Asimismo, el tono del cabello y las líneas de la cara también son diferentes entre estos dos grupos.

NOTAS: • La función "MVAfacebank10.R" manda un mensaje donde dice que X_6 esta asociada con sonrisa. Esto se aprecia en las caras.

•• Para clasificación, las caras similares podrían formar subgrupos en los datos.

••• Outliers se podrían identificar en caras con rasgos extremos.

2 Las curvas de Andrews

De nuevo es la idea de representar vectores en $\mathbb{R}^p$ $(p>3)$ como objetos en 2 dimensiones.

$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}) \longleftrightarrow f_i(t)$

donde la función $f_i(t)$ está dada por

$$f_i(t)=\begin{cases}\dfrac{x_{i1}}{\sqrt{2}}+x_{i2}\sin(t)+x_{i3}\cos(t)+\cdots+x_{ip-1}\sin\left(\frac{p-1}{2}t\right)+x_{ip}\cos\left(\frac{p-1}{2}t\right) & \text{si } p \text{ es impar,}\\[2ex] \dfrac{x_{i1}}{\sqrt{2}}+x_{i2}\sin(t)+x_{i3}\cos(t)+\cdots+x_{ip}\sin\left(\frac{p}{2}t\right) & \text{si } p \text{ es par.}\end{cases}$$

La idea de usar esta función proviene de considerar una serie de Fourier:

$$\text{(A)}\ \ldots\quad g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\};\quad -\pi<t<\pi$$

La función $f_i(t)$ se puede escribir como en (A) si $a_0=x_{i1}\sqrt{2}$; $a_1=x_{i3}$; $b_1=x_{i2}$; $\cdots$

$a_{\frac{p-1}{2}}=x_{ip}$; $b_{\frac{p-1}{2}}=x_{ip-1}$; $a_{\frac{p-1}{2}+1}=0=b_{\frac{p-1}{2}+1}$;

$a_{\frac{p-1}{2}+2}=0=b_{\frac{p-1}{2}+2}$; $\cdots$. Cuando p es impar

y cuando p es par

$a_0=x_{i1}\sqrt{2}$; $a_1=x_{i3}$; $b_1=x_{i2}$; $\cdots$

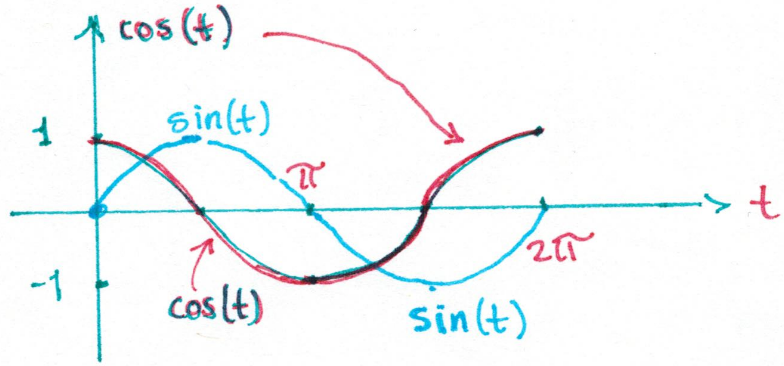
$a_{\frac{p}{2}-1}=x_{ip-1}$; $b_{\frac{p}{2}-1}=x_{ip-2}$; $a_{\frac{p}{2}}=0$; $b_{p/2}=x_{ip}$

$a_{\frac{p}{2}+1} = 0 = b_{\frac{p}{2}+1}$; $a_{\frac{p}{2}+2} = 0 = b_{\frac{p}{2}+2}$; $\cdots$

Sobre el intervalo $[0, 2\pi]$:
En la serie de Fourier (A), para valores "pequeños" de n, los coeficientes a_n y b_n están asociados a funciones que "no oscilan mucho"

"Frecuencias Bajas"

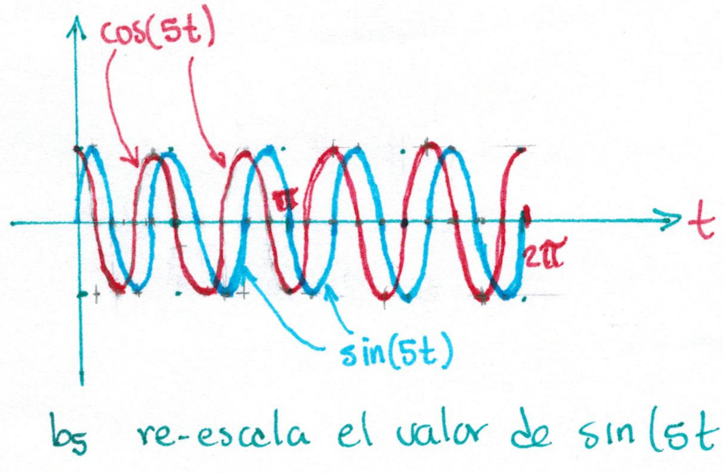
P. ej. $n=1$ a_1 re-escala el valor de $\cos(t)$



$n=1$ b_1 re-escala el valor de $\sin(t)$.

"Frecuencias altas"

Pero si $n=5$ a_5 re-escala el valor de $\cos(5t)$

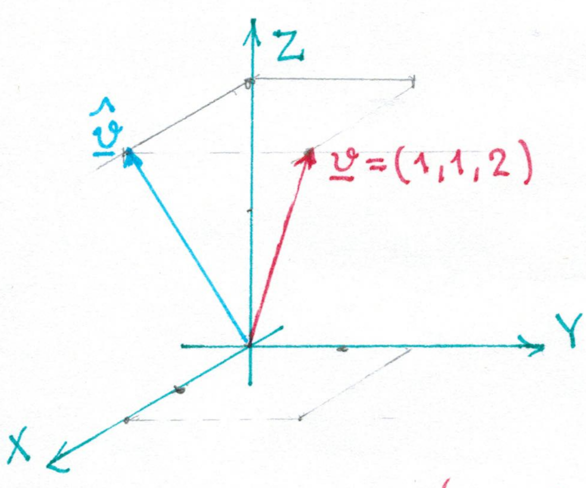


b_5 re-escala el valor de $\sin(5t)$

si n no es muy "pequeña" a_n y b_n están asociados a funciones que "oscilan más" que cuando n es "pequeña".

En análisis de Fourier se dice que los primeros términos en (A) estan asociados a "frecuencias bajas" y mientras más grande sea n, el correspondiante término se asocia a una "frecuencia más alta".(1)

Ahora, recordemos el concepto de proyección ortogonal en espacios vectoriales de dimensión finita



$\mathbb{H}=\mathbb{R}^3$

$\mathbb{V} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \exists_n \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $(x,y,z)=\alpha(1,0,0)+\beta(0,0,1) \}$

$\mathbb{V} = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z)=(\alpha,0,\beta) ; \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \beta \in \mathbb{R} \}$

(1) En Física se define la frecuencia como el número de veces que se repite un ciclo en una unidad de tiempo. Las funciones seno y coseno repiten un ciclo en el intervalo $[0,2\pi]$

Para calcular la proyección $\underline{\hat{v}}$ del vector $\underline{v}$ en el subespacio $\mathbb{V}$, necesitamos encontrar α' y β' en $\mathbb{R}$ tales que

$$\underline{\hat{v}} = \alpha'(1,0,0) + \beta'(0,0,1) . \quad \cdots (B)$$

Debido a que $\{(1,0,0), (0,0,1)\}$ es una base ortonormal para $\mathbb{V}$, podemos calcular

$$\langle \underline{v}, (1,0,0) \rangle = 1\cdot1 + 1\cdot0 + 2\cdot0 = 1 = \alpha' ,$$
$$\langle \underline{v}, (0,0,1) \rangle = 1\cdot0 + 1\cdot0 + 2\cdot1 = 2 = \beta' .$$

Entonces, por (B) $\underline{\hat{v}} = (1,0,2)$.

Los coeficientes α' y β' en (B) representan re-escalamientos de $(1,0,0)$ y de $(0,0,1)$ necesarios para obtener $\underline{\hat{v}}$.

En general, si $\mathbb{H}$ es un espacio vectorial de dimensión finita y $\{\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{H}$, entonces para cada $\underline{v} \in \mathbb{H}$ existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en $\mathbb{R}$ t.q.

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{u}_i \quad \cdots\cdots (B')$$

Los coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en (B') representan re-escalamientos de $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$ necesarios para obtener $\underline{v}$.

En análisis de Fourier, la representación (A) de una función $g(t)$ se puede entender en forma similar a lo dicho arriba para combinaciones lineales de vectores ortonormales que generan a un espacio vectorial

Para cada n:

- a_n y b_n son los re-escalamientos de $\cos(nt)$ y $\operatorname{sen}(nt)$ necesarios para obtener $g(t)$
- Si la magnitud de a_n es "grande", entonces la función $\cos(nt)$ es importante para describir a $g(t)$ a través de (A), (análogamente si b_n tiene magnitud grande, $\sin(nt)$ es importante para describir $g(t)$ a través de (A)).
- Como consecuencia del punto anterior