Práctica 10: Multinomiales e Independencia

PASE

Octubre 2021

1 Multinomial

En [1] se puede encontrar la siguiente definición:

Consideremos un experimento E, su espacio muestra S y una partición de S en k eventos mutuamente excluyentes $A_l, \ldots, A_k$. Considérese n repeticiones independientes del experimento E. Sea $p_i = \mathbb{P}(A_i)$ y supóngase que p_i permanece constante durante todas las repeticiones. Desde luego tenemos $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Definamos las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_k$, como sigue: para $i = 1, \ldots, k$, sea X_i el número de veces que A_i ocurre entre las n repeticiones de ϵ.

Las X_i no son variables aleatorias independientes, puesto que $\sum_{i=1}^{k} X_i = n$. Entonces, tan pronto como el valor de cualquiera de las $(k-1)$ variables aleatorias es conocido, se restringe el valor de las otras.

Si X_i, $i = 2, ..., k$ están definidas como antes, tenemos que si $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, entonces

$$\mathbb{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!} p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}.$$

Un algoritmo para generar X con distribución multinomial y parámetros $n, p_1, \ldots, p_k$ es el siguiente:

1. Genera variables aleatorias i.i.d. Y_j con función de probabilidad de masa $\mathbb{P}(Y_j = i) = p_i$ con $i = 1, 2, \ldots, k$.

2. Definimos $X_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{(Y_j = i)}$

2 Ejercicios

1. Utilice el código de la práctica 9 o la función *rnorm()* para generar parejas (X, Y) de variables independientes con distribución $\mathbf{N}(0, 1)$.

   - Grafica 1000 puntos (X, Y) y verifica cualitativamente que X y Y son independientes.
   - Define $Z = X - Y$, $W = X + Y$ y grafica mil puntos (Z, W).
   - Comenta lo que observas en ambos casos.

2. Realiza una representación gráfica de (X_1, X_2, X_3) de una Multinomial(n, p_1, p_2, p_3) con $p_1, p_2 = \frac{1}{6}$ y $p_3 = \frac{2}{3}$ y distintos valores para n.

3. Simula 1000 copias de (X_1, X_2, X_3) y grafica sólo los puntos (X_1, X_2).

   - ¿Qué tipo de distribución observas?
   - ¿Qué tipo de distribución observas cuando n crece?

[1] Meyer, P & Pardo,C. (1973). *Probabilidad y Aplicaciones Estadisticas.* Estados Unidos: ADDISON-WESLEY IBEROAMERICANA.

Nota: No olviden poner el número de alumno en Moodle, y si desean poner su nombre que sea empezando por el apellido paterno pues así esta en la lista.