(A)

UNA NOTA SOBRE MATRICES POSITIVO DEFINIDAS

Ejercicio (p. ej. en las notas de Probabilidad de Luis Rincón: "Introducción a la Probabilidad", Facultad de Ciencias, UNAM)

Desigualdad de Cauchy-Schwarz (C-S)

Sean X y Y v.a. sobre el mismo espacio de probabilidad, tales que sus segundos momentos $\mathbb{E}(X^2)$ y $\mathbb{E}(Y^2)$ son finitos, entonces

(i) $\{\mathbb{E}(XY)\}^2 \leq \mathbb{E}(X^2) \times \mathbb{E}(Y^2)$ Desigualdad Cauchy-Schwarz

(ii) Si alguna de las variables es degenerada en 0, o las dos son degeneradas, se da la igualdad en (i)

(iii) Si ninguna variable es degenerada

$$\{\mathbb{E}(XY)\}^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) \iff$$

$\exists\, a \neq 0$ y $\exists\, b \neq 0$ tales que

$$\mathbb{P}(\underbrace{aX + bY = 0}_{X = -\frac{b}{a}Y}) = 1$$

Consideremos la densidad bi-variada Normal del vector aleatorio $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

$$\text{(A)} \ldots \quad f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}; \mu, \Sigma) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} |\Sigma|^{-1/2} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)'}$$

Σ es una matriz de varianzas-covarianzas y por definición debe ser simétrica y no negativo-def (positivo-semidefinida).

Tenemos los siguientes resultados (véase p. ej. "Parameter Estimation for Scientists & Engineers" Adrian van der Bos. Wiley 2007, pags 260-261):

<u>Teorema 1</u>: Una matriz (real) simétrica y positivo semidefinida $\mathbb{A}$ es no singular si y sólo si $\mathbb{A}$ es positivo definida.

<u>Teorema 2</u> (corolario del teor. Anterior)

Si una matriz (real) simétrica $\mathbb{A}$ es positivo semidefinida, pero <u>no</u> es positivo definida, entonces es singular.

El segundo de estos resultados nos dice que la matriz Σ en (A) debe ser positivo definida, ya que en caso contrario sería singular y no podríamos calcular $|\Sigma|^{-1/2}$ ó Σ^{-1}

(No podríamos usar (A) para calcular probabilidades)

Asumiendo que Σ no es positivo definido entonces Σ es singular y entonces $|\Sigma| = 0$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} VAR(X) & COV(X,Y) \\ COV(Y,X) & VAR(Y) \end{pmatrix}$$

Sin pérdida de generalidad se puede asumir que $\mathbb{E}(X) = 0$ y $\mathbb{E}(Y) = 0$ ($\mathbb{M} = \mathbb{O}$) de donde

$VAR(X) = \mathbb{E}(X^2)$, $VAR(Y) = \mathbb{E}(Y^2)$ y

$COV(X,Y) = COV(Y,X) = \mathbb{E}(XY)$.

La condición $|\Sigma| = 0$ nos dice que

$$VAR(X) \cdot VAR(Y) - COV^2(X,Y) = 0 \quad \text{o bien}$$

$$\mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2) = \{\mathbb{E}(XY)\}^2$$

Pero por el punto (iii) de la desigualdad de Cauchy-Schwarz al inicio de esta nota, existen $a \neq 0$ y $b \neq 0$ tales que casi seguramente (ó con probabilidad 1)

$$aX + bY = 0$$