1 INTRODUÇÃO

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2[T(x) - T_{amb}] = 0 \tag{1}$$

sendo o termo T_{amb} é a temperatura ambiente, $T(x)$ é a temperatura ao longo do atleta, m^2 é o

$$m^2 = \frac{hP}{kA} \tag{2}$$

onde

2 O PROBLEMA

O problema de transferência de calor em regime permanente é um problema de segunda ordem não homogêneo, assim sendo esta equação possui uma parte homogênea e outra particular. ...A maneira mais apropriada de resolver o problema analítico descrito em 2 é por meio da utilização da técnica da equação característica a fim de encontrar a parte homogênea e em seguida encontrar a solução particular. Nela escreve-se a equação diferencial de segunda ordem em uma equação polinomial de segundo grau para resolver o problema homogêneo e após isso, encontra-se a solução particular. Reescreve-se de maneira a separar todos os termos $T(x)$ do 'resto'.

$$\frac{d^2T}{dx^2} - m^2T(x) = -m^2T_{amb} \tag{3}$$

a equação característica $Z(r)$ é obtida a partir da reformulação da EDO em forma polinomial, e com a obtenção das raízes, gera-se a solução homogênea da EDO

$$Z(r) = r^2 - m^2, Z(r) = 0 \rightarrow r^2 - m^2 = 0 \rightarrow r^2 = m^2 \rightarrow r = \pm m \tag{4}$$

a solução homogênea $y_h(x)$ é escrita como

$$T_h(x) = c_1 \exp(mx) + c_2 \exp(-mx) \tag{5}$$

para a equação de 2 ser válida, basta que seja adicionado T_{amb}, portanto $T(x) = c_1 \exp(mx) + c_2 \exp(-mx) + T_{amb}$.

A abordagem numérica utilizada para este trabalho será apoiada na utilização de métodos de diferenças finitas, com ênfase em uma abordagem por diferenças centradas de três pontos para a segunda derivada. Tal formulação é obtida a partir da discretização do domínio, onde $t_i = T(x_i)$,

$t_{i+1} = T(x_i + \Delta x)$, $t_{i-1} = T(x_i - \Delta x)$. Fazendo a aproximação em série de Taylor em u_{i+1} e u_{i-1} resulta em

$$t_{i+1} = t_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta x^j}{j!} \frac{d^j T}{dx^j} \Big|_{x_i} \tag{6}$$

$$t_{i-1} = t_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{(-\Delta x)^j}{j!} \frac{d^j T}{dx^j} \Big|_{x_i} \tag{7}$$

Somando as equações 6 e 7, os termos ímpares se cancelam resultando em

$$t_{i+1} + t_{i-1} = 2t_i + \frac{2\Delta x^2}{2} \frac{d^2 T}{dx^2} \Big|_{x_i} + \frac{2\Delta x^4}{4!} \frac{d^4 T}{dx^4} \Big|_{x_i} + \dots \tag{8}$$

isolando o termo da derivada segunda, obtém-se

$$\frac{d^2 T}{dx^2} \Big|_{x_i} = \frac{t_{i+1} + t_{i-1} - 2t_i}{\Delta x^2} - \Big(\frac{2\Delta x^2}{4!} \frac{d^4 T}{dx^4} \Big|_{x_i} + \dots \Big) \tag{9}$$

aplicando 9 em 2 e separando o erro numérico

$$\frac{t_{i+1} + t_{i-1} - 2t_i}{\Delta x^2} - m^2[t_i - T_{amb}] = \Big(\frac{2\Delta x^2}{4!} \frac{d^4 T}{dx^4} \Big|_{x_i} + \dots \Big) \tag{10}$$

que resulta na discretização completa de 2 que possui ordem $(O)(\Delta x^2)$ tendo em vista que este é o maior erro que o método possui. Separando os termos que possuem da deriva dos que não são, implica em

$$t_{i+1} + t_{i-1} - 2t_i = m^2[t_i - T_{amb}](\Delta x)^2 + (O)(\Delta x^2) \tag{11}$$

considerando as condições de contorno, monta-se um sistema de equações abaixo

$$\begin{cases} t_0 - 2t_1 + t_2 = m^2[t_1 - T_{amb}](\Delta x)^2 \\ t_1 - 2t_2 + t_3 = m^2[t_2 - T_{amb}](\Delta x)^2 \\ t_2 - 2t_3 + t_4 = m^2[t_3 - T_{amb}](\Delta x)^2 \\ t_3 - 2t_4 + t_5 = m^2[t_4 - T_{amb}](\Delta x)^2 \\ t_4 - 2t_5 + t_6 = m^2[t_5 - T_{amb}](\Delta x)^2 \\ t_5 - 2t_6 + t_7 = m^2[t_6 - T_{amb}](\Delta x)^2 \\ t_6 - 2t_7 + t_8 = m^2[t_7 - T_{amb}](\Delta x)^2 \\ t_7 - 2t_8 + t_9 = m^2[t_8 - T_{amb}](\Delta x)^2 \\ t_8 - 2t_9 + t_{10} = m^2[t_9 - T_{amb}](\Delta x)^2 \end{cases} \tag{12}$$

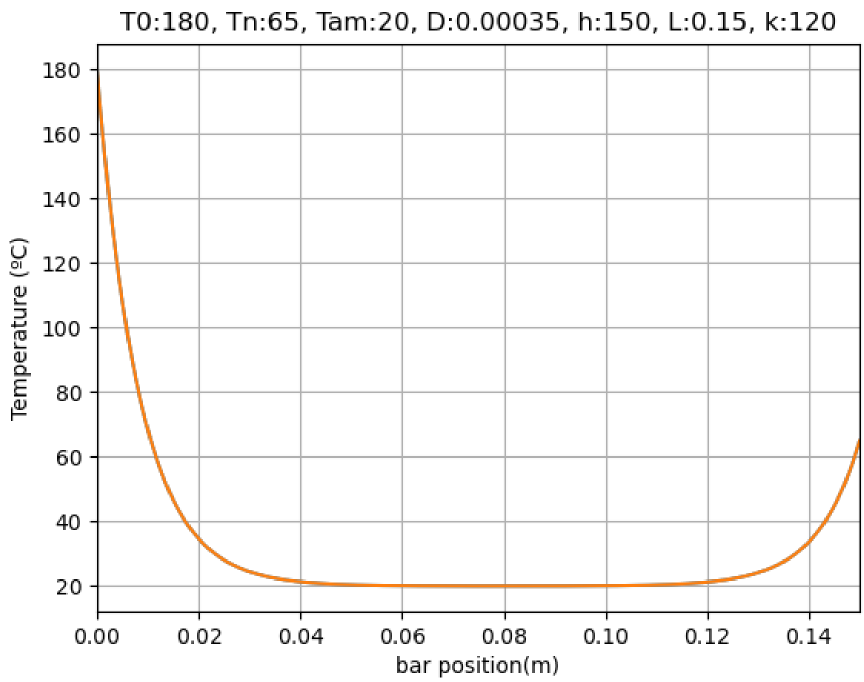
com $t_0 = T_0$ e $T_{10} = T_N$

3 RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção apresentamos alguns resultados referêntes ao modelo discutido acima. Para este trabalho, foram disponibilizados certas condições para que fosse simulado, mas também mostrando alterações em certos valores e analisamos o que isso representa. Abaixo apresenta-se o resultado desta simulação

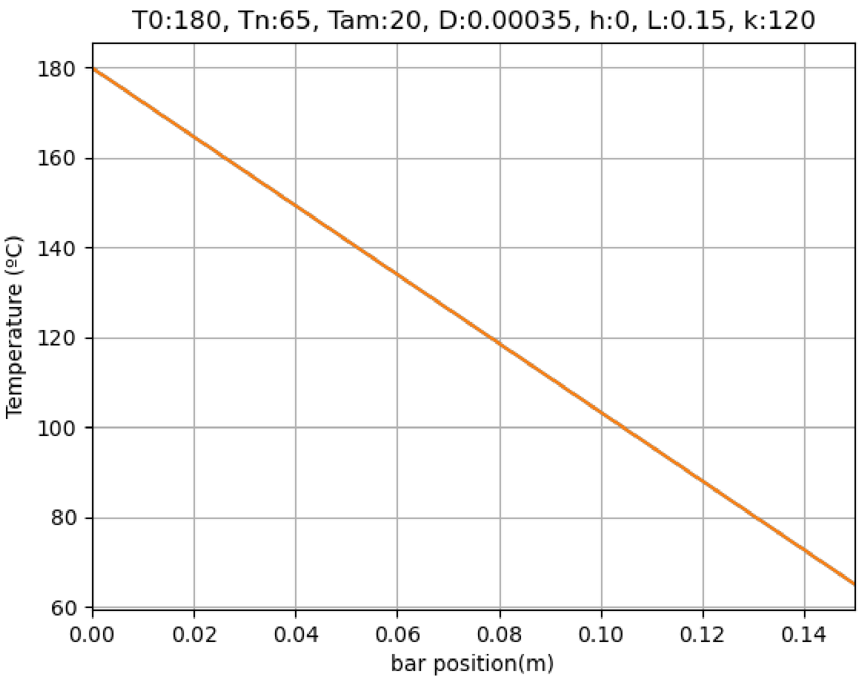
T_0 :	$180°$ C
T_n :	$65°$ C
T_{amb} :	$20°$ C
h:	$150\frac{W}{m^2K}$
k:	$120\frac{W}{mK}$
D:	$3,5 \times 10^{-3}m$
L:	$0,15m$

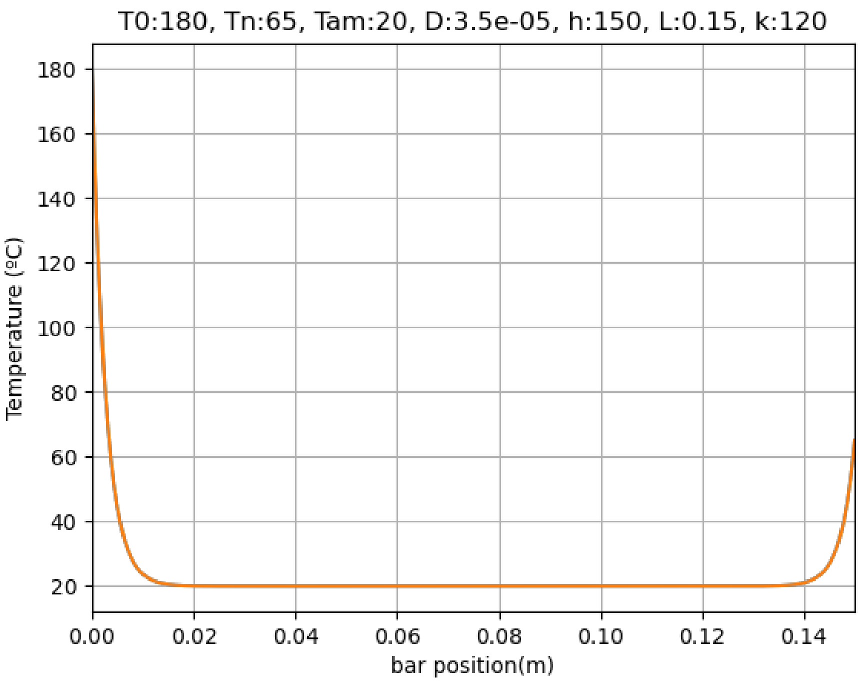
O próximo experimento foi $m^2 = 0$, que para fins de simplificação, foi feito



removendo a troca de calor por convecção(k).

O próximo experimento foi m^2 tendendo com valores muito altos afim de reproduzir $m^2 \to \infty$, que para fins de simplificação, foi feio fazendo $D \to 0$.


T0:180, Tn:65, Tam:20, D:0.00035, h:0, L:0.15, k:120
Temperature (ºC)
bar position(m)
180
160
140
120
100
80
60
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14


T0:180, Tn:65, Tam:20, D:3.5e-05, h:150, L:0.15, k:120
Temperature (ºC)
bar position(m)
180
160
140
120
100
80
60
40
20
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14

4 CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos o problema de transferência de calor em regime permanente. Também foi apresentado a formulação utilizanda para a solução, incluindo o sistema de equações, matrizes tridiagonais, ordem de erro, juntamente com simulações contendo as condições fornecidas pela tarefa bem como outras simulações contendo alterações em alguns componentes e discutimos que estas alterações significam em termos das características nos gráficos.