## Interpretación de los Factores

En el caso en que el modelo haya resultado adecuado (se haya logrado explicar un porcentaje significativo de la varianza y de las covarianzas en las componentes de $\mathbb{X}$, a través de los $k$ factores), hay que interpretar los resultados del modelo, por lo cual es importante entender cómo correlacionan los factores con las variables originales $X_1, \ldots, X_p$. Usando los supuestos en (2), página 8, obtenemos que

$$\mathrm{COV}(\mathbb{X},\mathbb{F}) = \Sigma_{\mathbb{X}\mathbb{F}} = \mathbb{E}\left[(\mathbb{X}-\mathbb{M})(\mathbb{F}-\mathbb{M}_{\mathbb{F}})'\right] = \mathbb{E}\left[(\mathbb{Q}\mathbb{F}+\mathbb{U})\mathbb{F}'\right]$$

$$= \mathbb{Q},$$

de forma que

$$\mathrm{CORR}(\mathbb{X},\mathbb{F}) = D^{-1/2}\,\mathbb{Q}\,D_{\mathbb{F}}^{-1/2}, \quad \text{donde } D = \mathrm{diag}\{\mathrm{VAR}(X_1), \ldots, \mathrm{VAR}(X_p)\}$$

y como $\mathrm{VAR}(\mathbb{F}) = \mathbb{I}_k$ $\quad D_{\mathbb{F}} = \mathrm{diag}\{1, \ldots, 1\}$,

es decir, $\quad \mathrm{CORR}(\mathbb{X},\mathbb{F}) = D^{-1/2}\mathbb{Q}$. $\qquad (P_{\mathbb{X}\mathbb{F}} \equiv \mathrm{CORR}(\mathbb{X},\mathbb{F}))$

$$\widehat{P}_{\mathbb{X}\mathbb{F}} = \hat{D}^{-1/2}\hat{\mathbb{Q}} \quad , \quad \hat{\mathbb{Q}} = \text{mle para } \mathbb{Q} . \quad \cdots\cdots (\alpha)$$

Con esta estimación es posible construir gráficas similares a las que se usaron para componentes principales con las parejas ordenadas $(P_{X_i,F_j}, P_{X_i,F_k})$, $i=1,2,\dots,p$, para estudiar dependencias.

Para el caso de datos estandarizados $\mathbb{Y} = D^{-1/2}(\mathbb{X}-\mathbb{M})$

$$COV(\mathbb{Y},\mathbb{F}) = D^{-1/2}\,COV(\mathbb{X}-\mathbb{M},\mathbb{F}') = D^{-1/2}\,COV(\mathbb{X},\mathbb{F}')$$

$$= D^{-1/2}\mathbb{Q}$$

$$CORR(\mathbb{Y},\mathbb{F}) = \mathbb{I}_p\,COV(\mathbb{Y},\mathbb{F}')\,\mathbb{I}_k = COV(\mathbb{Y},\mathbb{F}')$$

$$= D^{-1/2}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_Y$$

$$\widehat{P}_{\mathbb{Y}\mathbb{F}} = \widehat{CORR(\mathbb{Y},\mathbb{F}')} = \hat{D}^{-1/2}\hat{\mathbb{Q}} = \hat{\mathbb{Q}}_Y \quad \cdots\cdots (\beta)$$

Los pesos asociados a los factores $\mathbb{F}$ <u>no</u> son únicos:

Si $\mathbb{G}$ es una matriz t.q. $\mathbb{G}\mathbb{G}' = \mathbb{I}_k$ (matriz ortonormal) entonces podemos re-escribir $(\underline{IV})$ (página 7) como

$$\mathbb{X} = (\mathbb{Q}\mathcal{G})(\mathcal{G}'\mathbb{F}) + \mathbb{U} + \mu \quad (\text{IV}')$$

Si el modelo IV es "verdadero" entonces el modelo (IV') también se satisface, con pesos $\mathbb{Q}\mathcal{G}$ y con factores $\mathcal{G}'\mathbb{F}$. Se puede aprovechar este hecho, ya que multiplicar por la izquierda a $\mathbb{F}$ con una matriz ortonormal se puede interpretar como una rotación al sistema de ejes en el cual está representado el vector en $\mathbb{F}$. Si se selecciona una rotación "conveniente" se obtendrá una matriz de pesos $\mathbb{Q}\mathcal{G}$ que será más fácil de interpretar. Por otra parte, como lo establecen ($\alpha$) y ($\beta$) los pesos $\mathbb{Q}$ se usan para calcular las correlaciones entre los factores $\mathbb{F}$ y las variables $X_1, \ldots, X_p$, se puede entonces buscar una rotación $\mathcal{G}$ de forma que los factores $\mathcal{G}\mathbb{F}$ en donde se maximice la correlación con algunos grupos de variables.

nota: Debido a que para obtener los estimadores de MLE para $Q$ y $\Psi$ requiere la programación de métodos numéricos para resolver ecuaciones complicadas, en la práctica se estudian formas de usar la relación

$$\Sigma = QQ' + \Psi$$

para obtener estimaciones de $Q$ y $\Psi$

No obstante, desde un punto de vista computacional y numérico la no unicidad de los pesos es una desventaja debido a la multiplicidad de soluciones encontrar $Q$ y $\Psi$ a partir de la ecuación $\Sigma = QQ' + \Psi$ no es un problema que pueda resolver algún algoritmo numérico en forma directa, por ello se requiere imponer restricciones.

Si resulta que al imponer restricciones se puede encontrar una solución, esta se puede "corregir" usando una rotación "conveniente", como se mencionó antes.

Algunas restricciones usadas en la práctica son

(i) $Q'\Psi^{-1}Q$ es matriz diagonal ó

(ii) $Q'DQ$ es matriz diagonal.

La relación $\Sigma = QQ' + \Psi$ "parametriza" a $\Sigma$ con un total de $p \times k + p$ parámetros, pero ya sea (i) ó (ii) introducen $\frac{1}{2}k(k+1)$ restricciones[1]

(1) p. ej. las entradas de $Q'\Psi^{-1}Q$ que están debajo de la diagonal No se requieren.

Ya que se requiere que las matrices sean diagonales

Entonces el número d de "grados de libertad"

para el modelo de K factores es

$$d = \begin{pmatrix} \text{número de parámetros de } \Sigma \\ \text{sin considerar restricciones} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{número de parametros de} \\ \Sigma \text{ consirerando} \\ \text{restricciones} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} p(p+1) - \left(pK + p - \frac{1}{2} K(K-1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(p-K)^2 - \frac{1}{2}(p+K) .$$

Se requiere que $d \geq 0$ (1), para poder determinar el modelo. El caso $d=0$ da una solución único y a veces no resulta útil. En la práctica se tiene $d>0$, (lo cual nos deja más ecuaciones por resolver que el número de incognitas (parámetros), por lo cual, para determinar soluciones se usan aproximaciones.

Evaluar el número de grados de libertad d, es un aspecto importante, porque nos da una idea de una cota superior para el número de factores

(1) $d<0$ significaría que el número de parámetros en el modelo de factores es mayor que el número de parámetros del modelo original.