Tema 6 — LC

1. a) $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \wedge \neg P$

i α) Dacă $Q = \cancel{\text{true}}$ Adevărat $\xrightarrow{\text{atunci}}$ $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \wedge \neg P \sim$ Fals,
deci expresia este nevalidă.

Dacă $P =$ Fals și $Q =$ fals atunci $(P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q \wedge \neg P \sim A$.
deci expresia este satisfiabilă.

ii b)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg Q) \wedge (\neg P)$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

FND : $\neg P \wedge \neg Q$ ~~$\vee (\neg P \wedge \neg Q)$~~

iii c) $\big((\neg P \vee Q) \wedge \neg Q\big) \wedge \neg P$

$\Big((\neg P \wedge \neg Q) \vee \underbrace{(Q \wedge \neg Q)}_{\perp}\Big)\cancel{\wedge} \wedge \neg P$

$(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg P = $ ~~$(\neg P \wedge \neg P) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$~~

$= $ ~~$\neg P \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$~~ $\Rightarrow \neg P$

$= \neg P \wedge \neg Q$

IV d)   FNN: ¬P∧¬Q

FND: ¬P∧¬Q

FNC: ¬P∧¬Q.

e) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow S) \Rightarrow ((P \lor Q) \Rightarrow R)) \overset{not}{=} E$.

i)

P	Q	R	S	P⇒Q	Q⇒S	P∨Q	(P∨Q)⇒R	(Q⇒S)⇒A	(P⇒Q)⇒((Q⇒S)⇒A)
0	0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

nevalidă, satisfiabilă

ii) FND: ¬(Q∧S∧¬R)

$\rightsquigarrow$ ¬Q∨¬S∨R

iii) $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow S) \Rightarrow ((P \lor Q) \Rightarrow R))$

$(\neg P \lor Q) \Rightarrow ((\neg Q \lor S) \Rightarrow (\neg(P \lor Q) \lor R))$

$\neg(\neg P \lor Q) \lor ((\neg Q \lor S) \Rightarrow ((\neg P \land \neg Q) \lor R))$

$(P \land \neg Q) \lor (\neg(\neg Q \lor S) \lor ((\neg P \land \neg Q) \lor R))$

$(P \land \neg Q) \lor ((Q \land \neg S) \lor (\neg P \land \neg Q) \lor R)$

$(P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg S) \lor (\neg P \land \neg Q) \lor R$

$(P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg Q) \lor (Q \land \neg S) \lor R$

$(\neg Q \land (P \lor \neg P)) \lor (Q \land \neg S) \lor R$
$\qquad \underbrace{}_{\top}$

$\neg Q \lor (Q \land \neg S) \lor R$

$\cancel{(\neg Q \land Q) \lor (\neg Q \land \neg S)}$

(iv) FND: $\neg Q \lor (Q \land \neg S) \lor R$

FNC: $(\neg Q \lor Q) \land (\neg Q \lor \neg S) \lor R$
$\qquad \underbrace{}_{\top}$

$\therefore \neg Q \lor \neg S \lor R$

c) $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \lor Q) \land (\neg P \Rightarrow Q))$

(iii) $\neg(\neg P \lor Q) \Leftrightarrow ((P \lor Q) \land ((\neg P) \lor Q))$

$(P \land \neg Q) \Leftrightarrow ((P \lor Q) \land (P \lor Q))$

$(P \land \neg Q) \Leftrightarrow (P \lor Q)$

$((P \land \neg Q) \Rightarrow (P \lor Q)) \land ((P \lor Q) \Rightarrow (P \land \neg Q))$

$(\neg(P \land \neg Q) \lor (P \lor Q)) \land (\neg(P \lor Q) \lor (P \land \neg Q))$

$((\neg P \lor Q) \lor (P \lor Q)) \land ((\neg P \land \neg Q) \lor (P \land \neg Q))$

$(\underbrace{\neg P \lor P \lor Q}_{T}) \land (\neg Q \land (\underbrace{\neg P \lor P}_{T}))$

$Q \land \neg Q = \not{Z} \quad \Downarrow$

ii)

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$P \lor Q$	$\neg P$	$\neg P \Rightarrow Q$	$(P \lor Q) \land (\neg P \Rightarrow Q)$	Exp.
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1	0

FND: $(\neg P \land \neg Q)$

i) nevalida, adividible

iv: FND $\neg P \land \neg Q$

FNC: $\neg P \land \neg Q$

d) $P\Leftrightarrow Q$ $(P\Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg(P \Rightarrow \neg Q))$

(vi) $P \Leftrightarrow Q \sim (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$

~~$\sim (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$~~

$(\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \Leftrightarrow P \wedge Q$

$\Big((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \Rightarrow (P \wedge Q)\Big) \wedge \overset{(P \wedge Q \Rightarrow)}{\Big((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)\Big)}$

$\Big(\neg\big((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)\big) \vee (P \wedge Q)\Big) \wedge \Big(\neg(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)\Big)$

$\Big((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)\overset{\frac{3}{3}}{} \vee (P \wedge Q)\Big) \wedge \Big((\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg P \vee Q \wedge (\neg Q \vee P))\Big)$

$\Big((P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)\Big) \wedge \Big((\neg P \vee \neg Q)\overset{\frac{3}{}}{} \vee (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)\Big)$

$\Big(P \wedge \underset{\underset{\text{T}}{}}{(Q \vee \neg Q)}\Big) \wedge \Big((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)\Big)$

~~$P \wedge \Big((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \vee Q)) \wedge ((\neg P \wedge \neg Q) \vee (\neg Q \vee P))\Big)$~~

ii)

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow \neg Q$	$\neg(P \Rightarrow \neg Q)$	Exp.
0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1

~~FND: $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$ $P \Leftrightarrow Q$~~

FND: $P \vee Q$.

i)   satisfacible, no válida

iv) FND ~~FNC~~ $P \vee Q$.

    FNC: $P \vee Q$.

a) $(\neg P \Rightarrow (Q \wedge R)) \Rightarrow ((Q \vee \neg R) \Leftrightarrow P)$

$(\neg(\neg P) \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow (((Q \vee \neg R) \Rightarrow P) \wedge P \Rightarrow (Q \vee \neg P))$

$(P \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow (((\neg Q \wedge R) \vee P) \wedge (\neg P \vee (Q \vee \neg P)))$

$(P \vee (Q \wedge R)) \Rightarrow ((P \vee (\neg Q \wedge R)) \wedge (\neg P \vee Q))$

$\neg(P \vee (Q \wedge R)) \vee ((P \vee (\neg Q \wedge R)) \wedge (\neg P \vee Q))$

$(\neg P \wedge (\neg Q \vee \neg P)) \vee ((P \vee (\neg Q \wedge R)) \wedge (\neg P \vee Q))$

$(\neg P \wedge \neg Q) \vee ((P \vee \neg Q) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg P \vee Q))$

FND: $(\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \vee (\neg Q \wedge R) \wedge (\neg P \vee Q))$

FNC: $\neg P$. FNC: $(\neg P \vee (P \vee (\neg Q \wedge R) \wedge (\neg R \wedge Q))) \wedge (\neg Q \vee \ldots)$

b) $(P \vee \neg Q \vee (R \Leftrightarrow S)) \Leftrightarrow (S \wedge Q)$

$(P \vee \neg Q \vee ((R \Rightarrow S) \wedge (S \Rightarrow R))) \Leftrightarrow (S \wedge Q)$

$(P \vee \neg Q) \vee ((\neg R \vee S) \wedge (\neg S \vee R)) \Leftrightarrow (S \wedge Q)$

$(P \vee \neg Q) \vee ((\neg R \vee S) \wedge (\neg S \vee R)) \Leftrightarrow (S \wedge Q)$

$(\neg R \vee S) \wedge (\neg S \vee R) \overset{not}{=} A.$

$(P \vee \neg Q) \vee A \Leftrightarrow S \wedge Q$

$(P \vee \neg Q \vee A) \Rightarrow (S \wedge Q) \wedge \quad (S \wedge Q) \Rightarrow (P \vee \neg Q \vee A)$

$(\neg (P \vee \neg Q \vee A) \vee (S \wedge Q)) \wedge (\neg (S \wedge Q) \vee (P \vee \neg Q \vee A))$

$$((\neg P \wedge Q \wedge \neg A) \vee (S \wedge Q)) \wedge (\overbrace{S \vee Q \vee P \vee \neg Q \vee A}^{\top})$$

the underbrace below is labeled $\top$

$$Exp = (\neg P \wedge Q \wedge \neg A) \vee (S \wedge Q)$$

$$\neg A = \neg((\neg R \vee S) \wedge (\neg S \vee R))$$

$$= (R \wedge \neg S) \vee (S \wedge \neg R)$$

$$Exp = \left(\neg P \wedge Q \wedge ((R \wedge \neg S) \vee (S \wedge \neg R))\right) \vee (S \wedge Q)$$

$$\underbrace{Q \wedge ((\neg P \wedge \neg A) \vee S)}_{}, \quad \text{unde} \quad \neg A$$

$$Q \wedge ((\neg P \vee S) \wedge (\neg A \vee S))$$

$$Q \wedge ((\neg P \vee S) \wedge ((R \wedge \neg S) \vee (S \wedge \neg P) \vee S))$$

$$Q \wedge ((\neg P \vee S) \wedge (S \vee (R \wedge \neg S)))$$

PND: $\quad Q \wedge (S \vee (\neg P \wedge (R \wedge \neg S)))$

c) $(P \Leftrightarrow (P \wedge Q)) \Rightarrow \neg Q$

$\Leftrightarrow (P \Rightarrow P \wedge Q) \wedge ((P \wedge Q) \Rightarrow P)) \Rightarrow \neg Q$

$(\neg P \vee (P \wedge Q)) \wedge (\underbrace{(\neg P \vee \neg Q) \vee P)}_{\top}) \Rightarrow \neg Q$

$((\neg P \vee (P \wedge Q)) \wedge \top \Rightarrow \neg Q$

$(\neg P \vee Q) \Rightarrow \neg Q$

$(P \wedge \neg Q) \vee \neg Q = \boxed{\neg Q}$

d) $\neg(\neg P \vee Q \vee R) \vee (Q \Rightarrow (P \vee \neg R))$

$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q \vee (\cancel{} \cdot P \vee \neg R))$

$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \vee \neg Q \vee \neg R)$

$\cancel{\neg Q} \quad P \vee (\neg Q \vee \neg R)$

$\underbrace{P \vee (\neg Q \vee \neg R)}$

e) $(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\cancel{} P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg(R \wedge R)$

$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg R \vee (P \wedge \neg Q)) \wedge (\cancel{} (\neg P \vee \neg R)$

e) $(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee R) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg R)$

$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg R \vee \underbrace{(P \wedge \neg P)}_{\bot \to}) \wedge (\neg Q \vee R)$

$(\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)$

$= (\neg P \vee Q \vee R) \wedge (\neg R) \quad \oslash$

③ $\left(\begin{array}{l} (P_1 => (\overset{①}{P_2 \lor P_3})) \land (\overset{②}{\neg P_1 => (P_3 \lor P_4)}) \\ (\overset{③}{P_3 => (\neg P_6)}) \land (\overset{④}{\neg P_3 => (P_4 => P_1)}) \\ (\overset{⑤}{\neg (P_2 \land P_5)}) \land (\overset{⑥}{P_2 => P_3}) \end{array} \right) => (\overset{⑥}{P_3 => P_6})$ not $\equiv$ $\overline{E}$

① $(P_1 => (P_2 \lor P_3)) \; \tilde{\equiv} \; \neg P_1 \lor P_2 \lor P_3.$

② $\neg P_1 => (P_3 \lor P_4) \; \tilde{\equiv} \; P_1 \lor P_3 \lor P_4$

③ $P_3 => \neg P_6 \; \tilde{\equiv} \; \neg P_3 \lor P_6.$

④ $\neq \; \neg P_3 => (P_4 => P_1) \; \tilde{\equiv} \; P_3 \lor (P_4 => P_1)$
$\sim \quad P_3 \lor (\neg P_4) \lor P_1.$

⑤ $((\neg P_2) \lor (\neg P_5)) \land (\neg P_2 \lor P_5) = \neg P_2 \lor \underbrace{(P_5 \land \neg P_5)}_{\bot} = \boxed{\neg P_2}$

$\tilde{\equiv}$ ①∧② $\sim (\neg P_1 \lor P_2 \lor P_3) \land (P_1 \lor P_3 \lor P_4)$

$= P_3 \lor ((\neg P_1 \lor P_2) \land (P_1 \lor P_4))$

~~③∧④ $\sim (\neg P_3 \lor P_6) \land (P_3 \lor (\neg P_4) \lor P_1)$~~

E devine: $\left(\begin{array}{c} (\neg P_1 \lor P_2 \lor P_3) \land (P_1 \lor P_3 \lor P_4) \\ \land \\ (\neg P_3 \lor \neg P_6) \land (P_3 \lor (\neg P_4) \lor P_1) \\ \land \\ \neg P_2 \end{array} \right) => (P_3 => P_6)$

$$\sim \left(\begin{array}{c} (\neg P_1 \vee P_2 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_3 \vee P_4) \\ \wedge \\ (\neg P_3 \vee \neg P_6) \wedge (P_3 \vee (\neg P_4) \vee P_1) \\ \wedge \\ \neg P_2 \end{array} \right) \Rightarrow \neg (P_3 \Rightarrow P_6)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c} \left((P_1 \vee P_3) \vee \underset{\perp}{(\overline{P_4 \wedge \neg P_4})} \right) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3) \\ \wedge \\ (\neg P_3 \vee \neg P_6) \wedge \neg P_2 \end{array} \right) \Rightarrow \neg (P_3 \Rightarrow P_6)$$

$$\sim \left(\begin{array}{c} (P_1 \vee P_3) \wedge (P_1 \vee P_2 \vee P_3) \\ \wedge \\ (\neg P_3 \vee \neg P_6) \wedge \neg P_2 \end{array} \right) \Rightarrow \neg (P_3 \Rightarrow P_6)$$

$$\sim \left(((P_1 \vee P_3) \wedge (\neg P_3 \vee \neg P_6) \wedge \neg P_2) \right) \Rightarrow \neg (P_3 \Rightarrow P_6)$$

$$\sim \left((P_1 \vee P_3) \wedge (\neg P_3 \vee \neg P_6) \wedge \neg P_2 \right) \Rightarrow (P_3 \vee \neg P_6)$$

$$\sim (\neg P_1 \wedge \neg P_3) \vee (P_3 \wedge P_6) \vee P_2 \vee (P_3 \vee \neg P_6)$$

$$\sim (\neg P_1 \wedge \neg P_3) \vee P_2 \vee (P_3 \wedge P_6) \vee (P_3 \vee \neg P_6)$$

④ $P, Q_1, Q_2 \in P(v)$

$P \lor Q_1, \neg P \lor Q_2 \vDash Q_1 \lor Q_2$

$(P \lor Q_1) \land (P \lor Q_2) \Rightarrow (Q_1 \lor Q_2)$ $\overset{\text{ă dem}}{\text{- valdă}}$

P	Q_1	Q_2	$P \lor Q_1$	$P \lor Q_2$	$(P \lor Q_1) \land (P \lor Q_2)$	$A \Rightarrow (Q_1 \lor Q_2)$	$Q_1 \lor Q_2$
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

validă.

③ ~~Superman poate~~

Superman poate să prevină răul — A
Superman previne răul — B
Superman e lipsit de puteri — C
Superman e malefic — Δ
Superman nea să prevină răul — E
Superman există — i

$(A \land E \Rightarrow B) \land (\neg A \Rightarrow C) \land (\neg E \Rightarrow \Delta) \land \neg B.$
$\land E \Rightarrow (\neg C \land \neg \Delta)).$

$\sim ((\neg A \land E) \lor B) \land (A \lor C) \land (E \lor \Delta) \land \neg B \land (\neg E \lor \neg C \lor \neg \Delta)$