	Estimaciones de los pesos de los Factores $\hat{q}_1$	$\hat{q}_2$	Comunalidad $\hat{h}_j^2$	Varianzas Específicas $\hat{\psi}_{jj} = 1 - \hat{h}_j^2$
X_1 longitud	+0.0047	−0.5369	0.2883	0.711
X_2 ancho (izq.)	−0.79	−0.4157	0.7975	0.202
X_3 ancho (der.)	−0.7976	−0.2983	0.7253	0.274
X_4 long. borde inferior	−0.5920	0.1929	0.3877	0.612
X_5 long. borde superior	−0.5106	0.1069	0.2722	0.727
X_6 long. diag.	0.8816	−0.4482	0.9782	0.021

Por último y de acuerdo con la discusión en la página 19, podemos usar una rotación de los ejes, para tratar de obtener interpretabilidad

Método de componentes Principales (PCM)

Para dar una forma de estimación alternativa al método de factores principales, comencemos por aproximar Q (en lugar de aproximar Ψ, como lo hace el PFM). Para lo anterior sea $\hat{\Sigma} = \hat{\Gamma}\hat{\Lambda}\hat{\Gamma}'$ la descomposición de Jordan de $\hat{\Sigma}$.

Entonces el método de componentes principales propone aproximar $\mathbb{Q}$ con

$$(PCM1) \cdots \quad \hat{\mathbb{Q}} = \hat{\Gamma}_1 \hat{\Lambda}_1^{1/2},$$

donde $\hat{\Gamma}_1 = (\hat{\gamma}_1, \ldots, \hat{\gamma}_k)$ y $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\lambda}_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & \hat{\lambda}_k \end{pmatrix}$

$\hat{\Lambda}_1$ es una matriz diagonal que contiene en su diagonal a los primeros k valores propios, $\hat{\Gamma}_1$ es de dimensiones $p \times k$ y sus columnas son los primeros k vectores propios de $\hat{\Gamma}$

Los estimadores de las varianzas especificas ψ_{jj} son entonces los elementos en la diagonal de la matriz $\hat{\Sigma} - \hat{\mathbb{Q}}\hat{\mathbb{Q}}'$

$$(PCM2) \cdots \quad \hat{\Psi} = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{\psi}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \hat{\psi}_{pp} \end{pmatrix} ; \quad \hat{\psi}_{jj} = \hat{\Sigma}_{jj} - \sum_{l=1}^{k} \hat{q}_{jl}^2 .$$

Para medir la bondad de estas aproximaciones consideremos la matriz $\hat{\Sigma} - (\hat{Q}\hat{Q}' + \hat{\psi})$.

Se puede probar que

$$\sum_i \sum_j (\Sigma - \hat{Q}\hat{Q}' - \hat{\psi})^2_{ij} \leq \lambda^2_{k+1} + \cdots + \lambda^2_p .$$

Entonces, entre más pequeño sea el tamaño o la magnitud de los valores propios que no se consideraron, el error de la aproximación será menor. Una regla intuitiva para seleccionar k, es considerar la proporción de la varianza muestral total atribuida al j-ésimo factor

$$\widehat{VAR(X_j)} = \sum_{l=1}^{k} \hat{q}^2_{jl} + \hat{\psi}_{jj} = \sum_{l=1}^{k} \hat{\lambda}_l \hat{\gamma}^2_{jl} + \hat{\psi}_{jj}$$

$$= \hat{\lambda}_1 \hat{\gamma}^2_{j1} + \hat{\lambda}_2 \hat{\gamma}^2_{j2} + \cdots + \hat{\lambda}_k \hat{\gamma}^2_{jk} + \hat{\psi}_{jj}$$

$$T = \sum_{j=1}^{p} \widehat{VAR(X_j)} = \hat{\lambda}_1 \sum_{j=1}^{p} \hat{\gamma}^2_{j1} + \hat{\lambda}_2 \sum_{j=1}^{p} \hat{\gamma}^2_{j2} + \cdots + \hat{\lambda}_k \sum_{j=1}^{p} \hat{\gamma}^2_{jk} + \hat{\psi}_{jj}$$

$$= \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \cdots + \hat{\lambda}_k + \hat{\psi}_{jj}$$

Ya que $\hat{\Gamma}$ es ortonormal

$$1 = \frac{\hat{\lambda}_1}{T} + \frac{\hat{\lambda}_2}{T} + \cdots + \frac{\hat{\lambda}_k}{T} + \frac{\hat{\psi}_{jj}}{T}$$

de donde $\dfrac{\hat{\lambda}_j}{\sum_{i=1}^{p} \widehat{VAR}(X_i)}$ es la proporción

de la varianza de los datos, explicada

por el factor j ; $j = 1, 2, \ldots, K$

NOTA: Si todo el proceso se hace a partir de $\hat{R} = \hat{\Gamma}_{\hat{R}} \hat{\Lambda}_{\hat{R}} \hat{\Gamma}_{\hat{R}}'$, entonces

$\dfrac{\hat{\lambda}_j^{R}}{p}$ es la proporción a considerar.

Ejemplo: En un estudio de preferencias de los consumidores, estos fueron encuestados para valorar varios atributos de un producto nuevo. Con sus respuestas, se construyó la siguiente matriz de correlaciones

X_1 = Gusto. X_2 = Relación calidad-Precio.

X_3 = Sabor. X_4 = Posibilidad de usarse como botana.

X_5 = Grado de energías que provee

$$\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1.00 & 0.02 & \boxed{0.96} & 0.42 & 0.01 \\ 0.02 & 1.0 & 0.13 & 0.71 & \boxed{0.85} \\ 0.96 & 0.13 & 1.0 & 0.5 & 0.11 \\ 0.42 & 0.71 & 0.5 & 1.0 & \boxed{0.79} \\ 0.01 & 0.85 & 0.11 & 0.79 & 1.0 \end{pmatrix} = \hat{R}$$

De esta matriz se puede apreciar que las variables 1 y 3, así como las variables 2 y 5 tienen alta correlación. La variable 4 tiene más correlacion con las variables 2 y 5 que con las variables 1 y 3. Podríamos pensar en grupos de variables $\{2,5\}$, $\{1,3\}$, $\{4\}$ ó también $\{2,5,4\}$, $\{1,3\}$, lo anterior sugiere considerar $K=3$ ó 2 factores en un modelo de factores.

Los valores propios de $\hat{R}$ son

$(2.85, 1.80, 0.204, 0.102, 0.033)$,

con esta información obtenemos que un modelo con $K=2$ factores comúnes debe describir un total de

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{p} = \frac{2.85 + 1.8}{5} = 0.93$$

de la varianza muestral. Procedemos a usar PCM para calcular (estimar) los pesos de los factores, las comunalidades y las varianzas específicas, a partir de (PCM1) y (PCM2)

Variable	Pesos de Factores $\hat{q}_1$	$\hat{q}_2$	Comunalidades $\hat{h}_j^2$	Varianzas específicas $\psi_{jj} = 1 - \hat{h}_j^2$
1 Gusto	0.56	-0.82	0.98	0.02
2 Relación Calidad-Precio	0.78	0.52	0.88	0.12
3 Sabor	0.65	-0.75	0.98	0.02
4 Posibilidad uso botana	0.94	0.10	0.89	0.11
5 Grado de energía que da	0.80	0.54	0.93	0.07
valores propios	2.85	1.81		
Proporción de varianza muestral explicada (acumulativa)	0.571	0.932		

Con las estimaciones $\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0.56 & -0.82 \\ 0.78 & 0.52 \\ 0.65 & -0.75 \\ 0.94 & 0.10 \\ 0.80 & 0.54 \end{pmatrix}$ y

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 \end{pmatrix}$$

calculamos