LA DISTRIBUCION WISHART

La distribucion Wishart juega un papel importante en la estimación de matrices de covarianza

DEFINICIÓN:

Sea V una matriz de dimensiones $p \times p$, simétrica y positivo definida. Considerando V aleatoria, decimos que V tiene la distribución Wishart (no-singular, p-dimensional) con matriz de escala Σ y n grados de libertad $(p \leq n)$, si la distribución conjunta de los elementos (distintos) de V es continua y con densidad dada por:

$$(Wi) \cdots \quad f(V; \Sigma, n) = \frac{c\,|V|^{(n-p-1)/2}}{|\Sigma|^{n/2}} \, e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\{\Sigma^{-1} V\}} \times \mathbb{1}_B(V),$$

donde: $\Sigma > 0$, $B = \{A \in \mathbb{R}^{p\times p} : A > 0\}$,

$$\mathbb{1}_B(V) = \begin{cases} 1 & V \in B, \\ 0 & V \notin B. \end{cases}$$

y c es la constante

definida por

$$\mathbf{C} = \left\{ 2^{np/2} \, \pi^{\frac{1}{4}(p(p-1))} \prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(\frac{n+1-j}{2} \right) \right\}^{-1}.$$

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx .$$

NOTACION

$\mathbb{V} \sim \text{Wishart}_p(\Sigma, n)$

Teorema: Sean $\mathbb{X}_1, \ldots, \mathbb{X}_n$ vectores independientes de dimensión $p \times 1$ tales que $\mathbb{X}_i \sim N_p(\mathbb{0}, \Sigma)$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, con $\Sigma > 0$. Sea $\mathcal{X}$ la matriz de dimensiones $n \times p$ dada por

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \mathbb{X}_1' \\ \mathbb{X}_2' \\ \vdots \\ \mathbb{X}_n' \end{pmatrix} \quad ; \quad p \leq n .$$

Sea $\mathbb{V} = \mathcal{X}'\mathcal{X}$. Entonces $\mathbb{V} > 0$ y $\mathbb{V} \sim \text{Wishart}_p(\Sigma, n)$.

La demostración se puede encontrar en Cramer, H. (1946) "Mathematical Methods of Statistics" p. 405, Princeton University Press.

ejemplo: Supóngase $p=1$, entonces tenemos v.a.

$$X_1, X_2, \dots, X_n \underset{i.i.d.}{\sim} N_1(0,\sigma^2)$$

$$\underset{n\times 1}{\mathbb{X}} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \qquad \underset{1\times 1}{\mathbb{X}'\mathbb{X}} = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

y de acuerdo al Teorema si $V = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, su densidad

es $$f_V(v;\sigma,n) = \underbrace{\frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})}}_{c} \frac{v^{\frac{n-2}{2}}}{\sigma^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} v/\sigma} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(v)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2\sigma}\right)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} v^{n/2-1} e^{-v/2\sigma} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(v)$$

es decir V tiene distribución

$$\text{Gamma}\left(\alpha = \frac{n}{2} ; \beta = \frac{1}{2\sigma}\right) \left(= \text{Wishart}_1(\sigma, n)\right)$$

"La distribución $\text{Wishart}_p(\Sigma, n)$ representa una generalización de la distribución Gamma a p dimensiones".

De hecho si $X \sim \chi^2_{(n)}$ entonces V tiene la misma distribución que $\sigma^2 X$, entonces podemos re-escribir el párrafo anterior como

"La distribución $\text{Wishart}_p(\Sigma, n)$ representa una generalización a p dimensiones de distribuciones proporcionales a la distribución $\chi^2_{(n)}$".
$\left(p=1 \Rightarrow \frac{V}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n)} \right)$

NOTA Aunque hablamos de la distribución de una matriz en la definición (Wi), nos referimos a la distribución conjunta de los elementos de la matriz simétrica V

$$(\beta) \cdots \quad V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{p1} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{p2} \\ \vdots & \vdots & & \\ v_{p1} & v_{p2} & \cdots & v_{pp} \end{pmatrix},$$

pero como V es simétrica, en realidad se esta definiendo una distribución para el vector $p(p+1)/2$-dimensional

$$(\alpha) \cdots \quad (v_{11}, v_{21}, \ldots, v_{p1}, v_{22}, v_{32}, \ldots, v_{p2}, \ldots, v_{pp})',$$

el conjunto B en la definición (Wi), es el conjunto de matrices <u>simétricas</u> de dimensión $p \times p$ tales que son positivo definidas, pero debido a esta observación, podemos escribir $\mathcal{B}$ como el conjunto de vectores $p(p+1)/2$ dimensionales (como en (α)) que hacen que V en (β) sea positivo definida.

El teorema establece que si las observaciones $x_1, \dots, x_n$ provienen de una distribución $N_p(0, \Sigma)$, $\mathrm{COV}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i \cdot X_j)$ ya que $\mu = 0$, entonces

$$n\hat{\Sigma} = \mathcal{X}'\mathcal{X}$$

es una observación ó realización de la v.a. matricial

$$\mathcal{X}'\mathcal{X} \sim \mathrm{Wishart}_p(\Sigma, n)$$

Teorema: Sean $X_1, \dots, X_n$ vectores de dimensión $p \times 1$, independientes y con distribución $N_p(\mu, \Sigma)$; $\Sigma > 0$. Sean $\bar{X}_{(n)}$ el vector