Modèle Géométrique de la voiture

Rédigé par l’équipe TRENTON

Table de matières

I/ Présentation

a) Présentation du système

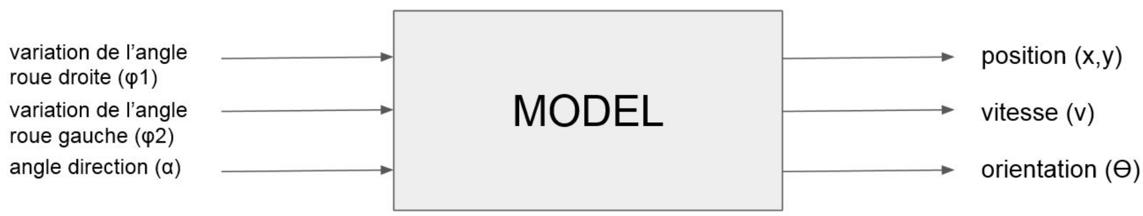
Nous avons à notre disposition un véhicule à 4 roues, une voiture jouet classique.

Il est possible de commander diverses parties de la voiture.
Sur chacune des roues arrières se trouve un moteur qu'il est possible de commander électroniquement.
On trouve également un moteur sur l'axe du volant, et celui-ci permet, en commandant l'orientation du volant, de commander l'orientation du train de roues avant. On peut donc ainsi commander l'orientation de la voiture.

Il est également possible de mesurer plusieurs grandeurs physiques sur la voiture.
On peut mesurer, pour chacune des roues arrières, l'angle de la roue par rapport à une origine (arbitraire) grâce à un odomètre.
On peut mesurer également, grâce un troisième odomètre, l'orientation du train de roues avant (un autre angle donc).

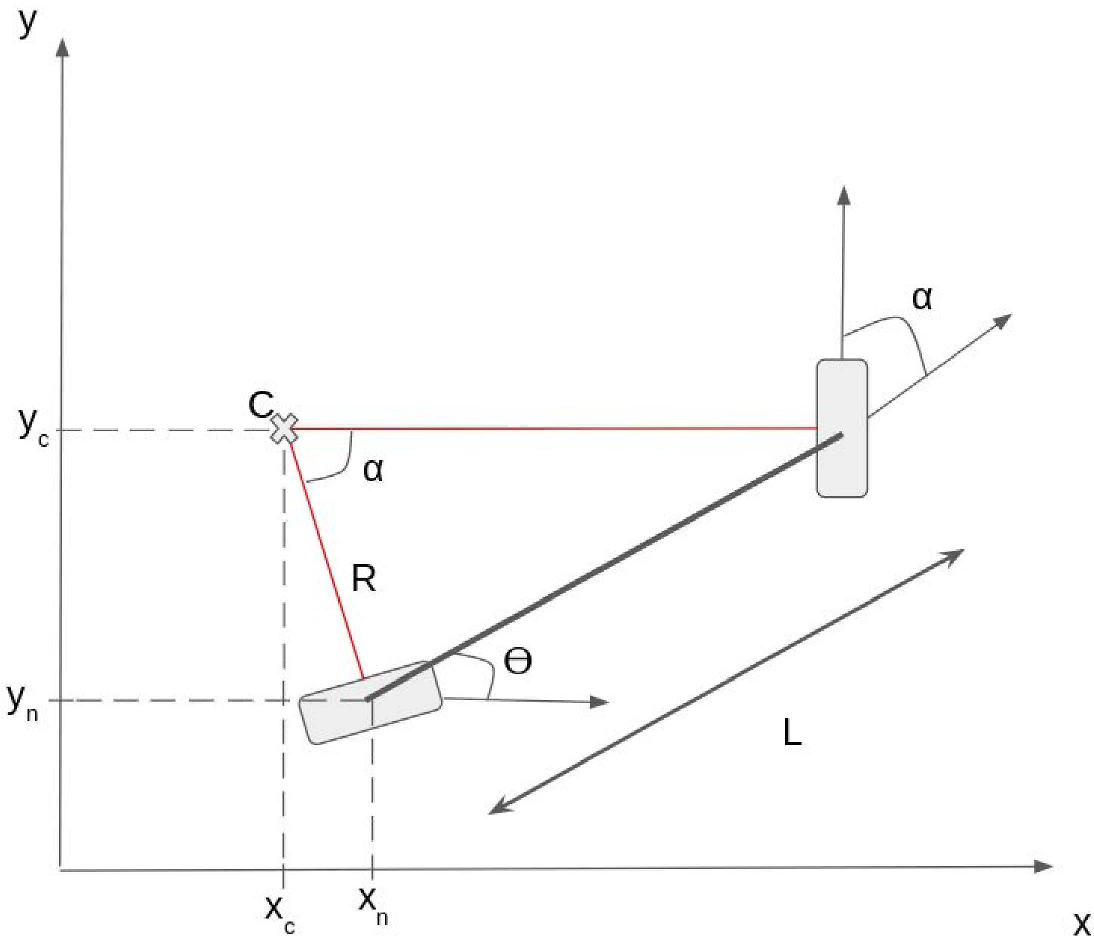
b) Notre objectif

L'objectif de ce document est de présenter une modélisation de la voiture.
Plus précisément, nous allons créer un modèle permettant de calculer la **position**, la **vitesse** (positive ou négative) et l'**orientation** de la voiture, à **intervalles réguliers** (tous les T_e). Ceux seront les **sorties du système**.
Notre objectif est de calculer ces sorties à partir de données d'entrées. Les 3 odomètres nous fournissent, à **intervalles réguliers** (tous les T_e), trois mesures physiques: l'angle de la roue gauche, l'angle de la roue droite et l'angle du train de roues avant.
A partir de ces 3 valeurs, on peut déterminer les **3 paramètres d'entrées** du système: la **variation d'angle de la roue gauche**, la **variation d'angle de la roue droite** et l'**angle du train de roues** avant.



II/ Base du modèle “la bicyclette”

Pour modéliser la trajectoire de notre voiture, nous avons réduit le modèle à une bicyclette. En effet, les moteurs des roues arrières tournent à la même vitesse. Cependant, même si les roues arrières ne tournent pas à la même vitesse, le modèle bicyclette marche bien, comme on le verra par la suite. De là, nous avons établi des équations géométriques basées sur le centre de rotation et la trigonométrie.



<u>Schéma du modèle de la bicyclette</u>

a) Modélisation du train de roues avant de la voiture

Comme on l'a vu précédemment, les deux roues arrières possèdent chacun un odomètre. On va numéroter les roues: la roue gauche est la roue 2, et la roue droite est la roue 1.
A chaque période d'échantillonnage, on recevra les angles parcourus, la variation d'angle effectuée par les roues durant la période d'échantillonnage. On notera ces angles φ_{1mes} et φ_{2mes}.
En partant de ces angles et en connaissant le rayon des roues nous allons calculer la distance parcourue pour chacune des roues :
Relation (1):

$$d_1 = \varphi_1 \times \frac{180}{\pi} \times Rroue$$
$$d_2 = \varphi_2 \times \frac{180}{\pi} \times Rroue$$

Cependant, le modèle bicyclette possède une seule roue arrière. On va donc calculer une roue "équivalente" aux deux roues arrières. Pour cela, on va calculer la distance d parcourue par le milieu du train arrière:
Relation (2):

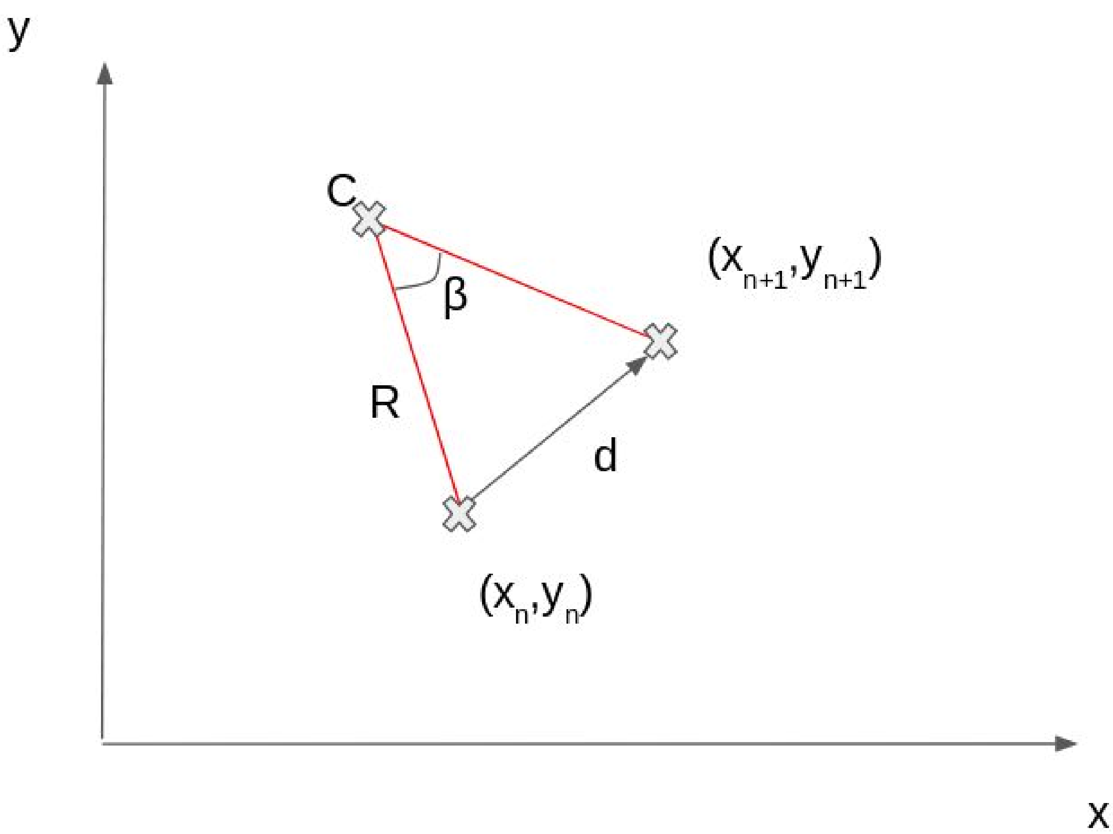
$$d = (d_1 + d_2)/2$$

Maintenant nous avons besoin de connaître de combien va varier l'angle de la voiture (l'orientation) en fonction de la distance parcourue. Lorsque la voiture effectue un virage, son orientation va varier en fonction de la distance parcourue d et l'inclinaison des roues α, il faut aussi prendre en compte la distance L entre les roues arrières et les roues avants. On calcule donc β la variation d'angle:
Relation (3):

$$\beta = \frac{d}{R} = \frac{d}{L} \times tan(\alpha)$$

Nous pouvons calculer le rayon de courbure de la trajectoire de la voiture:
Relation (4):

$$R = \frac{L}{tan(\alpha)}$$



<u>Schéma de la distance entre deux positions de la voiture</u>

Maintenant que nous connaissons R et β, nous pouvons calculer la nouvelle position, la nouvelle vitesse, et la nouvelle direction. En effectuant ses calculs de manière itérative nous sommes capables de connaître la position, la vitesse et l'orientation de la voiture à chaque période d'échantillonnage.

Les deux première relations permettent d'exprimer le centre de instantané de rotation en connaissant la position précédente de la voiture et son orientation:
<u>Relation (5):</u>

$$x_c = x_n - R \times sin(\theta_n)$$
$$y_c = y_n + R \times cos(\theta_n)$$

Les deux suivantes permettent de connaître la position actuelle de la voiture, en connaissant le rayon de courbure et la variation de l'orientation de la voiture:
<u>Relation (6):</u>

$$x_{n+1} = x_c + R \times sin(\theta_n + \beta)$$
$$y_{n+1} = y_c - R \times cos(\theta_n + \beta)$$

Grâce à β nous en déduisons l'orientation actuelle de la voiture en fonction de l'orientation précédente:

Relation (6) (suite):

$$\theta_{n+1} = \beta + \theta_n$$

Grâce au 4 équations précédentes on obtient deux équations permettant de connaître la position actuelle de la voiture en fonction de la position précédente de la voiture:

Relation 7 :

$$x_{n+1} = x_n - R \times sin(\theta_n) \; + \; R \times sin(\theta_n + \beta)$$
$$y_{n+1} = y_n + R \times cos(\theta_n) \; - \; R \times cos(\theta_n + \beta)$$

b) Cas particulier : trajectoire rectiligne

La relation (4) nous pose un problème au niveau du calcul , car on tombe sur une division par 0.
Lorsque $\alpha = 0$ les roues sont droites, il suffit juste de traiter ce cas comme une trajectoire rectiligne. Dans ce cas l'angle β est nul, R est infini et la relation (6) devient :

Relation 8:

$$x_{n+1} = x_n \; + \; d \times cos(\theta_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + d \times sin(\theta_n)$$

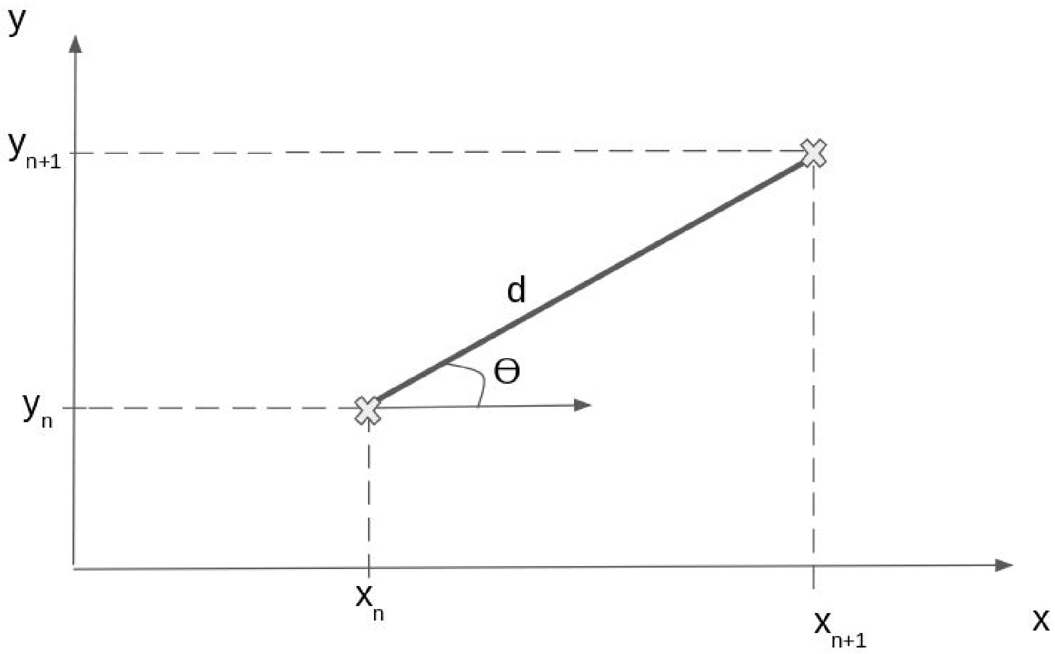


Schéma de la trajectoire entre deux points dans le cas rectiligne ($\alpha = 0$)

c) Calcul de la vitesse

Nous pouvons calculer la vitesse de la voiture à partir de la position calculée précédemment grâce à cette équation :

Relation 9 :

$$v = signe\ de\ d1 \times \frac{\sqrt{(x_n - x_{n+1})^2 + (y_n - y_{n+1})^2}}{T_e}$$

Rq:
- On multiplie la vitesse par le signe de d1 pour distinguer lorsque la voiture avance ou recule.
- Ce calcul est vrai pour une trajectoire rectiligne, lorsque la voiture va tourner il va falloir prendre un période d'échantillonnage assez basse pour venir lisser la courbe.

III/ Approche du modèle à 4 roues

a) Prise en compte du différentiel roues arrières

Si on prend en compte le modèle voiture 4 roues, on constate que lorsque la voiture tourne, la roue la plus éloigné du centre instantané de rotation va devoir tourner plus vite que l'autre. On peut exprimer ce différentiel à partir de cette équation :

Tout d'abord on exprime la distance parcoure par chaques roues

Relation 10 :

$$d_1 = \beta \times (R_2 + l) \quad , \; R_1 = R_2 + l$$
$$d_2 = \beta \times R_2$$

En soustrayant les deux équations on obtient

Relation 11 :

$$d_1 - d_2 = \beta \times l$$
$$\beta = \frac{d_1 - d_2}{l}$$

l : distance entre les deux roues arrières

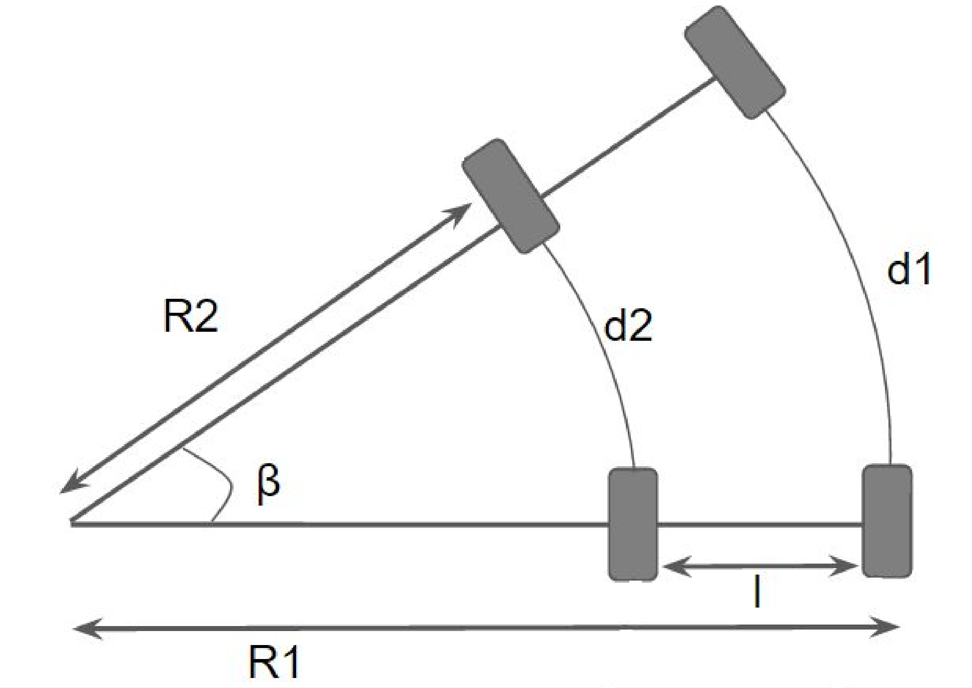


Schéma: trajectoire des deux roues arrières sur le modèle 4 roues

IV/ Implémentation en Python

Chaque relation a été écrite sous la forme d'une fonction. Toutes ses fonctions sont regroupé dans un fichier API.py. Nous avons un fichier modlestep.py qui fait appel aux fonctions de l'API. Pour plus d'informations vous pouvez accéder à ces fichiers sur le github.

V/ Synthèse

Nous allons récapituler les entrées, sorties et paramètres de notre modèle:

a) <u>Paramètres</u>

Rroue : rayon des roues (mètres)
l : distance entre les deux roues arrières (mètres)
L : distance entre le train avant et le train arrière (mètres)
Te : période d'échantillonnage des données capteurs

b) <u>Entrées</u>

φ_1 : angle de la roue arrière droite (radians)
φ_2 : angle de la roue arrière gauche (radians)
α : angle de direction (radians)
(x_n,y_n) : position précédente de la voiture (x : mètres et y : mètres)

c) <u>Sorties</u>

v : vitesse de la voiture (m/s)
Θ : orientation de la voiture (radians)
(x_{n+1},y_{n+1}) : position de la voiture (x : mètres et y : mètres)

d) Equations

Rel 1 :

$d_1 = \varphi_1 \times \frac{180}{\pi} \times Rroue$

$d_2 = \varphi_2 \times \frac{180}{\pi} \times Rroue$

Rel 2 :

$d = (d_1 + d_2)/2$

Position trajectoire curviligne (α >1°)

Rel 3 :

$\beta = \frac{d}{R} = \frac{d}{L} \times tan(\alpha)$

Rel4 :

$R = \frac{L}{tan(\alpha)}$

Rel 5 :

$x_c = x_n - R \times sin(\theta_n)$

$y_c = y_n + R \times cos(\theta_n)$

Rel 6 :

$x_{n+1} = x_c + R \times sin(\theta_n + \beta)$

$y_{n+1} = y_c - R \times cos(\theta_n + \beta)$

$\theta_{n+1} = \beta + \theta_n$

Rel 7 :

$x_{n+1} = x_n - R \times sin(\theta_n) + R \times sin(\theta_n + \beta)$

$y_{n+1} = y_n + R \times cos(\theta_n) - R \times cos(\theta_n + \beta)$

Position trajectoire rectiligne (α < 0°)

Rel 8 :

$x_{n+1} = x_n + d \times cos(\theta_n)$

$y_{n+1} = y_n + d \times sin(\theta_n)$

Vitesse

Rel 9 :

$v = signe\ de\ d1 \times \frac{\sqrt{(x_n - x_{n+1})^2 + (y_n - y_{n+1})^2}}{T_e}$

Différentiel

Rel 10 :

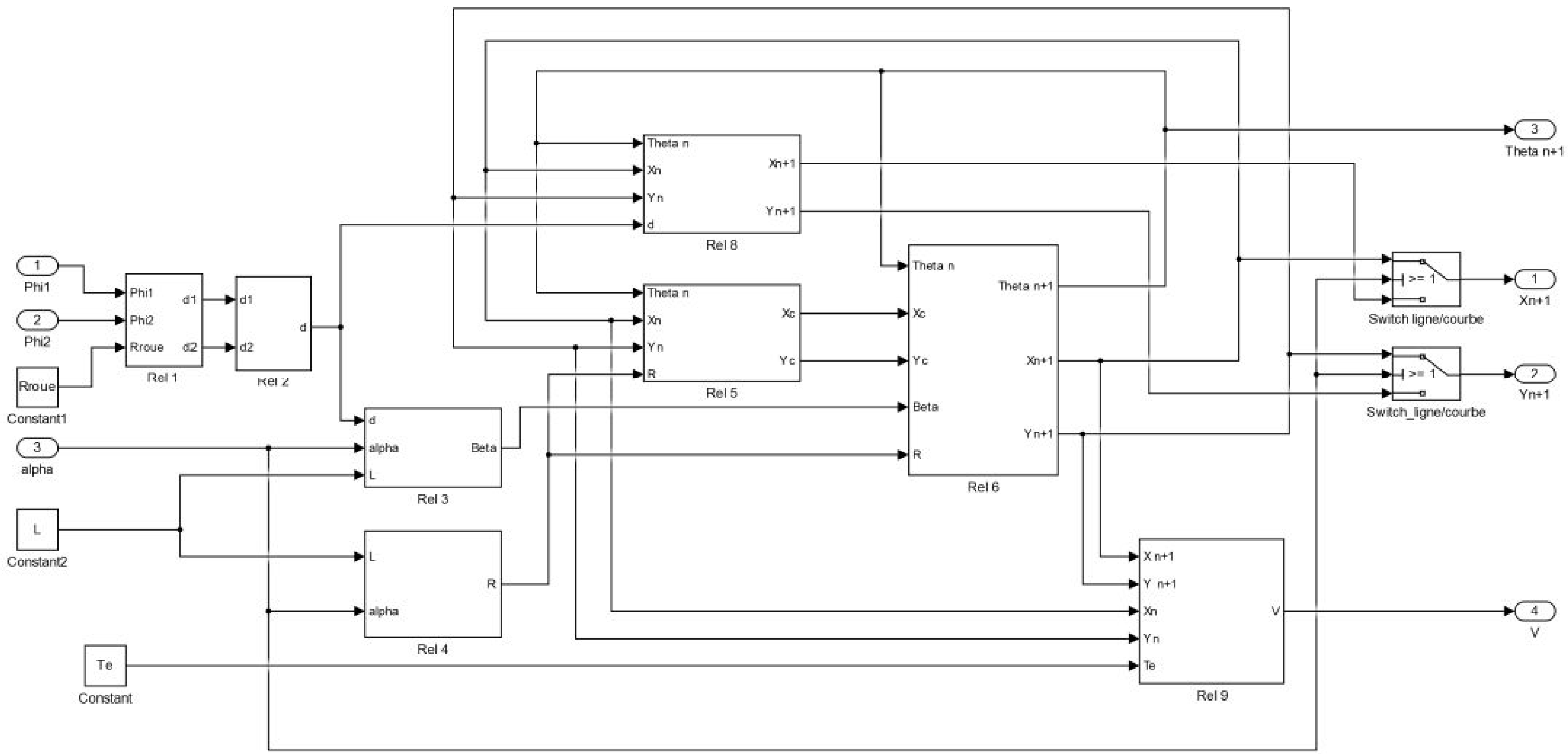
$d_1 = \beta \times (R_2 + l)$, $R_1 = R_2 + l$

$d_2 = \beta \times R_2$

Rel 11 :

$d_1 - d_2 = \beta \times l$

$\beta = \frac{d_1 - d_2}{l}$



Architecture du modèle