Buscar un patrón.

Tomemos el triángulo de Pascal:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc|c}
 & & & & & & 1 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & 2 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & 4 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & 8 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & 16 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 &
\end{array}
$$

Si en la fila n posición k ponemos a $\binom{n}{k}$ $\quad n \geq 0$, $k \geq 0$

- $\binom{n}{k}$ cuenta cuántos subconjuntos de tamaño k tiene un conjunto de n elementos.

- $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

<u>Problema</u> ¿Cuánto suman los elementos del n-ésimo renglón del triángulo de Pascal?

<u>Solución</u> Una exploración de los primeros casos muestra que tenemos lo siguiente

Renglón	Suma
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16

Esto sugiere que en el renglón n la suma es 2^n.

Para demostrarlo podemos usar binomio de Newton con $x = y = 1$ y n, de donde

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \text{suma elementos en renglón } n.$$

Hay otras demostraciones por doble conteo y por inducción.

$\square$

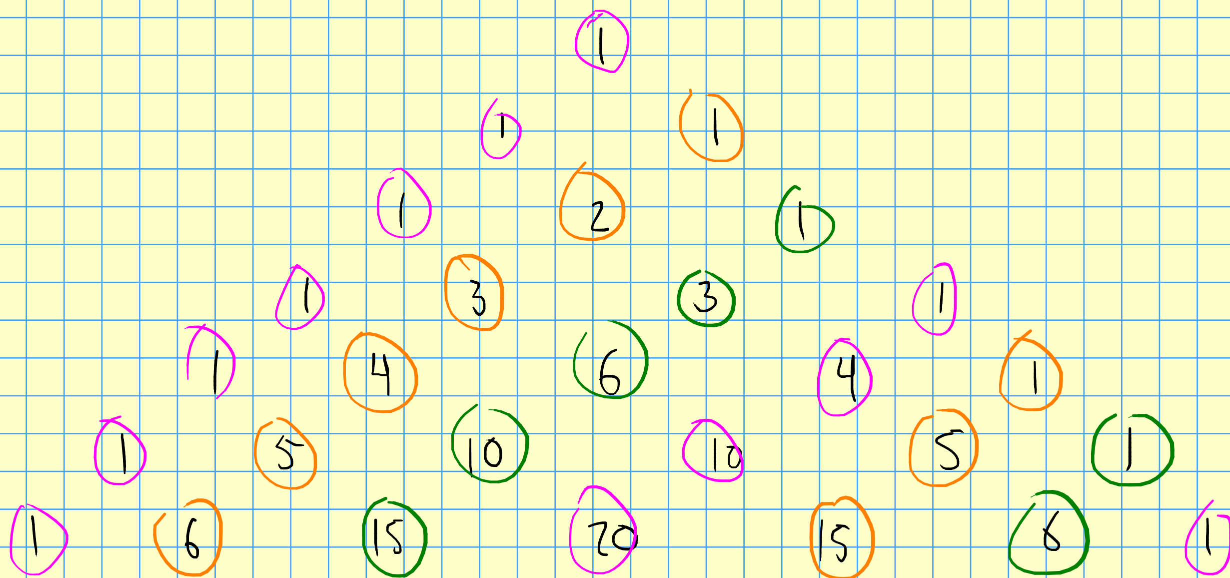
<u>Problema</u> ¿Cuántos subconjuntos de un conjunto con n elementos cumplen que tienen una cantidad múltiplo de 3 elementos?

<u>Sol.</u> El primer paso es observar que el valor buscado es

- $a_n = \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \dots$

Complementariamente, también exploraremos

- $b_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots$
- $c_n = \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots$



n	a_n	b_n	c_n
0	1	0	0
1	1	1	0
2	1	2	1
3	2	3	3
4	5	5	6
5	11	10	11
6	22	21	21

- Dos son iguales
- La otra que es distinta, o es uno mayor, o uno menor que los que son iguales.
- Cuando n es múltiplo de 3, el diferente es a_n.
- Cada que a_n es el diferente, se alterna si es el mayor o menor.
- Si n es par, el diferente es mayor, si n es impar, el diferente es menor.
- a_n=a_{n-1}+c_{n-1}
- b_n=b_{n-1}+a_{n-1}
- c_n=c_{n-1}+b_{n-1}

x	$x+1$	$x+1$
$2x+1$	$2x+1$	$2x+2$
$4x+3$	$4x+4$	$4x+3$

$$a_{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{6} + \binom{n+1}{9} + \dots$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \binom{n}{6} + \binom{n}{8} + \binom{n}{9} + \dots$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots + \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots = a_n + c_n$$

Y sabiendo todo eso, ¿cómo calculamos a_n?

¿a_{6n}? En los renglones múltiplos de 6 tenemos que a es el mayor, b y c iguales y uno menor que a.

Así, sabemos $b_{6n} = a_{6n} - 1$, $c_{6n} = a_{6n} - 1$, y como $a_{6n} + b_{6n} + c_{6n} = 2^{6n}$, tenemos

$$2^{6n} = 3a_{6n} - 2 \quad \text{y así} \quad a_{6n} = \frac{2^{6n} + 2}{3}$$

$6n$ $\qquad \dfrac{2^{6n}+2}{3} \qquad \dfrac{2^{6n}-1}{3} \qquad \dfrac{2^{6n}-1}{3}$

$6n+1$

$6n+2$

$6n+3$

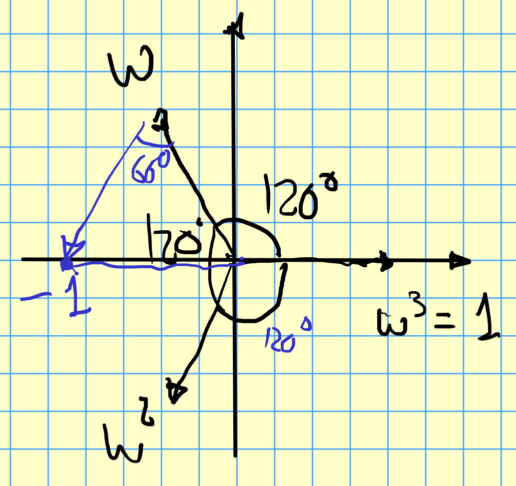
$6n+4$

$6n+5$

$\square$.

Otra forma. Tomen ω raiz cúbica de la unidad.

i.e. $\omega \neq 1$ tal que $\omega^3 = 1$.



__Obs.__ las potencias de ω son

$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7, \ldots$

$1, \omega, \omega^2, 1, \omega, \omega^2, 1, \omega, \omega^2, \ldots$

Obs $1+w+w^2=0$.

Para la solución, tomamos

$$
\begin{aligned}
2^n=(1+1)^n &= \binom{n}{0}+\cancel{\binom{n}{1}}+\cancel{\binom{n}{2}}+\binom{n}{3}+\cancel{\binom{n}{4}}+\cdots\\
(1+w)^n &= \binom{n}{0}+\cancel{w\binom{n}{1}}+\cancel{w^2\binom{n}{2}}+\binom{n}{3}+\cancel{w\binom{n}{4}}+\cdots\\
(1+w^2)^n &= \binom{n}{0}+\cancel{w^2\binom{n}{1}}+\cancel{w\binom{n}{2}}+\binom{n}{3}+\cancel{w^2\binom{n}{4}}+\cdots
\end{aligned}
$$

$$2^n+(1+w)^n+(1+w^2)^n=3\binom{n}{0}+3\binom{n}{3}+3\binom{n}{6}+\cdots$$

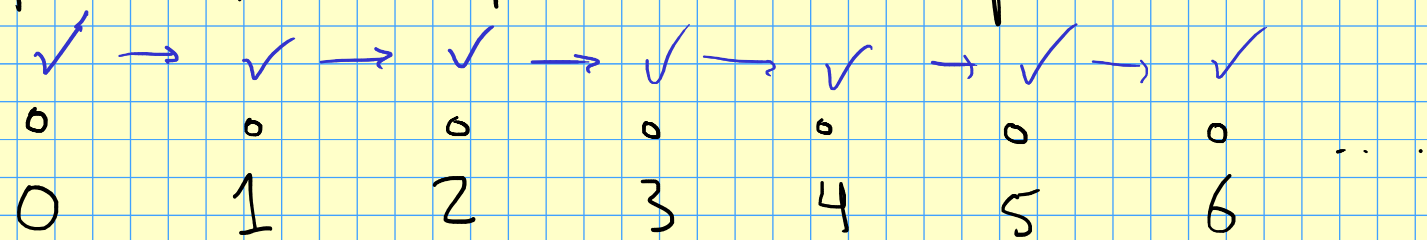
$$a_n=\frac{2^n+(1+w)^n+(1+w^2)^n}{3}$$

$\square$

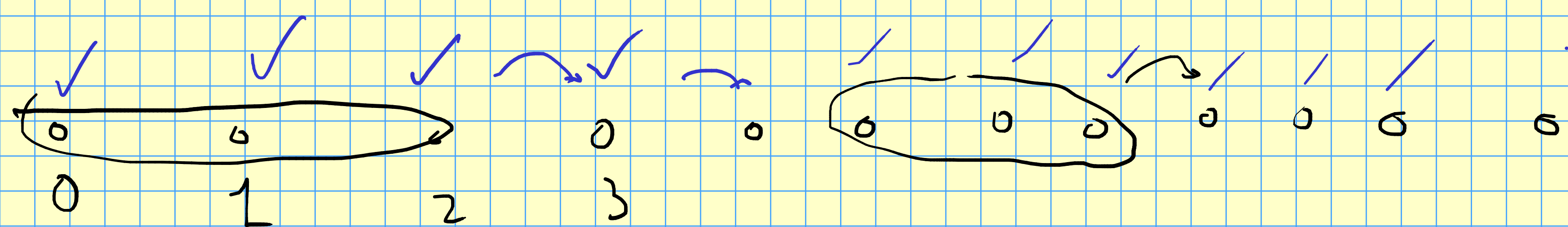
Principio de inducción

Hay varias formas de hacer inducción

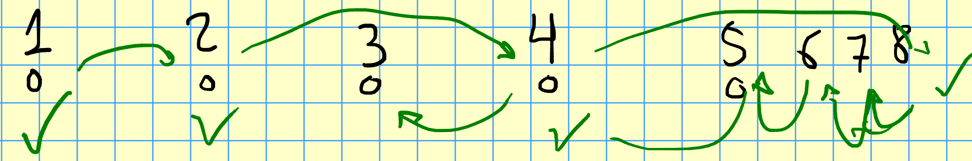
- Probar para 0, ver que el de n implica el de $n+1$.



- Tomar una base inductiva de más elementos, digamos k y usar los casos $n, n+1, n+2, \ldots, n+k-1$ para probar el de $n+k$.

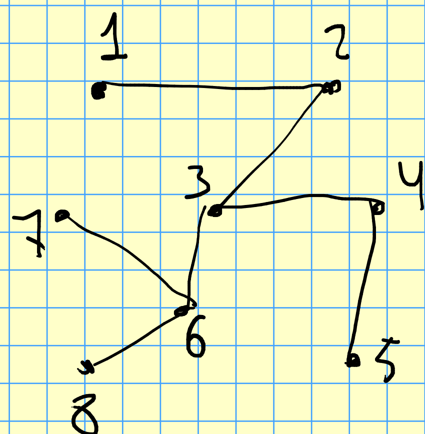


- Inducción fuerte. Probar para 0 y ver que si ya tenemos todas las afirmaciones hasta n, entonces se vale para $n+1$.



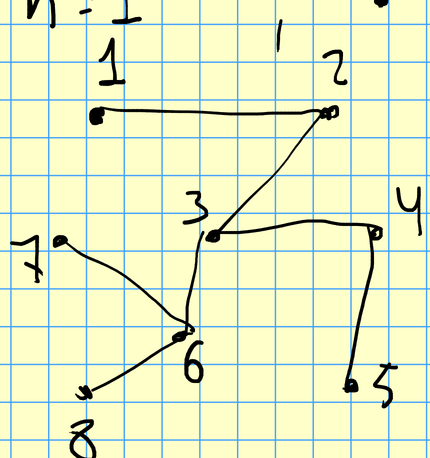
- Inducción de Cauchy.
  - Probar para 1.
  - Probamos que $n \Rightarrow 2n$.
  - Probamos que $n \Rightarrow n-1$.

<u>Problema</u>



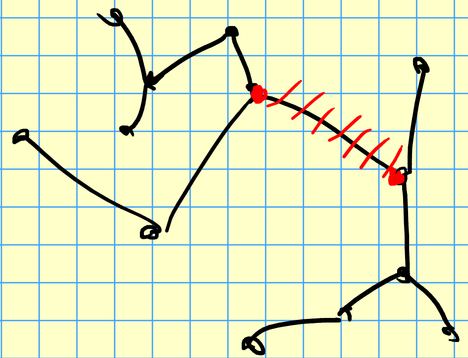
- Se puede llegar de cualquier punto a otro.
- No hay ciclos.
- Si hay n puntos, entonces hay $n-1$ aristas.

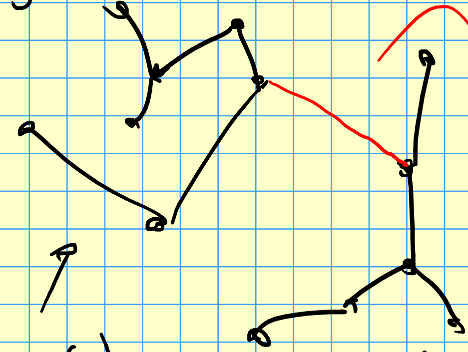
<u>Sol.</u> Usamos inducción fuerte.

- $n=1$ • y en efecto tiene 0 aristas.
- 

  Sup. se vale hasta cierto k. Tomemos ejemplo con $k+1$ puntos.

$a+b=k+1$





en total son

$$\begin{array}{r} a-1\\ b-1\\ 1\\ \hline a+b-1 \end{array} \text{ aristas}$$

a vértices
$a-1$ aristas

b vértices
$b-1$ aristas

, k aristas

Problema Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números reales no negativos. Demuestra que

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Solución. · Si $n=1$, ambos lados son x_1 ✓

· Si $n=2$, P.D. $\frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2} \iff x_1 - 2\sqrt{x_1 x_2} + x_2 \geq 0 \iff (\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2 \geq 0$

· Veamos que la veracidad para n términos implica la de $2n$ términos.

· Tomemos $x_1, x_2, \dots, x_n, \Big\} x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}$.

Por HI

$$A := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}.$$

$$B := \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{2n}}{n} \geq \sqrt[n]{x_{n+1} \cdots x_{2n}}$$

Obs.

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2n}}{2n} = \frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB} \geq \sqrt{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \cdot \sqrt[n]{x_{n+1} \cdots x_{2n}}}$$

$$= \sqrt[2n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{2n}},$$

Ahora veamos que la veracidad de n implica la de $n-1$.

Supongamos cierto $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$ para cualesquiera n reales positivos.

Tomemos $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ reales positivos.

P.D. $$C := \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}}$$

Tomemos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = C$. Por HI, tenemos que

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}+C}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} C}.$$

$(n-1)x_1 \longrightarrow \cancel{n}(x_1+\cdots+x_{n-1})$

$$= \frac{\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}+\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}}{\cancel{n}} = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n-1}$$

Así

$$C \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_{n-1}}\cdot\sqrt[n]{C}$$

$$C^{\frac{n-1}{\cancel{n}}} \geq (x_1\cdot\ldots\cdot x_{n-1})^{1/\cancel{n}}$$

$$C \geq \sqrt[n-1]{x_1\cdot\ldots\cdot x_{n-1}}$$

$\square$

13 números reales

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \ldots 13\ 14\ 15 \rightarrow 16$$

Motivación para tomar $x_n = \dfrac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$

Tenemos

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

Queremos

$$\frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1} \geq ?$$

despejar.

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_{n-1}}{n-1}$$

Sucesiones

Si tenemos un conjunto X, una sucesión es una función

$$a\_ : \mathbb{N} \to X$$

Usualmente simplificamos la notación $a\_(i)$ por a_i.

Intuitivamente es tomar términos $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ en X.

Problema Sean a y b números reales positivos. Definimos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ como sigue:

Recursiva

$$a_0 = a \qquad b_0 = b$$

Obs S.p.g $a \geq b$.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Convergentes.

¿Existen los límites $\lim_{n\to\infty} a_n$ y $\lim_{n\to\infty} b_n$? Si sí, ¿cuáles son?

Sol. Una exploración computacional sugiere.

- a_n es decreciente
- b_n es creciente
- $a_n \geq b_n$. ✓
- Convergen y ambas convergen a lo mismo.
- a_n, b_n reales positivos. ✓

¿Será a_n decreciente? ¿ $a_{n+1} \leq a_n$?

Para esto se requiere $\frac{a_n+b_n}{2} \leq a_n$. ¿Se cumple? Sí.

$\therefore a_n$ decreciente.

Para b_n, es creciente $\Leftrightarrow b_{n+1} \geq b_n \Leftrightarrow \sqrt{b_n a_n} \geq b_n$ ✓

$a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots$ decreciente

$b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \ldots$ creciente.

Acotadas.

At. La sucesión $\{a_n\}$ está acotada inferiormente por b_0

y la sucesión $\{b_n\}$ " " superiormente por a_0.

Dem. $a_j \geq b_j \geq b_0$ $b_j \leq a_j \leq a_0$.

Como $\{a_n\}$ decreciente y acotada inferiormente, tiene un límite A

" $\{b_n\}$ creciente y acotada superiormente, " " " B.

Veamos ahora que $A=B$.

¿Cómo es $a_n - b_n$?

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} \overset{?}{\leq} \frac{a_n-b_n}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a_n+b_n}{2} - \frac{a_n-b_n}{2} \leq \sqrt{a_n b_n}$$

$$\Leftrightarrow \quad b_n \leq \sqrt{a_n b_n} \quad \checkmark$$

Así, $\quad a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a_n-b_n}{2}$

y por lo tanto, inductivamente $\quad a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{a_0-b_0}{2^{n+1}} = \frac{a-b}{2^{n+1}}$.

Así

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{a-b}{2^{n+1}} \geq \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = A - B \geq 0$$

y por lo tanto $A=B$.

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$ media armónica.

Una sucesión en $\mathbb{R}$ puede ser:

- Acotada por algún lado
  - Acotada superiormente — $a_i < M$ para M fijo y toda i
  - " inferiormente — $a_i > M$ para M fijo y toda i
  - Acotada — $|a_i| < M$ para M fijo y toda i.
- Monótonas.
  - Estrictamente crecientes — $a_i < a_{i+1}$ para toda i
  - Estrictamente decrecientes. — $a_i > a_{i+1}$ para toda i
  - No crecientes — $a_i \geq a_{i+1}$ para toda i
  - No decrecientes — $a_i \leq a_{i+1}$ para toda i
- Convergentes.
- Periódicas.
- Recursivas: "dependen de términos anteriores".

Sucesiones recursivas.

Def. Una sucesión $\{a_n\}$ en X satisface una recursión de orden k. si existe una función $f: X^k \to X$ de k variables tal que

$$a_{n+k} = f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) \quad \text{para toda } n \geq 0$$

Obs. Si se conocen los primeros k términos de una sucesión recursiva de orden k, entonces se conocen todos.

Def. Decimos que una sucesión es recursiva lineal de orden k si f es una función lineal. i.e.

$$a_{n+k} = f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) = \beta_0 a_n + \beta_1 a_{n+1} + \cdots + \beta_{n-1} a_{n+k-1}.$$

Ejemplo La sucesión de Fibonacci es recursiva, lineal de orden 2, con

$$\beta_0 = \beta_1 = 1.$$