Práctica 7: Convergencia de Binomiales

PASE

Septiembre 2021

1 Poisson

Se tiene que si $\lambda > 0$ y $p = \lambda/n$, entonces para todo entero $r \geq 0$ tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^r}{r!}$$

Este conjunto de límites demuestra que si $(X_n)_{n\geq 1}$ es una secuencia de variables aleatorias donde X_n tiene distribución Binomial$(n, \lambda/n)$ entonces $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en distribución a una variable X con distribución Poisson(λ).

2 Normal

Fijamos $p \in (0,1)$ y definimos, para todo entero $n \geq 1$, $X_n =$Binomial(n,p) y

$$Y_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Entonces se tiene que $(Y_n)_{n\geq 1}$ converge en distribución a Y, donde Y es una variable aleatoria con distribución normal estándar.

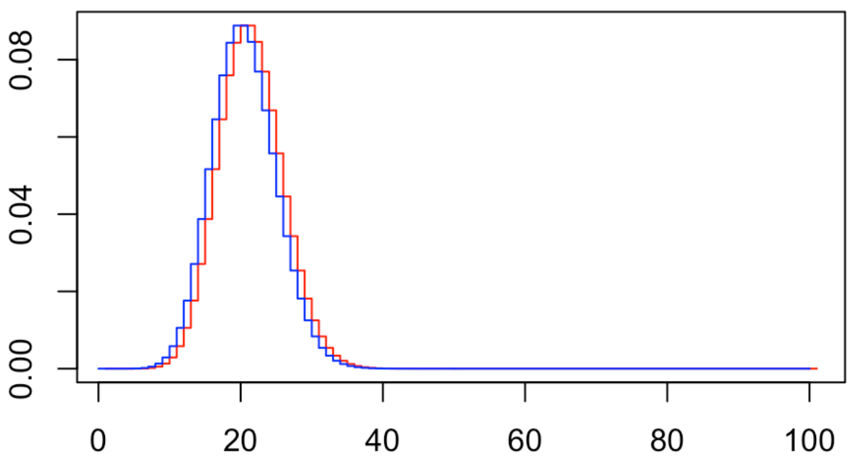

Figure 1: Ejercicio 1

3 Ejercicios

1. Confirmaremos gráficamente que si $\lambda > 0$, $p = \lambda/n$ y n es *muy grande*, entonces para todo entero $r \geq 0$

$$\binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \sim \frac{e^{-np}(np)^r}{r!}$$

- Para $\lambda = 5, 10$ y para tres n distintos, grafiquen ambas funciones (de r) superpuestas. En este ejercicio puedes usar *dbinom()* y *dpois()*. Para estas gráficas se sugiere usar las siguientes funciones.

```
plot(,type = 's',col= 'red')
par(new=TRUE)
lines(,type= 's',col = 'blue')
```

  Con sus correspondientes parámetros, genera algo como la figura 1. Usen colores para distinguir las gráficas.

- ¿Para λ fijo, qué valores de n hacen una buena la aproximación?

- Si X_n =Binomial(n,p) y X =Poisson(λ), calcula numéricamente el siguiente error (justifica tus resultados):

$$\max_{k\geq 0}\{|P(X_n=k)-P(X=k)|\}$$

2. Para el caso de que $p\in(0,1)$ sea fijo y la convergencia (de las variables reescaladas) sea a una variable normal. Compara las funciones de probabilidad y densidad, usando (a) ó (b):

   (a) X_n y $X=N(np,\sqrt{np(1-p)})$

   (b) Y_n y $Y=N(0,1)$

   - Probar con $p=0.1$, 0.6 y 0.85,
   - ¿Para qué valores de n la dirías que ya tienes una buena aproximación?
   - Propón un criterio numérico alternativo al *máx* para medir la velocidad de la convergencia.

Observación: Para calcular la función de probabilidad de Y_n solo se tiene que centrar la gráfica de $P(X_n=k)=P(Y_n=\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}})$

Nota: No olvides poner el número de alumno en Moodle, y si desean poner su nombre que sea empezando por el apellido paterno pues así esta en la lista.