

Radiation from the Stars

Applied Project



Raduletu Petre-Horia, Gusatu Cristian-Alexandru, Bran Alexandru-Ionut
May 27, 2022

CUPRINS

1. Introdúcere

2. Probleme

Problema 1

Problema 2

Problema 3

Problema 4

Problema 5

Introdurre

INTRODUCERE: RADIATIA STELELOR

Orice obiect emite radiatii la incalzire, dar un "blackbody" reprezinta un sistem care absoarbe toata radiatia cu care intra in contact.

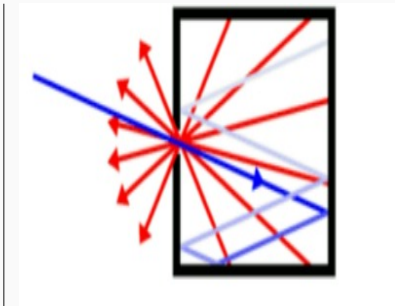
Un bun exemplu de blackbody ar fi o suprafata negru mat sau o cavitate mare ce contine o gaura mica in peretii acesteia.

In esenta un "blackbody" absoarbe toata lumina primita si emite o lumina independenta.

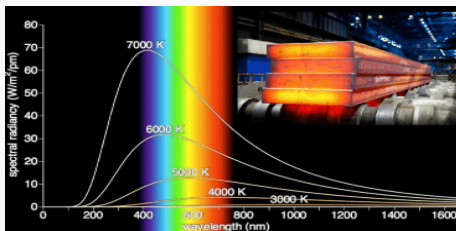
Lumina ce este transmisa de obiect este doar dependenta de propria temperatura, o buna aproximatie este o gaura mica printr-un obiect gol.

INTRODUCERE: APROXIMAREA BLACKBODY

1. Cum am specificat anterior, o buna aproximarea a unui blackbody este un obiect gol cu o gaura mica.
2. Gaura absoarbe perfect radiatiile.
3. Natura radiatiilor ce ies din cavitate depinde doar de temperatura cavitatii.



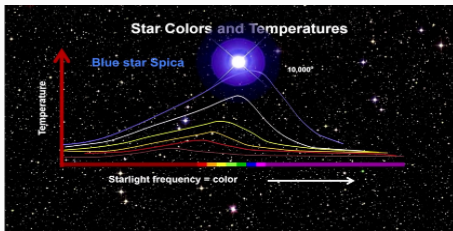
INTRODUCERE: DE RETINUT



Temperatura soarelui este de 5700K, acest lucru situandu-l in spectrul vizibil de culoare.

Chiar daca radiatia acestuia este aproape de a fi o radiatie de tip blackbody, este in mare parte doar un rezultat al caldurii sale.

INTRODUCERE



Frecventa si lungimile de unda sunt corelate.

Lungime de unda = distanta periodica dintre unda si cicluri

frecventa = unde sau cicluri pe secunda.

Pentru lumina sau radiatii, cu cat e mai scurta lungimea de unda cu atat e mai mare frecventa (si energia).

Ca in urmatoarea expresie: $f = \frac{c}{\lambda}$

INTRODUCERE

Propusa la finalul secolului 19, legea Rayleigh-Jeans exprima densitatea energiei unei unde λ de radiatie blackbody ca:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4} \quad (1)$$

1. Unde λ este masurata in metri
2. Unde T este temperatura in Kelvin
3. Unde k e constanta lui Boltzmann

INTRODUCERE

Legea Rayleigh-Jeans este mult mai potrivita pentru masuratorile experimentale asupra lungimilor de unda mari, avand erori de calcul asupra lungimilor de unda mici.

Aceasta calcula $f(\lambda) \rightarrow \liminf$ cand $\lambda \rightarrow 0^+$ dar experimentele au demonstrat ca $f(\lambda) \rightarrow 0$

In 1900 Max Planck a formulat un model(Legea lui Plank) mai bun pentru radiatia blackbody:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc\lambda^{-5}}{e^{hc/(\lambda KT)} - 1} \quad (2)$$

1. Unde h e constanta lui Planck = $6.6262 * 10^{-34}$
2. Unde k este constanta lui Boltzmann = $1.3807 * 10^{-23}$
3. Unde c este viteza luminii = $2.997925 * 10^8$

Probleme

PROBLEMA 1

Folositi regula lui L'Hopital pentru a demonstra ca legea lui Plank rezulta in urmatoarele:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda) = 0 \text{ si } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0 \quad (3)$$

si astfel demonstrand ca legea lui Plank este mai buna decat Legea Rayleigh-Jeans pentru lungimile de unda scurte.

PROBLEMA 1

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1} = \frac{a \lambda^{-5}}{e^{b/(\lambda T)} - 1}$$

Notam cu:

$$a = 8 \pi hc$$

$$b = \frac{hc}{k}$$

PROBLEMA 1

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{a\lambda^{-5}}{e^{b/(\lambda T)} - 1} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

si :

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{a\lambda^{-5}}{e^{b/(\lambda T)} - 1} \rightarrow \frac{0}{0}$$

In ambele cazuri se poate folosi regula lui L'hopital

PROBLEMA 1

Vom rezolva limita catre infinit:

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(a\lambda^{-5})}{\frac{d}{dx}e^{b/(\lambda T)} - 1} \\&= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{-5a\lambda^{-6}}{e^{b/\lambda T} \left[-\frac{b}{(\lambda T)^2} T \right]} \\&= \frac{-5aT^2}{-bT} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^2 \lambda^{-6}}{e^{b/\lambda T}} \\&= \frac{5aT}{b} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{-4}}{e^{b/\lambda T}} = \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

PROBLEMA 1

Vom rezolva limita catre 0^+ :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda) = \frac{5aT}{b} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^{-4}}{e^{b/(\lambda T)}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda) = \frac{5aT}{b} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{-4\lambda^{-5}}{\left[-\frac{b}{(\lambda T)^2} T\right]}$$

$$= \frac{20aT^2}{b^2} \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^{-3}}{e^{b/\lambda T}} \rightarrow \frac{\infty}{\infty}$$

Notam cu:

$$k_1 = \frac{20aT^2}{b^2}$$

PROBLEMA 1

Se va folosi L'hospital de mai multe ori iar constantele rezultate din aplicarea regulii se vor nota cu $k_i = 1, 2, \dots, n$ si se vor scoate in fata limitei

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} f(\lambda) &= k_1 \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^{-3}}{e^{b/\lambda T}} \\ &= k_2 \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^{-2}}{e^{b/\lambda T}} \\ &= k_3 \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^{-1}}{e^{b/\lambda T}} \\ &= k_4 \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{b/\lambda T}} = 0\end{aligned}$$

PROBLEMA 2

Folositi plonoamele Taylor ca sa aratati faptul ca, pentru lungimile de unda mari, prin legea lui Plank se obtin rezultate aproximativ egale cu legea Rayleigh-Jeans

PROBLEMA 2

Putem folosi urmatoarea serie Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \dots \quad R = \infty$$

Avem:

$$f(\lambda) = \frac{8\pi hc \lambda^{-5}}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

Notam cu:

$$x = hc/\lambda kT$$

PROBLEMA 2

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{8\pi hc \lambda^{-5}}{\left[1 + \frac{hc}{\lambda kT} + \frac{1}{2!} \left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)^3 + \dots\right] - 1} \\ &\approx \frac{8\pi hc \lambda^{-5}}{1 + \frac{hc}{\lambda kT} - 1} \\ &= \frac{8\pi kT}{\lambda^4} \end{aligned}$$

Aceasta este de fapt legea lui Rayleigh-Jeans. Astfel, dacă λ este mare și termenii seriei Taylor sunt mici în comparație cu primul termen (nenul), aproximarea legii lui Planck folosind doar primul polinom Taylor conduce la legea lui Rayleigh-Jeans.

PROBLEMA 3

Ilustrati graficul f pentru ambele legi in paralel, si comentati similaritatile si diferentele.

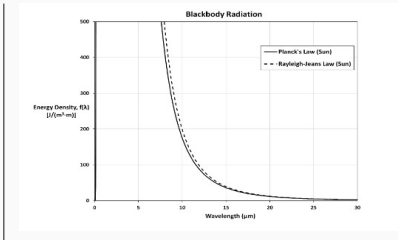
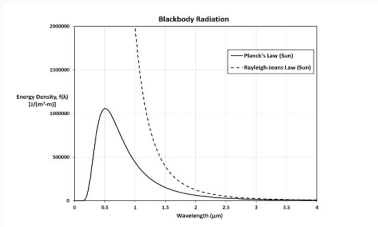
Folositi $T = 5700\text{K}$ (temperatura soarelui)

Puteti sa schimbati din metri in micrometri: $1\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$

PROBLEMA 3

Pentru a converti μ , o sa inmultim $\lambda(m) * 10^6 (\mu\text{m}/\text{m}) = \lambda(\mu\text{m})$

PROBLEMA 3



PROBLEMA 3

1. Prima figura arata faptul ca cele doua legi sunt similare pentru λ de dimensiuni mari
2. A doua figura arata faptul ca cele doua legi sunt foarte diferite pentru lungimi de unda scurte
3. Legea lui Plank are punctul de maxim la $\lambda=0.5\mu\text{m}$ in timp ce legea Rayleigh-Jeans nu are maxim sau minim

PROBLEMA 4

Folositi graficul din problema 3 pentru a aproxima valoarea λ pentru care $f(\lambda)$ este un maxim pentru legea lui Planck.

PROBLEMA 4

Din graficele de la Problema 3, $f(\lambda)$ are maximul pe legea lui Plank la $\lambda = 0.5\mu$

PROBLEMA 5

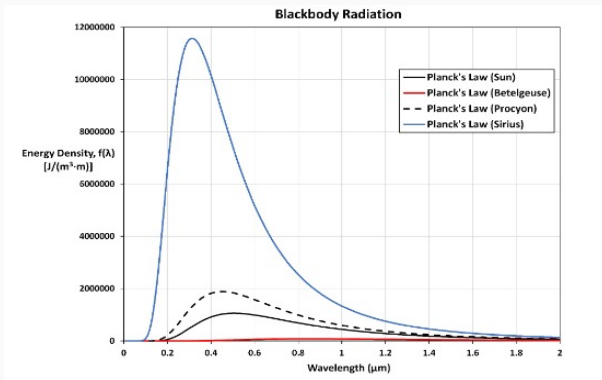
Observati cum graficul f se schimba pentru temperatura variabila (folosind legea lui Planck)

In particular, faceti graficul f pentru stelele Betelgeuse ($T = 3400$ K), Procyon ($T = 6400$ K), Sirius ($T = 9200$ K) si pentru Soare(rezolvat anterior).

Cum variaza radiatia totala emisa (Aria de sub curba) in functie de T . Folositi graficele ca sa argumentati de ce Sirius se numeste steaua albastra si Betelgeuse steaua rosie.

PROBLEMA 5

Folosind legea lui Plank putem observa cum se schimba graficul functiei f in functie de temperatura stelelor specificate in enunt.



PROBLEMA 5

Cu cat creste temperatura, cu atat aria de sub curba creste, cum era de asteptat, cu cat e mai fierbinte steaua cu atat emite mai multa energie

Cu cat temperatura este mai mare cu atat valoarea lui λ scade(lungimea de unda este mai mica)

Din acest motiv Sirius este o stea albastra iar Betelgeuse este o stea rosie, majoritatea luminii venita de la Sirius este de o lungime de unda scurta.Asta se traduce intr-o frecventa mai mare ce se plaseaza in partea albastra a spectrului.In timp ce Betelgeuse are o frecventa mai joasa, situata in spectrul rosu.

Va multumim pentru atentie acordata! :D