

# Práctica 1: Matriz de Hilbert y regla de Simpson

PASE

Agosto 2021

## 1 Matriz de Hilbert

En álgebra lineal, una matriz de Hilbert, introducida por Hilbert (1894), es una matriz cuadrada cuyas entradas son:

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad i, j = 1 \dots n \quad (1)$$

Además, su inversa se puede expresar de forma cerrada como:

$$H_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j}(i+j-1) \binom{n+i-1}{n-j} \binom{n+j-1}{n-i} \binom{i+j-2}{i-1}^2, \quad i, j = 1 \dots n \quad (2)$$

Pero no lo demostraremos.

### 1.1 Ejercicio

Para esta práctica deberán hacer un código que devuelva la matriz de Hilbert para cualquier  $n$ , por ejemplo para  $n = 5$ .

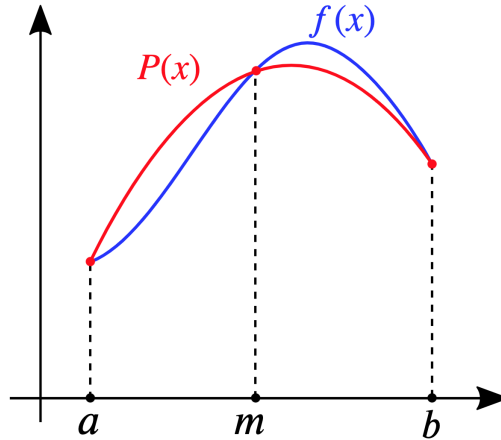
$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}.$$

Y encontrar la  $n$  tal que, no se puede hallar numéricamente la inversa de  $H$ . Finalmente explicar por qué no se puede.

## 2 Regla de Simpson

Hay situaciones en las que es imposible encontrar el valor exacto de una integral definida, en tal caso será necesario usar algún método numérico, para hayar una aproximación.

La regla de Simpson es un método que a partir de polinomios de grado dos, aproxima el área bajo la curva.



Si el intervalo  $[a, b]$  se divide en  $n$  subintervalos, y  $n$  es un número par, la regla viene dada por la siguiente expresión:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \left[ f(x_0) + 2 \sum_{i=2,4,6,\dots}^{n-2} f(x_i) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Con  $h = \frac{b-a}{n}$  y  $x_i = a + ih$ .

Si  $|f^{(4)}(x)| \leq K$  para  $a \leq x \leq b$ . Si  $E_s$  es el error relacionado con la regla de Simpson, entonces:

$$|E_s| \leq \frac{K(b-a)^5}{n^4}$$

### 2.1 Ejercicio

Para este ejercicio deberán escribir una función que tenga como *input*:  $f$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $n$  y como *output*: el valor aproximado de  $\int_a^b f(x)dx$  usando la regla de Simpson.

Probar su código con funciones simples como  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = \text{sen}(x)$  y no tan simples como  $f(x) = e^{-x^2}$  o  $f(x) = \sqrt{1+x^3}$ .

**Nota:** El entregable será un script .R. No olviden poner el número de alumno en Moodle, y si desean poner su nombre empezando por el apellido paterno, pues así está en la lista.