Teorema (Transformaciones de Estadísticas asintóticamente Normales) TEAN

Si $\sqrt{m}\left(\mathbb{T}_m - \mu\right) \xrightarrow[m\to\infty]{d} N_p(\mathbb{0}, \Sigma)$

y si $\forall\, i = 1, 2, \ldots, s$ $\quad f_i : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ definen

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_s \end{pmatrix} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^s$$

una transformación diferenciable en $\mu \in \mathbb{R}^p$, entonces $f(\mathbb{T}_m)$ es asintóticamente Normal con media $f(\mu)$ y matriz de covarianzas $D'\Sigma D$:

$$\sqrt{m}\left(f(\mathbb{T}_m) - f(\mu)\right) \xrightarrow[m\to\infty]{d} N_s\left(\mathbb{0}, D'\Sigma D\right),$$

donde

$$D_{ij} = \frac{\partial f_j}{\partial T_i}(\mathbb{T})\Bigg|_{\mathbb{T}=\mu} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \cdots, p \\ j = 1, 2, \ldots, s \end{array}$$

D es la matriz, de dimensiones $p \times s$, de derivadas parciales

Teorema (distribución asintótica de los valores propios muestrales $l_1, \ldots, l_p$ de $\hat{\Sigma}$) DAVP

Sea $\Sigma > 0$ con valores propios diferentes

Sea $n\mathbf{U} \sim \text{Wishart}_p(\Sigma, m = n-1)$ y supóngase que las descomposiciones de Jordan para Σ y $\mathbf{U}$ son $\Sigma = \Gamma \Lambda \Gamma'$ y $\mathbf{U} = \mathbf{G} \mathbf{L} \mathbf{G}'$. Entonces

$$\sqrt{n-1}\,(\mathbf{l} - \boldsymbol{\lambda}) \xrightarrow[n \to \infty]{d} N_p(\mathbf{0}, 2\Lambda^2)$$

donde $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_p)'$ y $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_p)'$ son las diagonales de $\mathbf{L}$ y Λ.

Sea $s=1$ y $f=f_1:\mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$

dada por

$$f(T_1,\dots,T_p)=\frac{T_1+\cdots+T_q}{T_1+\cdots+T_p}\ ,\ (q\leq p).$$

si $\lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_p\end{pmatrix}$, $f(\lambda_1,\dots,\lambda_p)=f(\lambda)$

$=\psi_q$ y para

$l=\begin{pmatrix}l_1\\ \vdots\\ l_p\end{pmatrix}$, $f(l)=\hat{\psi}_q$.

Para cada $i=1,2,\dots,q$

$$\frac{\partial f(T)}{\partial T_i}=\frac{(T_1+\cdots+T_p)\cdot 1-(T_1+\cdots+T_q)\cdot 1}{(T_1+\cdots+T_p)^2}$$

$$=\frac{1-\dfrac{T_1+\cdots+T_q}{T_1+\cdots+T_p}}{(T_1+\cdots+T_p)}\ .$$

y para cada $i=q+1,q+2,\dots,p$

$$\frac{\partial f(T)}{\partial T_i}=\frac{(T_1+\cdots+T_p)\cdot 0-(T_1+\cdots+T_q)\cdot 1}{(T_1+\cdots+T_p)^2}$$

$$=\frac{-(T_1+\cdots+T_q)}{(T_1+\cdots+T_p)^2}\ .$$