¿Qué restricción sobre $x_1, \dots, x_N$ hay que hacer, para que exista la solución (los valores de β_0 y β_1 donde Δ puede tener un mínimo)?

Recordemos que

$$\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2N\bar{x}^2 + N\bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2N\left(\frac{\sum_{1}^{N} x_i}{N}\right)\left(\frac{\sum_{1}^{N} x_i}{N}\right) + N\bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\bar{x} + \sum_{i=1}^{N} \bar{x}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left\{ x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2 \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = N\, S_{xx}$$

donde $S_{xx} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2$ es la varianza muestral correspondiente a $x_1, \dots, x_N$. Claramente si $D=0$ entonces $S_{xx}=0$, lo cual implicaría que $x_1 = x_2 = \dots = x_N$. Por otra parte, si $S_{xx}=0$ (de nuevo sucede si y sólo si $x_1 = x_2 = \dots = x_N$) entonces $D=0$.

$\therefore$ La solución de (EN) no existe solo cuando los datos $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ tienen <u>todos</u> el mismo valor de la variable explicativa: $x_1 = x_2 = \cdots = x_N$, pero lo anterior es un caso que carece de todo sentido práctico, ¡a nosotros nos interesa modelar como cambia Y cuando X cambia!

En conclusión, basta con que existan x_i y x_j con $i \neq j$ en $\{x_1, \ldots, x_N\}$ tales que $x_i \neq x_j$ para que exista la solución al sistema (EN).

Procedemos a determinar la solución, usando la regla de Cramer

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\begin{vmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \end{vmatrix}}{N^2 S_{xx}}$$

$$= \frac{N \sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} y_i\right)}{N^2 S_{xx}}$$

$$= \frac{N\left\{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N\bar{x}\bar{y}\right\}}{N^2 S_{xx}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - N\bar{x}\bar{y} + N\bar{x}\bar{y} - N\bar{x}\bar{y}}{N S_{xx}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{N S_{xx}}$$

NOTACIÓN: $N S_{xy} = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{N\, S_{xy}}{N\, S_{xx}} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})}$$

<u>NOTA</u>: En algunos fuentes se usa la notación

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})$$

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})$$

en cuyo caso $\hat{\beta}_1 = \dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}$

Usaremos la primera ecuación del sistema para encontrar $\hat{\beta}_0$

$$\hat{\beta}_0 n + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} = \bar{y}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = \bar{y} - \frac{S_{xy}}{S_{xx}}\bar{x}$$

<u>Definición</u>: Los coeficientes del ajuste lineal vía mínimos cuadrados son

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

La correspondiente Recta de mínimos cuadrados es

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

ejemplo: Para los datos de Estatura y Peso, a partir de los 28 datos en la primera página del archivo "Regre5.pdf", obtenemos

$\bar{x} = 1.72$ $\quad$ $\bar{y} = 70.3$

$\hat{\beta}_0 = -169.94$ $\quad$ $\hat{\beta}_1 = 139.37$

Recta de mínimos cuadrados

$$\hat{Y} = -169.94 + 139.37 X$$

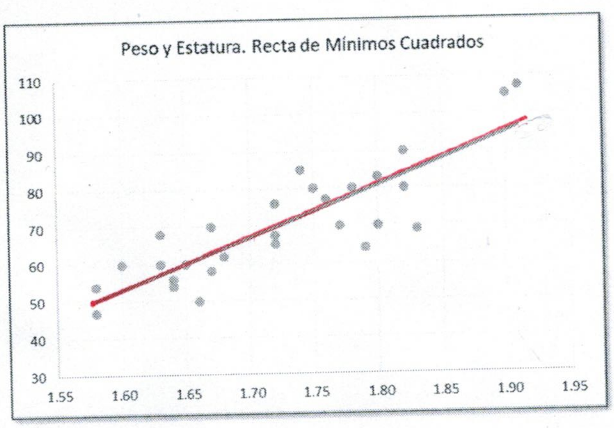

Figura 14.

Una pregunta interesante: De acuerdo a este ajuste, a una persona que mida cero metros, le corresponde un peso de -170 Kilos, es claro que este valor negativo resulta contra intuitivo ¿Cuál es el problema ó cómo podemos interpretar o entender este?

Toda la descripción del método de mínimos cuadrados dada, <u>no</u> asume supuestos sobre una distribución de probabilidades para Y ó X o $Y|X=x$ (1), de manera que el método de mínimos cuadrados en su formulación original <u>NO</u> es un procedimiento estadístico, es una técnica determinista para el ajuste de curvas.

A continuación evaluaremos que tan pequeño es el mínimo encontrado

(1) En todo caso, para la existencia de soluciones sólo se asume $\mathbb{P}(X=c) \neq 1$.