que se espera poder usar en el modelo.

Por ejemplo para $p=4$ y $K=2 \Rightarrow d=-1$

$p=4 \quad K=1 \Rightarrow d=2$ tiene solución

$p=6 \quad K=1 \Rightarrow d=9 \qquad p=6 \quad K=2 \Rightarrow d=4$ tienen solución

$p=6 \quad K=3 \Rightarrow d=0$ hay una sola solución

ejemplo: $p=3 \quad K=1 \Rightarrow d=0$ hay una única solución

$\Sigma = QQ' + \psi$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^2+\psi_{11} & q_1q_2 & q_1q_3 \\ q_1q_2 & q_2^2+\psi_{22} & q_2q_3 \\ q_1q_3 & q_2q_3 & q_3^2+\psi_{33} \end{pmatrix}$$

donde $Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} \end{pmatrix}$

para este ejemplo se satisface la restricción $Q'\psi Q$ es diagonal, ya que $K=1$.

La solución está dada por

$$q_1^2 = \frac{\sigma_{12}\sigma_{13}}{\sigma_{23}} \; ; \quad q_2^2 = \frac{\sigma_{12}\sigma_{23}}{\sigma_{13}} \; ; \quad q_3^2 = \frac{\sigma_{13}\sigma_{23}}{\sigma_{12}}$$

$\psi_{11} = \sigma_{11} - q_1^2$; $\psi_{22} = \sigma_{22} - q_2^2$; $\psi_{33} = \sigma_{33} - q_3^2$.

Para este caso particular, la única rotación que se puede considerar es $\epsilon_j = -1$, de forma que se puede estudiar la solución alternativa

$$-Q = \begin{pmatrix} -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{pmatrix}$$

Habiendo estudiado estos ejemplos con la cantidad poblacional Σ, pasamos a revisar lo que sucede en la práctica, cuando se reemplaza Σ por $\hat{\Sigma}$ (ó cuando se usan datos estandarizados y en lugar de $\hat{\Sigma}$ aparece $\hat{R}$). En tal caso tenemos

$$\hat{\Sigma} = \hat{Q}\hat{Q}' + \hat{\psi}, \quad \cdots\cdots (\delta)$$

dado un estimador $\hat{Q}$ de Q, es natural proponer

$$\hat{\psi}_{jj} = \hat{\Sigma}_{jj} - \sum_{l=1}^{k} \hat{q}_{jl}^2 .$$

$\hat{h}_j^2 \equiv \sum_{l=1}^{k} \hat{q}_{jl}^2$ es un estimador para la comunalidad h_j^2. ¿Cómo encontrar $\hat{Q}$ y $\hat{\Psi}$ t.q. (δ) se satisface?

Para el caso de datos estandarizados, a menudo es más fácil resolver el problema de estimar Q y Ψ. Sea $\mathcal{X}_S = \mathcal{H}\mathcal{X}\hat{D}^{-1/2}$ la matriz de datos estandarizados[1] $\left(\hat{D} = \operatorname{diag}(\widehat{VAR}(X_1), \dots, \widehat{VAR}(X_p))\right)$.

Asumiendo que $\hat{Q} \equiv \hat{Q}_X$ y $\hat{\Psi} \equiv \hat{\Psi}_X$ satisfacen

$$\hat{\Sigma} = \hat{Q}_X \hat{Q}_X' + \hat{\Psi}_X ,$$

entonces si $\hat{\mathcal{R}} = \frac{1}{n}\mathcal{X}_S'\mathcal{X}_S$ es la matriz de correlaciones de $\mathcal{X}$

$$\hat{\mathcal{R}} = \hat{Q}_Y \hat{Q}_Y' + \hat{\Psi}_Y \quad \cdots\cdots (\xi)$$

para $\hat{Q}_Y = \hat{D}^{-1/2}\hat{Q}_X$ y $\hat{\Psi}_Y = \hat{D}^{-1/2}\hat{\Psi}_X\hat{D}^{-1/2}$

(1) $\mathcal{H} = \mathbb{I}_n - \frac{1}{n}\mathbb{1}_n\mathbb{1}_n'$

La interpretación de los factores (del modelo de Factores) se formula a partir de las correlaciones $\hat{Q}_Y$ (véase la ecuación (β), página 18).

<u>ejemplo:</u> Consideremos datos $\mathcal{X}$ para los cuales

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$ con matriz de correlaciones

estimada

$$\hat{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0.975 & 0.613 \\ 0.975 & 1 & 0.620 \\ 0.613 & 0.620 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando $k=1$ tenemos que $d=0$, entonces sólo hay una solución. Planteando la ecuación (ξ)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.975 & 0.613 \\ 0.975 & 1 & 0.620 \\ 0.613 & 0.620 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{q}_1^2 + \hat{\psi}_{11} & \hat{q}_1\hat{q}_2 & \hat{q}_1\hat{q}_3 \\ \hat{q}_1\hat{q}_2 & \hat{q}_2^2 + \hat{\psi}_{22} & \hat{q}_2\hat{q}_3 \\ \hat{q}_1\hat{q}_3 & \hat{q}_2\hat{q}_3 & \hat{q}_3^2 + \hat{\psi}_{33} \end{pmatrix},$$

se obtiene $\hat{q}_1^2 = \dfrac{r_{X_1X_2}\, r_{X_1X_3}}{r_{X_2X_3}} \Rightarrow \hat{q}_1 = 0.982$

$$\hat{q}_2^2 = \frac{r_{X_1X_2}\, r_{X_2X_3}}{r_{X_1X_3}} \Rightarrow \hat{q}_2 = 0.993$$

$$\hat{q}_3^2 = \frac{r_{x_1x_3} r_{x_2x_3}}{r_{x_1x_2}} \Rightarrow \hat{q}_3 = 0.624$$

De forma que las estimaciones de las comunalidades son $\hat{h}_1^2 = (0.982)^2$; $\hat{h}_2^2 = (0.993)^2$ $\hat{h}_3^2 = (0.624)^2$. Las estimaciones de las varianzas especificas ψ_{jj} $j=1,2,3$ son

$$\hat{\psi}_{11} = 1 - \hat{q}_1^2 = 0.035 \qquad \hat{\psi}_{22} = 1 - \hat{q}_2^2 = 0.014$$

$$\hat{\psi}_{33} = 1 - \hat{q}_3^2 = 0.610 .$$

Como $\hat{h}_1^2 \approx 0.965$ y $\hat{h}_2^2 \approx 0.986$, las 1as dos comunalidades están cercanas a 1, se concluye que X_1 y X_2 <u>si</u> están siendo explicadas por el factor considerado.

METODO DE FACTORES PRINCIPALES

Su objetivo es descomponer la matriz de correlaciones $\hat{\mathbb{R}}$ (o también $\hat{\Sigma}$ si así se requiere). De la relación

(3) podemos escribir

$$\hat{Q}_Y \hat{Q}_Y' = \hat{\mathcal{R}} - \hat{\Psi}_Y .$$

La idea a continuación, es tratar de descomponer[1] $\hat{\mathcal{R}} - \hat{\Psi}_Y$ (previamente substituyendo aquí un estimador preliminar para Ψ_Y).

Para plantear un estimador preliminar para Ψ_Y, proponemos estimadores preliminares de las comunalidades h_j^2, $j=1,2,\ldots,p$, hay 2 propuestas usadas en la práctica:

1. $\hat{h}_j^2$ es el cuadrado del coeficiente de correlacion multiple de X_j con $(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_p)$

2. $\hat{h}_j^2$ esta dado por $\max\left\{ |r_{X_j X_\ell}| : \begin{array}{l} \ell \neq j \\ \ell \in \{1,2,\ldots,p\} \end{array} \right\}$

(1) Por ej. descomposición de Jordan ($\hat{\mathcal{R}} - \hat{\Psi}_Y$ es simétrica)

$$\hat{\mathcal{R}} - \hat{\Psi}_Y = \Gamma \Lambda \Gamma' = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \gamma_j \gamma_j' \rightarrow \hat{Q}_Y = \Gamma \Lambda^{1/2}$$

$r_{x_i x_j}$ = entrada i,j de la matriz $\hat{\mathcal{R}}$.

Construimos $\hat{\Psi}_Y$ dada por $\tilde{\Psi}_{jj} = 1-\hat{h}_j^2$ $j=1,2,\dots,p$, y con esta matriz diagonal a su vez se construye la "matriz de correlaciones reducida" $\hat{\mathcal{R}}-\hat{\Psi}_Y$.

Aplicamos la descomposición de Jordan para la matriz simétrica $\hat{\mathcal{R}}-\hat{\Psi}_Y$

$$\hat{\mathcal{R}}-\hat{\Psi}_Y = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \gamma_j \gamma_j',$$

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ son los valores propios de $\hat{\mathcal{R}}-\hat{\Psi}_Y$ y $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ son sus vectores propios. Asumiendo que los primeros k valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son positivos y "grandes" comparados con $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_p$, podemos estimar

$$\hat{\underset{\sim}{q}}_l = \sqrt{\lambda_l}\, \gamma_l \quad ; \quad l=1,2,\dots k,$$

es decir $\hat{Q}_Y = \Gamma_1 \Lambda_1^{1/2}$ (dims $p \times k$)

$\Gamma_1 = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$; $\Delta_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

Finalmente, se corrige $\hat{\Psi}_Y$ a través de

$$\hat{\psi}_{jj} = 1 - \sum_{l=1}^{k} \hat{q}_{jl}^2 \quad ; \; j = 1, 2, \ldots p.$$