Aplicación de MCMC

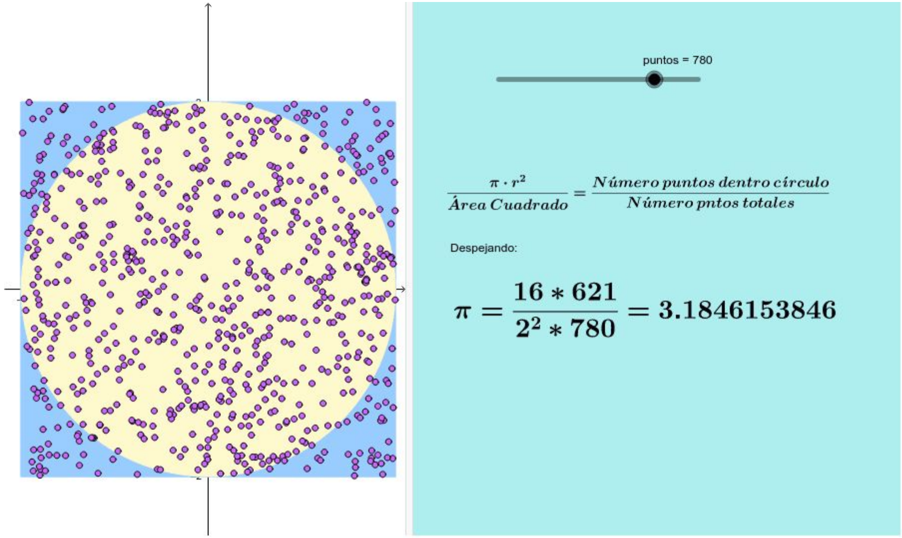
Integrantes:

- Lucas Cedric Cervantes Beutelspacher
- Andrés Urbano Guillermo Gerardo
- Elsy Camila Silva Velázquez

Método de Monte Carlo

- Método no determinístico usado para aproximar expresiones matemáticas complejas con gran complejidad para evaluarlas con exactitud.

- Técnica cuantitativa que usa estadística para imitar el comportamiento aleatorio de sistemas reales no dinámicos.



Queremos...

Calcular $E[h(X)] = \sum_{j=1}^{\infty} h(x_j) P\{X = x_j\}$ para ***h*** función específica que presenta dificultad para ser evaluada. Con ***X*** vector discreto aleatorio cuyo conjunto de posibles valores son ***x_j, j≤1***. Y $P\{X = x_j\}$ función de densidad de ***X***.

Solución

Para estimar la esperanza buscada, se genera una secuencia de los valores vectoriales de las cadenas de Markov $x_1, x_2, x_3, \ldots$ cuyas probabilidades estacionarias son $P\{X = x_j\}$.

Monte Carlo vía Cadenas de Markov

- Métodos de simulación para generar muestras de distribuciones y cantidades de interés.

- Se simulan valores de manera iterativa de alguna distribución propuesta (no necesariamente parecida a la distribución de interés).

- Cada valor generado depende únicamente del anterior valor simulado.

Ideas Básicas

Queremos similar valores de una cierta distribución π_i **.**

MCMC consiste en simular una cadena de Markov ***x_1, x_2,...*** *cuya distribución estacionaria sea* π_i **.**

De esta manera, al implementar correctamente el algoritmo, la convergencia de la cadena está garantizada, independientemente de cuáles sean los valores iniciales.

Algoritmo Metrópolis Hastings

Simula una cadena de Markov cuya distribución estacionaria es π_i **.** Comienza en ***X_0.***

1. Dado ***X_t*** valor actual, simular un candidato ***X****, de la cadena propuesta q_{ij} **.**

2. Calcular la probabilidad de aceptar el valor generado, mediante

$$\alpha_{ij} = min\{\frac{\pi_j}{\pi_i}\frac{q_{ji}}{q_{ij}}, 1\}$$

3. Simular ***U*** de una distribución uniforme ***U(0,1).***

4. Si ***u < α,*** tomar ***X_{t+1} = X*.*** De lo contrario, rechazar y tomar ***X_{t+1} = X_t.***

5. Volver a 1.

Definiciones a recordar:

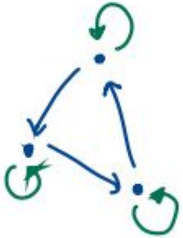
- Cadenas irreducibles. Sólo tienen una clase de comunicación. (Fuertemente conexas)

- Periodo de un estado:

$$Per(i) = MCD\{n : P_{ii}^{(n)} > 0\}$$

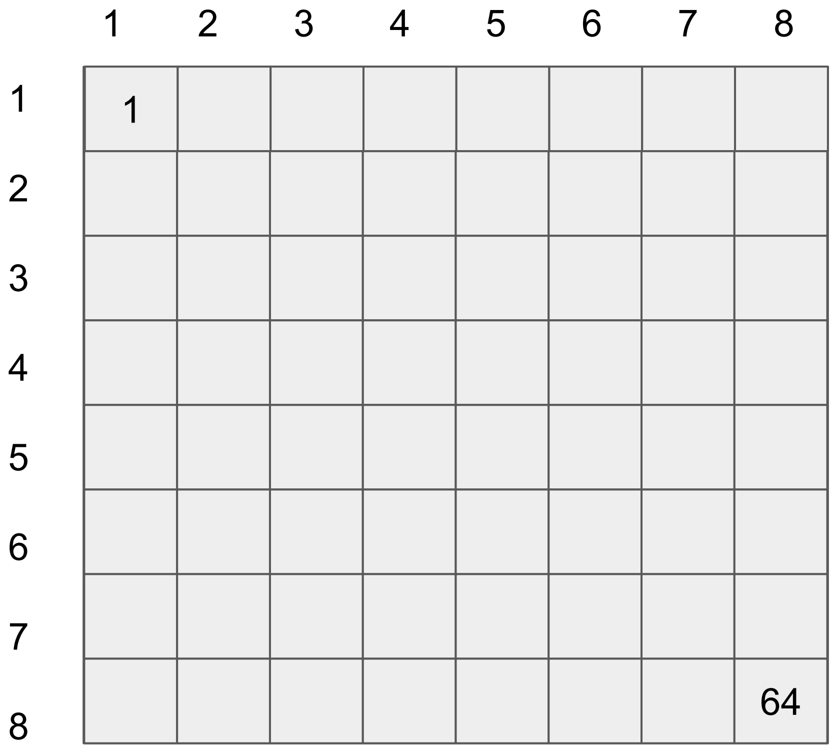
- Estado aperiódico:

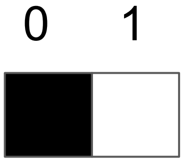
$$Per(i) = 1$$



$$Per(i) = MCD\{1, \dots\} = 1$$

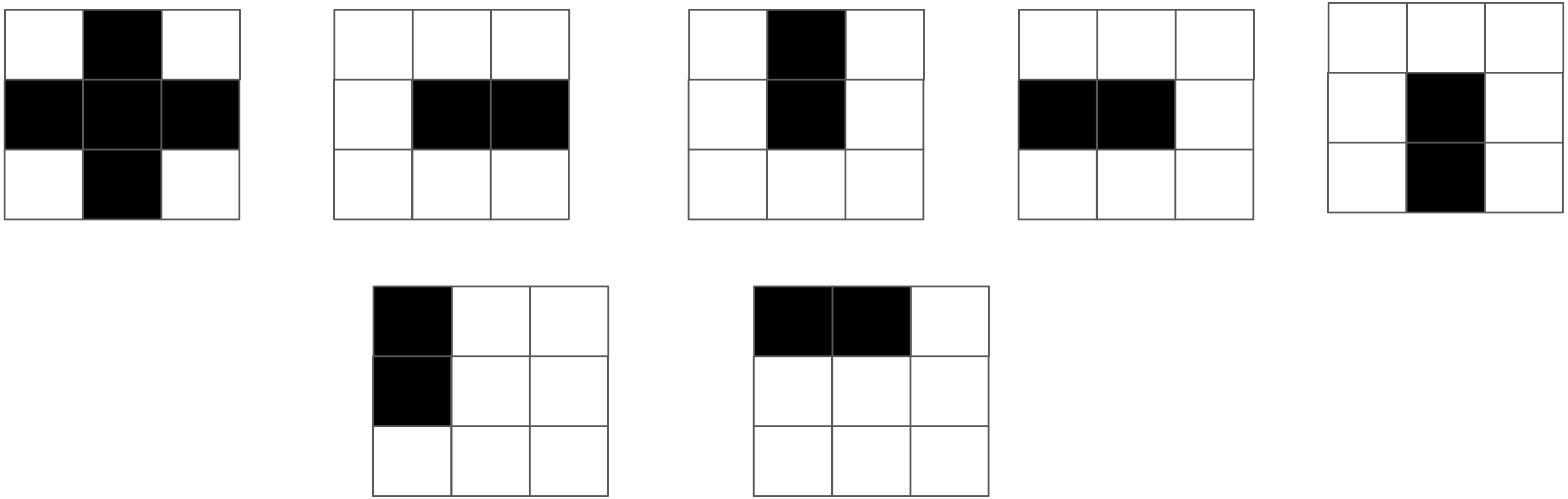
Considere un tablero de 8×8; una configuración del tablero es una asignación de colores (blanco y negro) en las casillas ($C : \{1, 2, . . . , 64\} \to \{0, 1\}$).



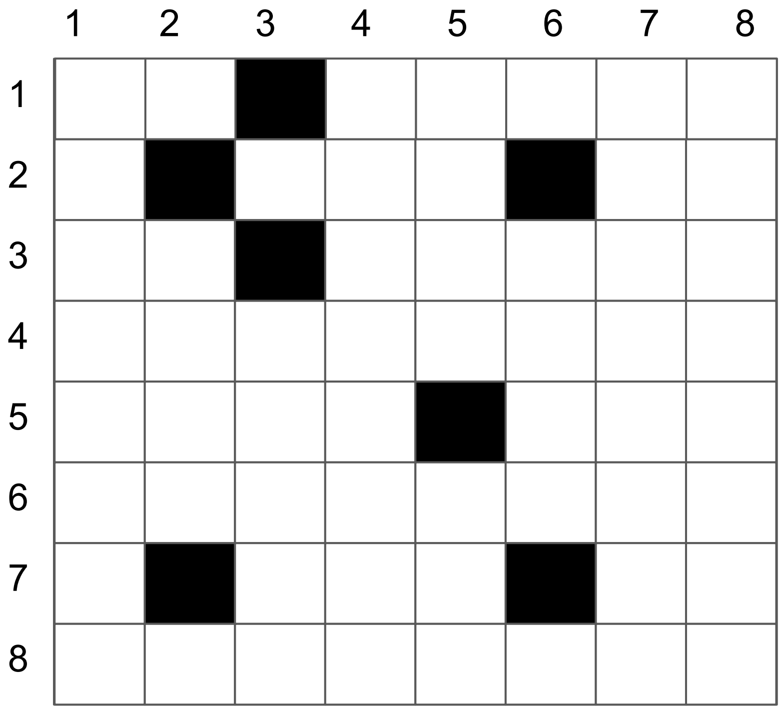


Decimos que la configuración es aceptable si no hay dos cuadritos adyacentes de color negro (por ejemplo, un cuadrito genérico tiene 4 cuadritos adyacentes y cada esquina tiene dos cuadritos adyacentes)

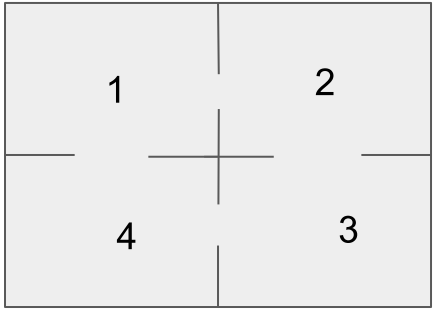
Algunas configuraciones no aceptables



Ejemplo de una configuración aceptable



Analogía con el ratón



Conjunto de reglas

- El ratón puede de ir de cuarto en cuarto.
- No se puede atravesar paredes.
- Se vale regresar.

Espacio de estados

$S = \{ 1, 2, 3, 4\}$

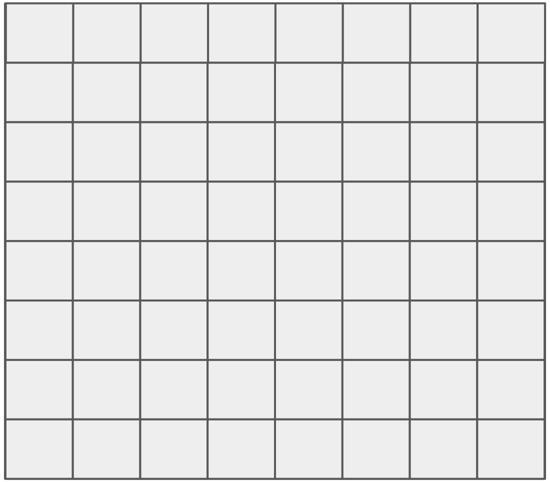
Distribución inicial

$$\pi_0 = (P(X_0 = 1), P(X_0 = 2), P(X_0 = 3), P(X_0 = 4))$$

$$\pi_0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

Trabajaremos con el espacio de estados C que reune a todas las configuraciones aceptables. Considere una caminata aleatoria (Xn) n≥0 con espacio de estados en C que satisface:

- La configuración inicial X_0 tiene todos los cuadritos blancos

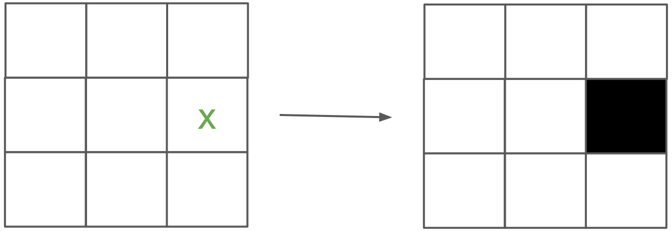


- Dado que conocemos Xn, construimos Xn+1 de la siguiente forma:

1. Elige una casilla *c* uniformemente al azar y lanza una moneda justa.

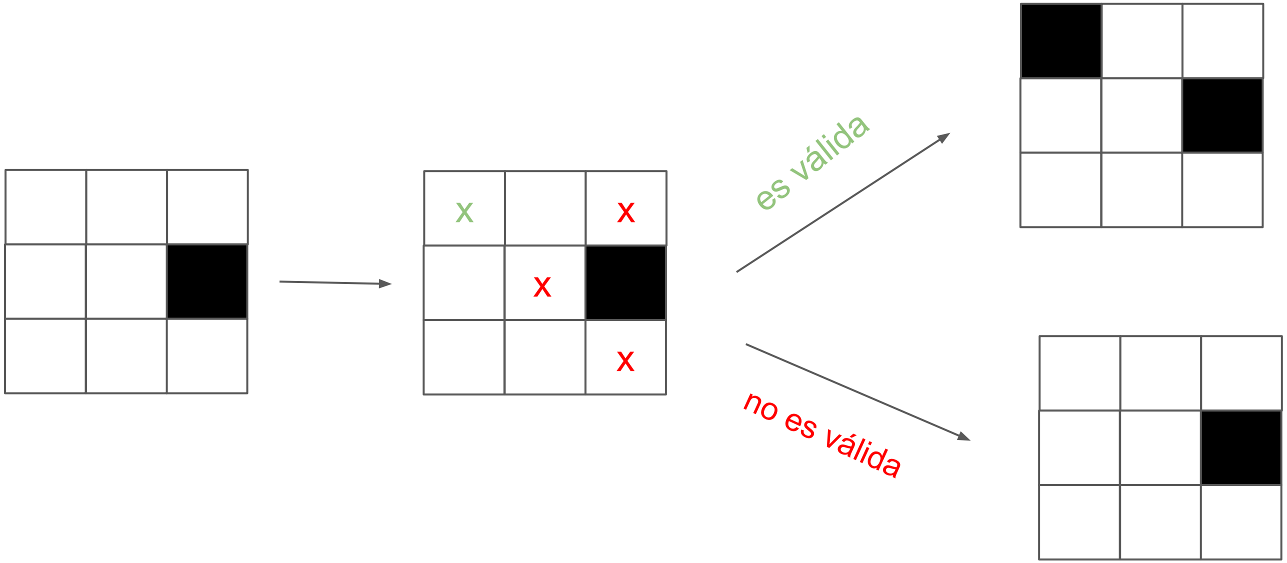
2. Si la moneda sale águila entonces Xn+1 = Xn.

3. Si la moneda sale sol entonces intercambiamos el color de la casilla *c* (de blanco a negro o viceversa) y, sólo si esto genera una configuración aceptable, ésta es la siguiente configuración Xn+1.



4.- En otro caso hacemos Xn+1 = Xn.

Ejemplo:



Muestreo

Aceptación Rechazo

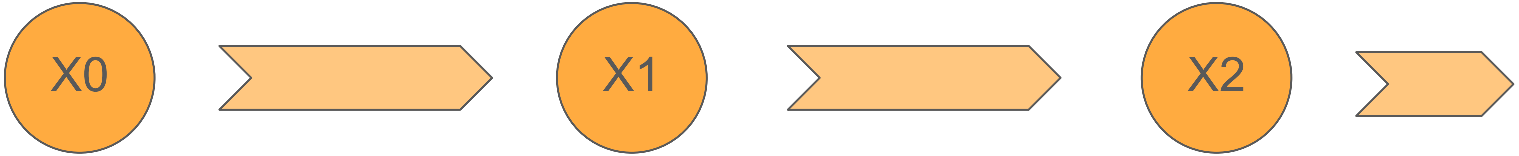
- Independiente
- Ineficiente (número de muestras)

MCMC

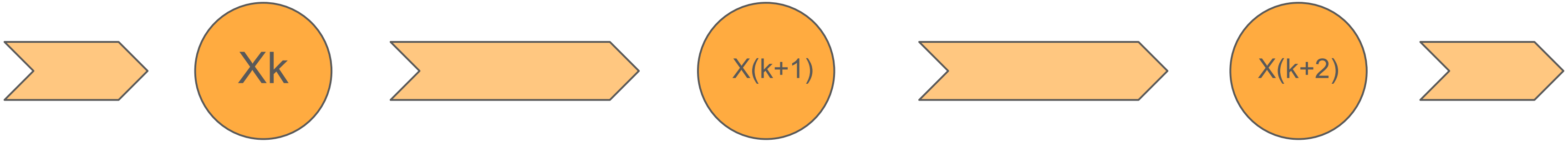
- Dependiente
- Eficiente (número de muestras)

Cadena de Markov

Inicio

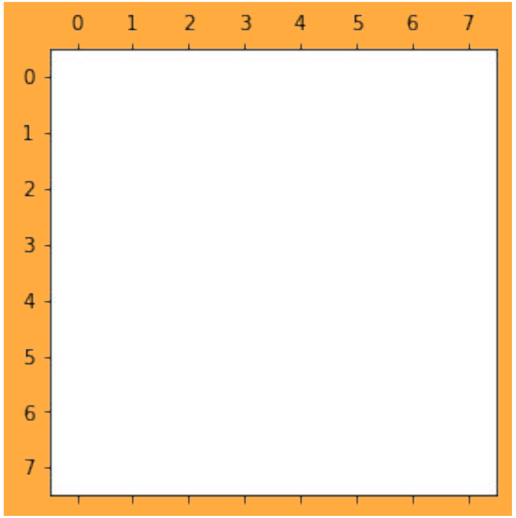


Distribución estacionaria



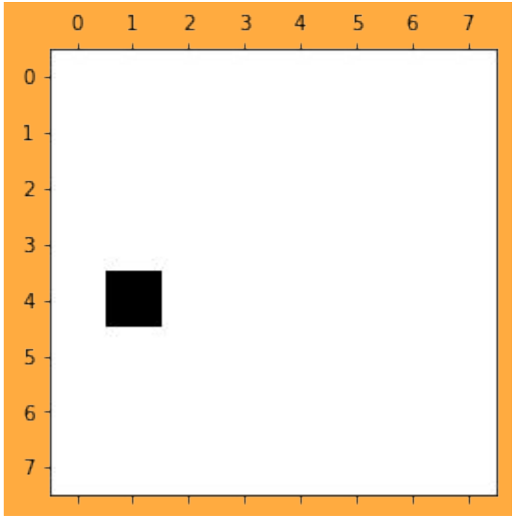
Tableros

t=0



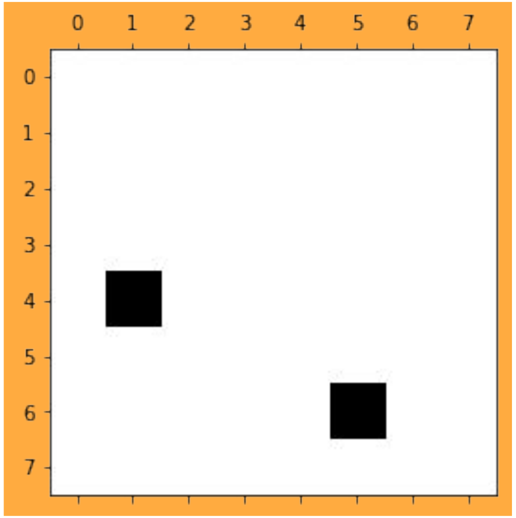
Tableros

t=1



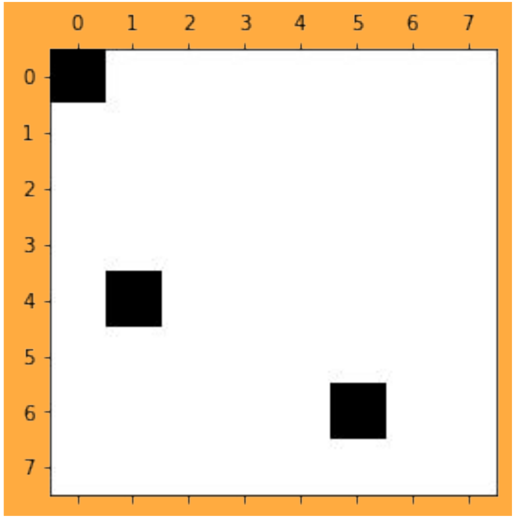
Tableros

t=4



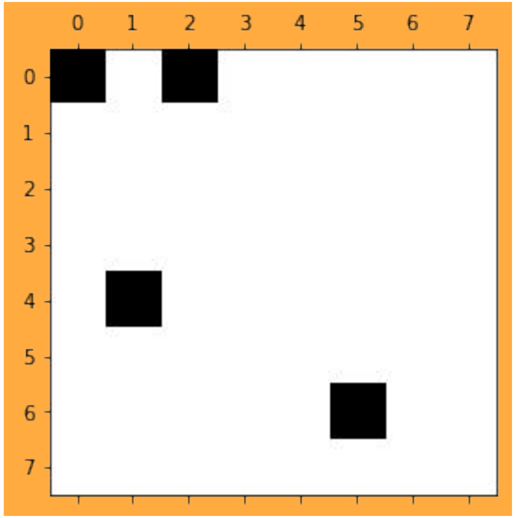
Tableros

t=5



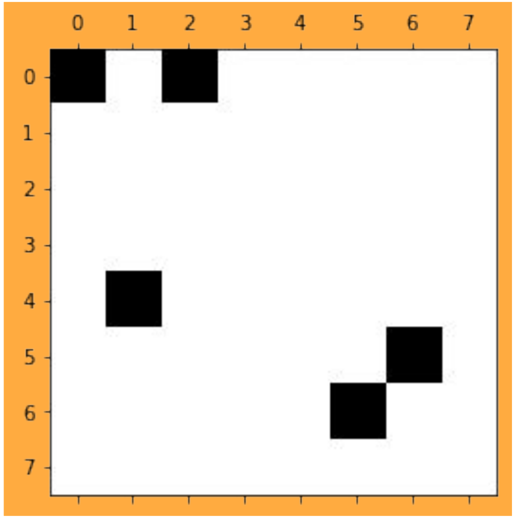
Tableros

t=8



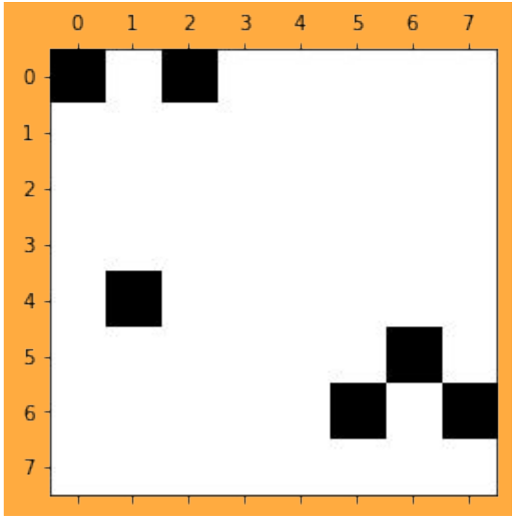
Tableros

t=9



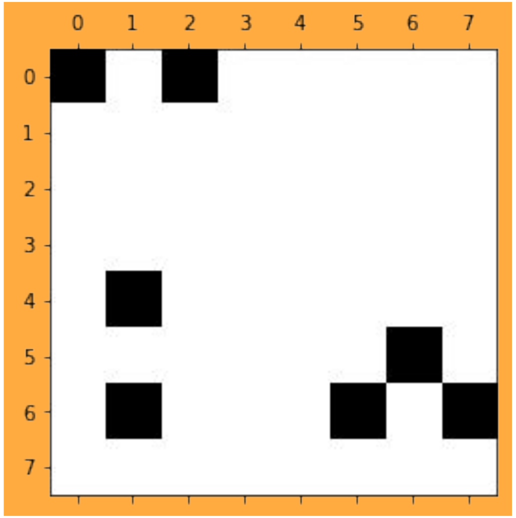
Tableros

t=10



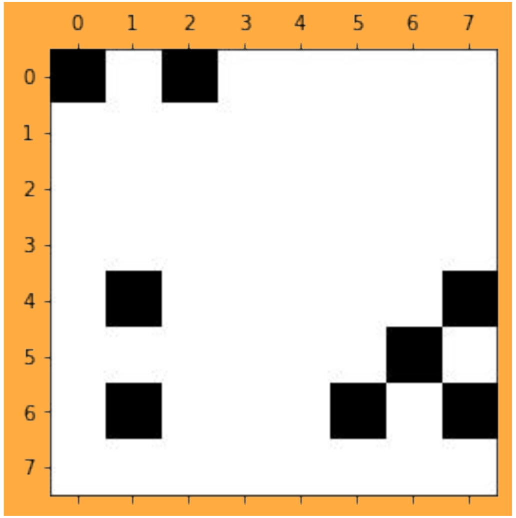
Tableros

t=11



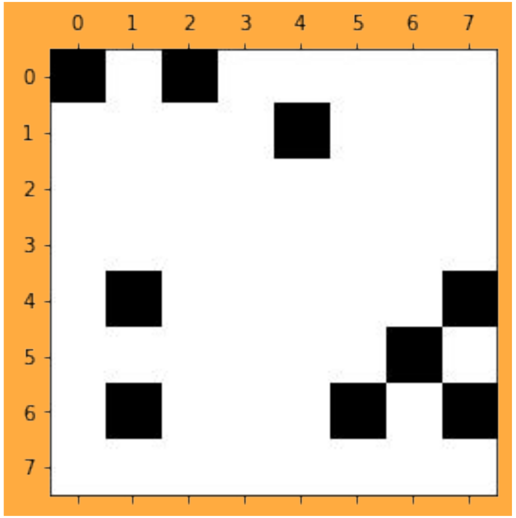
Tableros

t=14



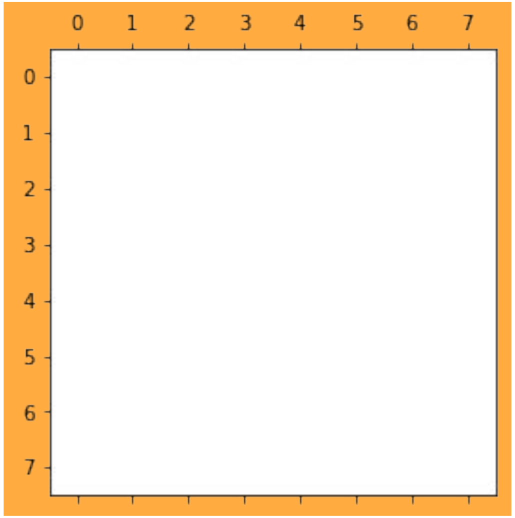
Tableros

t=15 - 25

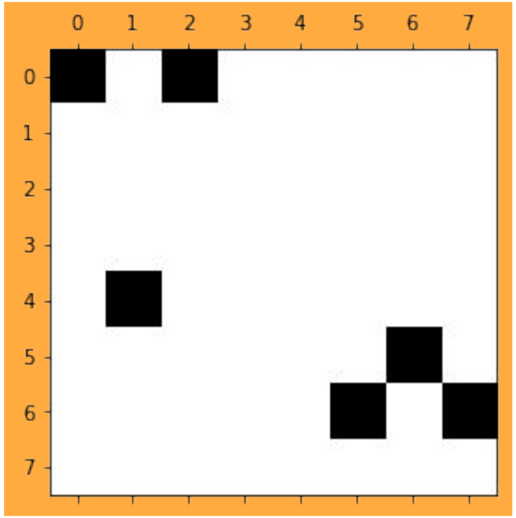


Tableros

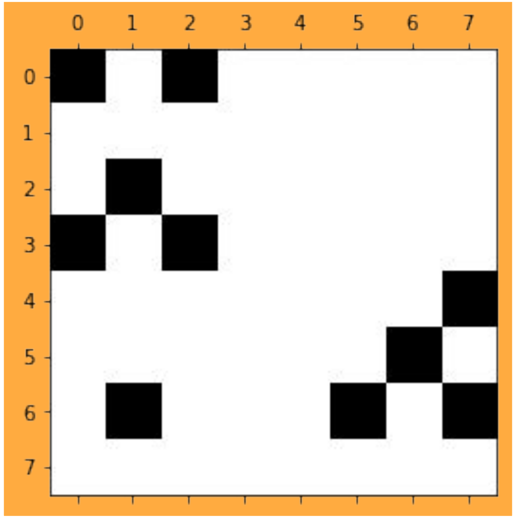
t=0



t=10

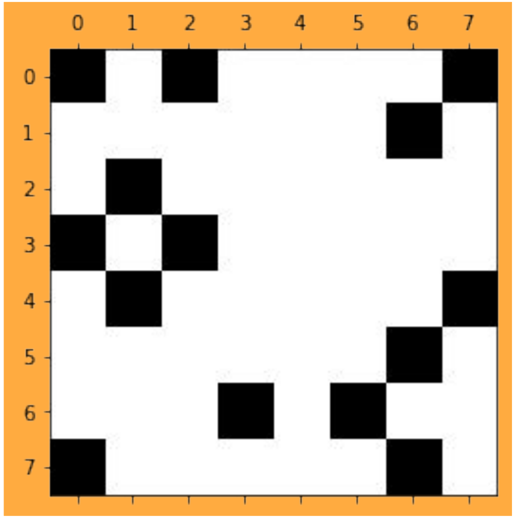


t=50

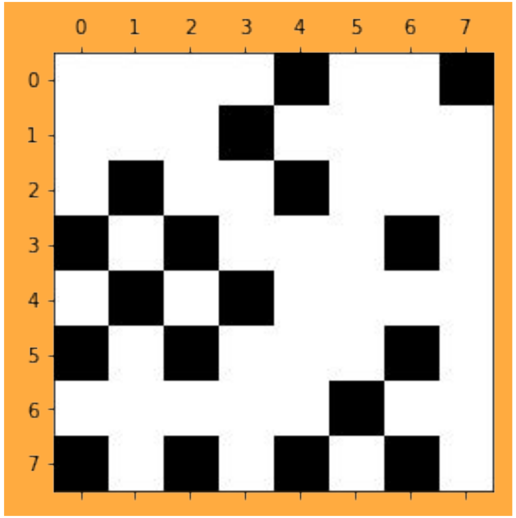


Tableros

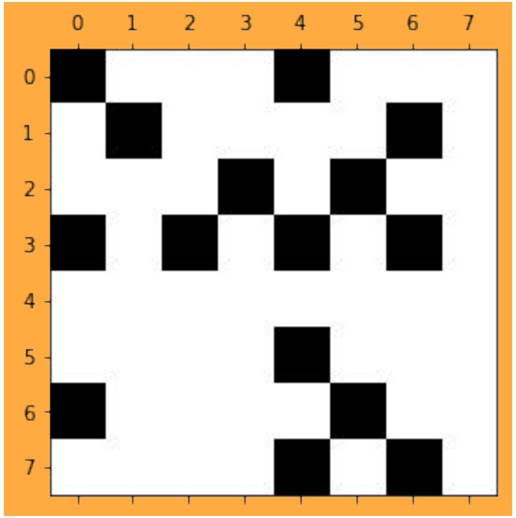
t=100



t=800

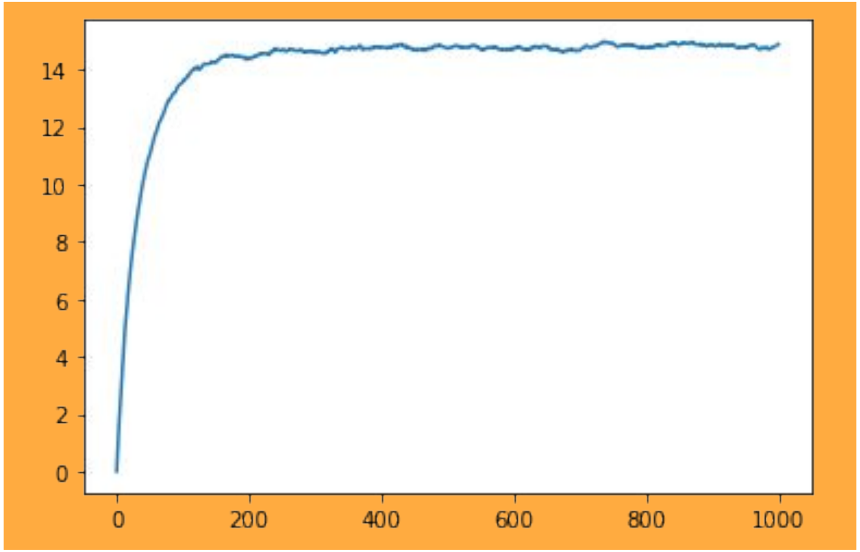


t=1000



Tableros

Contando el número de cuadros negros promedio para 500 simulaciones



Tableros

Trazamos una línea en 14.75