Módulo 5

Cadenas de Markov

* Para estudiar 'posibles' escenarios que tengan ciertas probabili. se usan Cadenas de Markov (procesos más generales).

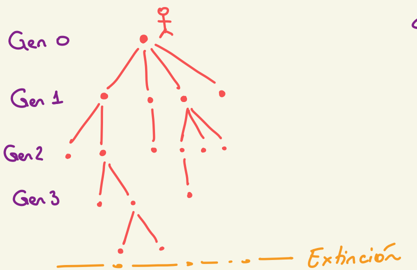
Ramificación (Introducción)

Árboles de Galton-Watson-Bienaymé

Dos contextos principales: Reacciones en cadena (física)

Poblaciones por generación. Siglo XVIII

Población asexual



Existe un momento/generación en que el # descendientes es nulo

Supuestos:

- Cada individuo tiene un número de hijos aleatorio, independiente del resto de la población y con distribución idéntica.

  Offspring distribution: X

- Los hijos nacen al tiempo/generación siguiente.

El proceso de Galton-Watson está definido por X y $(X_n)_{n\geq 0}$

donde $X_0 = 1$, X_1 tiene distribución X,

$$X_2 = \sum_{i=1}^{X_1} X_i^{(2)} \quad \text{donde } (X_i^{(2)})_{i\geq 1} \text{ son iid } \sim X$$

en general $n \in \mathbb{N}$
$$X_{n+1} = \sum_{i}^{X_n} X_i^{(n+1)} \quad \text{donde } (X_i^{(n+1)})_{i\geq 1} \text{ son iid } \sim X$$

La extinción ocurre en $\{\exists n \in \mathbb{N} : X_n = 0\}$ = Extinción

Este es el primer ejemplo de cadena de Markov

$$(X_n)_{n\geq 0}$$

los valores de X_n son discretos

el tiempo del proceso es discreto.

Propiedad de Markov:

Para todo $n \geq 1$, $\underbrace{k, k_{n-1}, \dots k_1, k_0 \in \{0,1,2,\dots\}}_{E = \text{estados posibles}}$ tenemos:

$$\mathbb{P}(X_n = k \mid X_{n-1} = k_{n-1}, X_{n-2} = k_{n-2}, \dots X_1 = k_1, X_0 = k_0)$$
$$= \mathbb{P}(X_n = k \mid X_{n-1} = k_{n-1})$$

Una vez conocido el valor de X_{n-1}, el resto del pasado no determina a X_n

Análisis del primer paso: esta herramienta se usa en varios ejemplos sencillos para encontra recursiones:

$$\mathbb{P}(X_n \in A) = \sum_{k\in E} \mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_n \in A \mid X_1 = k)$$

Aplicándolo al problema de extinción.

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X_1 = k)\, \mathbb{P}(X_{n-1} = 0)^k$$

Aplicándolo al problema de extinción.

$$s_n = \mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X_1 = k)\, \mathbb{P}(X_{n-1} = 0)^k$$

Reconocemos la función generadora de momentos de X

$$G(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k\in E} s^k\, \mathbb{P}(X = k)$$

Observaciones: $X_n = 0 \Rightarrow X_{n+1} = 0 \Rightarrow X_{n+2} = 0 \dots$

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) \leq \mathbb{P}(X_2 = 0) \leq \mathbb{P}(X_3 = 0) \leq \dots \leq 1$$

Con la notación de arriba $(s_n)_{n\geq 1}$ es no-decreciente y acotada

y además $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \mathbb{P}(\text{Extinción})$ $s = \lim s_n$

$$\text{Extinción} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = 0\} \qquad + \quad \{X_n = 0\} \subseteq \{X_{n+1} = 0\}$$

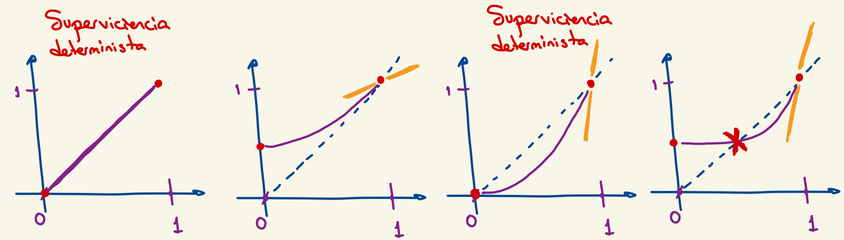
Recuerden que queremos encontrar el valor de s.

Tenemos que $s_n = G(s_{n-1})$, G es continua

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} G(s_{n-1}) = G(s) \longleftarrow s \text{ es punto fijo!}$$

Como dibujar $G(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\, \mathbb{P}(X = k)$ $G(1) = 1$, $G(0) = \mathbb{P}(X = 0)$

$$G'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, t^{k-1}\, \mathbb{P}(X = k) \qquad G'(1) = \mathbb{E}[X] = \mu$$



$\mathbb{P}(X=0)=0$, $\mu = 1$ | $\mathbb{P}(X=1)<1$, $\mu \leq 1$ | $\mathbb{P}(X=0)=0$, $\mu > 1$ | $\mathbb{P}(X=0)>0$, $\mu > 1$

Sentido práctico.

Teorema: Si X es la distribución de hijos de un proceso GW y $s = \mathbb{P}(\text{Extinción})$ entonces:

o) $X \equiv 1$ entonces $s = 0$

i) $\mathbb{E}[X] \leq 1$, $X \not\equiv 1$ entonces $s = 1$

ii) $\mathbb{P}(X=0) = 0$, $\mathbb{E}[X] > 1$ $s = 0$

iii) $\mathbb{P}(X=0) < 0$, $\mathbb{E}[X] > 1$ $s \in (0,1)$

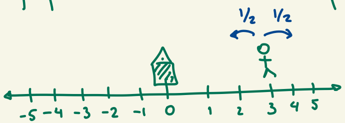
En todos los casos s es el primer punto fijo de $G(s)$ porque G es creciente y para cualquier punto fijo $p \in [0,1]$:

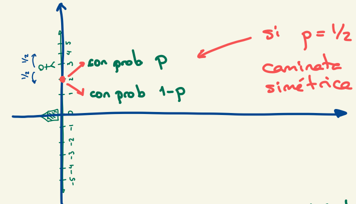
$$s_0 = \mathbb{P}(X_0 = 0) = 0 \leq p \Rightarrow G(s_0) \leq G(p) = p$$

$$\text{inducción} \Rightarrow s_n = G(s_{n-1}) \leq G(p) = p \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n \leq p$$

Caminatas Aleatorias y Problema de la Ruina.

Ejemplo clásico es una persona nada/poco orientada





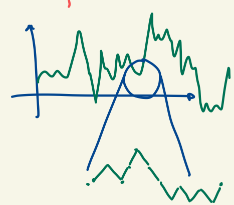
Nuestro proceso aleatorio se denota $(X_n)_{n\geq 0}$ y X_n corresponde a la ubicación de una partícula al tiempo n.

* Todas las cadenas de Markov son homogéneas en el tiempo

$$\mathbb{P}(X_n = k \mid X_{n-1} = j) = P_{jk}$$ ← no depende de n.

Las caminatas también son homogéneas en el espacio.

$$\mathbb{P}(X_n = j+1 \mid X_{n-1} = j) = p$$
$$\mathbb{P}(X_n = j-1 \mid X_{n-1} = j) = 1-p$$



Problema de la Ruina:

Jugadores A y B (Banca), lanzan volados justos y apuestan
Si sale águila gana A (B le da un peso a A), y viceversa,
si sale sol gana B (A le da un peso a B).

Si conocemos los capitales iniciales: Quién pierde? Cuándo pierde?

Vamos a suponer que X_n = capital de A al tiempo n.

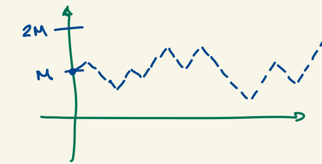
* primero, B no tiene restricciones de dinero.

$$\text{Ruina} = \{\exists\, n\geq 0.\ X_n = 0\}$$

Podemos calcular la prob. de este evento?

Si definimos:

$$f(k) = \mathbb{P}(\text{Ruina} \mid X_0 = k)$$



$$f(0) = 1$$

$$f(1) = \mathbb{P}(\text{Ruina} \mid X_0 = 1) = \mathbb{P}(\text{Gana A el primer volado})\,\mathbb{P}(\text{Ruina} \mid X_1 = 2)$$
$$\mathbb{P}(\text{Gana B el primer volado})\,\mathbb{P}(\text{Ruina} \mid X_1 = 0)$$
$$= \tfrac{1}{2} f(2) + \tfrac{1}{2} f(0)$$

Generalizando; para $k \geq 1$

$$f(k) = \tfrac{1}{2} f(k+1) + \tfrac{1}{2} f(k-1) \quad \text{equiv.} \quad f(k+1) = 2f(k) - f(k-1)$$

Si definimos $q = 1 - f(1)$ entonces $f(1) = 1 - q$

$$f(2) = 2f(1) - f(0)$$
$$= f(1) + (f(1) - f(0))$$
$$= 1 - q - q = 1 - 2q$$

$f(2) = 1 - 2q$

En general: $f(k) = 2f(k-1) - f(k-2)$
$$= f(k-1) + (f(k-1) - f(k-2))$$
$$= 1 - (k-1)q - q \Rightarrow$$

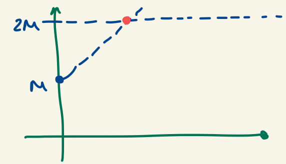
$f(k) = 1 - kq$

* Si es cierto lo escuchó Pablo: La caminata siempre regresa a cero. De modo que $q = 0$. $\boxed{\text{Pero ....}}$

El problema que $\underline{\underline{\text{sí}}}$ podemos trabajar es:

Vamos a suponer que X_n = capital de A al tiempo n.

$\boxed{y}$ que la suma de los capitales de A y B es $2M$



y que el juego se detiene cuando algún jugador se queda sin dinero

$$\text{Ruina} = \{ \exists\, n \geq 0 : X_n = 0 \}$$

Cuando A tiene 2M pesos entonces ya no hay Ruina

$$f(k) = \mathbb{P}(\text{Ruina} \mid X_0 = k) \qquad k \in [0, 2M]$$

El análisis de arriba se repite; $f(0) = 1$.

$$f(k) = \frac{1}{2} f(k+1) + \frac{1}{2} f(k-1) \qquad f(k) = 1 - \frac{k}{2M}$$

pero en el caso: $f(2M) = 0 = 1 - q \cdot 2M$

análisis anterior

$$q = \frac{1}{2M}.$$

En particular: Si dos jugadores A y B comienzan con M pesos y apuestan, y se detienen cuando alguno ya no tiene dinero.

La probabilidad de que A se arruina: $f(M) = 1 - \dfrac{M}{2M} = \dfrac{1}{2}$

Cadenas de Markov – Matriz de Transición

Una cadena de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ es un proceso estocástico en tiempo discreto donde cada X_n tiene soporte discreto.

Que satisface la Propiedad de Markov que nos ayuda a generar X_n en términos de su pasado inmediato.

e.g. $\mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i, X_{n-2} = l) = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$

Consideramos que la cadena $(X_n)_{n\geq 0}$ es homogénea en el tiempo

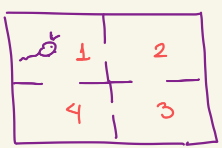
$$\mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = P_{ij}$$

De modo que si el espacio de estados es $S = \{1, 2, 3, \dots k\}$ podemos codificar la dinámica del proceso con la

- matriz de transición $M = (M_{ij})$ $\quad M_{ij} = P_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$
- y el punto de inicio X_0 con una distribución inicial

$$\pi_0 = (\mathbb{P}(X_0 = 1), \mathbb{P}(X_0 = 2), \dots \mathbb{P}(X_0 = k))$$

El ratón en el laberinto



↪ Toma 20 segundo cruzar

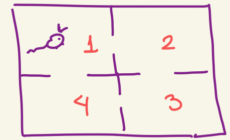
Simulación: Grabamos cada que el ratón se mueve

$X_0 = 1, X_1 = 2, X_3 = 3, X_4 = 4, X_5 = 3,$ ~~$X_6 = 3$~~

Simulación: Grabamos al ratón cada 20 segundos:

$X_0 = 1, X_1 = 2\quad X_2 = 3, X_3 = 3, X_4 = 2, X_5 = 1$

El ratón en el laberinto



Matrices de transición

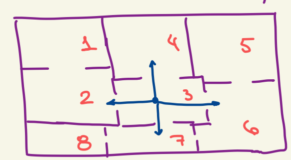
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array}\quad \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Caminata Aleatoria

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array}\quad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Caminata Aleatoria Lenta – digamos $p = 1/2$

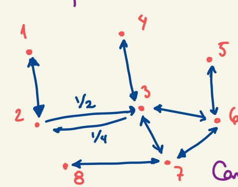
Un laberinto más complicado



caminata aleatoria

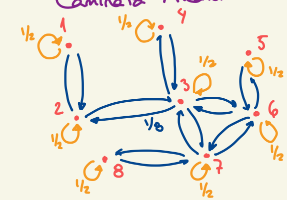
$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} & & & \vdots & & & & \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Otra representación de la dinámica de las cadenas de M.

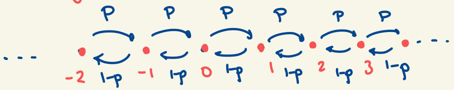


Caminata Aleatoria

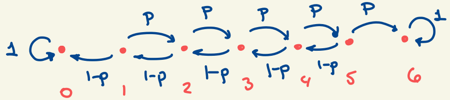
Caminata Aleatoria Lenta.



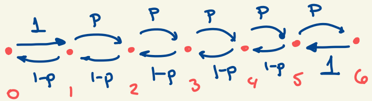
Diagramas del Problema de la Ruina y caminatas generales



no acotado



con estados absorbentes.



con estados reflejantes.

Retomando las matrices de transición (estocásticos).

$M = (M_{ij}) \qquad M_{ij} = p_{ij} = \mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$

$\pi_0 = (\mathbb{P}(X_0 = 1), \mathbb{P}(X_0 = 2), \dots \mathbb{P}(X_0 = k))$

Para calcular la distribución de X_1

$$\mathbb{P}(X_1 = j) = \mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = j \mid X = 2)\mathbb{P}(X_0 = 2)$$
$$\dots + \mathbb{P}(X_1 = j \mid X = k)\mathbb{P}(X_0 = k)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_0 = i)\mathbb{P}(X_1 = j \mid X_0 = i)$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_0 = i)\, p_{ij} = (\underbrace{\pi_0 M}_{\text{vector}})_j$$

$$\underset{\pi_0}{(\text{———})}\ \underset{M}{\left(\Big|\ \Big|\ \cdots\ \Big|\right)} = (*, *, \dots, \underset{j\text{-ésima entrada}}{*}, *)$$

Para calcular la distribución de X_n

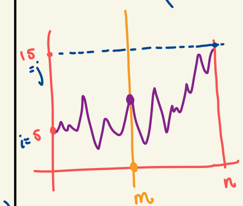
$$\pi_n = (\mathbb{P}(X_n = 1), \dots, \mathbb{P}(X_n = k))$$
$$\pi_n = \pi_0 M^n = \pi_{n-1} M$$

Porque:

$$\mathbb{P}(X_n = j) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(X_{n-1} = i)\underbrace{\mathbb{P}(X_n = j \mid X_{n-1} = i)}_{p_{ij}} = (\pi_{n-1} M)_j$$

Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov para $m < n$

$$(M^n)_{ij} = \sum_{k \in S} (M^m)_{ik} (M^{n-m})_{kj}$$



$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\!\!\begin{array}{c} j \\ (M^n) \end{array} = (M^m)(M^{n-m})$$

$(M^n)_{ij}$ es igual a la probabilidad de pasar del estado i al estado j en exactamente n pasos

* En una matriz de adjacencia A : $(A^n)_{ij}$ = # forma de ir de i a j en n pasos.

Distribución Estacionaria:

Es cualquier π que cumpla $\pi M = \pi$

Si $\pi_0 = \pi$
$\pi_1 = \pi M = \pi$
$\pi_2 = \pi M = \pi$
$\vdots$

Un ejemplo asociado a Sistemas Dinámicos y con interpretación de la distribución estacionaria.

Sistema Piloto de Renta de Autos con tres sedes:

$\underset{1}{\text{CDMX}}$, $\underset{2}{\text{MONTERREY}}$, $\underset{3}{\text{GUADALAJARA}}$

Los autos se puede tomar en una ciudad y devolver en otra.

Queremos distribuir nuestra flota de 750 autos entre las sedes de modo que dificilmente se agote la disponibilidad en cualquier sede.

π_0

Ya se hicieron encuestas de movilidad

$i,j = 1,2,3$ $\quad P_{ij} = \mathbb{P}(\text{Devolver en CD } j \mid \text{Rentamos en CD } i)$.

$$M = \begin{bmatrix} .6 & .2 & .2 \\ .3 & .5 & .2 \\ .2 & .1 & .7 \end{bmatrix} \qquad \pi_0 M^{30} = \pi_0 \begin{bmatrix} .3714 & .2286 & .4 \\ .3714 & .2286 & .4 \\ .3714 & .2286 & .4 \end{bmatrix}$$

* $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots$ deberían ser vectores sin entradas cero.

Si $\pi_2 = (0, 1/2, 1/2)$, $\pi_3 = (.25, .3, .45)$

- La mejor propuesta para nuestra flota es utilizar una distribución estacionaria: por ejemplo:

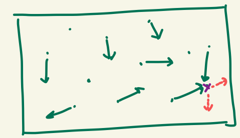
$$\pi = \left(\frac{28}{75}, \frac{17}{75}, \frac{30}{75}\right) \qquad \pi M = \left(\frac{279}{750}, \frac{171}{750}, \frac{300}{750}\right)$$

Es decir, la distribución de un auto específico se mantiene a lo largo del tiempo.

Urnas de Ehrenfest:

Contexto Físico:

1. Ley de Termodinámica: Conservación de la energía
2. Ley de Termodinámica: La entropía no puede disminuir en un sistema cerrado.



Gas

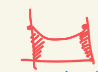
Física Estadística:

Local ← Trata a la colisiones como aleatorias

Global ← y los 'promedios' se traducen a temperatura.

La entropía para variables discretas X con soporte S

$$\text{Entropía}(X) = \sum_{s \in S} \mathbb{P}(X=s) \log \mathbb{P}(X=s)$$



Beta(1/2, 1/2) tiene inform. de que extremos son más probable.

- La variable con mayor entropía es una uniforme.
- La variable con menor entropía es una cte.

El modelo de urna de Ehrenfest con N partículas....