Ley de los grandres números

A continuación dos versiones de la ley de los grandes números:

1 Versión débil

Teorema.(Ley débil de los grandes números)
Sean X_1,X_2,... variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) con media μ. Entonces

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow{p} \mu$$

2 Versión fuerte

Teorema.(Ley fuerte de los grandes números)
Sean X_1,X_2,... variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (iid) con media μ. Entonces

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i \xrightarrow{c.s} \mu$$

Observación: La *ley débil* establece la convergencia en probabilidad y la *ley fuerte* dice que la convergencia es casi segura (c.s). La ley fuerte implica la ley débil.

Ejercicios

Tiempo de Convergencia

Considera las variables $Bernoulli(p)$ y $Pareto(a,b)$. Realiza con parámetros de tu elección y con $N = 100$, 1000 , una gráfica de los promedios parciales; agrega también una línea punteada en $y = \mu$.

Para una $Bernoulli(0.5)$, ¿Con qué n, el error absoluto es menor $1e - 5$? Para una $Pareto(1.98,6)$ ¿Con qué n, el error absoluto es menor $1e - 3$?

¿A qué crees que se debe que la Pareto tarda más en converger?

Estimación

Se tiran 7 dados idénticos, justos e independientes.
Sea X la suma de los dados.
Usen la Ley de los Grandes Números para estimar $P(X = k)$, $7 \leq X \leq 42$
¿Cómo aseguras que tu aproximación es buena?

Ley de los grandes números

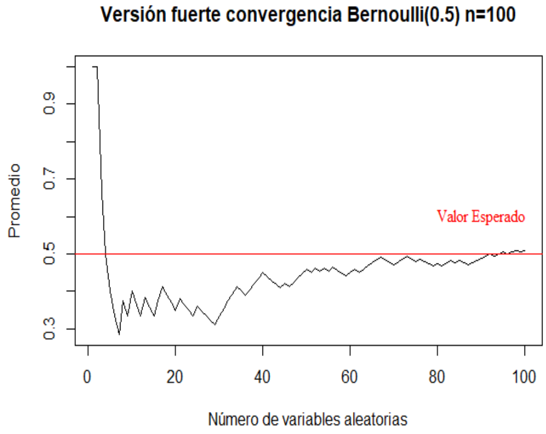
Para conocer la convergencia de los promedios parciales de nuestras distribuciones, utilizaremos la Ley fuerte de los grandes números, la cual estará programada de esta forma:

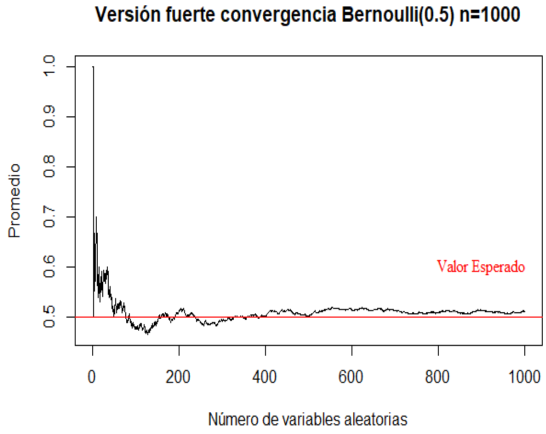
```
VarFuerte=function(n){
  parciales1=c()
  parciales2=c()
  promedio1=0
  promedio2=0
  for(i in 1:n){
    promedio1=(promedio1*(i-1)+rpareto(1,a,b))/i
    parciales1[i]=promedio1
    promedio2=(promedio2*(i-1)+rbern(1,0.5))/i
    parciales2[i]=promedio2

  }
  return(c(parciales1,parciales2))
}
```

Esta nos dice que generaremos n variables aleatorias que serán las mismas para cada iteración, es decir, seguirá siendo el mismo espacio muestral, para mejorar la complejidad, generaremos una variable aleatoria y obtendremos el promedio para parcial y para siguiente iteración generaremos nuevamente solo una variable aleatoria y sumaremos la que teniamos anteriormente al multiplicarla con el 'promedio' regresamos a su valor original y asi sucesivamente iremos iremos acumulando nuestras variables aleatorias y sacararemos sus promedios parciales para cada iteración.

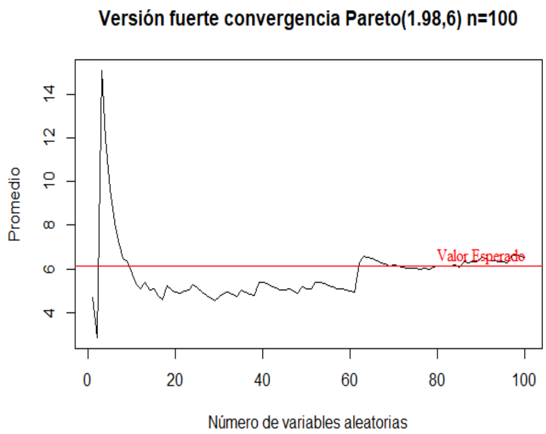
Para la obtención de la gráfica simplemente usaremos la función plot y dibujaremos una linea que indicara el valor real de media de la distribución, generando el código correspondiente:

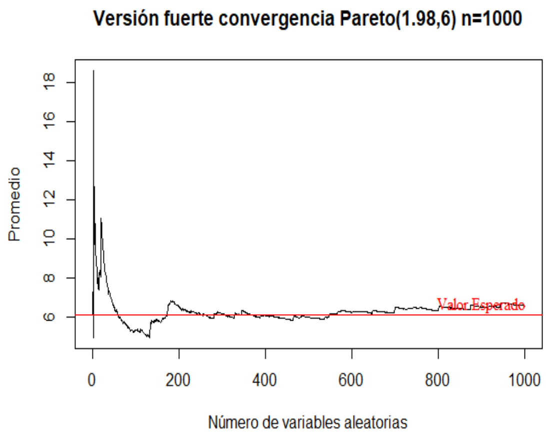
```
n=100
plot(seq(1,n, by=1),tail(VarFuerte(n),n), type="l",
    main="Versin fuerte convergencia Bernoulli(0.5) n=100",
    xlab="Nmero de variables aleatorias",ylab="Promedio")
abline(0.5,0,col="red")
text(n-n/10, 0.5+0.1, "Valor Esperado",
     family = "serif", col="red", cex=1)
```





Podemos observar las fluctuaciones para $N = 100$ más marcadas al principio de nuestro gráfica, pero conforme se van aumentando el número de variables correspondientes, el valor de la media muestral se va estableciendo, hasta pasar por encima del valor esperado. Ahora para $N = 1000$ esa fluctuación que iba subiendo en 100 va intercalándose bajando y subiendo. hasta que vemos que se mantiene por arriba del valor esperado.





Para la distribución de pareto, vemos que la convergencia al inicio es muy alejada haciendo fluctuaciones más grandes, pero conforme vamos aumento el numero de variables aleatorias igual va convergiendo como la binomial, es posible que la pareto tarde más en converger debido a como estruida su distribucion, ya que dependiendo de sus parámetros tiene una silueta muy característica, viéndose como logaritmo o una hiperbola rotada cuarenta y cinco grados a la izquierda. Y al igual que la Bernoulli también converge por encima del valor esperado.

Vemos que al graficar el error absoluto del valor esperado de nuestras variables aleatorias va disminuyendose conforme tenemos más variables, al inicia el error absoluto es enorme las fluctuaciones van restableciendose poco a poco.

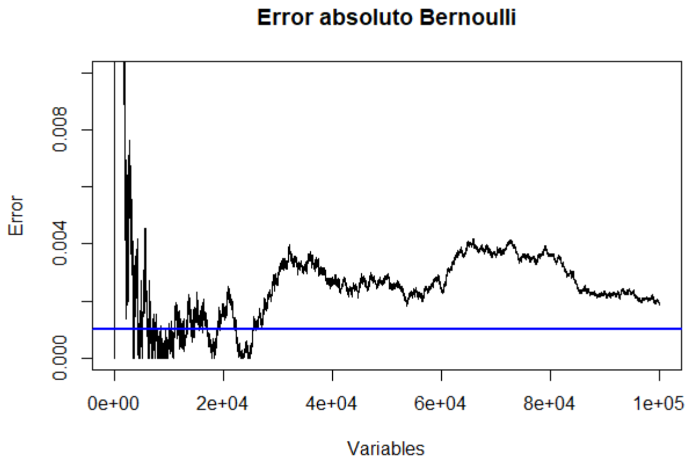


Fig. 1 – *Error absoluto para Bernoulli*

Ahora podemos observar que sucede todo lo contrario para nuestra distribución de Pareto, los errores tienen una fluctuación acercándose a un error mínimo como también un error mayor y asi sucesivamente. Vemos que suele estar por debajo de nuestro error menor de 0.003, pero también va incrementadose y volviendo a regresar a nuestro margen de error.

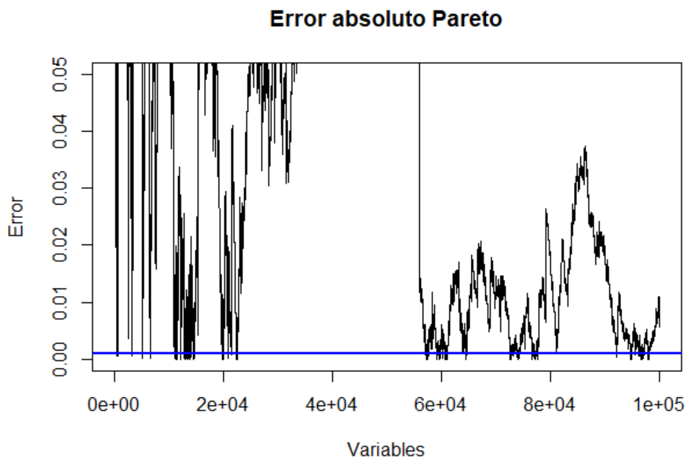


Fig. 2 – *Error absoluto para Pareto*

Podemos concluir que gracias a la ley de los grandes números no será necesario conocer la media la función de densidad, dado que avece será difícil conocerla, pero generando varias variables aleatorias y sacando sus promedios parciales podremos llegar a una aproximación del valor esperado, acercándonos más a su valor real.