Práctica 14: Cadenas de Markov

PASE

Noviembre 2021

1 Cadena de Ehrenfest

En [1] se encuentra la siguiente definición:

Sean A y B dos urnas dentro de las cuales se encuentran distribuidas un total de N bolas de acuerdo a cierta configuración inicial, por ejemplo, la urna A tiene i bolas y en la urna B hay $N - i$ bolas. En cada unidad de tiempo se escoge una bola al azar y se cambia de urna. Para tal efecto puede considerarse que las bolas se encuentran numeradas y que se escoge un número al azar, se busca la bola con ese número y se cambia de urna.

Sea X_n el número de bolas en la urna A al tiempo n, entonces la colección $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ constituye una cadena de Markov con espacio de estados finito $\{0, 1, \ldots, N\}$. Este modelo fue propuesto por Ehrenfest para describir el intercambio aleatorio de moléculas en dos regiones separadas por una membrana porosa.

2 Ejercicios

En este ejercicio analizamos por medio de la simulación el modelo de la urna de Ehrenfest. Considere a N como el número de bolas totales.

1. Escriba todos los estados de la Cadena de Markov.
2. Escriba la matriz de transición (y explique claramente de dónde viene la expresión).
3. Haga un programa que simule y grafique la trayectoria del proceso: Empieza inicialmente con una distribución inicial π_0, y simula la trayectoria $X_0, X_1, ...X_n$ hasta un tiempo n dado por el usuario.
4. Haga otro programa que simule la trayectoria del proceso hasta un tiempo de paro: Empieza inicialmente con una distribución inicial π_0, y simula la trayectoria $X_0, X_1, ...X_T$ hasta un tiempo aleatorio T, definido como la primera vez que el proceso toma el estado fijo i_0 (el estado i_0 esta dado por el usuario).

5. Usa el algoritmo anteriror para contestar lo siguiente para varios valores de N:

   (a) Dado que el proceso empezó en 0, ¿Cuánto tarda en promedio en llegar al estado $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$?

   (b) Dado que el proceso empezó en 0, ¿Cuánto tarda en promedio en llegar al estado N?

   (c) Dado que el proceso empezó en N, ¿cuánto tarda en promedio en llegar al estado $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$?

   (d) Dado que el proceso empezó en N, ¿Cuánto tarda en promedio en llegar al estado 0?

   (e) ¿Qué observas en los resultados anteriores?

6. Fija un N y, para n muy grande, estima con el primer algoritmo la densidad de probabilidades de la variable aleatoria X_n. Después conjetura una densidad conocida con sus parámetros.

Nota: Para las estimaciones (preguntas 5 y 6) no es necesario que se guarde toda la trayectoria.

En esta práctica pueden utilizar Python o R. No olviden poner el número de alumno en Moodle, y si desean poner su nombre que sea empezando por el apellido paterno pues así esta en la lista.

[1] L.Rincon.(2012).*Introducción a los Procesos Estocásticos.* Las prensas de ciencias, México.