☆ NOTA:

Antes de proceder a probar el resultado, notemos que si $x \in \mathbb{R}^p$ y $\boxed{x \neq 0}$, entonces $\Gamma' x \neq 0$.

Si esto último NO sucediera entonces

$$0 = \Gamma' x \cdots (u)$$

pero como las columnas de Γ son vectores ortogonales entonces Γ' es no singular, es decir existe Γ'^{-1} y de la ecuación (u)

$$0 = \Gamma'^{-1} 0 = x$$ lo cual es contradictorio

ya que se asumió $x \neq 0$. Análogamente se tiene que si $y = \Gamma' x$ es diferente de 0, entonces $x \neq 0$.

Procedemos a probar el teorema B

<u>Dem</u> (teor B)

Supóngase $\lambda_i > 0$; $\forall i = 1, 2, \ldots, p$, por el teor A, para $x \in \mathbb{R}^p$ con $x \neq 0$ tenemos

$$Q_A(x) = x' A x = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_p y_p^2$$

y por la NOTA ☆ y no es el vector 0

$$\therefore \quad Q_A(x) > 0 \qquad \therefore \quad A > 0$$

Supóngase ahora que $A > 0$, entonces $\forall x \in \mathbb{R}^p$ t.q. $x \neq 0$

$$(\alpha) \cdots\cdots \quad 0 < Q_A(x) = x' A x \overset{\text{Teor A}}{=} \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_p y_p^2$$

Sean $\mathbb{y}$ en $\mathbb{R}^p$ dado por $\mathbb{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y

$\mathbb{x} \equiv \Gamma^{-1} \mathbb{y}$, como $\mathbb{y} \neq \mathbb{O}$ entonces $\mathbb{x} \neq 0$

y $\Gamma \mathbb{x} = \mathbb{y}$. Usando ($\alpha$)

$$0 < Q_A(\mathbb{x}) = \mathbb{x}' A \mathbb{x} = \lambda_1 .$$

Ahora sean $\mathbb{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\mathbb{x} \equiv \Gamma^{-1} \mathbb{y}$, entonces

$\mathbb{x} \neq 0$ y $\Gamma \mathbb{x} = \mathbb{y}$. Usando ($\alpha$)

$$0 < Q_A(\mathbb{x}) = \mathbb{x}' A \mathbb{x} = \lambda_2 \quad \ldots \quad \text{etc.}$$

$\blacksquare$

Recordemos que en un curso de álgebra lineal se suele probar que para una matriz de dimensión p

$$|A| = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j \qquad \lambda_1, \ldots, \lambda_p \text{ valores propios de } A$$

Entonces si A es una matriz simétrica y $A > 0$ por el Teorema B $|A| > 0$ lo cual implica que A^{-1} existe. Se tiene el siguiente

<u>Corolario</u> Si $\mathbb{A} > 0$, entonces $|\mathbb{A}| > 0$ y existe $\mathbb{A}^{-1}$.

Teorema C Si $\mathbb{A}$ y $\mathbb{B}$ son matrices simétricas y $B>0$, entonces el máximo de $\dfrac{x'Ax}{x'\mathbb{B}x}$ está dado por el más grande valor propio de la matriz $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$[(b)]. De hecho, si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ son los valores propios de $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$ listados en orden decreciente, entonces

$$(\mathbf{A})\dots \quad \min\left\{\frac{x'\mathbf{A}x}{x'\mathbf{B}x} : x \in \mathbb{R}^n;\ x \neq \mathbb{O}\right\} = \lambda_p \leq \lambda_{p-1} \leq \dots \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$$

$$= \max\left\{\frac{x'\mathbb{A}x}{x'\mathbb{B}x} : x \in \mathbb{R}^n;\ x \neq 0\right\}$$

Para demostrar el teorema C se usan los teoremas (JD) y (SVD). En lugar de demostrar el teorema C nos enfocaremos en estudiar su utilidad para la definición de COMPONENTES PRINCIPALES.

El teorema C nos dice que si vemos al cociente

$\dfrac{x'\mathbb{A}x}{x'Bx}$ como función de x para $x \in \mathbb{R}^p$ y $x \neq \mathbb{O}$

(b) Asumiendo que los valores propios de $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ son reales, Esto último es cierto si por ejemplo $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ fuera simétrica el más grande valor que $\frac{x'Ax}{x'Bx}$ puede tomar es λ_1 el mayor de los valores propios de $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$ ¿Para qué valor de x alcanza $\frac{x'\mathbb{A}x}{x'\mathbb{B}x}$ este máximo?

Supóngase que x_1 es el vector propio de $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$ asociado a λ_1, entonces

$$\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}x_1 = \lambda_1 x_1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{A}x_1 = \lambda_1 \mathbb{B}x_1 \quad \text{porque } \mathbb{B}>0$$

$$\Rightarrow \quad x_1'\mathbb{A}x_1 = \lambda_1 x_1'\mathbb{B}x_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1'\mathbb{A}x_1}{x_1'\mathbb{B}x_1} = \lambda_1 \quad \text{porque } \mathbb{B}>0$$

Lo anterior nos dice que el máximo se alcanza en $x = x_1$ el vector propio de $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$ asociado a λ_1

Notemos además que en el caso particular en que $\mathbb{B} = \mathbb{I}_{p\times p}$ tenemos $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A} = \mathbb{A}$

Entonces $\mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}$ es una matriz simétrica entonces sus valores propios son reales y de hecho son los valores propios de $\mathbb{A}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. El teorema C nos dice que

$$\lambda_p \leq \frac{x'\mathbb{A}x}{x'x} \leq \lambda_1$$

Sea x_1 el valor propio asociado a λ_1 normalizado, es decir $\|x_1\| = x_1' x = 1$

Entonces

$$\mathbb{A}x_1 = \lambda_1 x_1$$

$$x_1' \mathbb{A} x_1 = \lambda_1 x_1' x_1 = \lambda_1$$

Es decir, el valor de x en donde $\frac{x'\mathbb{A}x}{x'x}$ alcanza el valor λ_1 es el valor propio de $\mathbb{A}$ asociado a λ_1, si además este vector se normaliza para tener norma 1 entonces:

$$\max\{x'\mathbb{A}x : x \in \mathbb{R}^p \text{ y } \|x\| = 1\} = \lambda_1$$

este máximo se alcanza para $x = x_1$

x_{G1} = vector propio asociado a λ_1, normalizado