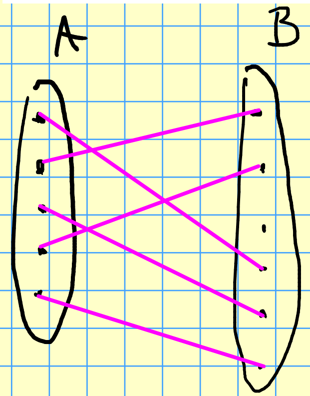
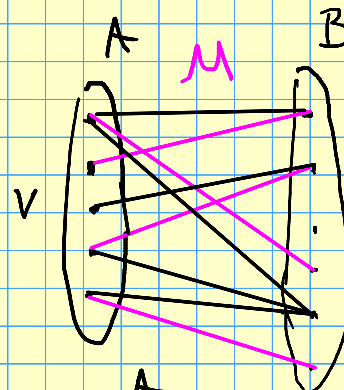
Teorema (de Hall). Si en una gráfica bipartita con partición de vértices en conjunto A y B sucede que para cualquier subconjunto X de A se tiene que $|X| \le |N(X)|$, entonces existe un emparejamiento que cubre a A.



<u>Dem.</u> · Tomemos M emparejamiento que cubra la mayor cantidad de vértices de A.

· Sup. que existe $v \in A$ que no es cubierto por M.

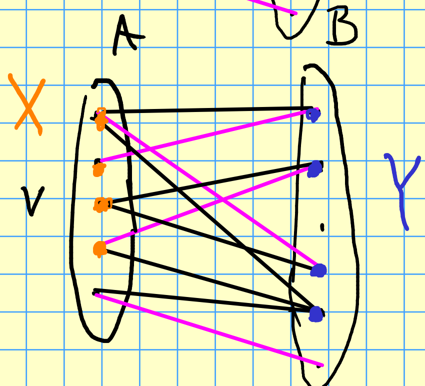
· Diremos que una trayectoria es <u>alternante</u> si usa de manera alternada aristas de M.



· Llamemos

$X = \{$vértices alcanzables de A desde v mediante una trayectoria alternante$\}$.

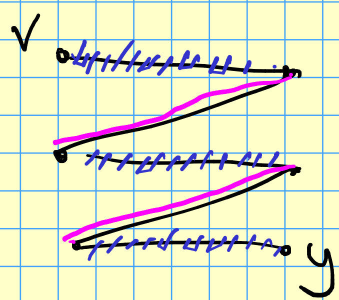
$Y = \{$vértices alcanzables de B desde v mediante una trayectoria alternante$\}$.



<u>Af.</u> M da una biyección entre los elementos en $X \setminus \{v\}$ y los elementos en Y. ✓

<u>Af.</u> vecinos$(\{v\} \cup (X \setminus \{v\})) \subseteq Y$.

- La asociación que da M es inyectiva. Pues M es emparejamiento.
- Todo vértice en $X \setminus \{v\}$ en realidad sí lo toca una arista de M pues para llegar a él vamos "de regreso" y la arista es de M.
- Debemos ver que dicha asociación es suprayectiva. Sup. que no.

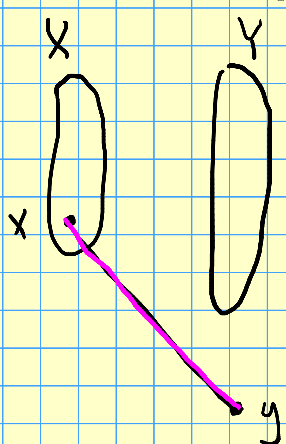


Ent. existe una trayectoria alternante que llega a un vértice y que después ya no sale. Quitando las aristas de M en esta trayectoria y agregando las otras obtenemos un emparejamiento con más aristas !

Así, M da una asociación suprayectiva.

Para la segunda afirmación

- Claramente vecinos$\{v\} \subseteq Y$.



- Si $x \in X \setminus \{v\}$ y y es un vecino de x, entonces:
  - Si $\{x,y\}$ no está en M, entonces podemos usarla para extender una tray. alternante hacia x a una hacia y.
  - Si $\{x,y\}$ está en M, como x está en X, es porque llegamos desde $\{x,y\}$ y ent. hay trayectoria alternante hacia y.

Juntando ambas afirmaciones.

$$|N(x)| \underset{\text{Af.2.}}{\overset{}{\leq}} |Y| \underset{\text{Af.1.}}{=} |X \setminus \{v\}| < |X \setminus \{v\}| + |\{v\}| = |X|.$$

Así, $|N(x)| < |X|$ y esto contradice las hipótesis del teorema.

$\square$