

De manera similar se puede encontrar analíticamente la respuesta analítica para este problema con el caso de  $r$  paraguas, de modo que podemos comprobar la utilidad de la paquetería cuando podamos manejar una cadena de Markov con características más complejas.

**Ejemplo 4.1.4. Cadena de Ehrenfest.** Se tienen dos urnas, entre ambas hay un total de  $N$  bolas. En cada paso se elige una de las bolas al azar y se cambia de urna. Si  $X_n =$  número de bolas en la urna A después de  $n$  ensayos, entonces  $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$  define una cadena de Markov.

La distribución estacionaria de esta cadena es única y proporciona la forma en que se comporta desde el inicio pues la evolución se mantiene desde el principio. Con la función `Ehr.markov` (ver B.3.7) nos ayudará a generar el objeto `markovchain` para  $N$  bolas.

Por otro lado, podemos encontrar la forma en que la frecuencia de los estados en trayectorias simuladas de la cadena pueden aproximar la distribución estacionaria. Generando una cadena con  $N = 4$  compararemos la distribución y la frecuencia de los estados en trayectorias. Dicha comparación se presenta en la Figura 4.1

## 4.2. Simulación de un proceso de Poisson

### 4.2.1. Simulación de un proceso de Poisson homogéneo

Suponga que se quieren generar los primeros  $n$  eventos de un proceso Poisson  $\mathbf{N} = \{N_t\}_{t \geq 0}$  de intensidad  $\lambda > 0$ . Para ello nos apoyaremos del resultado de que el tiempo transcurrido entre dos eventos sucesivos cualesquiera son una sucesión de variables aleatorias independientes exponenciales de parámetro  $\lambda$ . De manera que para generar un proceso Poisson basta con generar esos tiempos de interarribo.

Si generamos  $n$  números aleatorios  $U_1, U_2, \dots, U_n$  y hacemos  $X_i = -\frac{1}{\lambda} \log U_i$ , entonces las  $X_i$  pueden considerarse como los tiempos entre el  $(i-1)$ -ésimo y el  $i$ -ésimo evento de un proceso Poisson. Supongamos que queremos generar la trayectoria de un proceso de Poisson en el intervalo finito  $[0, T]$ , podemos utilizar el siguiente algoritmo. En este algoritmo  $t$  se refiere al tiempo,  $I$  es el número de eventos que han ocurrido al tiempo  $t$  y  $S(I)$  es el tiempo acumulado hasta el último evento.

---

#### Algoritmo 33 : Generación de trayectorias de un proceso de Poisson

---

- 1: Hacer  $t = 0, I = 0$
  - 2: Generar  $U \sim U(0, 1)$
  - 3: Hacer  $t = t - \frac{1}{\lambda} \log U$ . Si  $t > T$ , detenerse
  - 4: En caso contrario, hacer  $I = I + 1$  y  $S(I) = t$
  - 5: Ir al paso 2.
- 

Con el Algoritmo 33 vamos a hacer estimaciones de la forma usual, con la simulación del proceso de Poisson, para el siguiente ejemplo. La implementación del Algoritmo 33 está disponible en la función `PPoisson.S` (ver B.3.8).

**Ejemplo 4.2.1. Reclamaciones de una compañía aseguradora.** Suponga que las reclamaciones es una compañía de seguros ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad diaria  $\lambda = 2$ . Generando trayectorias del proceso de Poisson correspondiente, responderemos la siguientes preguntas.

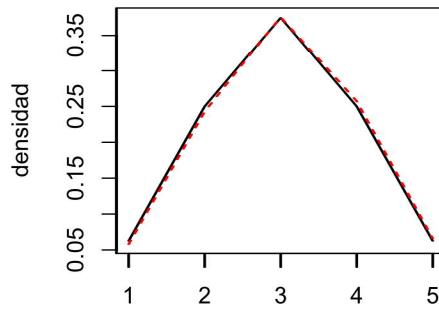
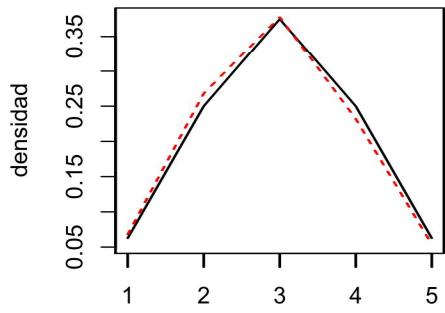
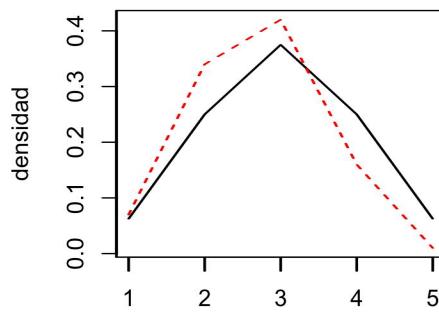
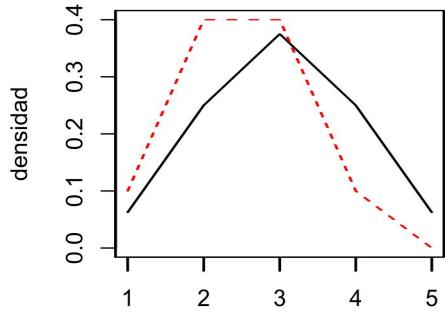


Figura 4.3: Aproximación de la distribución estacionaria para la cadena de Ehrenfest

1. ¿Cuál es la probabilidad que en una semana se presenten 5 reclamaciones?

Mediante el uso de la función `PPoisson.P` (ver B.3.9) damos el estimado numérico por simulaciones presentados en el Cuadro 4.4

|   | Trayectorias | Real     | Estimado |
|---|--------------|----------|----------|
| 1 | 10           | 0.003727 | 0.000000 |
| 2 | 100          | 0.003727 | 0.000000 |
| 3 | 1000         | 0.003727 | 0.005000 |
| 4 | 10000        | 0.003727 | 0.002800 |

Tabla 4.4: Estimados de la probabilidad  $P(N_7=5)$

2. ¿Cuál es el número de reclamaciones esperadas en un mes? La función `PPoisson.E` (ver B.3.10) nos ayuda a responder esta pregunta en el Cuadro 4.5.

|   | Trayectorias | Real | Estimado  |
|---|--------------|------|-----------|
| 1 | 10           | 60   | 59.100000 |
| 2 | 100          | 60   | 59.980000 |
| 3 | 1000         | 60   | 59.936000 |

Tabla 4.5: Estimados de  $E(N_{30})$

3. ¿Cuál es el tiempo esperado hasta la octava reclamación? La función `PPoisson.TE` (ver B.3.11) nos ayuda a responder esta pregunta en el Cuadro 4.6.

|   | Trayectorias | Real | Estimado |
|---|--------------|------|----------|
| 1 | 10           | 4    | 4.296739 |
| 2 | 100          | 4    | 3.991038 |
| 3 | 1000         | 4    | 3.992969 |

Tabla 4.6: Estimados de  $E(S_8)$

Notemos que la metodología de la respuesta 1, con algo de espera, nos puede ayudar a aproximar probabilidades cuya respuesta analítica no es posible calcular cuando  $\lambda t$  o  $x$  son muy grandes como para calcular  $(\lambda t)^x$  o  $x!$ .

**Ejemplo 4.2.2. Reclamaciones por monto de una compañía aseguradora** Suponga que las reclamaciones se han categorizado según el monto de reclamación. Si se tienen 5 diferentes categorías con vector de probabilidades  $p = (1/9, 1/18, 3/18, 1/18, 10/18)$  para cada categoría. Si además suponemos que las reclamaciones se presentan de acuerdo a un proceso de Poisson con intensidad diaria  $\lambda = 3$ . Generamos trayectorias para dar solución a las siguientes cuestiones.

1. ¿Cuál es la probabilidad que en una semana se presenten 5 reclamaciones de la categoría 5? Sabiendo que los procesos son independientes entonces puede encontrarse como

$$\mathbb{P}[N_7^5 = 5] = e^{-\lambda p_5(7)} \frac{\lambda p_5(7)^5}{5!} = e^{-3(10/18)(7)} \frac{(3(10/18)(7))^5}{5!} = 3,8713 \times 10^{-43}$$

Lo cuál nos da un ejemplo de una estimación por simulación de casos favorables altamente costosa en tiempo de implementación pues necesitaríamos más de  $10^{43}$  simulaciones para notar algún resultado.

2. ¿Cuál es el número de reclamaciones esperadas en un mes de cada categoría? También por ser independientes se puede calcular con facilidad, por ejemplo para la categoría 1 sería:

$$\mathbb{E}[N_{30}^1] = \lambda p_1(30) = 3(1/9)(30) = 10$$

Estimamos de esta forma con el parámetro nuevo en el Cuadro 4.7

|   | Trayectorias | Real | Estimado  |
|---|--------------|------|-----------|
| 1 | 10           | 10   | 10.500000 |
| 2 | 100          | 10   | 9.960000  |
| 3 | 1000         | 10   | 9.952000  |

Tabla 4.7: Estimados de  $E(N_{1,30})$

3. ¿Cuál es el tiempo esperado hasta la octava reclamación de la categoría 1? De la misma forma, como proceso independiente, el tiempo de espera del  $N^1$  distribuye como una variable aleatoria  $Gamma(n, \lambda p_1)$ , por lo que el tiempo de esperado es

$$\mathbb{E}[S_8^1] = \frac{8}{\lambda p_1} = \frac{8}{3/9} = 24$$

que podemos estimar en el Cuadro 4.8

|   | Trayectorias | Real | Estimado  |
|---|--------------|------|-----------|
| 1 | 10           | 24   | 21.010444 |
| 2 | 100          | 24   | 24.506805 |
| 3 | 1000         | 24   | 23.959647 |

Tabla 4.8: Estimados de  $E(S_8)$

4. Si en una semana se presentan 3 reclamaciones, ¿cuál es la probabilidad que todas sean del mismo tipo? Para responder esta pregunta necesitamos generar las 5 trayectorias de las categorías simultáneamente, lo cuál se dejará como ejercicio para el lector.

#### 4.2.2. Simulación de Proceso de Poisson no homogéneo

El proceso de conteo extremadamente importante para propósitos de modelación es el proceso Poisson no homogéneo, el cual relaja el supuesto de incrementos estacionarios del proceso Poisson. Esto abre la posibilidad a que la tasa de arribo no necesariamente sea constante, sino que pueda variar en el tiempo, en esta sección se presenta un algoritmo para simular trayectorias de este proceso.

**Proposición 4.1.** Consideremos un proceso de Poisson no homogéneo  $\mathbf{N} = \{N_t\}_{t \geq 0}$  como en la Definición ???. Supongamos que  $\sup_{t > 0} \lambda(t) \leq \lambda$ . Sea  $\mathbf{N}^* = \{N_t^*\}_{t \geq 0}$  un proceso de Poisson con parámetro  $\lambda$  con tiempos de ocurrencia  $\{T_n^*\}_{n \geq 1}$  e independiente de una sucesión de variables aleatorias  $\{U_n\}_{n \geq 1}$  independientes e idénticamente distribuidas uniformes en el intervalo  $(0, 1)$ . Entonces, se puede simular a  $\mathbf{N}$  haciendo

$$N_t = \sum_{n \geq 1} \mathbb{I}_{\{T_n^* \leq t, U_n \leq \lambda(T_n^*)\}}.$$

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

Suponga que deseamos simular una trayectoria de un proceso de Poisson no homogéneo en un intervalo de tiempo  $[0, T]$  con función de intensidad  $\lambda(t)$ . El método que revisaremos a continuación se conoce con el nombre de **muestreo aleatorio**.

Este comienza eligiendo un valor  $\lambda$  el cual es tal que

$$\lambda(t) \leq \lambda \quad \text{para toda } t \leq T.$$

Tal proceso Poisson no homogéneo puede generarse seleccionando aleatoriamente el evento tiempos de un proceso Poisson con tasa  $\lambda$ . Es decir, si un evento de un proceso Poisson con tasa  $\lambda$  que ocurre al tiempo  $t$  es contabilizado con probabilidad  $\lambda(t)/\lambda$ , entonces el proceso de los eventos contabilizados es un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad  $\lambda(t)$  para  $0 \leq t \leq T$ .

Por lo tanto, simulando un proceso Poisson y contabilizando aleatoriamente sus eventos, podemos generar un proceso Poisson no homogéneo. De esta forma podemos describir el algoritmo deseado como sigue.

---

#### Algoritmo 34 : Proceso de Poisson no homogéneo

---

- 1: Hacer  $t = 0, I = 0$
  - 2: Generar un número aleatorio  $U \sim U(0, 1)$
  - 3: Hacer  $t = t - \frac{1}{\lambda} \log U$ . Si  $t > T$ , detenerse
  - 4: En caso contrario, generar otro número aleatorio  $U \sim U(0, 1)$
  - 5: Si  $U \leq \lambda(t)/\lambda$ , hacer  $I = I + 1$  y  $S(I) = t$
  - 6: Regresar al paso 2.
- 

**Nota 4.1.** La justificación de que el Algoritmo 34 genera trayectorias de un proceso de Poisson no homogéneo se sigue de la Proposición 4.1.

La implementación del Algoritmo 34 se presenta en la función `PPoissonNH.S` (ver B.3.12), la cuál puede funcionar con cualquier función de intensidad  $\lambda : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  acotada.

En la Figura 4.4 podremos apreciar la forma en que actúa la función de intensidad con la ocurrencia de saltos cuando tenemos  $\lambda(t) = t/2$  y  $\lambda(t) = 1 + \sin(t)$ .

Un resultado clásico de procesos estocásticos nos dice que, dado un proceso Poisson no homogéneo,  $\{X_t : t \geq 0\}$ , de intensidad  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$  invertible, si definimos al proceso  $\{N_t : t \geq 0\}$  por

$$N_t := X_{\Lambda^{-1}(t)} \quad \forall t \geq 0,$$

ocurre que  $\{N_t : t \geq 0\}$  es un proceso Poisson homogéneo de parámetro 1. Sin embargo, con el propósito de simular un proceso Poisson no homogéneo, utilizaremos el resultado análogo siguiente:

**Teorema 4.2.** Sea  $\{N_t : t \geq 0\}$  un proceso Poisson de parámetro 1 y una función de intensidad  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$ . Si definimos al proceso  $\{X_t : t \geq 0\}$  por

$$X_t := N_{\Lambda(t)} \quad t \geq 0,$$

entonces  $\{X_t : t \geq 0\}$  es un proceso Poisson no homogéneo de intensidad  $\Lambda(t)$ .

La demostración de este resultado puede consultarse en el Teorema 4.3 en el Apéndice.

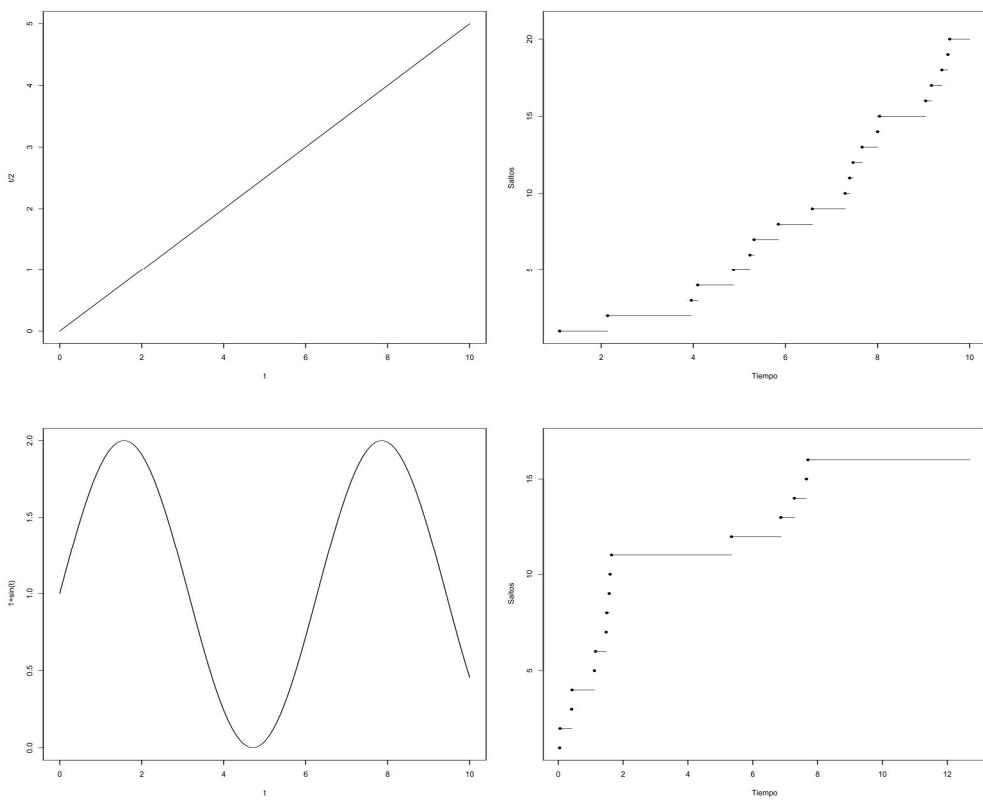


Figura 4.4: Proceso de Poisson no Homogéneo

**Teorema 4.3.** Sea  $\{N_t : t \geq 0\}$  un proceso Poisson de parámetro 1 y una función de intensidad  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$ . Si definimos al proceso  $\{X_t : t \geq 0\}$  por

$$X_t := N_{\Lambda(t)} \quad t \geq 0,$$

entonces  $\{X_t : t \geq 0\}$  es un proceso Poisson no homogéneo de intensidad  $\Lambda(t)$ .

*Demuestração.* 1. Primero notemos  $X_0 = 0$ . Esto ocurre pues  $\Lambda(0) = 0$  y  $N_0 = 0$ , por ser  $\{N_t : t \geq 0\}$  un proceso Poisson.

2. Probaremos que el proceso  $\{X_t : t \geq 0\}$  tiene incrementos independientes. Recordemos que  $\lambda(t) \geq 0$ , lo que implica que  $\Lambda(t)$  es una función no decreciente. Así, si consideramos una colección arbitraria de tiempos  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , ocurre que las evaluaciones de tales tiempos bajo la función  $\Lambda$ , dados por  $0 \leq \Lambda(t_1) \leq \dots \leq \Lambda(t_n)$ , mantienen el orden. Entonces, para una colección arbitraria de tiempos  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ , las variables aleatorias  $\{X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\}_{i=1}^{n-1} = \{N_{\Lambda(t_{i+1})} - N_{\Lambda(t_i)}\}_{i=1}^{n-1}$  son independientes, debido a la propiedad de incrementos independientes del proceso Poisson  $\{N_t : t \geq 0\}$ , evaluado en los tiempos  $0 \leq \Lambda(t_1) \leq \dots \leq \Lambda(t_n)$ .
3. Demostraremos que la variable aleatoria  $X_t - X_s$  tiene distribución  $Poisson(\Lambda(t) - \Lambda(s))$ , a través de su función generadora de momentos  $m_{X_t - X_s}(\theta)$ . Debido al punto anterior ocurre que  $X_t - X_s$  es independiente a  $X_s$  por lo que

$$\begin{aligned} m_{X_t}(\theta) &= \mathbf{E}(e^{\theta X_t}) \\ &= \mathbf{E}(e^{\theta(X_s + X_t - X_s)}) \\ &= \mathbf{E}(e^{\theta X_s}) \mathbf{E}(e^{\theta(X_t - X_s)}) \\ &= m_{X_s}(\theta) m_{X_t - X_s}(\theta). \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} m_{X_t - X_s}(\theta) &= \frac{m_{X_t}(\theta)}{m_{X_s}(\theta)} \\ &= \frac{e^{\Lambda(t)(e^\theta - 1)}}{e^{\Lambda(s)(e^\theta - 1)}} \\ &= e^{(\Lambda(t) - \Lambda(s))(e^\theta - 1)} \end{aligned}$$

Concluimos que  $X_t - X_s$  tiene distribución  $Poisson(\Lambda(t) - \Lambda(s))$ .

□

#### 4.2.3. Simulación de Proceso de Poisson compuesto

En esta sección formalizamos de manera algorítmica la simulación de un proceso de Poisson compuesto  $\mathbf{X} = \{X_t\}_{t \geq 0}$  donde

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

---

**Algoritmo 35 : Proceso de Poisson Compuesto**


---

- 1: Hacer  $t = 0, I = 0$ .
  - 2: Generar  $U \sim U(0, 1)$
  - 3: Hacer  $t = t - \frac{1}{\lambda} \log U$ . Si  $t > T$ , detenerse
  - 4: En caso contrario, generar hacer  $I = I + 1$  ,y  $S(I) = t$
  - 5: Generar  $Y_I \sim F$ .
  - 6: Hacer  $X_T = \sum_{i=1}^I Y_i$
  - 7: Ir al paso 2.
- 

con  $\mathbf{N} = \{N_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Poisson y  $\{Y_i\}_{i \geq 1}$  una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con distribución  $F$ . El siguiente algoritmo describe la manera de simular trayectorias de  $\mathbf{X}$  en el intervalo de tiempo  $[0, T]$ .

La función `PPoICE.S` (ver B.3.13) ejemplifica el caso en que las saltos siguen una distribución exponencial. Con lo anterior podemos también implementar la simulación del modelo de Cramér-Lundberg, con el que es posible obtener trayectorias del capital de una compañía de seguros a través del tiempo para estimar resultados de interés, como la probabilidad de ruina o tiempo esperado de ruina, como se muestra en la Figura 4.2.3 para el caso de arribos  $exp(.4)$  y saltos  $exp(.8)$  con un capital inicial de 10 unidades.

#### 4.2.4. Simulación de Proceso de Poisson Espacial

En esta sección introduciremos un modelo para la distribución de puntos en el espacio bajo ciertas heterogeneidades, mejor conocido como Poisson Espacial.

Algunos conceptos previos se pueden consultar en A.3.5.

**Proposición 4.2.** *Un proceso Poisson espacial  $X$  con medida media  $\mu$  satisface que*

1. *Para cada  $S$ , ocurre que  $X(S) \sim Poisson(\mu(S))$ .*
2. *Cuando  $S_1, \dots, S_r$  son conjuntos disjuntos, las variables aleatorias  $\{X(S_i)\}_{i=1}^r$  son independientes.*

*Demostración.* Ver A.18. □

**Ejemplo 4.2.3.** *Tomemos el caso particular en que  $\lambda(t) \equiv \lambda > 0$ . En este caso*

$$\mu(S) = \int_S \lambda dt = \lambda \int_S dt = \lambda |S|,$$

*para todo  $S$  integrable; donde  $|S|$  denota al  $n$ -volumen del conjunto  $|S|$  (en el caso en que  $n = 1$ , el  $n$ -volumen es la longitud, para  $n = 2$  el área, para  $n = 3$  el volumen usual). Al proceso Poisson que tiene por medida media  $\mu(S) = \lambda |S|$  se le conoce como proceso Poisson espacial homogéneo. El caso  $n = 1$  corresponde al proceso Poisson homogéneo usual (aunque definido en toda la recta real). La Ecuación (A.2), para una colección de intervalos disjuntos  $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^r$ , en este último caso se transforma en*

$$\mathbb{P}(X(a_1, b_1] = k_1, \dots, X(a_r, b_r] = k_r) = \prod_{i=1}^r \frac{[\lambda(b_i - a_i)]^{k_i} e^{-\lambda(b_i - a_i)}}{k_i!}.$$

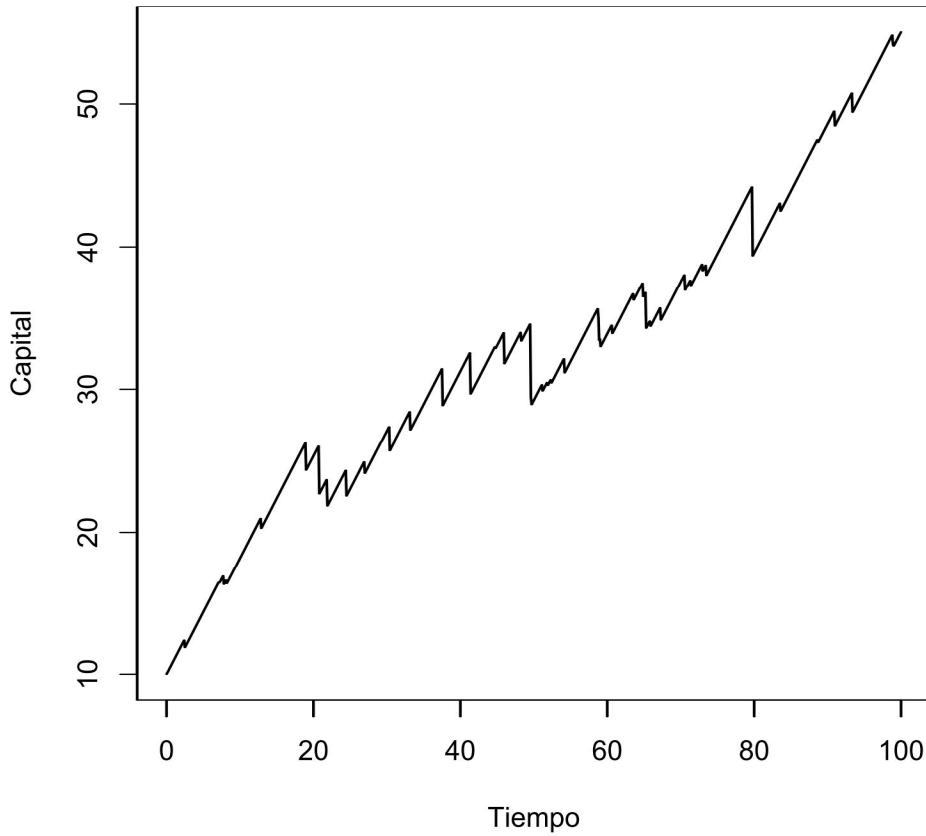


Figura 4.5: Modelo de Cramer-Lundberg

**Ejemplo 4.2.4.** Consideremos una función  $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  no decreciente y derivable, con función derivada  $\lambda$ . Debido a que  $\Lambda$  es no decreciente,  $\lambda$  es no negativa. Definamos a  $\mu$  a través de  $\lambda$ , por medio de la Ecuación A.1. Entonces el proceso Poisson espacial  $X$ , definido en la recta real, coincide con la definición de un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad  $\Lambda$ . La Ecuación (A.2) toma la forma aquí:

$$\mathbb{P}(X(a_1, b_1] = k_1, \dots, X(a_r, b_r] = k_r) = \prod_{i=1}^r \frac{[\Lambda(b_i) - \Lambda(a_i)]^{k_i} e^{-(\Lambda(b_i) - \Lambda(a_i))}}{k_i},$$

para intervalos disjuntos.

Tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 4.3.** Sea  $X$  un proceso de Poisson espacial en  $\mathbb{R}^n$  con medida media  $\mu$ . Sea  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto integrable tal que  $\mu(S) < \infty$ . Condicionado al evento  $\{X(S) = n\}$ , para todo  $A_1, \dots, A_n \subseteq S$  disjuntos e integrables ocurre que

$$\mathbb{P}(X(A_1) = n_1, \dots, X(A_k) = n_k | X(S) = n) = \frac{n}{n_0! n_1! \dots n_k!} p(A_0)^{n_0} p(A_1)^{n_1} \dots p(A_k)^{n_k},$$

para todas los valores  $\{n_1, \dots, n_k\}$  tales que  $\sum_{i=1}^k kn_i = n$ . Aquí  $p$  es la función de conjuntos (subconjuntos de  $S$ ) definida por  $p(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(S)}$ , el valor  $n_0 := n - \sum_{i=1}^k n_i$  y  $A_0 := S \setminus \left( \bigcup_{i=1}^k A_i \right)$ . En otras palabras, condicionado al evento  $\{X(S) = n\}$ , el vector  $(X(A_0), \dots, X(A_r))$  distribuye  $Multinomial(n, r, p(A_0), \dots, p(A_r))$ .

*Demostración.* Ver A.19. □

Una observación importante es que en el caso en que  $\mu(\cdot) = |\cdot|$ , la Proposición A.19 nos dice que  $(X(A_0), \dots, X(A_r))$  tiene distribución  $Multinomial\left(n, r, \frac{|A_0|}{|S|}, \dots, \frac{|A_r|}{|S|}\right)$ . Esto implica que los  $n$  puntos (a los cuáles estamos condicionando al proceso  $X$  a tener en el conjunto  $S$ ) están distribuidos de forma independiente y uniformemente sobre el conjunto  $S$ . Note como esto generaliza una propiedad similar para el proceso Poisson homogéneo en  $[0, \infty)$ .

La observación anterior nos permite simular con facilidad a un proceso Poisson homogéneo en  $\mathbb{R}$  con tasa  $\lambda$  en un subconjunto  $S$ . El algoritmo es el siguiente.

---

#### Algoritmo 36 : Proceso de Poisson alternativo

---

- 1: Simular una variable aleatoria  $N$  con distribución  $Poisson(\lambda|S)$ .
  - 2: Dado  $N = n$ , simular  $n$  variables aleatorias independientes uniformes en  $S$ .
  - 3: Devolver las posiciones de las  $n$  variables aleatorias generadas.
- 

Note que en el penúltimo paso, para simular una variable aleatoria uniforme en un conjunto integrable y acotado  $S$  basta simular variables aleatorias en una caja  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  que contenga a  $S$  y utilizar el método de aceptación-rechazo para asegurarnos que tal punto pertenece a  $S$ .

Habiendo implementado el algoritmo anterior, podemos generalizar el método propuesto para simular un Proceso Poisson no homogéneo en  $[0, \infty)$  para simular un proceso Poisson espacial con tasa  $\lambda(t)$ . Supondremos que la tasa  $\lambda(t)$  es acotada en  $S$ , es decir, existe  $\lambda^*$  tal que  $\lambda(t) \leq \lambda^*$  para todo  $t$  en  $S$ .

---

#### Algoritmo 37 : Proceso de Poisson espacial

---

- 1: Simular una variable aleatoria  $N$  con distribución  $Poisson(\lambda^*|S|)$ .
  - 2: Dado  $N = n$ , simular  $n$  variables aleatorias independientes uniformes en  $S$ , denotadas por  $\{X_1, \dots, X_n\}$ .
  - 3: Simular  $\{U_1, \dots, U_n\}$  variables aleatorias uniformes en  $(0, 1)$  independientes.
  - 4: Para cada  $i$ , conservar al punto  $X_i$  cuando ocurra que  $U_i \leq \frac{\lambda(X_i)}{\lambda^*}$ .
  - 5: Devolver los puntos que fueron conservados.
- 

La prueba de que el algoritmo anterior funciona es análoga a la prueba de que el algoritmo para Proceso Poisson no homogéneo en  $[0, \infty)$  funciona.

Para ilustrar el algoritmo del Proceso Poisson Espacial, se deja como ejercicio al lector 19

### 4.3. Simulación del Proceso de Saltos de Markov.

La característica crucial para la simulación de un Proceso de Saltos de Markov es la independencia de los tiempos de estancia, cuya distribución es exponencial con parámetros correspondientes a la tasa de inten-