$$\overline{\mathbb{X}}_{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i1} \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{i2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{X}_{\cdot 1} \\ \overline{X}_{\cdot 2} \\ \vdots \\ \overline{X}_{\cdot p} \end{pmatrix}$$

y
$$\begin{aligned} \mathbb{V} &= \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{X}_i - \overline{\mathbb{X}}_{(n)})(\mathbb{X}_i - \overline{\mathbb{X}}_{(n)})' \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{X}_i \mathbb{X}_i' - n\, \overline{\mathbb{X}}_{(n)} \overline{\mathbb{X}}_{(n)}' \\ &\overset{(1)}{=} \mathcal{X}'\mathcal{X} - \frac{1}{n}\mathcal{X}' \mathbb{1}_n \mathbb{1}_n' \mathcal{X} \\ &= \mathcal{X}' \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{1}_n \mathbb{1}_n' \right) \mathcal{X} \\ &= \mathcal{X}' \mathcal{H} \mathcal{X}. \end{aligned}$$

Entonces si $p+1 \leq n$,

$$\mathbb{V} > 0 \quad \text{y} \quad \mathbb{V} \sim \text{Wishart}_p(\Sigma, n-1)^{(2)}.$$

Como consecuencia de este resultado, si $\hat{\Sigma}$ es

(1)
$$\overline{\mathbb{X}}_{(n)} = \frac{1}{n}\mathcal{X}' \mathbb{1}_n = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{n1} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{n2} \\ \vdots & & & \\ X_{1p} & X_{2p} & \cdots & X_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) Véase Press, J. (2005). "Applied Multivariate Analysis". Dover

la matriz de covarianzas estimada a partir de los datos $x_1, \ldots, x_n$

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_{(n)})(x_i - \bar{x}_{(n)})'$$

$$= \frac{1}{n}\mathcal{X}'\mathcal{H}\mathcal{X},$$

entonces $n\hat{\Sigma}$ es una realización de la v.a. matricial $\mathcal{X}'\mathcal{H}\mathcal{X} \sim \text{Wishart}_p(\Sigma, n-1)$.

Recordemos que para n pequeña suele utilizarse el estimador insesgado (corrección de Bessel) para Σ

$$\hat{\Sigma}^{(c)} = \frac{n}{n-1}\hat{\Sigma} = \frac{1}{n-1}\mathcal{X}'\mathcal{H}\mathcal{X}$$

De la discusion anterior

$(n-1)\hat{\Sigma}^{(c)}$ es una realización de

$$\mathcal{X}'\mathcal{H}\mathcal{X} \sim \text{Wishart}_p(\Sigma, n-1).$$

Por ejemplo si $p=1$ $\hat{\Sigma}^{(c)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ (1×1)

$$(n-1)\hat{\Sigma}^{(c)} \sim \text{Wishart}_1(\Sigma, n-1)$$

ó bien $\frac{(n-1)\hat{\Sigma}^{(c)}}{\Sigma} \sim \chi^2_{(n-1)}$