Práctica 12

PASE

Octubre 2021

1 Algoritmo de Box-Muller

Si (X, Y) son variables aleatorias independientes con distribución normal estándar $N(0, 1)$ entonces el vector (R, Θ) dado por

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{y} \quad \Theta = \arctan(X/Y),$$

tiene coordenadas independientes con Θ uniforme en $(0, 2\pi)$ y R^2 tiene distribución exponencial Exp(1/2). De modo que podemos simular (X, Y) pares de variables normales independientes:

1. Genera variables independientes U, W con $U \sim Unif(0, 1)$ y $W \sim Exp(1/2)$.
2. Define

$$X = \sqrt{W} \cos(2\pi U),$$
$$Y = \sqrt{W} \sin(2\pi U).$$

2 Multinormales como transformación de variables normales independentes

Si $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ es un vector de variables independientes normales estándar. Y definimos el vector $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ a partir de combinaciones lineares de X, es decir

$$Y = MX + b;$$

entonces el vector Y es de variables normales con vector de medias $\mu = b$ y matriz de covarianza $\Sigma = MM^T$. De modo que para generar un vector Y de Normales Multivariadas con media μ y covarianza Σ dada:

1. Encuentra los eigenvectores y eigenvalores de Σ. Sea Q la matriz de eigenvectores y Λ la matriz diagonal de eigenvalores.
2. Genera un vector multinormal X con entradas independientes y estándar.
3. Define $M = Q\Lambda^{1/2}$ y regresa $Y = MX + \mu$.

2.1 Antecedentes

- La densidad de un vector de variables normales $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ está determinado por el vector de medias $\mu = (E(Y_1), \ldots, E(Y_n))$ y la matriz de covarianzas $\Sigma = (\Sigma_{ij})$ con $\Sigma_{ij} = \Sigma ji = Cov(Y_i, Y_j)$.

- Una matriz simétrica A es diagonalizable y además tiene una raíz cuadrada B. Es decir, $A = Q\Lambda Q^{-1}$ y $B^T B = A$, donde Q tiene una base de eigenvectores de la función Ax y Λ es una matriz diagonal con los eigenvalores correspondientes.

  Más aún $Q^{-1} = Q^T$. Y de ese modo, $B = Q\Lambda^{1/2}$.

3 Ejercicios

1. Genera y grafica muestras del vector aleatorio (X,Y) con densidad:

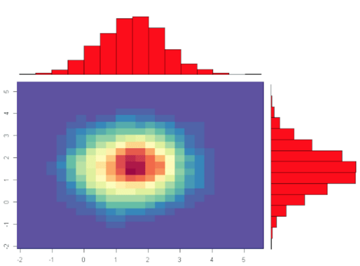
   $$f(x,y) = \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}$$

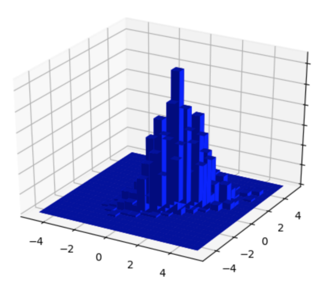
   Explica brevemente el algoritmo que usaste; recuerda que para explicar no es suficiente presentar el código.

2. Simula variables aleatorias normales multivariadas con

   $$\mu = (0,0), \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mu = (1,0), \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$$

Deberán agregar dos figuras para cada caso, como se muestran. Las figuras no deben ser idénticas a las anteriores, es parte de su práctica investigar como generarlas.





Nota: No olviden anexar el código en formato .r, poner el número de alumno en Moodle, y si desean poner su nombre que sea empezando por el apellido paterno pues así esta en la lista.