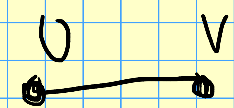
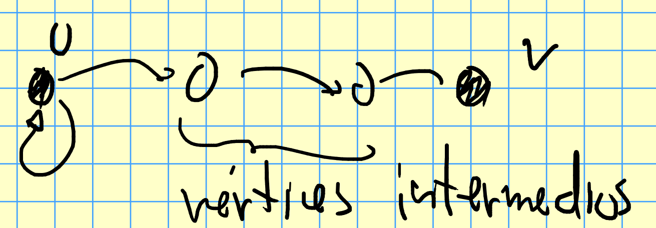
Floyd_ Warshall.

- G, vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$, con pesos en las aristas.
- Todas las distancias con peso entre vértices.

$$d_k(u,v) = \text{mejor peso de un camino de } u \text{ a } v \text{ que use como vértices intermedios únicamente a } v_1, v_2, \dots, v_k.$$

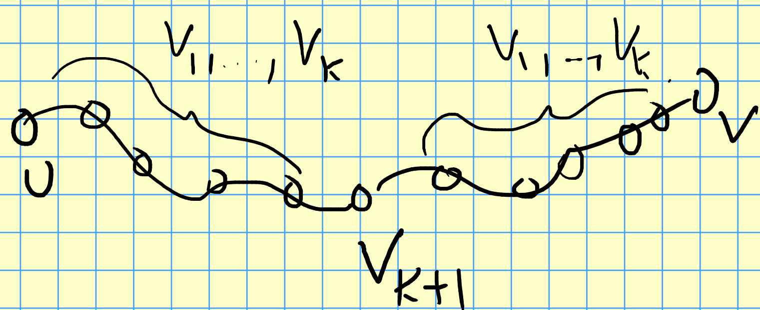


Obs. $\cdot\ d_n(u,v) = d(u,v)$.



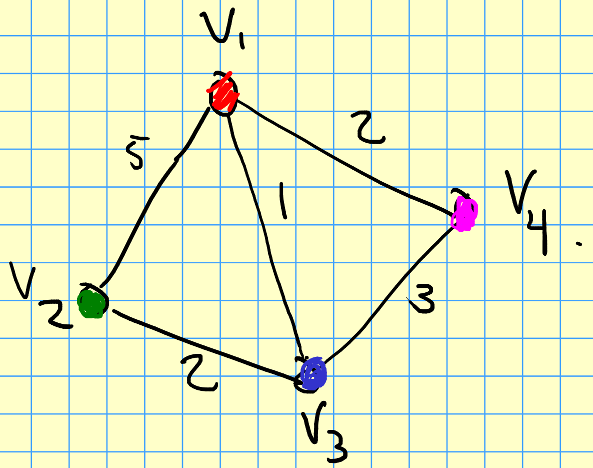
$\cdot\ d_0(u,v) = \begin{cases} \infty & \text{si } u \text{ no es ady. a } v. \\ w(u,v) & \text{si } u \text{ es ady. a } v. \end{cases}$

$$\cdot\ d_{k+1}(u,v) = \min\Big(d_k(u,v),\ d(u,v_{k+1}) + d(v_{k+1},v) \Big).$$



$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty & \infty \\ \infty & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix} \cdots \quad M_n = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$



Tiempo: $O(n^3)$

Espacio: $O(n^3) \rightarrow O(n^2)$.

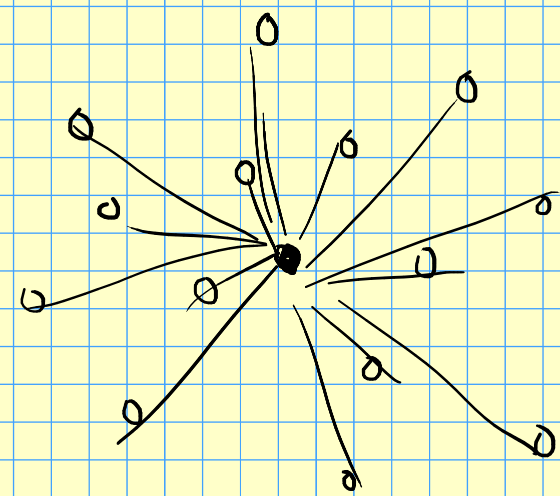
$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & \infty \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & \infty & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{4}$

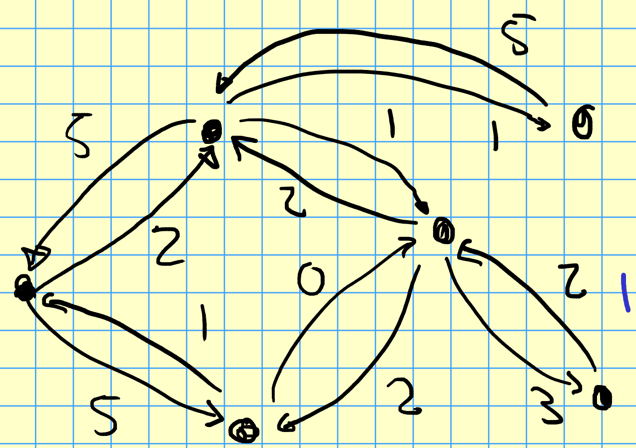
$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones de Floyd-Warshall

- Encontrar los 2 más alejados
- Encontrar un "centro", es decir un vértice cuya distancia máxima a los otros se minimice.
- Encontrar la distancia promedio.



Redes y flujos.



Def. Una red es una gráfica dirigida en donde si está la flecha uv, también está la flecha vu y en donde a cada flecha le asignamos un $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ que es su capacidad.

A la capacidad de e le llamamos C_e.

Def. Dada una red, un flujo permitido es asignar a cada arista e un real f_e de modo que se cumpla lo siguiente:

$\cdot$) $C_e \geq f_e$

$\cdot\cdot$) $f_{uv} = -f_{vu}$.

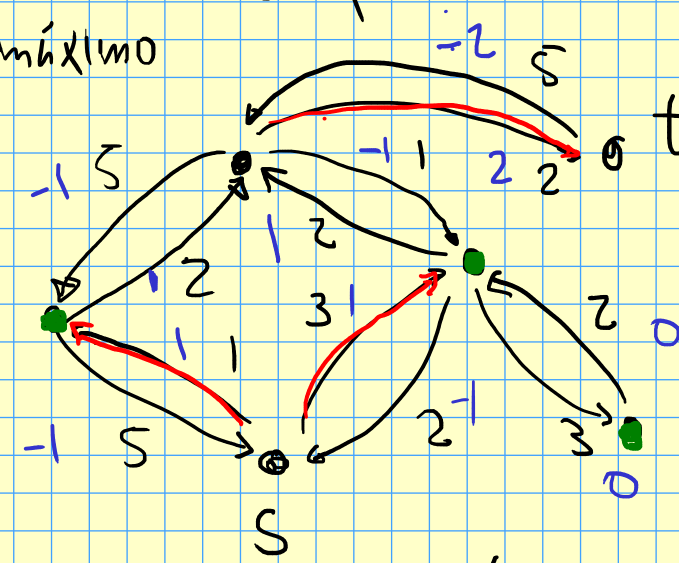
Def. La fuente y pozo de una red son dos vértices distinguidos que a grandes rasgos reflejan el "inicio" y "fin" del flujo.

Def. Un flujo es conservativo si en cada vértice se cumple que la suma de lo positivo que entra es igual a lo positivo que sale, a excepción de la fuente y el pozo.

En la fuente queremos que en total lo que salga positivo menos lo que entra positivo sea ≥ 0. En el pozo lo contrario.

Def. La capacidad de un flujo es cuánto sale netamente de la fuente.

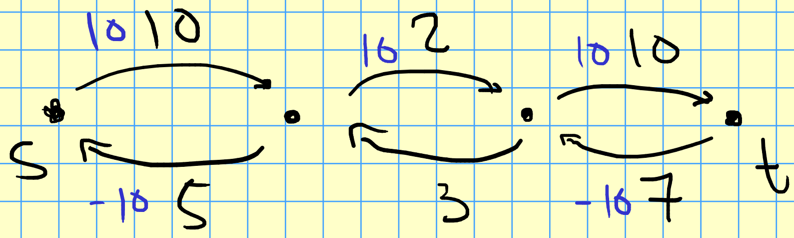
Red + flujo permitido + conservativo + máximo



Capacidad del flujo es 2.

Obs Lo que sale netamente de la fuente llega netamente al pozo.

Pregunta Fijada una red, un pozo y una fuente, ¿cuál es el flujo permitido y conservativo de capacidad máxima?

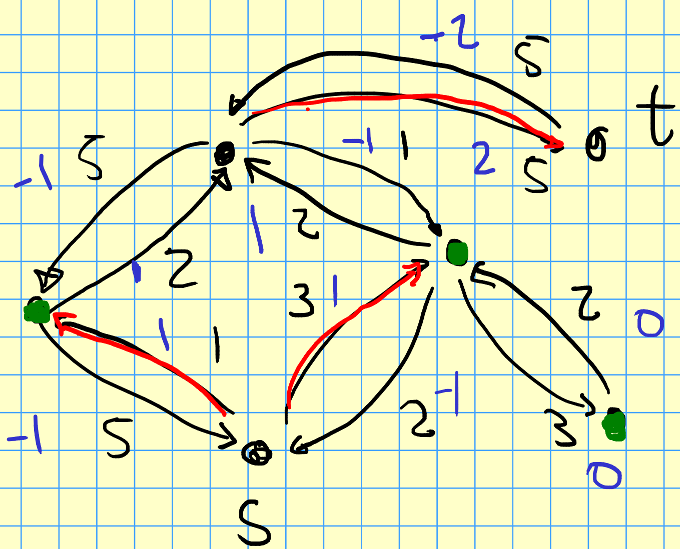


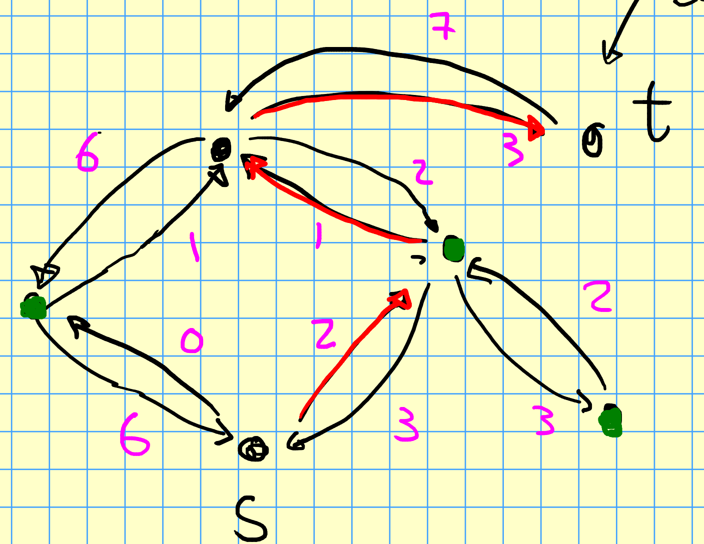
Tomemos

red de residuo

Ford-Fulkerson + BFS

Edmonds-Karp





Def. Dada una red y un flujo, la red de residuo es la red en los mismos vértices con capacidades $c^*_{uv} := c_{uv} - f_{uv}$.

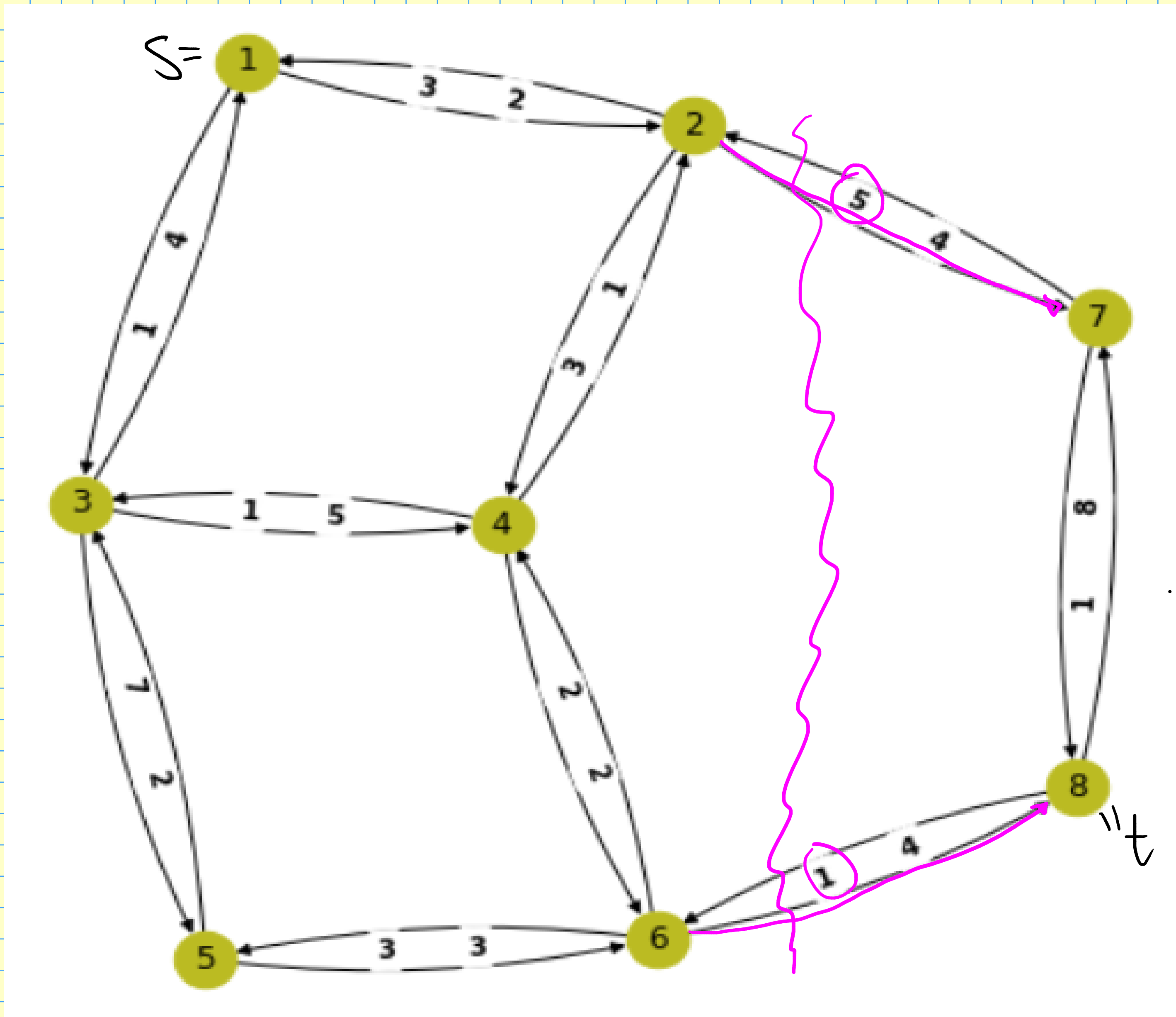
Prop. Un flujo puede incrementarse si hay un camino de flechas positivas de s a t en la red de residuo.

Próxima vez:

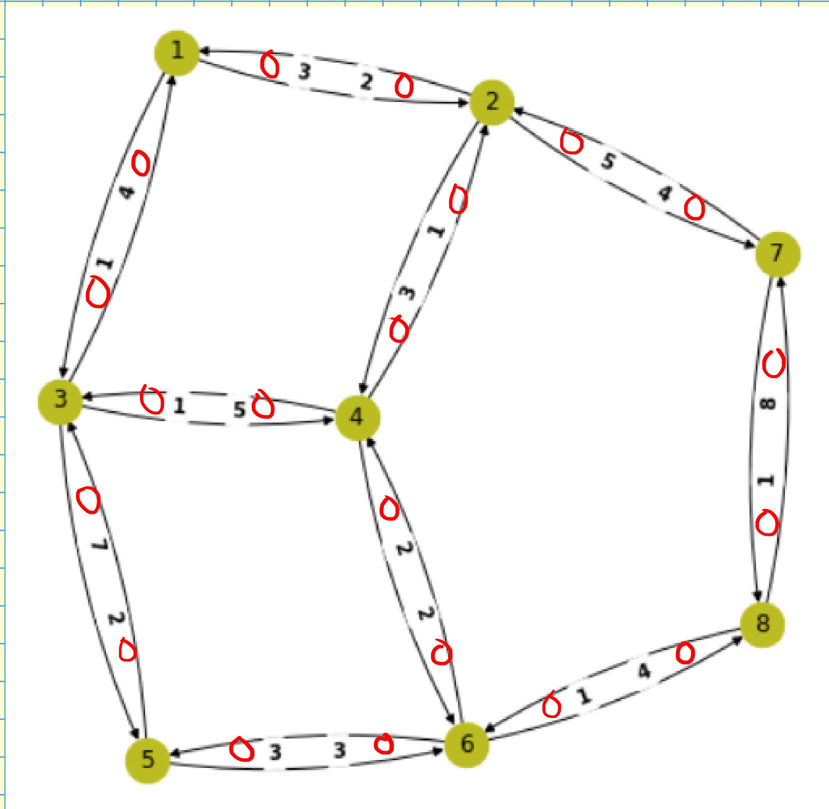
- Implementación
- Ejemplo manual
- Aplicaciones a máximo emparejamiento bipartito

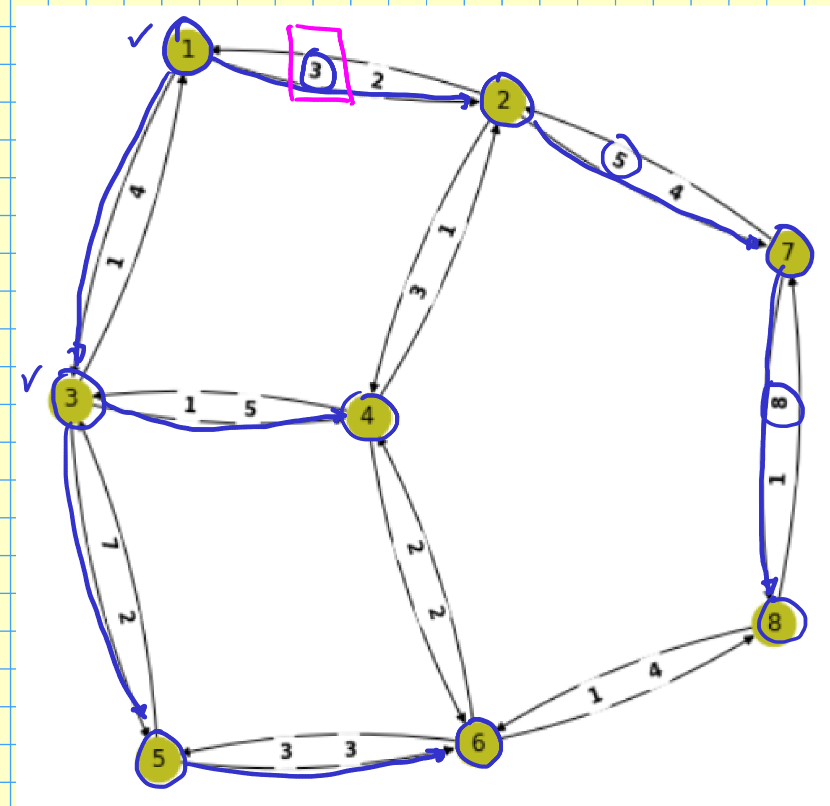
Viernes.

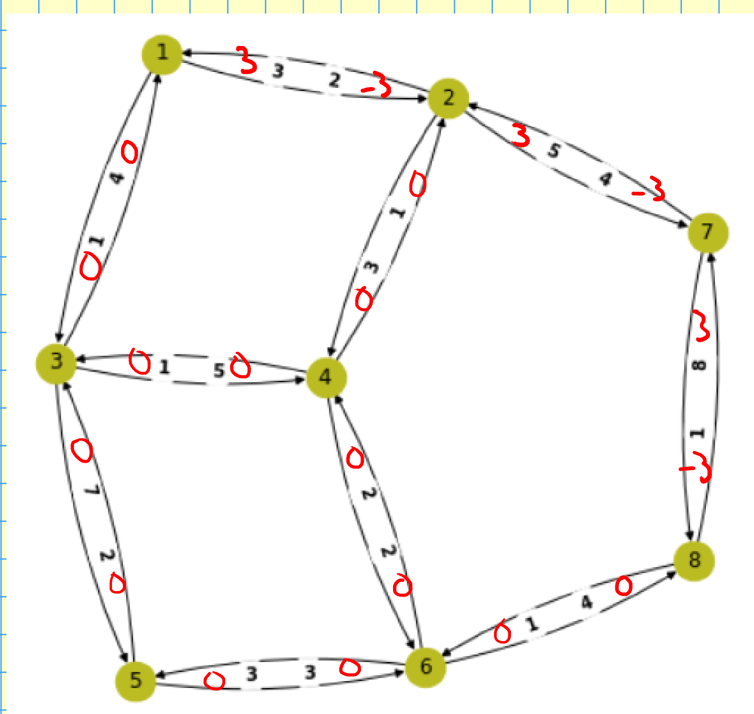
- Problemas P, NP, NP-completos.

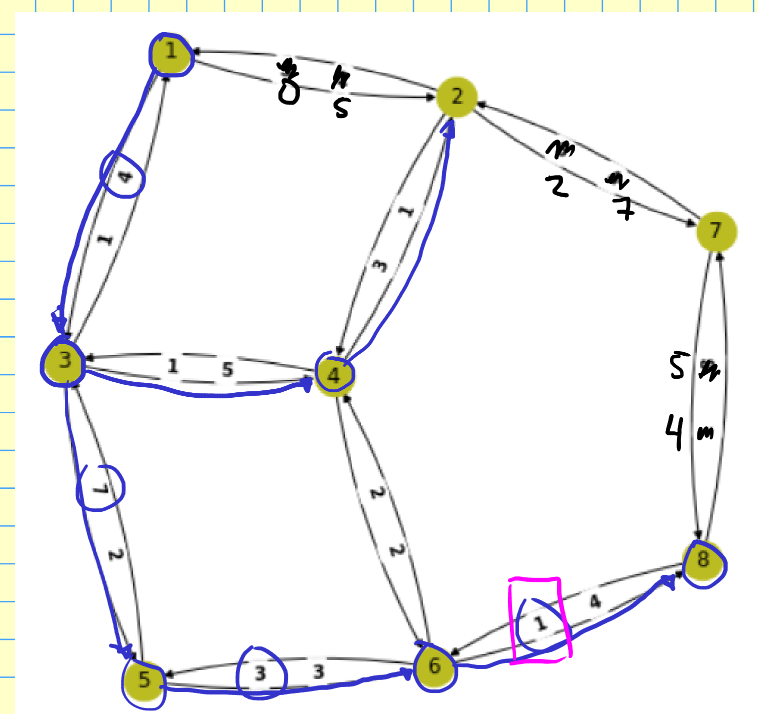


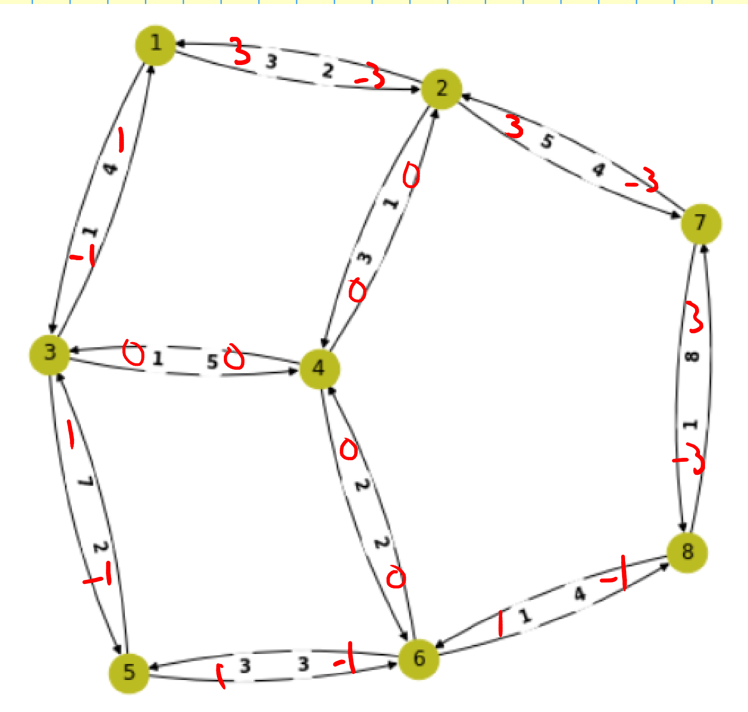
S=
1
2
3
4
5
6
7
8
=t

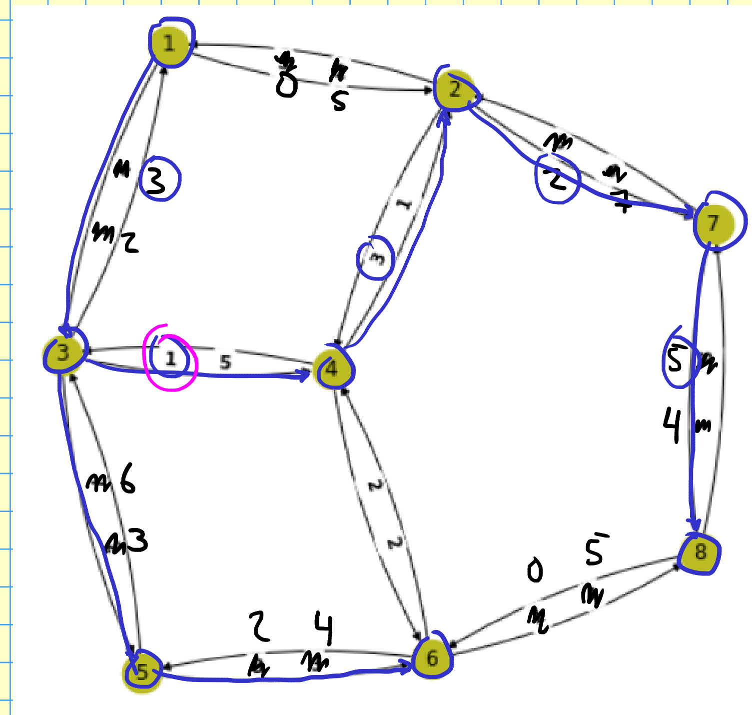

1
2
3
4
5
6
7
8

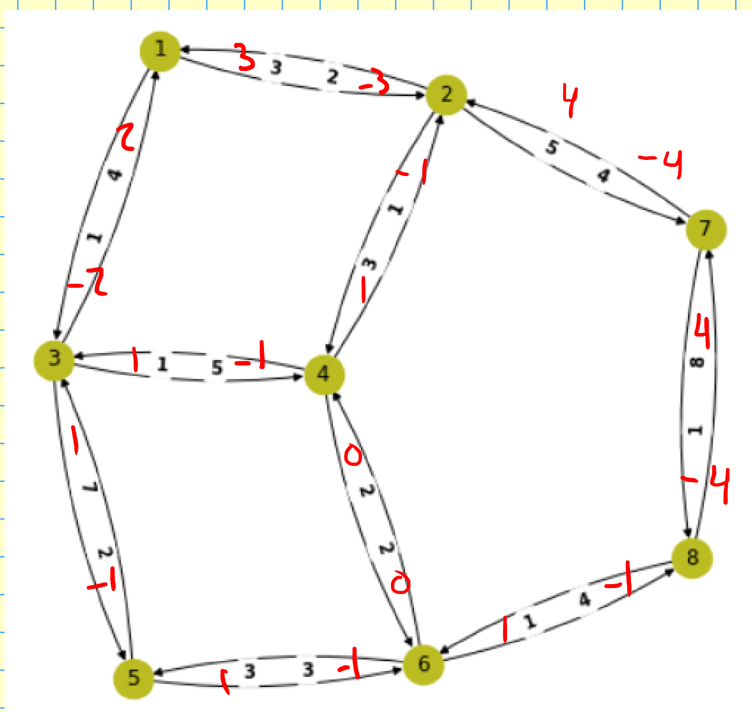

1
2
3
4
5
6
7
8

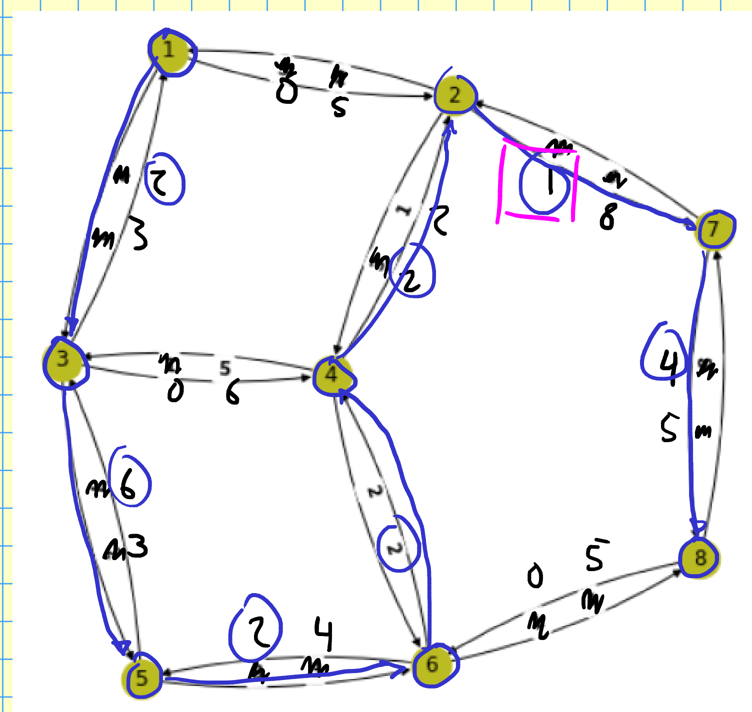

1
2
3
4
5
6
7
8

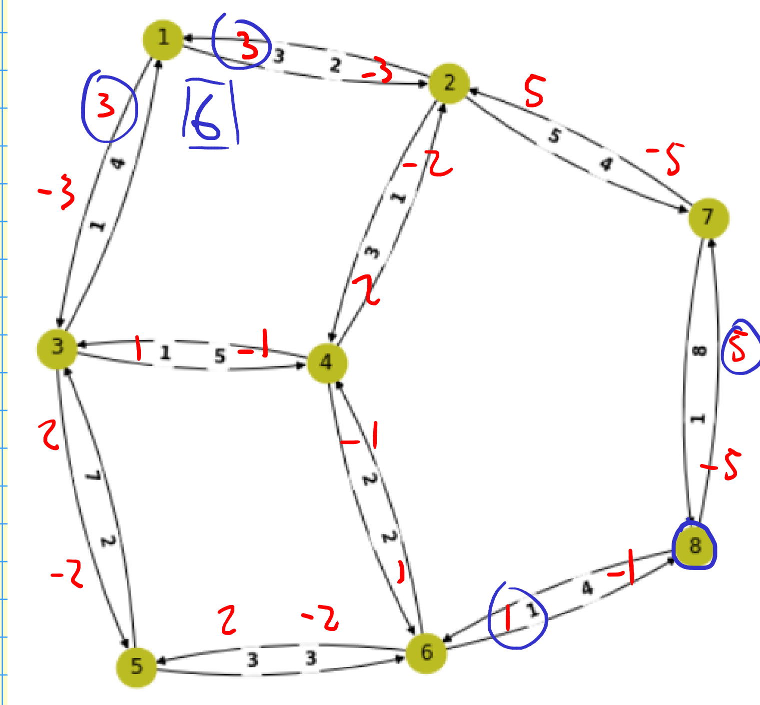

1
2
3
4
5
6
7
8

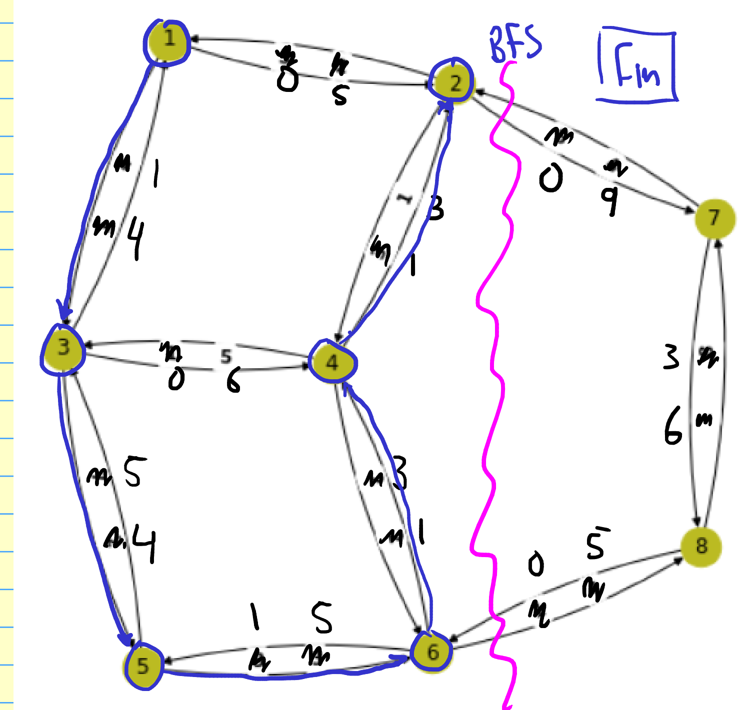




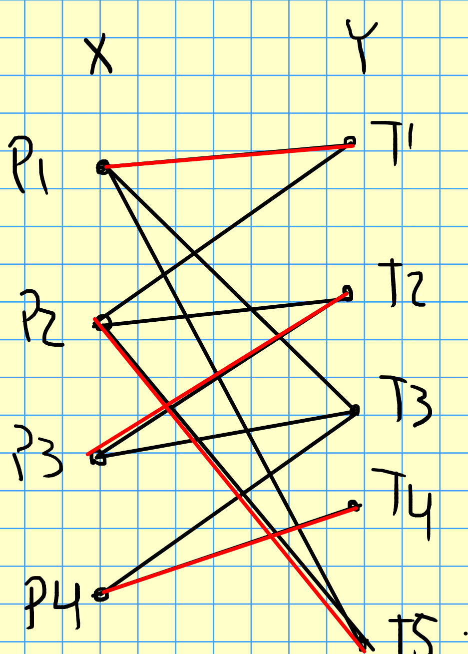


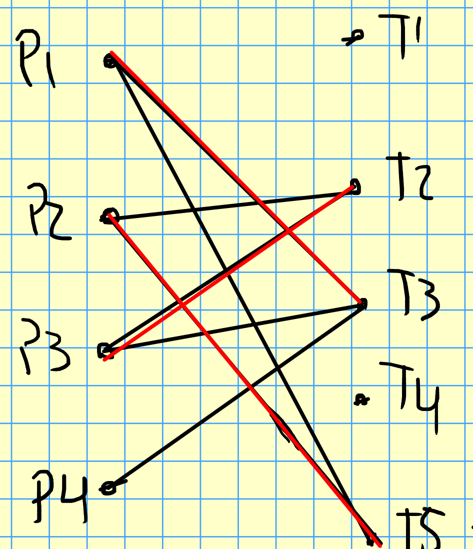


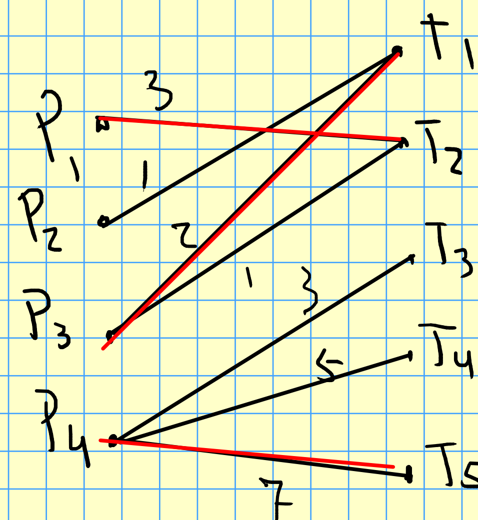




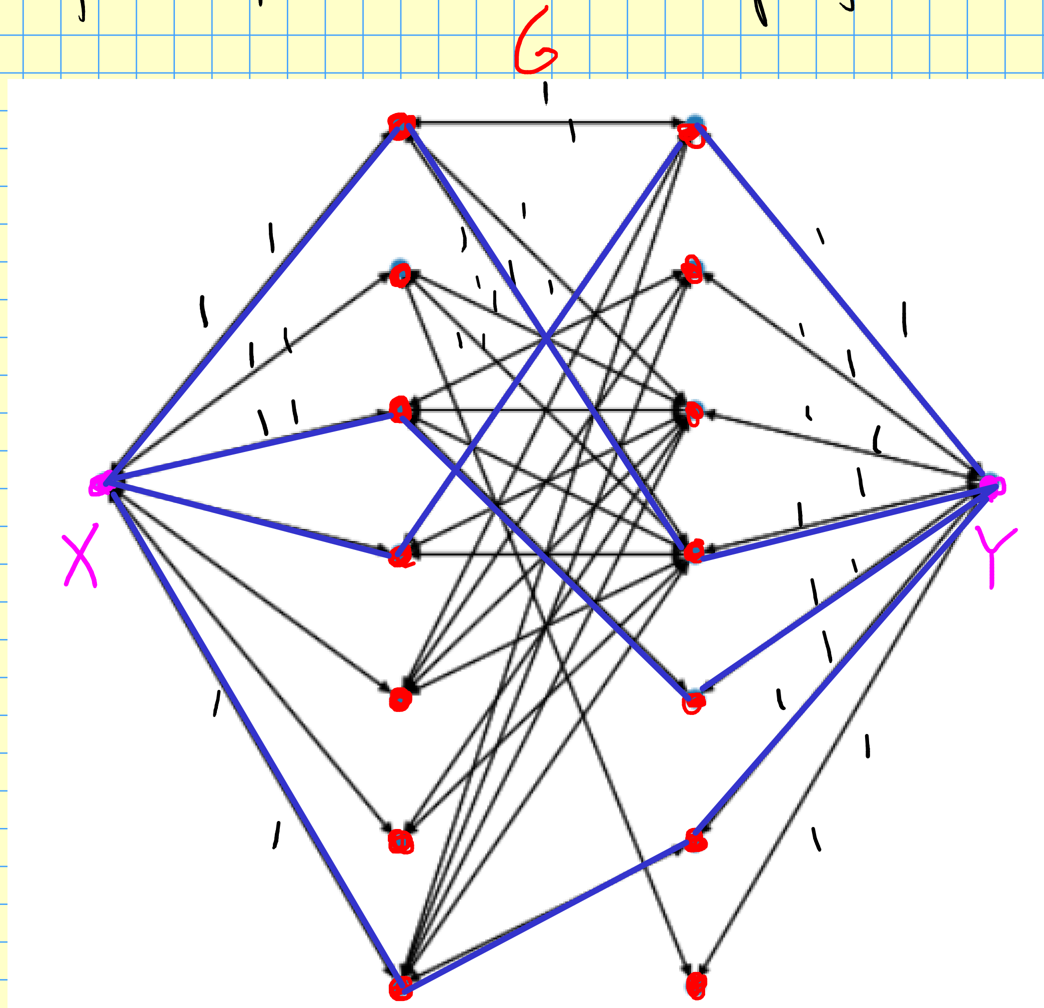
Emparejamientos bipartitos







Dada G bipartita, ¿cuál es su emparejamiento máximo?



flujos ~ emparejamientos.

Algoritmo Húngaro.