"Mejor caso"

1 2 3 4 5 6

hubo cambio = 0

$3+3+3+3+3 = 15$

1

1

17

la lista ya está.

6 5 4 3 2 1 ← "Peor caso"

5 6 4 3 2 1

5 4 3 2 1 6

$1+6+6+6+6+6+1+6+6+6+6+3+1+6+6+6+3+3+1$

$31+28+25+22+19+16$

≈ 141

5 3 2 1 4 6

3 5 2 1 4 6

3 2 5 1 4 6

3 2 1 5 4 6

3 2 1 4 5 6

3 2 1 4 5 6

2 3 1 4 5 6

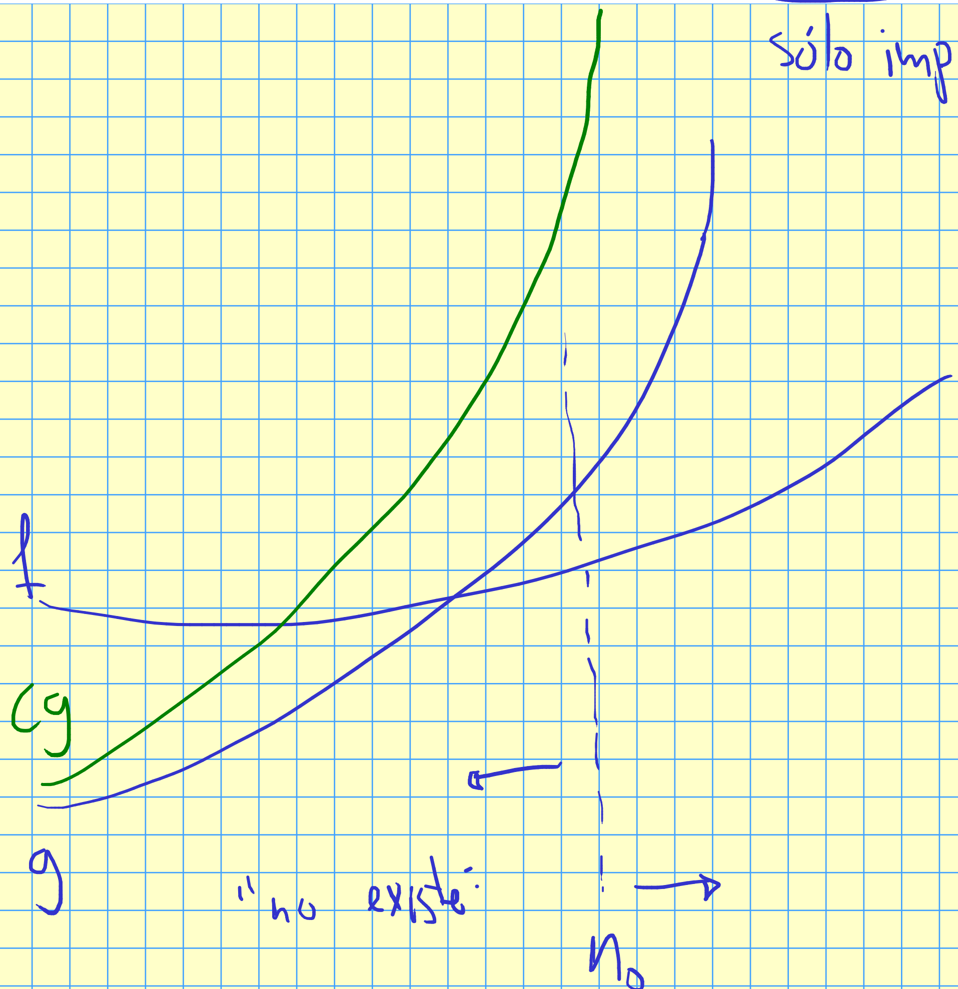
2 1 3 4 5 6

1 2 3 4 5 6

1 2 3 4 5 6

Definición. Sean f y g funciones. Diremos que $f(n) = O(g(n))$ si existe una constante $c > 0$ un número natural n_0 tal que $f(n) \leq cg(n)$ cuando $\underbrace{n \geq n_0}_{\text{sólo importan valores grandes}}$.

muy sencilla.



Ejemplo Si $\boxed{f(n) = 4n^2 + 3n - 5}$, entonces $f(n) = O(n^2)$, pero no es cierto que $f(n) = O(n)$

Proponemos $c = 5$ y $n_0 = 0$.

Veamos si se cumple

$$4n^2 + 3n - 5 \leq 5n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 3n - 5 \leq n^2$$

lo cual es cierto para $n \geq n_0$

$n \geq 3$
$n^2 \geq 3n$

$n = 0$ ✓
$n = 1$ ✓
$n = 2$ ✓
$n \geq 3$ ✓

Veamos que es imposible lograr mostrar $f(n) = O(n)$. Si fuera posible, existirían $c>0$ y n_0 con

$$4n^2 + 3n - 5 \overset{\star}{\leq} cn \quad \text{para toda } n \geq n_0.$$

Tomemos $n \geq \max(c, n_0, 2)$. $\qquad c>0$

$$cn \underset{\text{por } \star}{\geq} 4n^2 + 3n - 5 \underset{n \geq c}{\geq} 4cn + 3n - 5 \underset{n \geq 2}{>} 4cn > cn.$$

¡!

Ejemplo Muestra que si $f(n) = 5n^3 \log n + 3n$, entonces

$$f(n) = O(n^5)$$

Proponemos $c = 5$ y $n_0 \geq 3$ Verifiquemos que esto funciona.

$$5n^3 \log n + 3n \leq 5n^5 \quad \text{para } n \geq 3.$$

$$\iff 5n^2 \log n + 3 \leq 5n^4$$

Estudiemos $h(x) = 5x^4 - 5x^2 \log x - 3$.

$$h(3) = 5\cdot 81 - 5\cdot 9 \cdot \log 3 - 3 > 5\cdot 81 - 5\cdot 9\cdot 2 - 3 > 0$$

$h'(x) = 20x^3 - 10x\log x - 5x$ (es >0 pues claramente

$$\left.\begin{array}{l} 15x^3 > 10x\log x \\ \text{y } 5x^3 > 5x \end{array}\right\} \text{para } x \geq 3.$$

Así $h(3) > 0$ y $h'(x) > 0$ para $x \geq 3$, por lo tanto h es creciente en $[3, \infty)$ y así $h(x) > 0$ para $x \geq 3$.

$\square$.

Ejemplo Considera la función $f(n) = 3^n$.

¿Será cierto que $f(n) = \Omega(2^n)$? sí

¿Será cierto que $f(n) = \Omega(4^n)$? no.

$f(n) = O(g(n))$

$f(n) \lesssim g(n)$

$f(n) = \Omega(g(n))$

$f(n) \gtrsim g(n)$.

Para la primera, proponemos $n_0 = 1$, $c = 1$.

y queremos

$$3^n \geq 1 \cdot 2^n \quad \text{para } n \geq n_0 = 1. \checkmark$$

Para la segunda, sup. la existencia obtendríamos

$$3^n \geq c \cdot 4^n \quad \text{para } n \geq n_0.$$

$$3^n \geq c \cdot 4^n \quad \text{para } n \geq n_0.$$

$$\iff \left(\frac{3}{4}\right)^n \geq c \quad \text{para } n \geq n_0$$

Como $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, existe n_1 tal que $\left(3/4\right)^{n_1} < \frac{c}{2} < c$!