A continuación, verificaremos que, como se establece en el Teorema C, $VAR(\mathbb{Y}_i)=\lambda_i$.

$$VAR(\mathbb{Y}_1)=VAR\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1+X_2)\right\}=\frac{1}{2}VAR(X_1+X_2)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{VAR(X_1)+VAR(X_2)+2COV(X_1,X_2)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{1+1+2\rho\}=1+\rho=\lambda_1$$

$$VAR(\mathbb{Y}_2)=VAR\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1-X_2)\right\}=\frac{1}{2}VAR(X_1-X_2)$$

$$=\frac{1}{2}(1+1-2\rho)=1-\rho=\lambda_2$$

Teorema: Dado un vector aleatorio $\mathbb{X}$ tal que $\mathbb{E}(\mathbb{X})=\mu$ y $VAR(\mathbb{X})=\Sigma$, sea $\mathbb{Y}=\Gamma'(\mathbb{X}-\mu)$ la transformación de Componentes Principales. Entonces:

(1) $\mathbb{E}(\mathbb{Y}_j)=0 \; ; \; \forall j=1,2,\dots,p.$

(2) $VAR(\mathbb{Y}_j)=\lambda_j \; ; \; \forall j=1,2,\dots,p.$

(3) $COV(\mathbb{Y}_i,\mathbb{Y}_j)=0 \; ; \; \forall i\neq j \;\; i,j\in\{1,\dots,p\}.$

(4) $VAR(\mathbb{Y}_1) \geq VAR(\mathbb{Y}_2) \geq \cdots \geq VAR(\mathbb{Y}_p) \geq 0.$

(5) $\sum_{j=1}^{p} VAR(\mathbb{Y}_j) = \text{traza}(\Sigma)$

(6) $\prod_{j=1}^{p} VAR(\mathbb{Y}_j) = |\Sigma|.$

Dem

1) $\mathbb{E}[\mathbb{Y}_j] = \gamma_j' \mathbb{E}(\mathbb{X} - \mu) = \gamma_j'(\mu - \mu) = 0$

$\uparrow$

$\mathbb{Y}_j = \gamma_j'(\mathbb{X} - \mu)$

2) $VAR(\mathbb{Y}_j) = VAR(\gamma_j'(\mathbb{X}-\mu)) = \gamma_j' VAR(\mathbb{X}-\mu)\gamma_j$

$= \gamma_j' VAR(\mathbb{X})\gamma_j = \gamma_j' \Sigma \gamma_j$

Pero por el Teorema C (cuando $\mathbb{B} = \mathbb{I}$)

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ son los valores propios de $\mathbb{B}'\mathbb{A} = \mathbb{A}$

entonces $\lambda_p \leq \dfrac{x' A x}{x' x} \leq \lambda_1 \quad \forall x \neq 0;\ x \in \mathbb{R}^p.$

En particular si $\|x\| = 1$ $\lambda_p \leq x' A x \leq \lambda_1$.

Si γ_j es el vector propio (normalizado) de $\mathbb{A} = \Sigma$, asociado a λ_j entonces

$$\Sigma \gamma_j = \lambda_j \gamma_j$$

Lo que implica que $\gamma_j' \Sigma \gamma_j = \lambda_j \gamma_j' \gamma = \lambda_j$

$\therefore \quad VAR(Y_j) = \lambda_j$

3) $COV(Y_i, Y_j) = \mathbb{E}\left[(Y_i - \mathbb{E}(Y_i))(Y_j - \mathbb{E}(Y_j))\right]$

$\overset{(1)}{=} \mathbb{E}[Y_i Y_j] = \mathbb{E}[\gamma_i'(X-\mu)(X-\mu)'\gamma_j]$

$= \gamma_i' \, \mathbb{E}\left[(X-\mu)(X-\mu)'\right] \gamma_j$

$= \gamma_i' \Sigma \gamma_j \underset{\text{Teor (DJ)}}{=} \gamma_i' \Gamma \Lambda \Gamma' \gamma_j$.

Pero las columnas de Γ (los vectores propios de Σ) son ortogonales y con norma 1

$\gamma_i' \Gamma = (0, 0, \dots, \underset{\text{lugar } i}{1}, 0, \dots, 0)$

$$\Gamma' \gamma_j = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{— lugar } j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

, entonces

$$\gamma_i' \Gamma \Lambda \Gamma' \gamma_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ \lambda_i & i = j \end{cases}$$

de aquí se siguen (3) y (2)

(4) Se sigue de que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p$
y se tiene (2)

(5) Es resultado del siguiente teorema
para matrices

Teor: Sea A una matriz de dimensiones
$p \times p$ con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$,
entonces

$$\text{traza}(A) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$$

(†) véase por ejemplo: Magnus y Neudecker
Matrix differential calulus with Applications
in Statistics and Econometrics Wiley
(1999).

(6) Es resultado del siguiente resultado

Teor: Sea A una matriz de dimensiones
$p \times p$ con valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$,
entonces

$$|A| = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j$$

véase (†)