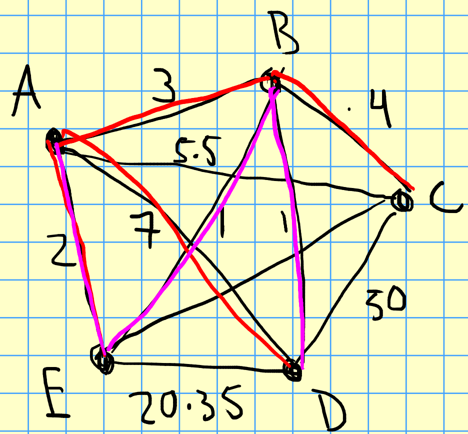
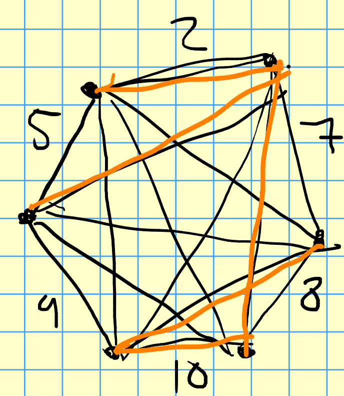
Gráficas con pesos y árboles de peso mínimo



etc.



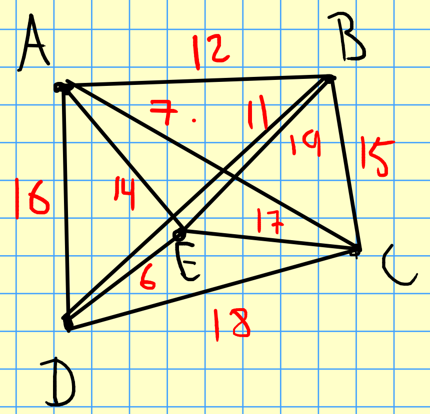
Def. Una gráfica con pesos es una gráfica en donde a cada arista se le ha asociado un número real.

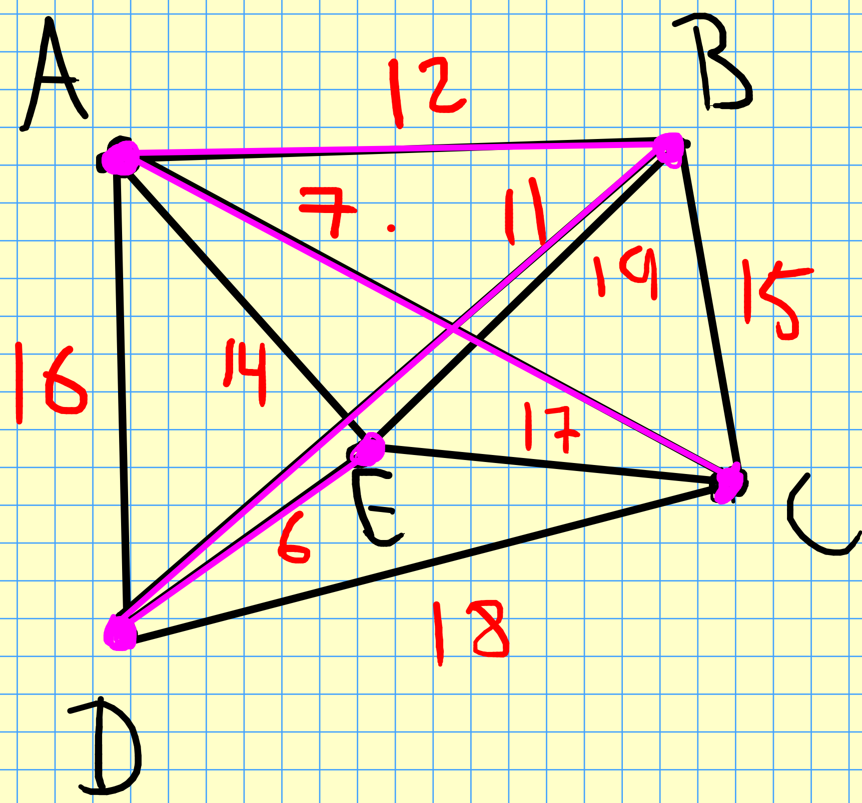
Def. Un árbol de peso mínimo de una gráfica con pesos es un árbol de la gráfica donde la suma de los pesos es lo menor posible.

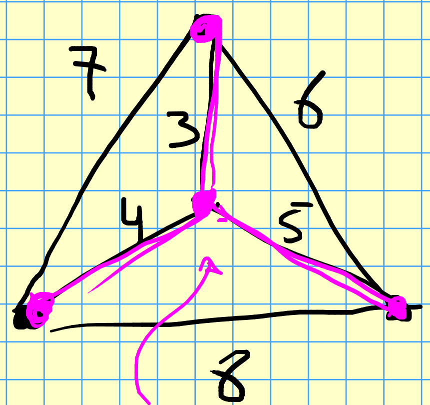
Algoritmo de Prim

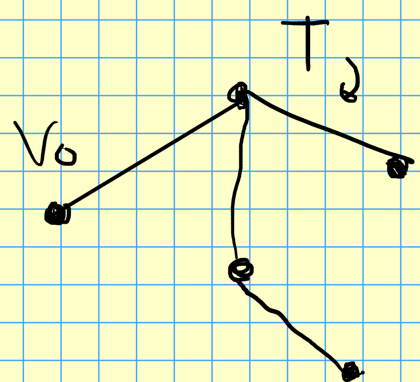
- Iniciar con $T=[v_0]$ para v_0 cualquier vértice.
- Repetidamente, de entre las aristas de T a $V \setminus T$ elegimos la de menor peso. Esa la agregamos a nuestro árbol y al vértice en $V \setminus T$ lo pasamos a T.

· Al terminar esto, el árbol final es de peso mínimo.







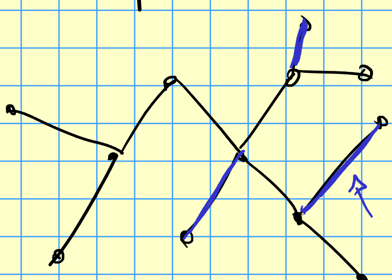


Correctitud • La gráfica es conexa pues en todo momento T y las aristas forman una gráfica conexa y el algoritmo termina al vaciar V, de modo que todos los vértices quedan en T.

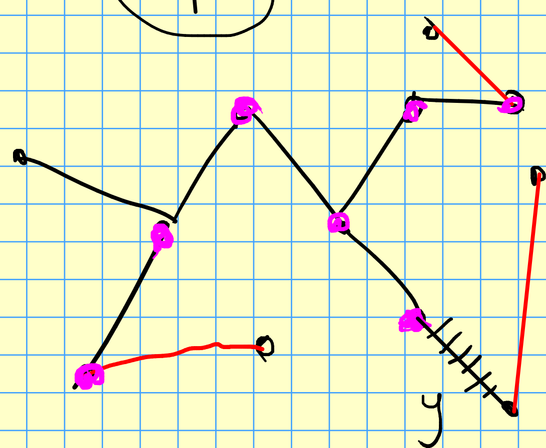
• La gráfica final tiene n vértices y n-1 aristas. Como la gráfica final tiene n vértices, n-1 aristas y conexa, entonces es un árbol.

• Veamos que el T final es de peso mínimo. Sup. que no, que hay otro arbol T' de menor peso. Tomemos la primer arista que colocamos en T que no esté en T'

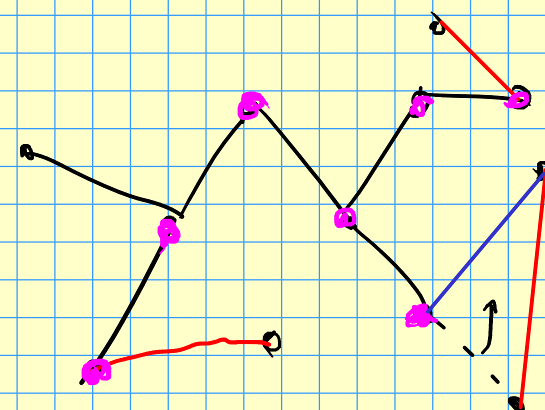
T

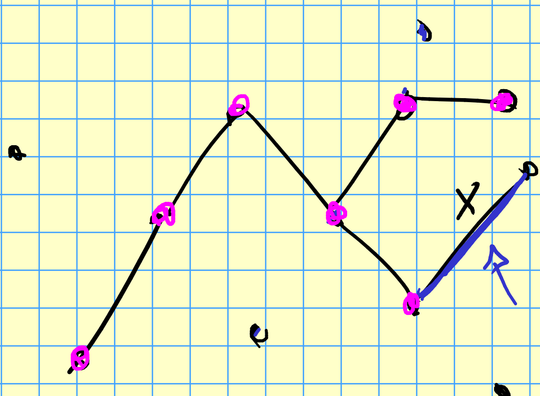


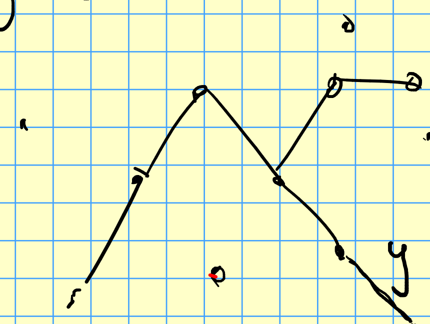
T'



T''



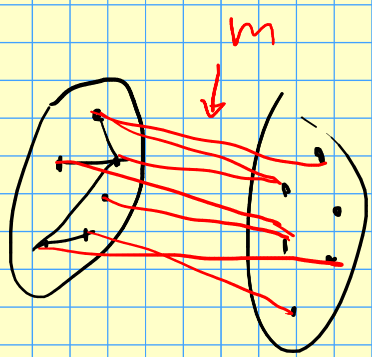




Complejidad.

Una implementación básica toma tiempo como sigue:

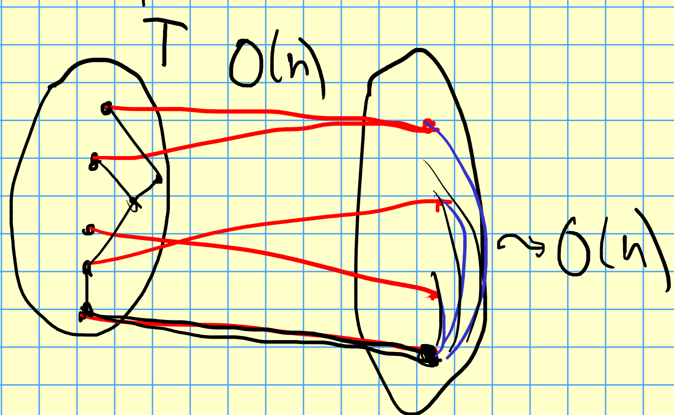
- Se hacen n iteraciones.
- En cada iteración, para identificar la arista más pequeña se recorren $O(m)$ aristas.



Así, el algoritmo corre en tiempo $O(nm)$ con espacio adicional $O(n)$.

$O(n^2)$

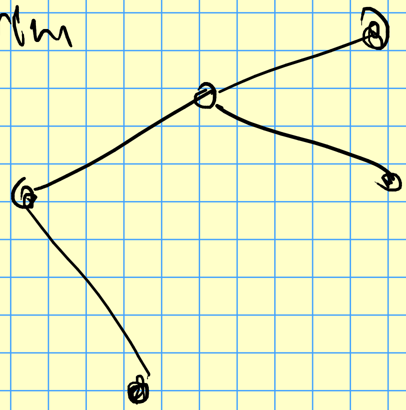
Obs. Se puede mejorar así:



Haciendo esto, bajamos a tiempo $O(n^2)$.

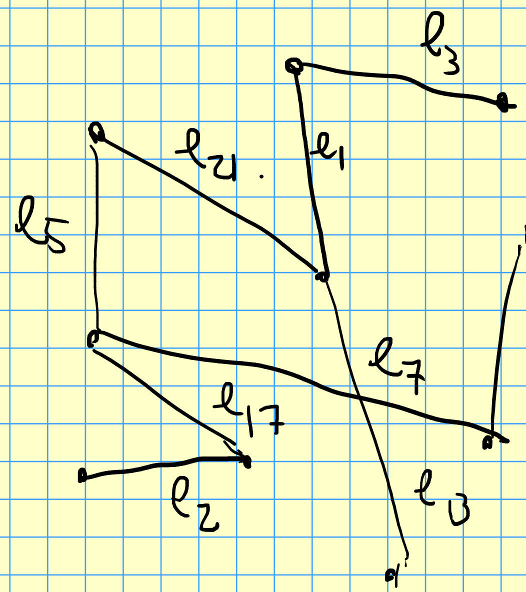
$O(n)$.

Prim



Kruskal

$\underline{e_1} < \underline{e_2} < \underline{e_3} < \cancel{\underline{e_4}} < \ldots < e_m$



$O(m \log m)$

vs

$O(n^2)$