# Módulo 3

# Convergencia, conceptos y aplicaciones

# Independencia de variables aleatorias

$\mathbb{P}(A|B)=\mathbb{P}(A)$
$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(A\cap B)$

Para considerar variables $X, Y$ al mismo tiempo tienen que estar definidas en el mismo espacio muestral $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$

$X, Y$ son independientes si $\forall\ A, B \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(X\in A, Y\in B) = \mathbb{P}(X\in A)\,\mathbb{P}(Y\in B)$$

En particular, para cualquier $B\in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(Y\in B) > 0$

$\forall A\in\mathcal{F} \qquad \mathbb{P}(X\in A \mid Y\in B) = \mathbb{P}(X\in A)$

Implica que la distribución de $X$ no cambia si conocemos que $Y\in B$

La independencia de $X$ y $Y$ suele denotarse $X\perp Y$

CUIDADO: Puede suceder que $X\perp Y$, $Y\perp Z$ pero $X \not\perp Z$   ejemplo: $X\perp Y$ y $X \neq Z^2$

Generalización: Decimos que $X_1, X_2, \dots, X_n$ son independientes si $\forall\ A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{P}(X_1\in A_1, \dots, X_n\in A_n) = \mathbb{P}(X_1\in A_1)\cdots\mathbb{P}(X_n\in A_n)$$

Ejemplo: $n=4$, deducimos que $X_1$ y $X_3$ son independientes porque $\forall A_1, A_3\in\mathcal{F}$ sabemos $\mathbb{P}(X_1\in A_1, X_3\in A_3) = \mathbb{P}(X_1\in A_1, X_2\in\Omega, X_3\in A_1, X_4\in\Omega)$
$= \mathbb{P}(X_1\in A_1)\mathbb{P}(X_3\in A_3)\mathbb{P}(X_2\in\Omega)\mathbb{P}(X_4\in\Omega)$

Otro Concepto más débil:

"$X_1, X_2, \dots, X_n$ son independientes por pares" $X_i\perp X_j$

# Definiciones de Convergencia

Si tenemos variables aleatorias $\underbrace{X_1, X_2, X_3, \dots}_{\text{sec. infinita}}$ y $X$ definidas en el mismo espacio

**Convergencia en Probabilidad** $(X_n)_{n\geq 1}$ converge a $X$ si

$$\forall\ \varepsilon>0 \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

**Convergencia en Segundo Momento** $(X_n)_{n\geq 1}$ converge a $X$ si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(X_n - X)^2] = 0$$

**Convergencia Casi Segura** $(X_n)_{n\geq 1}$ converge a $X$ si

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$$

$\mathbb{P}($Evento que sí ocurre $\lim_{n\to\infty} X_n = X)$

$\mathbb{P}(\omega\in\Omega: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega))$

En lo que sigue, veremos convergencia en distribución

Para esta convergencia las variables no tienen que estar definidas en el mismo espacio $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$

# Motivación para convergencia en distribución.

**Ejemplo:** Estimación de participación ciudadana en votaciones en las siguientes elecciones

**Problema:** Preparar el #de boletas para votar en el país.

**Supuesto 1:** Todas las personas adultas están registradas para votar y son 92.2 millones.

**Supuesto 2:** Cada persona decide votar con la misma aleatoreidad que otra persona: Ber(.4).

**Supuesto 3:** Cada persona decide votar o no sin afectar las decisiones de las demás personas.

**Supuesto 4:** No hay falsificación de identidades.

* Notación: i.i.d. $\underbrace{\text{independientes}}_{\text{(sup 3)}}$ e $\underbrace{\text{idénticamente}}_{\text{(sup 2)}}$ distribuidas

**Estrategia del INE:** Calcular la esperanza de $\mathbb{E}[X] = 36.8$ millones

$$X = \underbrace{\#\text{ ♀ sí votan}}_{\text{Bin}(92.2\times10^6,\ .4)}$$

para tener holgura calculamos producir más boletas ¿Cuánto es suficiente?

**Si** $\mathbb{P}(X \le 38\times10^6)$ es suficientemente grande entonces con PRODUCIR 38 millones de boletas estamos bien.

$38\times10^6 \approx \mathbb{E}[X]$ + una desv. estándar.

$$\mathbb{P}(X \le 38\times10^6) = \sum_{k=0}^{38\times10^6} \mathbb{P}(X = k) \qquad n = 92.2\times10^6,\quad p = .4$$

$$= \sum_{k=0}^{38\times10^6} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

## ¿Cómo nos aproximamos a esta probabilidad?

Argumentar que $X = \text{Bin}(n,p) \approx \text{Normal}(np, \sigma^2) = N$

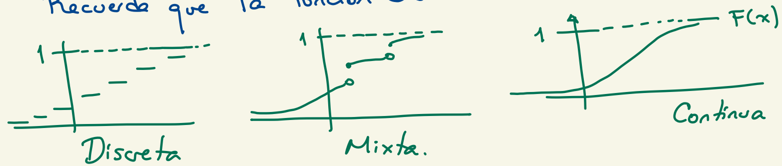
y saber traducir $\mathbb{P}(X \le 38\times10^6) \approx \underbrace{\mathbb{P}(N \le 38\times10^6)}_{\substack{F(38\times10^6) \\ \text{F. distribución.}}}$

Mediante convergencia en distribución.

## Última definición de convergencia

Si consideramos $X_1, X_2, X_3, \ldots, N$ con función de distribución $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_N(x)$

Recuerda que la función distribución se ve




**Convergencia en Distribución** $(X_n)_{n\ge1}$ convergen a $N$ si $\forall\, x$ punto de continuidad de $F_N(x)$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_N(x)$$

# Posibles convergencias de la Binomial. + Normal.

- Variable Poisson $X$: discreta, soporte en $\{0,1,2,\dots\}$

parámetro $\lambda > 0$

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}} \qquad \mathbb{E}[X]=\lambda$$

Sabemos que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$

Modela: Número de ocurrencias de eventos muy poco probables (pero que tienen muchos individuos que pueden 'activar' ocurrencia).

# Personas que entran a un banco

$\underbrace{\text{\# Autos}}_{\text{ocurrencia}}$ que pasan $\underbrace{\text{en la cuadra de atrás.}}$

quien puede entrar al banco?
cuantos conductores en CDMX?

# Llamadas al 911.

## Caso de Convergencia Binomial → Poisson

Fijamos $\lambda > 0$. Hacemos que $np = \lambda$ y definimos, para $n \in \mathbb{N}$,

$X_n = \text{Bin}(n,p)$

$p = \frac{\lambda}{n}$

prob. individual de éxito

los potenciales involucrados

Objetivo es demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{p^k}{k!}(1-p)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ factores}} \frac{p^k}{k!}(1-p)^{n-k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{n^2} = \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} = \quad \lim_{n\to\infty} 1 - 1/n = 1$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k p^k}{k!}(1-p)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!}(1-p)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}} \cdot \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

## Caso de Convergencia Binomial → Normal

Retomando ejemplo $X_n = \text{Bin}(n, .4) \approx \text{Normal}(np, \overbrace{np(1-p)}^{\sigma_n^2})$

Consideraciones • $\mathbb{E}[X_n] = np$, entonces $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \infty$

- Si $X = \text{Normal}(0,1)$ y hacemos $Y = aX + b$

entonces $Y = \text{Normal}(b, a^2)$

$\mathbb{E}[Y] = a\,\mathbb{E}[X] + b = b$

$\text{Var}[Y] = a^2\,\text{Var}[X] = a^2$

Lo que sí tenemos es que

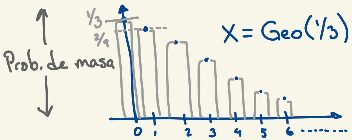
$$Y_n = \frac{X_n - np}{\underbrace{\sqrt{np(1-p)}}_{\sigma_n}} \xrightarrow{\text{conv. en dist.}} N(0,1)$$

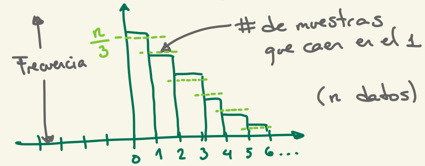
rescalado normalizado

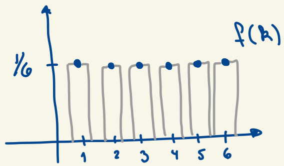
# Diferencia entre P. Masa e Histograma

origen probabilista

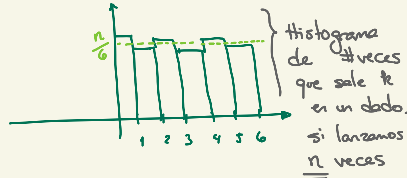
origen estadístico



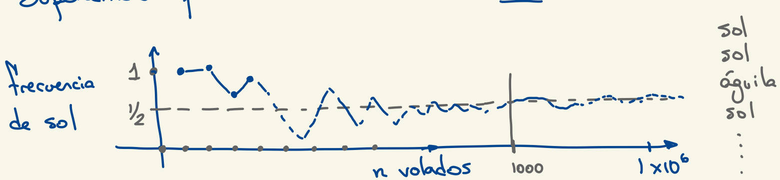

$X = \#$ cara del dado

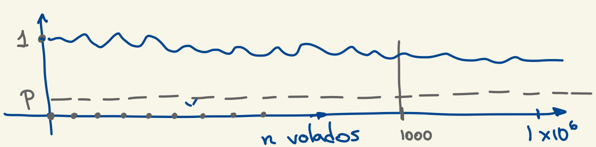



$\mathbb{P}(Geo(1/3)=0) = \frac{1}{3}$ $\quad \mathbb{P}(Geo(1/3)=1) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

Para estimar probabilidades que no conocemos basta con estimar prob. de éxito (de Bernoullis), de lanzar monedas

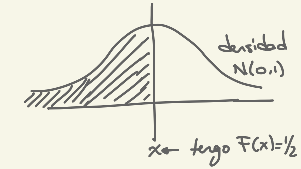
Suponemos que tenemos acceso a i.i.d. experimentos.




# Rezago del Módulo 2: Cuantiles y Mediana.

Si tenemos una variable aleatoria $X$ con función de distribución $F(x)$ entonces:




Mediana: de probabilidad $\quad m = \inf\{x : F(x) \geq 1/2\}$

Para muestras (de variables iid. con distribución $X$)

$m =$ "punto medio" que separa a la mitad de las muestras en dos partes con $=\#$ muestras.

CUIDADO! Mediana de $X$ no siempre coincide media de $X$

Cuantiles predominantes: Cuartiles, Deciles, Octiles

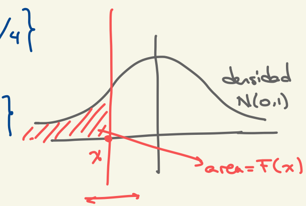
Cuartiles:

$q_1 = \inf\{x : F(x) \geq 1/4\}$

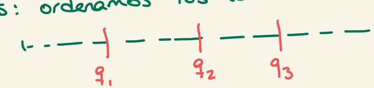
$q_2 =$ mediana

$q_3 = \inf\{x : F(x) \geq 3/4\}$

$q_4 = \perp$




Para muestras: ordenamos los valores




Generalizando la función inversa tenemos

Función cuantil: $\quad Q(y) = \inf\{x \in \mathbb{R} . F(x) \geq y\}$

# Aproximación de la distribución Binomial con dist. Normal usando corrección discreta.

Ejemplo:

Estrategia del INE: Calcular la esperanza de $\mathbb{E}[X] = 36.8$ millones

$X = \underbrace{\#\ \text{♀ sí votan}}_{Bin(92.2\times10^6,\ .4)}$

para tener holgura calculamos producir más boletas ¿Cuánto es suficiente?

Sugerencia: Producir $92.2\times10^6 \times .5$ boletas

* exceso de boletas $\approx 9.2$ millones

Producir $36.88\times10^6 + 4{,}704$ boletas

Producir $36.8\times10^6 + .2\times10^6$ boletas.

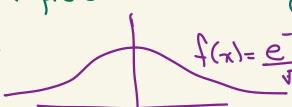
$\mathbb{P}(X_n \leq 37\times10^6)$ ← queremos que esta probabilidad sea grande

$X_n \downarrow$

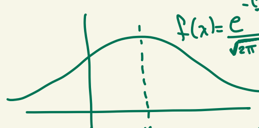
$Bin(n,p) \approx N(np,\ np(1-p))$

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \approx N(0,1)$$

Evitamos el problema de integrar la densidad de la normal.




$$f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$$




$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$n = 92.2\times10^6$

$p = .4$

$np = 36{,}880{,}000$

$np(1-p) = 22{,}128{,}000$

$\sqrt{np(1-p)} \approx 4{,}704$

$$\mathbb{P}(X_n \leq 37\times10^6)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{37\times10^6 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \underbrace{\frac{120{,}000}{4.704}}_{25.51}\right)$$

$$\overset{B\approx N}{\approx} \mathbb{P}(N(0,1) \leq 25.51) \approx \underbrace{1}_{\text{Ver tabla}}$$

Una Conclusión. 120,000 boletas por encime extra es demasiado 'seguro'.

$$\mathbb{P}(X_n \leq \underbrace{36.88\times10^6}_{np} + \underbrace{4{,}704}_{\sqrt{np(1-p)}})$$

$$= \mathbb{P}(X_n - np \leq 4{,}704)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq 1\right) \underset{\text{Tabla}}{=} .84134$$ ← Mejor más certeza.

* Buscamos tener más del 99% de certeza y escogemos

$11{,}760 = 2.5\sigma$

En la generación de 2021 hay 200 estudiantes de mate aplicada. Los estudiantes toma Proyectos 1 sólo si van a tiempo con los créditos, esto sucede con Prob. .2.

Si cada profesora de Proyecto atiende a 5 estudiantes, cuando grupos tenemos que abrir.

$X = Bin(200, .2)$

$n = 200$
$np = 40$
$np(1-p) = 32$
$\sqrt{np(1-p)} = 5.65$

$\mathbb{P}(X \leq 45)$

$\approx \mathbb{P}\left(N(0,1) \leq \frac{45-40}{5.65}\right) = \Phi(.885) \simeq .81$

Notación

Dependiendo del contexto esta diferencia puede ser importante

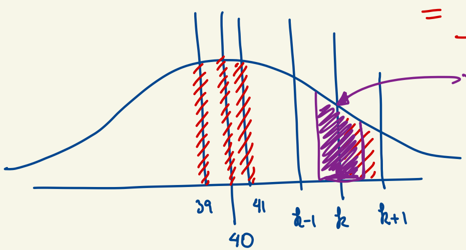
$\mathbb{P}\left(N(0,1) \leq \frac{46-40}{5.65}\right) = \Phi(1.06) \simeq .855$

## LA CORRECCIÓN POR DISCRETIZACIÓN:

Si $X \simeq Bin(n,p)$ y $np > 10$ $n(1-p) > 10$

entonces $\mathbb{P}(X \leq k) \simeq \mathbb{P}\left(N(0,1) \leq \frac{k+.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

$= \Phi\left(\frac{k+.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$



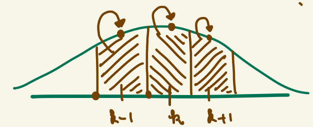

Masa approx $\approx k$

= area de la densidad del intervalo $[k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}]$

otras opciones es asignar el area de $(k-1, k]$

## Cómo tratar con intervalos en variables discretas:

$\mathbb{P}(Bin(n,p) \in [k, l]) = \mathbb{P}(Bin(n,p) \leq l) - \mathbb{P}(Bin(n,p) \leq k-1)$




$\approx \Phi\left(\frac{l+.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k-1+.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$

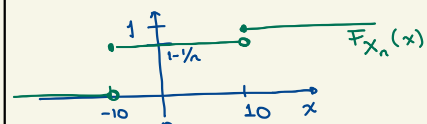
## Ejemplos específicos de convergencias.

Definimos una secuencia $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aleatorias y $X$ v.aleatoria definidas en un mismo espacio $([0,1], \mathcal{B}, \mathbb{P})$ ↓ uniforme

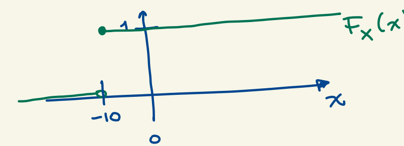
de manera que para $\omega \in [0,1]$ $X(\omega) = -10$

y para $n \in \mathbb{N}$ $X_n(\omega) = \begin{cases} 10 & \omega \in [0, 1/n] \\ -10 & \omega \in (1/n, 1] \end{cases}$

Funciones de distribución:



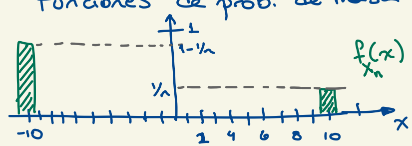

Límite

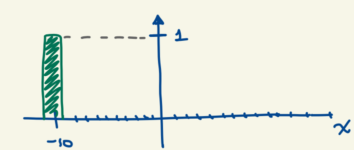



$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ $\mathbb{P}(X \leq -11) = 0$

$\mathbb{P}(X \leq -10) = \mathbb{P}(X = -10) = \mathbb{P}(\{\omega : \omega \in (1/n, 1]\}) = 1 - 1/n$

Funciones de prob. de masa



## Convergencia en probabilidad

para $\omega \in [0,1]$ $\quad X(\omega) = -10$

y para $n \in \mathbb{N}$ $\quad X_n(\omega) = \begin{cases} 10 & \omega \in [0, 1/n] \\ -10 & \omega \in (1/n, 1] \end{cases}$

Si $\varepsilon < 20$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| < \varepsilon) = \mathbb{P}(\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1 - 1/n$$

* La nueva v.a. $\quad |X_n - X| = \begin{cases} 20 & \omega \in [0, 1/n] \\ 0 & \omega \in (1/n, 1] \end{cases}$

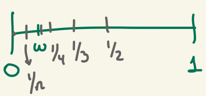
$$\mathbb{P}(|X_n - X| < 40) = 1$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| < \varepsilon) = 1 \quad$ entonces $\quad X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

## Convergencia casi segura

Fijamos $\omega \in [0,1]$

Espacio de estados




| | $X_1(\omega)$ | $X_2(\omega)$ | $X_3(\omega)$ | .... | $X_{100}(\omega)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\omega = 3/4$ | 10 | -10 | -10 | ......, ... | -10, -10 |
| $\omega = 1/2$ | 10 | 10 | -10 | ...., ... | -10, -10 |
| $\omega = 1/5$ | 10 | 10 | 10 | -10, ... | -10, -10 |

Para $\omega \in [0,1]$ si $n \geq n_0 = \frac{1}{\omega}$ entonces $X_n(\omega) = -10$

$\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = -10 \quad$ entonces

$$\mathbb{P}(\lim_{n \to \infty} X_n(\omega) = -10) = 1$$

## Secuencia que converge en distribución pero no en probabilidad ni casi seguramente.

Tomamos $X$ una variable normal estándar definida en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$

Sea $Y_{2n-1} = X$ y $Y_{2n} = -X$ para $n \in \mathbb{N}$

Como $X$ tiene una distribución simétrica entonces $Y_n$ tiene distribución normal para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces podemos decir que $Y_n \xrightarrow{\text{dist.}} X$ "converge en distribución"

### Que pasa con la conv. en Probabilidad?

Evaluamos la v. aleatoria $\quad |Y_n - X| = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 2|X| & n \text{ par} \end{cases}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|Y_n - X| < \varepsilon) = \begin{cases} 1 & n \text{ impar} \\ \mathbb{P}(2|X| < \varepsilon) & n \text{ par} \end{cases}$

$\forall \varepsilon > 0$ No hay convergencia de $\mathbb{P}(|Y_n - X| < \varepsilon)$

### Que pasa con convergencia casi segura?

$$\{\omega : \lim_{n \to \infty} Y_n(\omega) = X(\omega)\} = \{\omega : X(\omega) = 0\}$$

ejemplo: si $X(\omega) = 5$ la sucesión $Y_n$ : 5, -5, 5, -5, +5, -5, ....

$X(\omega) = -2$ " " : -2, 2, -2, 2, -2, ....

Entonces $\mathbb{P}(\lim_{n \to \infty} Y_n(\omega) = X(\omega)) = \mathbb{P}(X = 0) = 0$

## Ley de los Grandes (Versión débil y fuerte)

Considera que podemos simular una v.a. $X$ con cierta distribución $Var(X) < \infty$

Los simulaciones dan $X_1, X_2, X_3, \dots$ (iid)

Los promedios parciales se definen

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

variable aleatoria

$$Var(\bar{X}_n) = \sum_{i=1}^{n} Var\left(\frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

$$= \frac{Var(X)}{n}$$

como v.aleatoria, $\bar{X}_n$ tiene cada vez menor variabilidad.

$$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X]$$

Utilizaremos un límite determinista $\bar{X} = \mathbb{E}[X] = \mu$

## Convergencia en Probabilidad (débil)

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\mu}| > \varepsilon) = \mathbb{P}((\bar{X}_n - \mathbb{E}[X])^2 > \varepsilon^2)$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X])^2]}{\varepsilon^2} = \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$Var(\underbrace{\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]}_{\text{variable aleatoria}}) = Var(\bar{X}_n) = \frac{Var(X)}{n}$$

"Los promedios de copias de $X$ se pueden aproximar por $\mu = \mathbb{E}[X]$"

## Convergencia casi segura (fuerte)

* Podemos definir todas las copias $X_1, X_2, \dots$ en un mismo espacio de probabilidad

Para cada realización $\omega$ del espacio, tenemos $X_1(\omega)$, $X_2(\omega)$, $X_3(\omega)$, $X_4(\omega)$

$\bar{X}_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$ tiene a $\mu = \mathbb{E}[X]$ como límite con probabilidad 1.

## Teorema límite central

Ya sé que el promedio de las muestras (copias) $X_1, X_2, X_3, \ldots$ se concentra alrededor $\mathbb{E}[X] = \mu$

Pero qué se puede decir de la variabilidad?

$$\overline{X}_n - \mathbb{E}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu = \underbrace{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right)}_{\xrightarrow{LGN} 0}$$

Considera el reescalamiento / renormalización

$$\underbrace{C_n}_{\text{v.aleatoria}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\,Var(X)}} \xrightarrow{dist.} N(0,1)$$

$$Var(C_n) = Var\left(\frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n Var(X)}}\right) = \frac{1}{n Var(X)} Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right)$$

$$= \frac{Var(\sum X_i)}{n Var(X)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Var(X)}{n Var(X)} = 1$$

Si $X \sim Ber(p)$

$Var(X) = p(1-p)$

$$Bin(n,p) = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{con} \quad X_i \text{ iid} \sim X$$

La conv. de Binomial $\to$ Normal viene del TLC

## Del ejemplo de clases anteriores

$$X \sim Bin(\underbrace{200 \text{ millones}}_{n}, \underbrace{.4}_{p})$$

$\mathbb{E}[X] = 80 \times 10^6$ $\quad Var(X) = np(1-p)$

$= .6 \times 80 \times 10^6$

$= 48 \times 10^6$

$* \sqrt{Var(X)} = 4\sqrt{3} \times 10^3$

$$\mathbb{P}(X \in (70 \times 10^6, 90 \times 10^6))$$

Como $\dfrac{Bin(n,p) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \to N(0,1)$ distribución

$$= \mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X] \in (-10 \times 10^6, 10 \times 10^6))$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{X - \mathbb{E}[X]}{\sqrt{Var(X)}} \in \left(-\frac{10 \times 10^6}{4\sqrt{3} \times 10^3}, \frac{10 \times 10^6}{4\sqrt{3} \times 10^3}\right)\right)$$

$$\approx \mathbb{P}(\underbrace{Y}_{\text{dist } N(0,1)} \in (-1440, 1440)) \approx 1$$