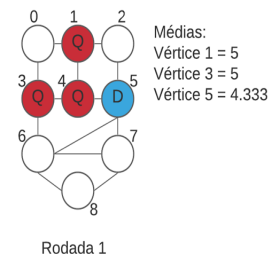


Figura 24. Cálculo das médias da Instância I na 1ª rodada.

Analisando o vértice 0 como possível ponto de defesa na rodada 2, as variáveis ‘soma’, ‘antecessores’, ‘sucessores’ e ‘anteriores’ são inicializadas com o valor 0 (Figura 25).

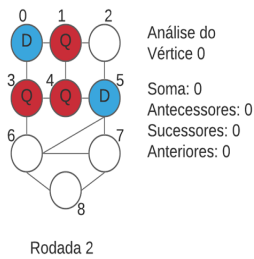


Figura 25. Primeira iteração na análise do vértice 0 da Instância I na 2ª rodada.

Em seguida, o fogo se espalha para os vértices intocados adjacentes aos focos, ou seja, os vértices 2 e 6 são queimados, e a variável ‘soma’ que armazena a quantidade de estragos é incrementada em 2 unidades, assim como as variáveis ‘anteriores’ e ‘antecessores’ (Figura 26).

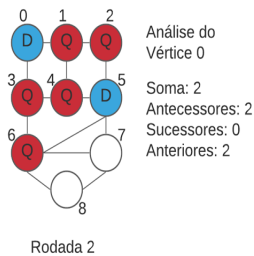


Figura 26. Segunda iteração na análise do vértice 0 da Instância I na 2ª rodada.

Agora pode ser calculado os ‘sucessores’, que nada mais são que a quantidade de vértices intocados adjacentes aos focos, nesse exemplo os vértices 7 e 8 são adjacentes aos focos, portanto ‘sucessores’ recebe o valor 2. Em seguida é calculado o valor de ‘anteriores’ pela fórmula mostrada na figura abaixo e o novo valor de ‘anteriores’ é incrementado no valor da ‘soma’.

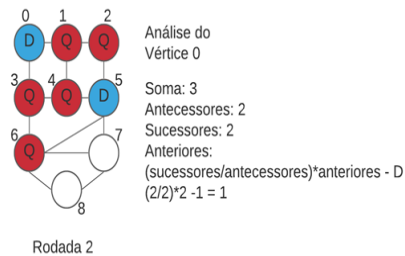


Figura 27. Terceira iteração na análise do vértice 0 da Instância I na 2ª rodada.

Então o fogo se espalha para os vértices intocados das adjacências dos focos de incêndio, ou seja, os vértices 7 e 8 são queimados, e nesse momento o valor de ‘sucessores’ é igual a

0, então a execução do cálculo da média do vértice 0 termina e o estrago associado a ele é igual ao valor na armazenado na variável ‘soma’, ou seja, ao defender o vértice 0 na rodada 2 gerará aproximadamente 3 vértices queimados.(Figura 28).

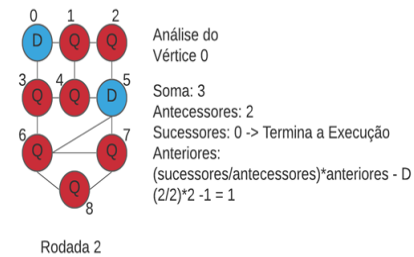


Figura 28. Quarta iteração na análise do vértice 0 da Instância I na 2ª rodada.

Analisando o vértice 2 como possível ponto de defesa na rodada 2, as variáveis ‘soma’, ‘antecessores’, ‘sucessores’ e ‘anteriores’ são inicializadas com o valor 0 (Figura 29).

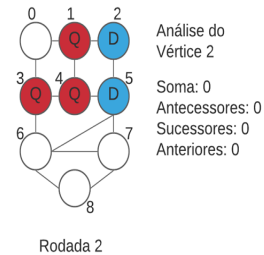


Figura 29. Primeira iteração na análise do vértice 2 da Instância I na 2ª rodada.

Em seguida, o fogo se espalha para os vértices intocados adjacentes aos focos, ou seja, os vértices 0 e 6 são queimados, e a variável ‘soma’ que armazena a quantidade de estragos é incrementada em 2 unidades, assim como as variáveis ‘anteriores’ e ‘antecessores’ (Figura 30).

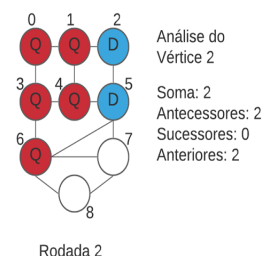


Figura 30. Segunda iteração na análise do vértice 2 da Instância I na 2ª rodada.

Agora pode ser calculado os ‘sucessores’, que nada mais são que a quantidade de vértices intocados adjacentes aos focos, nesse exemplo os vértices 7 e 8 são adjacentes aos focos,

portanto ‘sucessores’ recebe o valor 2. Em seguida é calculado o valor de ‘anteriores’ pela fórmula mostrada na figura abaixo e o novo valor de ‘anteriores’ é incrementado no valor da ‘soma’.

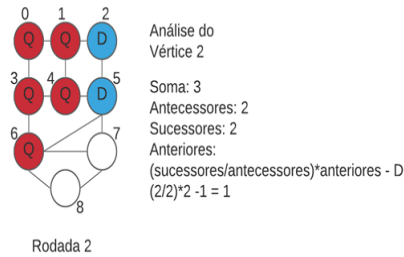


Figura 31. Terceira iteração na análise do vértice 2 da Instância I na 2ª rodada.

Então o fogo se espalha para os vértices intocados das adjacências dos focos de incêndio, ou seja, os vértices 7 e 8 são queimados, e como o valor de ‘sucessores’ é igual a 0, a execução do cálculo da média do vértice 2 termina e o estrago associado a ele é igual ao valor armazenado na variável ‘soma’, ou seja, ao defender o vértice 2 na rodada 2 gerará aproximadamente 3 vértices queimados.(Figura 32).

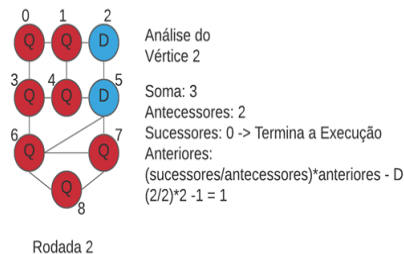


Figura 32. Quarta iteração na análise do vértice 2 da Instância I na 2ª rodada.

Analisando o vértice 6 como possível ponto de defesa na rodada 2, as variáveis ‘soma’, ‘antecessores’, ‘sucessores’ e ‘anteriores’ são inicializadas com o valor 0 (Figura 33).

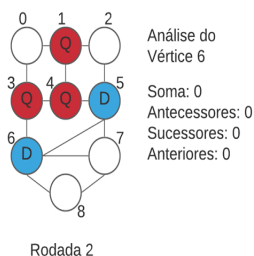


Figura 33. Primeira iteração na análise do vértice 6 da Instância I na 2ª rodada.

Em seguida, o fogo se espalha para os vértices intocados adjacentes aos focos, ou seja, os vértices 0 e 2 são queimados,

e a variável ‘soma’ que armazena a quantidade de estragos é incrementada em 2 unidades, assim como as variáveis ‘anteriores’ e ‘antecessores’. Como o valor de ‘sucessores’ é igual a 0, a execução do cálculo da média do vértice 6 termina e o estrago associado a ele é igual ao valor armazenado na variável ‘soma’, ou seja, ao defender o vértice 6 na rodada 2 gerará aproximadamente 2 vértices queimados.(Figura 34).

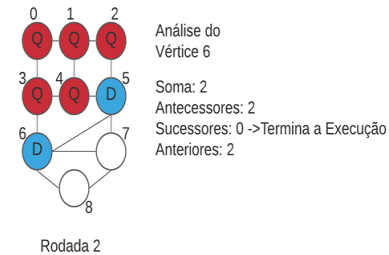


Figura 34. Segunda iteração na análise do vértice 6 da Instância I na 2ª rodada.

Após concluir o cálculo das médias, os vértices 0 e 2 obtiveram média 4, e o vértice 6 obteve média 2. Como o vértice 6 obteve a menor média então ele é escolhido para ser defendido na rodada 2 e o fogo é contido e a melhor solução (5 vértices queimados) é obtida. (Figura 35).

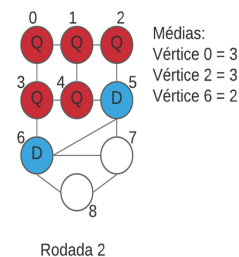


Figura 35. Cálculo das médias da Instância I na 2ª rodada.

Considerando a mesma instância da Figura 7, porém agora com 2 defensores disponíveis, após o cálculo das médias na primeira rodada os vértices 1 e 3 obtiveram média 4, e o vértice 5 obteve média 3, então o vértice 5 é defendido e um segundo cálculo é feito para os vértices não defendidos, pois existe mais um defensor a se utilizar. No segundo cálculo os vértices 1 e 3 obtiveram média 1, então o vértice 1 foi defendido e o fogo se espalhou para o vértice 3.

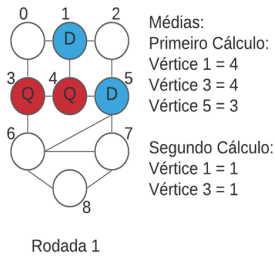


Figura 36. Instância II para resolução do FFP e cálculo das médias na 1ª rodada utilizando o algoritmo aproximado.

Fazendo o cálculo das médias na segunda rodada os vértices 0 e 6 obtiveram média 1, então o vértice 0 é defendido e um segundo cálculo é feito para o vértice não defendido, pois existe mais um defensor a se utilizar. No segundo cálculo o vértice 6 obteve média 0, então o vértice 6 foi defendido e o problema é concluído com uma solução ótima de apenas 2 vértices queimados. Para demonstração do algoritmo foi realizado o último passo mostrado na figura abaixo, mas quando o número de vértices intocados adjacentes aos focos de incêndio é menor ou igual ao número de defensores não é necessário calcular as médias, é só defendê-los.

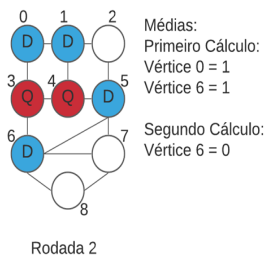


Figura 37. Instância II para resolução do FFP e cálculo das médias na 2ª rodada utilizando o algoritmo aproximado.

IV. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal deste trabalho foi a criação de um algoritmo para o problema do brigadista em grafos (FFP) que dê preferência de defesa aos vértices adjacentes aos focos de incêndio. Utilizando estratégias matemáticas foi possível chegar a um bom algoritmo que garante bons resultados em tempo polinomial, mas nada impede que uma melhoria possa ser feita por cima do mesmo já que esse algoritmo possui muitos parâmetros de análise que podem ser alterados. Também é possível incluir novos critérios que podem gerar melhorias.

O algoritmo criado garante bons resultados em diversas instâncias independente do tipo do grafo, porém quando dois ou mais vértices intocados prestes a serem defendidos possuem uma mesma média não há um critério de desempate para avaliar qual o melhor vértice a ser defendido e não se sabe se sempre que isso ocorre a escolha de qualquer vértice não

altera o resultado final. Também não se sabe se a combinação de dois ou mais vértices defendidos pode gerar um melhor resultado do que analisar cada vértice intocado adjacente aos focos de incêndio de maneira separada.

É necessário mais estudos e análises para descobrir o quão perto ou longe da melhor solução esse algoritmo é capaz chegar. No mais, o algoritmo cumpre o seu propósito nas diversas instâncias testadas.

V. REFERENCIAL TEÓRICO

Foi utilizado o software online Lucidchart para fazer a representação das instâncias do FFP nos grafos apresentados nesse trabalho. Mais informações sobre esse software se encontra em Referências [5].

REFERÊNCIAS

- [1] RAMOS, Natanael. *Um estudo computacional do problema do brigadista em grafos*. 2018. 1 recurso online (82 p.). Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Computação, Campinas, SP. Disponível em: <<http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/331841>>. Acesso em: 15 jun.2021.
- [2] Anshelevich, Elliot. *Approximability of the firefighter problem*. Em: *Algorithmica* 62. 2012. 520-536 p. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00453-010-9469-y>>. Acesso em: 04 jul.2021.
- [3] Leizhen Cai, Elad Verbin e Lin Yang. *Firefighting on trees: (1-1/e)-approximation, fixed parameter tractability and a subexponential algorithm*. Em: *Algorithms and Computation*. Gold Coast, Australia: Springer. 2008. 258-269 p. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-92182-0_25>. Acesso em: 04 jul.2021.
- [4] Yutaka Iwaikawa, Naoyuki Kamiyama e Tomomi Matsui. *Improved approximation algorithms for firefighter problem on trees*. Em: *IEICE TRANSACTIONS on Information and Systems* 94.2. 2011. 196-199 p. Disponível em: <<https://doi.org/10.1587/transinf.E94.D.196>>. Acesso em: 04 jul.2021.
- [5] LUCIDCHART. *Lucidchart: Software online de diagramas e comunicação visual*. 2021. Página Inicial. Disponível em: <<https://www.lucidchart.com/>>. Acesso em: 15 de jun. de 2021