$\Gamma_1 = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ ; $\Delta_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$.

Finalmente, se corrige $\hat{\Psi}_Y$ a través de

$$\hat{\psi}_{jj} = 1 - \sum_{l=1}^{k} \hat{q}_{jl}^2 \; ; \; j = 1, 2, \ldots p. \cdots \text{(phi)}$$

Notemos que el procedimiento descrito puede iterarse:

(I) Usando (phi) construimos $\hat{\Psi}$.

(II) Calculamos la matriz de correlaciones reducida $\hat{R} - \hat{\Psi}$.

(III) Calculamos la descomposición de Jordan de $\hat{R} - \hat{\Psi}$, consideramos los valores propios $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p$ y los vectores propios $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$.

(IV) Encontramos $k$ t.q. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$ y definimos los pesos del factor $l$

$$\hat{q}_l = \sqrt{\lambda_l}\, \gamma_l \; ; \; l = 1, 2, \ldots, k$$

estos son las columnas de $\hat{Q}_Y$.

(VI) Usando las entradas de $\hat{Q}_Y$ regresamos a calcular (phi).

Una regla de paro podría ser detener la repetición de estos pesos cuando los valores $\{\hat{\psi}_{jj}\}_{j=1}^{p}$ se estabilicen ó converjan.

<u>ejemplo</u>: Datos de mediciones de billetes en el banco suizo

La matriz de correlaciones muestral es

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.2313 & 0.1518 & -0.1898 & -0.0613 & 0.1943 \\ 0.2313 & 1.0 & 0.7433 & 0.4138 & 0.3623 & -0.5032 \\ 0.1518 & 0.7433 & 1.0 & 0.4868 & 0.4007 & -0.5165 \\ -0.1898 & 0.4138 & 0.4868 & 1.0 & 0.1419 & -0.6230 \\ -0.0613 & 0.3623 & 0.4007 & 0.1419 & 1.0 & -0.5940 \\ 0.1943 & -0.5032 & -0.5165 & -0.6230 & -0.5940 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Los estimadores iniciales de las comunalidades se toman como $\hat{h}_j^2 = \max\{|r_{x_j x_l}| : l \neq j \;\; l \in \{1,2,\dots,p\}\}$, estas quedan dadas por

$$\underset{\sim}{\hat{h}} = (\hat{h}_1^2, \dots, \hat{h}_6^2) = (0.2313, 0.7433, 0.7433, 0.6230, 0.5940, 0.6230)$$

correspondientemente los estimadores preliminares de $\psi_{jj}$ son $\hat{\psi}_{jj} = 1 - h_j^2$

$$\underset{\sim}{\hat{\psi}} = (\hat{\psi}_{11}, \ldots, \hat{\psi}_{66}) = (0.7687, 0.2567, 0.2567, 0.3770, 0.4060, 0.3770)$$

La matriz de correlación reducida es $\hat{R} - \mathrm{diag}(\underset{\sim}{\hat{\psi}})$

$$= \hat{R} - \hat{\psi}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.2313 & 0.2313 & 0.1518 & -0.1898 & -0.0613 & 0.1943 \\ 0.2313 & 0.7433 & 0.7433 & 0.4138 & 0.3623 & -0.5032 \\ 0.1518 & 0.7433 & 0.7433 & 0.4868 & 0.4007 & -0.5165 \\ -0.1898 & 0.4138 & 0.4868 & 0.6230 & 0.1419 & -0.6230 \\ -0.0613 & 0.3623 & 0.4007 & 0.1419 & 0.5940 & -0.5940 \\ 0.1943 & -0.5032 & -0.5165 & -0.6230 & -0.5940 & 0.6230 \end{pmatrix}$$

Calculamos la descomposición de Jordan de $\hat{R} - \hat{\psi}$, los valores propios son

$$\underset{\sim}{\lambda} = (2.6214, 0.7232, 0.4765, 0.0054, -0.0845, -0.184)$$

Los últimos dos valores propios son negativos, de acuerdo al algoritmo propuesto se podría tomar $K = K_1 = 4$ para continuar, pero este valor de $K$ podría no tener sentido de acuerdo a la discusión sobre los grados de libertad d que hicimos en las páginas 22 y 23.

Asumiendo que hicimos este análisis para d antes de hechar a andar el "metodo de factores principales", sea $K_0$ el más grande valor de $K$ tal que $d \geq 0$, entonces podemos continuar tomando $K = \min(K_0, K_1)$[(1)].

El hecho de que existan valores propios negativos quiere decir que $\hat{R} - \hat{\Psi}$ no es positivo definido, esta situación puede aparecer a lo largo de las iteraciones del algoritmo, por lo cual es necesario tomarla en cuenta en los programas de cómputo. Para nuestro caso si $p=6$ $K_0=3$ $\Rightarrow d=0$ (que no resulta con una solución interpretable), entonces conviene tomar $K_0=2$, luego $K=\min(2,4)=2$ para continuar con el algoritmo.

(1) En la siguiente iteración del algoritmo $K_1$ puede cambiar, pero al tomar de nuevo $K=\min(K_0, K_1)$ podemos continuar

$$\Gamma_1 \Lambda_1^{1/2} = \begin{pmatrix} 0.0011 & -0.6225 \\ -0.4832 & -0.4509 \\ -0.5019 & -0.3314 \\ -0.3974 & 0.3488 \\ -0.3542 & 0.1660 \\ 0.4807 & -0.3871 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2.6214} & 0 \\ 0 & \sqrt{0.7232} \end{pmatrix} = \hat{Q},$$

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 0.0018 & -0.5294 \\ -0.7824 & -0.3835 \\ -0.8127 & -0.2818 \\ -0.6435 & 0.2967 \\ -0.5736 & 0.1412 \\ 0.7783 & -0.3292 \end{pmatrix}$$

La corrección a $\hat{\Psi}$ es $\hat{\Psi}_{11} = 1-(0.0018^2 + (-0.5294)^2)$

$\hat{\Psi}_{22} = 1-((-0.7824)^2 + (-0.3835)^2)$, ....

$\hat{\Psi}_{66} = 1-(0.7783^2 + (-0.3292)^2)$

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\Psi}_{22} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \hat{\Psi}_{pp} \end{pmatrix}$$

y luego se repiten II, III, ... etc.

Después de 10 iteraciones se obtiene

| | Estimaciones de los pesos de los Factores $\hat{q}_1$ | $\hat{q}_2$ | Comunalidad $\hat{h}_j^2$ | Varianzas Específicas $\hat{\psi}_{jj} = 1 - \hat{h}_j^2$ |
|---|---|---|---|---|
| $X_1$ longitud | +0.0047 | −0.5369 | 0.2883 | 0.711 |
| $X_2$ ancho (izq.) | −0.79 | −0.4157 | 0.7975 | 0.202 |
| $X_3$ ancho (der.) | −0.7976 | −0.2983 | 0.7253 | 0.274 |
| $X_4$ long. borde inferior | −0.5920 | 0.1929 | 0.3877 | 0.612 |
| $X_5$ long. borde superior | −0.5106 | 0.1069 | 0.2722 | 0.727 |
| $X_6$ long. diag. | 0.8816 | −0.4482 | 0.9782 | 0.021 |

Por último y de acuerdo con la discusión en la página 19, podemos usar una rotación de los ejes, para tratar de obtener interpretabilidad