$\sqrt{\widehat{VAR}(X_i^s)} \cdot \sqrt{\widehat{VAR}(Z_j)}$, pero como

$\hat{\Sigma}^s = \hat{\mathcal{R}}$ y esta última matriz tiene

1's sobre su diagonal

$$\widehat{VAR}(X_i^s) = 1 .$$

Para calcular $\widehat{VAR}(Z_j)$, dada la nota (a)

al pie de la página 72

$$\hat{\Sigma}_{\mathcal{Z}} = \frac{1}{n} \mathcal{Z}' \mathcal{Z} = \frac{1}{n} \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{R}}}' \mathcal{X}_s' \mathcal{X}_s \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{R}}}$$

$$= \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{R}}}' \left(\frac{1}{n} \mathcal{X}_s' \mathcal{X}_s\right) \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{R}}}$$

$$= \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{R}}}' \hat{\mathcal{R}} \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{R}}}$$

$$= \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{R}}}' \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{R}}} \mathcal{L}_{\hat{\mathcal{R}}} \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{R}}}' \mathcal{G}_{\hat{\mathcal{R}}}$$

$$= \mathcal{L}_{\hat{\mathcal{R}}} ,$$

es decir $\widehat{COV}(Z_i, Z_j) = 0 \quad \forall i \neq j$ y

$$\widehat{VAR}(Z_j) = l_j^{\hat{\mathcal{R}}}$$

Por tanto la matriz de correlación entre $\mathbb{X}_s$ y $\mathbb{Z}$ es

$$\hat{\mathbb{R}}_{\mathbb{X}_s,\mathbb{Z}} = \mathbb{G}_{\hat{\mathbb{R}}} \mathbb{L}_{\hat{\mathbb{R}}} \mathbb{L}_{\hat{\mathbb{R}}}^{-1/2} = \mathbb{G}_{\hat{\mathbb{R}}} \mathbb{L}_{\hat{\mathbb{R}}}^{1/2}$$

Se puede probar que las correlaciones entre las variables originales X_i y las componentes principales normalizadas z_j, están dadas por

$$r_{x_i z_j} = \sqrt{l_j^{\hat{\mathbb{R}}}}\, g_{ij}^{\hat{\mathbb{R}}} \quad \ldots \quad (\text{cor npc}),$$

(compárese con $r_{x_i y_j}$ en la página 45).

$$\sum_{j=1}^{p} l_j^{\hat{\mathbb{R}}} \left(g_{ij}^{\hat{\mathbb{R}}}\right)^2 = \left(\mathbf{g}_i^{\hat{\mathbb{R}}}\right)' \mathbb{L}_{\hat{\mathbb{R}}}\, \mathbf{g}_i = \text{elemento } (i,i)$$

de la matriz $\mathbb{G}_{\hat{\mathbb{R}}} \mathbb{L}_{\hat{\mathbb{R}}} \mathbb{G}_{\hat{\mathbb{R}}}' = \hat{\mathbb{R}}$, la cual tiene 1's en la diagonal, por tanto

$$\sum_{j=1}^{p} r_{x_i z_j}^2 = \sum_{j=1}^{p} l_j^{\hat{\mathbb{R}}} \left(g_{ij}^{\hat{\mathbb{R}}}\right)^2 = 1 \quad .$$

Nuevamente podemos interpretar $r_{x_i z_j}^2$ como "la proporción de la varianza de X_i explicada por la j-ésima componente principal Z_j".

ejercicio: pruebe la ecuación (cor npc).