$\mathbb{L}$ es una matriz diagonal de dimensiones $p \times p$ y sobre su diagonal tiene los valores propios $l_1, \ldots, l_p$ de la matriz $\hat{\Sigma}$.

$\mathbb{G}$ es una matriz de dimensión $p \times p$ cuyas columnas son los vectores propios $g_1, \ldots g_p$ de $\hat{\Sigma}$

De la ecuación (CompPrin) en la página 20

$$(\mathbb{Y}_1, \ldots, \mathbb{Y}_p) = (\mathbb{X} - \mu)' \Pi$$

Para la primera observación en la muestra x_1 y reemplazando cantidades muestrales

$$(y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{p1}) = (x_1 - \bar{x}_{(n)})' \mathbb{G}$$

Para x_2

$$(y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{p2}) = (x_2 - \bar{x}_{(n)})' \mathbb{G}$$

$$\vdots$$

Para x_n

$$(y_{1n}, y_{2,n}, \ldots, y_{p,n}) = (x_n - \bar{x}_{(n)})' \mathbb{G}$$

En el lado derecho escribimos todos los términos

$$\begin{pmatrix} x_{11}-\bar{x}_{\cdot 1} & x_{12}-\bar{x}_{\cdot 2}, \dots, & x_{1p}-\bar{x}_{\cdot p} \\ x_{21}-\bar{x}_{\cdot 1} & x_{22}-\bar{x}_{\cdot 2}, \dots, & x_{2p}-\bar{x}_{\cdot p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}-\bar{x}_{\cdot 1} & x_{n2}-\bar{x}_{\cdot 2}, \dots, & x_{np}-\bar{x}_{\cdot p} \end{pmatrix} \mathcal{G}$$

$$= \left[\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{x}_{\cdot 1} & \bar{x}_{\cdot 2}, \dots, & \bar{x}_{\cdot p} \\ \bar{x}_{\cdot 1} & \bar{x}_{\cdot 2}, \dots, & \bar{x}_{\cdot p} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{\cdot 1} & \bar{x}_{\cdot 2} \cdots & \bar{x}_{\cdot p} \end{pmatrix} \right] \mathcal{G}$$

$$= \left(\mathcal{X} - \mathbb{1}_n \, \overline{\mathbf{x}}_{(n)}' \right) \mathcal{G} .$$

En el lado izquierdo tenemos

$$\mathcal{Y} \equiv \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & \cdots & y_{p1} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n} & y_{2n} & \cdots & y_{pn} \end{pmatrix}$$

← La columna j tiene n observaciones de la j-ésima componente principal $\mathbb{Y}_j$

$$\mathcal{Y} = \left(\mathcal{X} - \mathbb{1}_n \, \overline{\mathbf{x}}_{(n)}' \right) \mathcal{G} \quad \text{-----} \quad (\text{CP})$$

En forma análoga a como se desarrollaron las igualdades (B) y (C) para $\hat{\Sigma}$ y $\mathcal{X}$, podemos probar que si $\Sigma_{\mathbb{Y}} = VAR(\mathbb{Y})$ ($\mathbb{Y}$ = vector de componentes principales definido en la ecuación (CompPrin) página 20), entonces

$$\hat{\Sigma}_{\mathbb{Y}} = \frac{1}{n}\, \mathcal{Y}' \mathcal{H} \mathcal{Y},$$

pero usando la definición de la matriz de centrado $\mathcal{H}$ y la forma de la matriz de componentes principales $\mathcal{Y}$ en la ecuacion (CP)

$$\hat{\Sigma}_{\mathbb{Y}} = \frac{1}{n}\, \mathcal{G}' \left(\mathcal{X} - \mathbb{1}_n \overline{x}'_{(n)}\right)' \mathcal{H} \left(\mathcal{X} - \mathbb{1}_n \overline{x}'_{(n)}\right) \mathcal{G}.$$

Pero $\mathcal{H}$ es tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\, \mathbb{1}_n \overline{x}'_{(n)} &= \left(\mathbb{I}_n - \frac{1}{n} \mathbb{1}_n \mathbb{1}_n'\right) \mathbb{1}_n \overline{x}'_{(n)} \\
&= \mathbb{1}_n \overline{x}'_{(n)} - \frac{1}{n} \mathbb{1}_n \left(\mathbb{1}_n' \mathbb{1}_n\right) \overline{x}'_{(n)} \\
&= \mathbb{1}_n \overline{x}'_{(n)} - \frac{1}{n} \mathbb{1}_n (n)\, \overline{x}'_{(n)} \\
&= \mathbb{1}_n \overline{x}'_{(n)} - \mathbb{1}_n \overline{x}'_{(n)} = \mathbb{O} \leftarrow \text{matriz de } n \times p \text{ con entradas} = 0
\end{aligned}$$

y lo anterior implica que

$$\underset{\substack{\text{matriz de}\\ p\times n \text{ con}\\ \text{entradas}=0}}{\longrightarrow}\ \mathbb{O} = (\mathbb{1}_n \bar{x}_{G(n)}')'\mathcal{H}' = (\mathbb{1}_n \bar{x}_{G(n)}')'\mathcal{H}$$

(por simetría de $\mathcal{H}$).

Entonces

$$\hat{\Sigma}_{\mathbb{Y}} = \frac{1}{n}\mathcal{G}'(\mathcal{X})'\mathcal{H}\mathcal{X}\mathcal{G} = \mathcal{G}'\hat{\Sigma}\mathcal{G}$$

$$\overset{(D)}{=} \mathcal{G}'\mathcal{G}\mathcal{L}\mathcal{G}'\mathcal{G} = \mathcal{L}$$

$\therefore$ $\hat{\Sigma}_{\mathbb{Y}}$ es una matriz diagonal que sobre su diagonal tiene los elementos $l_1, \ldots, l_p$, los valores propios de $\hat{\Sigma}$.

Como los elementos sobre la diagonal de $\hat{\Sigma}_{\mathbb{Y}}$ deben ser $\widehat{VAR}(\mathbb{Y}_1), \widehat{VAR}(\mathbb{Y}_2), \ldots, \widehat{VAR}(\mathbb{Y}_p)$

entonces

$$\widehat{VAR}(\mathbb{Y}_i) = l_i \quad i = 1, 2, \ldots, p.$$