# Recursiones lineales

**Def.** $\{x_n\}$ es una sucesión que satisface una recursión lineal de orden $k$ si existen constantes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ tales que

$$x_{n+k} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 x_{n+1} + \cdots + \alpha_{k-1} x_{n+k-1} \quad \text{para todo } n \geq 0$$

(simplemente lineal de orden $k$).

**Ejemplo** La sucesión de Fibonacci, con $k=2$, $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$.

**Problema** Estudia $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_{n+2} = 6x_n - x_{n+1}$.

**Sol.** $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ Conj. $x_n = 2^n$. Inducción $0, 1, \checkmark$ $\quad 6 \cdot 2^{n+1} - 2^n = 2^n(6-2) = 2^{n+2} \checkmark$.

**Problema** Estudia $x_0 = 1$, $x_1 = -3$, $x_{n+2} = 6x_n - x_{n+1}$.

**Sol.** $1, -3, 9, -27, \ldots$ Conj. $x_n = (-3)^n$ Inducción $0, 1, \checkmark$ **PI.** Tarea moral.

**Prop.** Si $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ satisfacen una misma recursión lineal de orden $k$, entonces cualquier combinación lineal $\{c_n\} := \{ra_n + sb_n\}$ también la satisface.

**Problema** $x_0 = 1$, $x_1 = 5$, $x_{n+2} = 6x_n - x_{n+1}$

**Conjetura** $x_n = r\cdot 2^n + s(-3)^n$ } en vista de prop. anterior.

Sup. conj. cierta.

$$\begin{cases} 1 = x_0 = r\cdot 2^0 + s(-3)^0 = r+s \\ 5 = x_1 = r\cdot 2^1 + s(-3)^1 = 2r-3s. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r+2s = 2 \\ 2r-3s = 5 \end{cases} \qquad 5s = -3 \qquad s = -3/5 \qquad r = 8/5$$

**Conjetura** $x_n = 8/5 \cdot 2^n - \frac{3}{5}\cdot(-3)^n$.

**Dem** ✓. El lado derecho coincide con $x_n$ para $n=0,1$ por construcción. Además, ambos lados satisfacen la misma recursión de orden 2. Entonces coinciden en todo $n$.

$\square$

**Problema** Encuentra una fórmula cerrada para los números de Lucas que están dados por

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad L_{n+2} = L_n + L_{n+1} \qquad n \geq 0$$

**Exploración**

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$$

No se ve un patrón claro

**Idea** ¿qué sucede si $A_n = x^n$ satisface la recursión?

Tendría que pasar $\quad x^{n+2} = A_{n+2} = A_n + A_{n+1} = x^{n+1} + x^n.$

$(\text{si } x \neq 0) \qquad x^2 = x + 1. \qquad x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

**Obs.** $A_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ satisface la recursión $\quad 1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$

y $B_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ satisface la recursión. $\quad 1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{6-2\sqrt{5}}{4}.$

**Conj.** $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$

**Dem.** ✓

**Problema** Demuestra que para todo entero $n \geq 1$ la expresión

$$X_n := \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

es un entero impar.

**Sol.** Construyamos una recursión lineal que $X_n$ satisfaga.

Tomemos el polinomio

$$P(x) = \left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$= x^2 - 3x + \frac{9-17}{4} = x^2 - 3x - 2.$$

De esta manera, $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n$ y $\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ satisfacen la recursión

$A_{n+2} = 3A_{n+1} + 2A_n$, y por lo tanto $X_n$ también.

Estamos listos para resolver el problema.

$$x_0 = 2,\ \underbrace{x_1 = 3,\ x_2 = 13}_{\text{impares}},$$

$$\text{PI}\quad x_{n+2} = \underbrace{\underbrace{3\overset{\text{HI impar}}{\widetilde{x_{n+1}}}}_{\text{impar}} + \underbrace{2x_n}_{\text{par}}}_{\text{impar}}.$$

$\square$.

En general.

$$\left\{\begin{array}{l} \cdot\ x_{n+k} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 x_{n+1} + \dots + \alpha_{n-1} x_{n+k-1} \\ \cdot\ \text{Proponer}\quad x_n = r^n \end{array}\right.$$

$$r^{n+k} = \alpha_0 r^n + \alpha_1 r^{n+1} + \dots + \alpha_{n-1} r^{n+k-1}$$

Conseguir raíces

$$r^k - \alpha_{n-1} r^{k-1} - \dots - \alpha_1 r - \alpha_0 = 0$$

k raíces.

Si las k raíces son diferentes ✓ ☺.

<u>Reto</u> Encontrar fórmula cerrada para Fibonaccis.