Sea $\mathbb{A}$ una matriz simétrica de dimensión p y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, decimos que

$$Q_{\mathbb{A}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbb{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, x_i x_j$$

es la forma cuadrática correspondiente a $\mathbb{A}$.

Nos interesarán los casos[a] $Q_{\mathbb{A}}(\mathbf{x}) > 0 ; \forall \mathbf{x} \neq \mathbb{0}$ y $Q_{\mathbb{A}}(\mathbf{x}) \geq 0 ; \forall \mathbf{x}$, de los cuales clasificaremos a la matriz $\mathbb{A}$ como:

(1) $\mathbb{A}$ positivo definida si $Q_{\mathbb{A}}(\mathbf{x}) > 0$.

(2) $\mathbb{A}$ positivo semi-definida si $Q_{\mathbb{A}}(\mathbf{x}) \geq 0$.

Denotaremos el caso (1) como "$\mathbb{A} > 0$".

(a) Para $\mathbb{A}$ simétrica de dimensión p, también puede suceder que $Q_{\mathbb{A}}(\mathbf{x}) < 0$ (negativo definida) ó que $Q_{\mathbb{A}}(\mathbf{x}) \leq 0$ (negativo semi-definida), pero estos casos no los trataremos aquí.

Descomposiciones Espectrales para matrices

Descomposición de Jordan

Teorema (DJ) Toda matriz simétrica $\mathbb{A}$ de dimensión p se puede escribir como

$$\mathbb{A} = \Gamma \Delta \Gamma' = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \boldsymbol{\gamma}_j \boldsymbol{\gamma}_j',$$

donde

$$\Delta = \mathrm{DIAG}(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$$

y

$$\Gamma = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \dots, \boldsymbol{\gamma}_p)$$

es una matriz ortogonal cuyas columnas son los vectores propios de $\mathbb{A}$

Ejemplo: Sea $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, para encontrar los valores propios de $\mathbb{A}$, resolvemos la ecuación

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 0 \quad \dots\dots (1)$$

Las soluciones de (1) (i.e. los valores propios de $\mathbb{A}$ son $\lambda_1 = 2+\sqrt{5}$ y $\lambda_2 = 2-\sqrt{5}$ y los vectores propios son soluciones de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2+\sqrt{5}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \dots\dots (\mathrm{I})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (2-\sqrt{5})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad -- \quad (\mathrm{II})$$

La ecuación (I) tiene un número infinito de soluciones no triviales (<u>no</u> cero), podemos caracterizar una de ellas

$$x_1 + 2x_2 = (2+\sqrt{5})x_1 \longrightarrow 0 = (1+\sqrt{5})x_1 - 2x_2$$

$$2x_1 + 3x_2 = (2+\sqrt{5})x_2 \longrightarrow 0 = (\sqrt{5}-1)x_2 - 2x_1$$

$$\longrightarrow x_1 = \frac{2}{1+\sqrt{5}}x_2$$

$$\longrightarrow x_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}x_2 = \frac{4}{2}\frac{1}{1+\sqrt{5}}x_2 = \frac{2}{1+\sqrt{5}}x_2$$

$\therefore$ cualquier solución no trivial de (I) satisface

$$x_1 = \frac{2}{1+\sqrt{5}}x_2$$

Por ejemplo $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$, pero consideraremos

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3.804} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{3.804} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5257 \\ 0.8506 \end{pmatrix}$$

Análogamente para $\lambda_2 = 2-\sqrt{5}$ usando (II) podemos determinar $u_2 = \begin{pmatrix} 0.8506 \\ -0.5257 \end{pmatrix}$

notemos que $\mathbb{U}_1$ y $\mathbb{U}_2$ son ortogonales

$$\mathbb{U}_1' \mathbb{U}_2 = 0$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0.5257 & 0.8506 \\ 0.8506 & -0.5257 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0.5257 & 0.8506 \\ 0.8506 & -0.5257 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5257 & 0.8506 \\ 0.8506 & -0.5257 \end{pmatrix}$$

$$= \Gamma \Lambda \Gamma'$$

Descomposición de valores Singulares

Teorema (SVD)

Toda matriz $\mathbb{A}$ de dimensiones $n \times p$ y con rango r se puede descomponer como

$$\mathbb{A} = \Gamma \Lambda \Delta',$$

donde: las matrices $\Gamma_{n \times r}$ y $\Delta_{p \times r}$ son ortonormales (en sus columnas)

$$\Gamma' \Gamma = \mathbb{I}_r = \Delta' \Delta \qquad \mathbb{I}_r \leftarrow \text{matriz identidad de } r \times r.$$

La matriz Λ es diagonal $\Lambda = \mathrm{DIAG}(\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_r^{1/2})$, $\lambda_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$. Los valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son los valores propios (diferentes de $\mathbb{0}$) de las matrices $\mathbb{A}\mathbb{A}'$ y $\mathbb{A}'\mathbb{A}$. Γ y Δ consisten de los r vectores propios de estas matrices (las columnas de Γ son los r vectores propios asociados a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ en $\mathbb{A}\mathbb{A}'$; las columnas de Δ son los r vectores propios asociados a $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ en $\mathbb{A}'\mathbb{A}$).

No probaremos los teoremas (JD) y (SVD) aquí, para su demostración hay varios libros de álgebra lineal que se pueden consultar, por ejemplo "Introduction to Linear Algebra", Gilbert Strang, Wellesley College (2016), capítulos 6 y 7, Quinta Edición.

Los teoremas (JD) y (SVD) son cruciales en àlgebra lineal y en particular en el estudio de matrices, los usaremos para revisar algunos resultados útiles.

Teorema A Si $\mathbb{A}$ es una matriz simétrica y $Q_{\mathbb{A}}(\mathbb{x}) = \mathbb{x}'\mathbb{A}\mathbb{x}$ es la forma cuadrática correspondiente, entonces existe una transformación $T(\mathbf{x}) = \Gamma' \mathbf{x} \equiv \mathbf{y}$, tal que

$$\mathbf{x}' \mathbb{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2 ,$$

en donde $\mathbf{y} = (y_1, y_2, .., y_p)'$ y $\lambda_1, \cdots \lambda_p$ son los valores propios de $\mathbb{A}$

Dem

Por el teorema (DJ) podemos escribir $\mathbb{A} = \Gamma \Lambda \Gamma'$.

Sea $\mathbf{y} = \Gamma' \mathbf{x}$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, entonces

$$\mathbf{x}' \mathbb{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}' \Gamma \Lambda \Gamma' \mathbf{x} = \mathbf{y}' \Lambda \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2$$

$$\therefore \quad Q_A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' \mathbb{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i y_i^2 \qquad \blacksquare$$

También se puede probar una relación existente entre matrices positivo definidas y sus valores propios

Teorema B Si $\mathbb{A}$ es una matriz simétrica de dimensión p, $\mathbb{A} > 0$ si y sólo si $\lambda_i > 0$, $\forall i = 1, 2, .., p$, donde $\lambda_1, .., \lambda_p$ son los valores propios de $\mathbb{A}$