En la práctica, una parte del modelo[1] que resulta útil, es considerar que hay dos tipos de factores: (1) Factores comunes a todas las variables contempladas,

(2) Factores específicos de cada variable.

Trabajaremos con una generalización del modelo en (II) que está dada por

$$\mathbb{X} = Q\,\mathbb{F} + \mathbb{U} + \mu, \quad \ldots \quad \left(\underline{\overline{\mathrm{IV}}}\right)$$

donde Q es una matriz de dimensión $p \times K$, cuyas entradas representan pesos asociados a los factores comunes $\mathbb{F}$, este último es un vector de dimensión $K \times 1$. El vector $\mathbb{U}$ de dimensión $p \times 1$, tiene entradas que representan a los factores específicos de cada variable[2]

(1) una parte de la especificación del modelo, un supuesto.

(2) Tanto $\mathbb{F}$ como $\mathbb{U}$ son latentes, i.e. no se observaron.

Se asume además que la correlación entre los componentes de $\mathbb{F}$ vale 0, la correlación entre los componentes de $\mathbb{U}$ también vale 0 y adicionalmente $COV(\mathbb{F},\mathbb{U}) = \mathbb{O}_{K\times p}$. Los supuestos son entonces:

$$
(2)\quad \begin{cases} \mathbb{E}(\mathbb{F}) = \mathbb{O}_{K\times 1} \,, \\ VAR(\mathbb{F}) = \mathbb{I}_K \,, \\ \mathbb{E}(\mathbb{U}) = \mathbb{O}_{p\times 1} \,, \\ COV(U_i, U_j) = 0 \,,\ \forall\, i \neq j \,, \\ COV(\mathbb{F},\mathbb{U}) = \mathbb{O}_{K\times p} \,. \end{cases}
$$

Además denotaremos $VAR(\mathbb{U}) = \Psi = DIAG(\psi_{11}, \ldots, \psi_{pp})$.

Para el jésimo componente de $\mathbb{X}$ tenemos

$$
(\mathrm{V}) \ldots \quad X_j = \sum_{l=1}^{K} q_{jl} F_l + U_j + \mu_j \,, \quad j = 1, 2, \ldots, p.
$$

$\mathbb{E}(X_j) = \mu_j$; $F_1, \ldots, F_K$ factores comunes

U_j factor específico de X_j

$q_{j1}, \ldots, q_{jk}$ pesos de $F_1, \ldots, F_k$ asociados a X_j.

(IV) ó (V) se llaman "Modelo Ortogonal de Factores" ó "Modelo de Factores Ortogonales"

Usando (V) y (Z)

$$VAR(X_j) = \sum_{l=1}^{k} q_{jl}^2 + \psi_{jj}$$

llamaremos a $h_j^2 = \sum_{l=1}^{k} q_{jl}^2$ "la comunalidad" y a ψ_{jj} "la varianza específica".

$$
\begin{aligned}
\Sigma &= \mathbb{E}[(\mathbb{X}-\mathbb{M})(\mathbb{X}-\mathbb{M})'] \\
&= \mathbb{E}[(\mathbb{Q}\mathbb{F}+\mathbb{U})(\mathbb{Q}\mathbb{F}+\mathbb{U})'] \\
&= \mathbb{Q}\,\mathbb{E}(\mathbb{F}\mathbb{F}')\mathbb{Q}' + \mathbb{E}(\mathbb{U}\mathbb{U}') \\
&= \mathbb{Q}\, VAR(\mathbb{F})\,\mathbb{Q}' + \Psi \\
&= \mathbb{Q}\mathbb{Q}' + \Psi \qquad \text{-----} \quad (Y)
\end{aligned}
$$

En el modelo (IV), $\mathbb{U}$ se puede interpretar como un término de error tal que sus componentes U_i tienen la posibilidad de tener varianzas distintas, por lo que permite captar variaciones en las componentes de $\mathbb{X}$ (variaciones específicas de cada variable).

El termino μ corresponde a $\mathbb{E}(\mathbb{X})$ y el termino $Q\mathbb{F}$ tiene el objetivo de explicar la estructura de correlación entre las componentes de $\mathbb{X}$.

Nuestro objetivo será encontrar estimadores de Q y de Ψ.

Invarianza a cambios de escala

Supóngase que se re-escalan los datos para obtener $\mathbb{Y} = \mathbb{C}\mathbb{X}$ con $\mathbb{C} = \mathrm{DIAG}(c_1, \ldots, c_p)$, entonces asumiendo que en verdad tenemos que

$$\mathbb{X} = \mathbb{Q}\mathbb{F} + \mathbb{U} + \mu,$$

con los supuestos (z)

$$\mathrm{VAR}(\mathbb{Y}) = \mathbb{C}\Sigma\mathbb{C}' \overset{(y)}{=} \mathbb{C}\mathbb{Q}\mathbb{Q}'\mathbb{C}' + \mathbb{C}\Psi\mathbb{C}',$$

de manera que el mismo modelo de k factores se satisface para $\mathbb{Y}$, tomando $\mathbb{Q}_Y \equiv \mathbb{C}\mathbb{Q}$ y $\Psi_Y = \mathbb{C}\Psi\mathbb{C}'$:

$$\mathbb{Y} = \mathbb{Q}_Y \mathbb{F} + \mathbb{U}' + \mu',$$

con $\mathbb{U}' = \mathbb{C}\mathbb{U}$ y $\mu' = \mathbb{C}\mu$.

Por esta razón, en la literatura, se considera conveniente considerar los datos estandarizados $\mathbb{Y} = D^{-1/2}(\mathbb{X} - \mu)$, en cuyo caso (y) pag 9 es

$$R = \mathbb{Q}_Y \mathbb{Q}_Y' + \Psi_Y$$