Плотность и дифференциалы

Составители: Александр Югай, Егор Фадеев, Анна Казачкова, Александр Ганибаев
Группа: БЭК181
15 июня 2020 г.

Задача 1

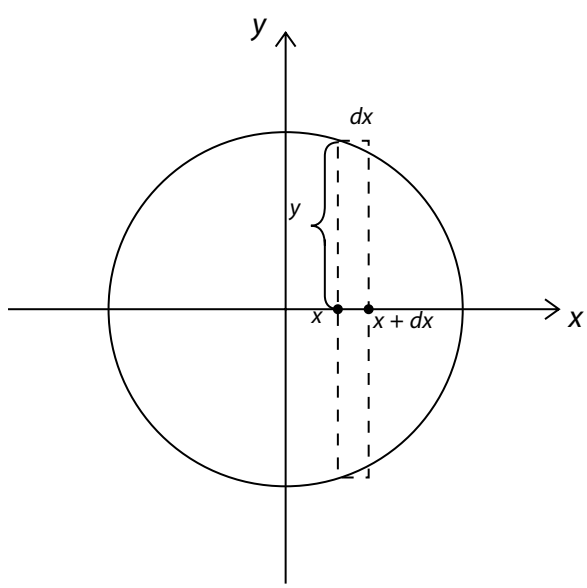
Точки равномерно распределены на множестве:

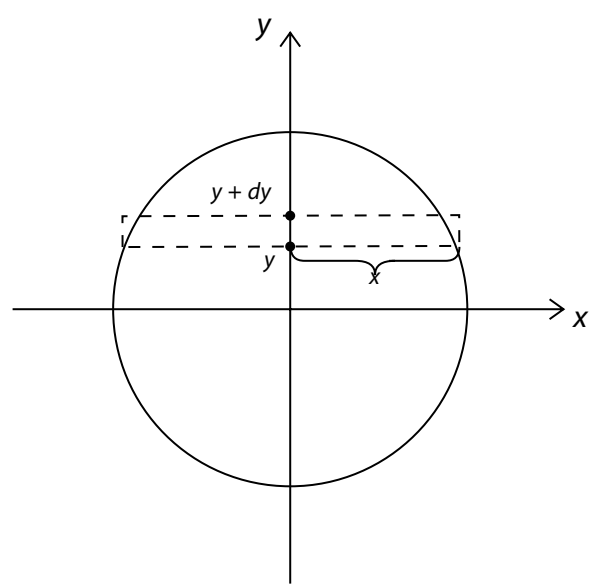
$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le R^2\}$$

Найти функции плотности для абсциссы $f_X(x)$ и ординаты $f_Y(y)$ точки.

Решение

Аппроксимируем вероятность попадания X в интервал $[x, x+dx]$ отношением площади прямоугольника со сторонами $2y$ и dx и площади всего круга S.





$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad S = \pi R^2 \tag{1}$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \tag{2}$$

$$P(X \in [x, x+dx]) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2} dx + o(dx) \tag{3}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2}, & x \in [-R, R] \\ 0, & x \notin [-R, R] \end{cases}$$

Для ординаты функция плотности находится аналогично.

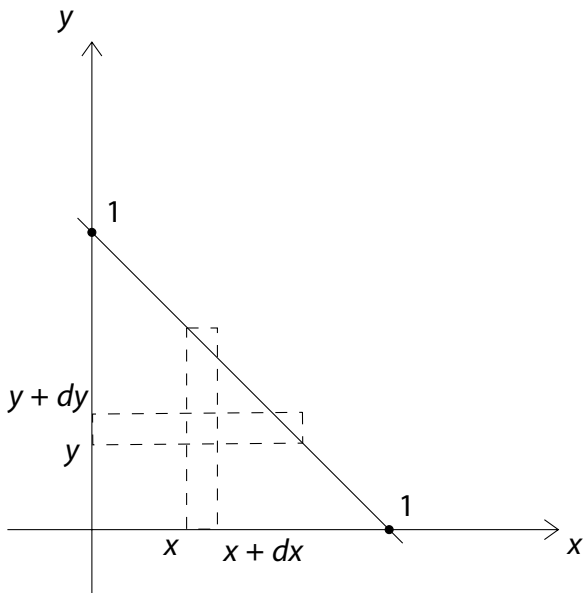
$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2}, & y \in [-R, R] \\ 0, & y \notin [-R, R] \end{cases}$$

Задача 2

Точки равномерно распределены на области, ограниченной прямыми $y = 1 - x$, $x = 0$, $y = 0$. Найти функции плотности для абсциссы $f_X(x)$ и ординаты $f_Y(y)$ точки.

Решение

Аппроксимируем вероятность попадания X в интервал $[x, x+dx]$ отношением площади прямоугольника со сторонами y и dx и площади всего треугольника S.



$$y = 1 - x \tag{4}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \tag{5}$$

$$P(X \in [x, x + dx]) = \frac{1 - x}{1/2} dx + o(dx) = 2(1 - x)dx + o(dx)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} 2(1 - x), & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

Для ординаты функция плотности находится аналогично.

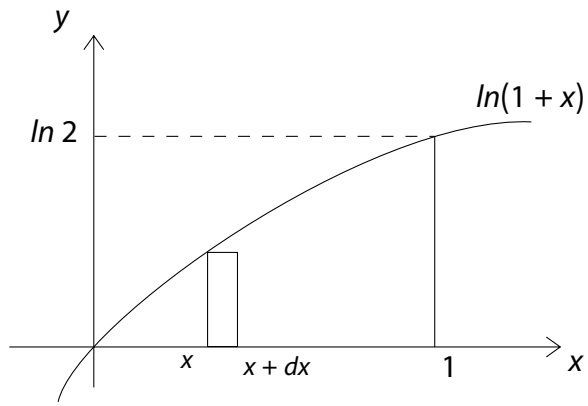
$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1 - y), & y \in [0, 1] \\ 0, & y \notin [0, 1] \end{cases}$$

Задача 3

Точки равномерно распределены на области, ограниченной кривыми $\ln(x+1)$, $x = 1$, $y = 0$. Найти функции плотности для абсциссы $f_X(x)$ и ординаты $f_Y(y)$ точки.

Решение

Аппроксимируем вероятность попадания X в интервал $[x, x+dx]$ отношением площади прямоугольника со сторонами y и dx и площади всей фигуры S.



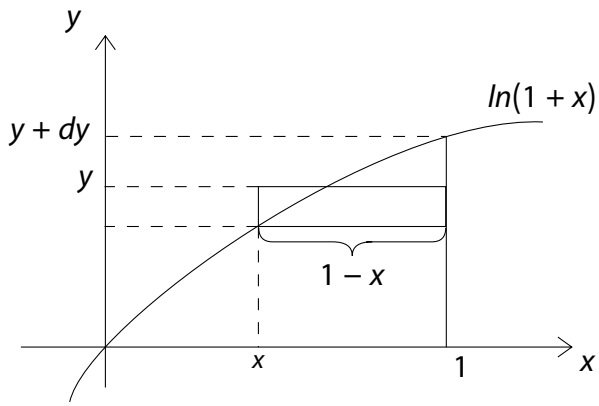
$$S = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx$$

$$\int \ln(1+x)\,dx = x\ln(1+x) - \int \frac{x}{x+1}dx =$$
$$= x\ln(1+x) - \int \frac{x+1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x+1}dx =$$
$$= x\ln(1+x) - x + \ln(1+x) = (1+x)\ln(1+x) - x \quad (6)$$

$$S = (1+x)\ln(1+x) - x\big|_0^1 = 2\ln(2) - 1 \quad (7)$$
$$y = \ln(1+x) \quad (8)$$

$$P(X \in [x, x+dx]) = \frac{\ln(1+x)}{2\ln(2)-1}dx + o(dx)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{2\ln(2)-1}, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}$$



Аппроксимируем вероятность попадания Y в интервал $[y, y+dy]$ отношением площади прямоугольника со сторонами $(1-x)$ и dy и площади всей фигуры S.

$$y = \ln(1+x) \tag{9}$$

$$e^y = 1 + x \tag{10}$$

$$1 - x = 2 - e^y \tag{11}$$

$$P(Y \in [y, y+dy]) = \frac{2 - e^y}{2\ln(2) - 1} dy + o(dy)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{2 - e^y}{2\ln(2) - 1}, & y \in [0, \ln(2)] \\ 0, & y \notin [0, \ln(2)] \end{cases}$$

Задача 4

Заданы множества:

$$D_1 = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4\} \qquad D_2 = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \le 3\} \tag{12}$$

Точки равномерно распределены в множестве $A = D_1 \setminus D_2$. Найти функции плотности для абсциссы $f_X(x)$ и ординаты $f_Y(y)$ точки.

Задача 5

Найти функции плотности x и y на фигуре, ограниченной кривыми $x = 0$, $y = e^x$ и $y = x^2$.

Решение

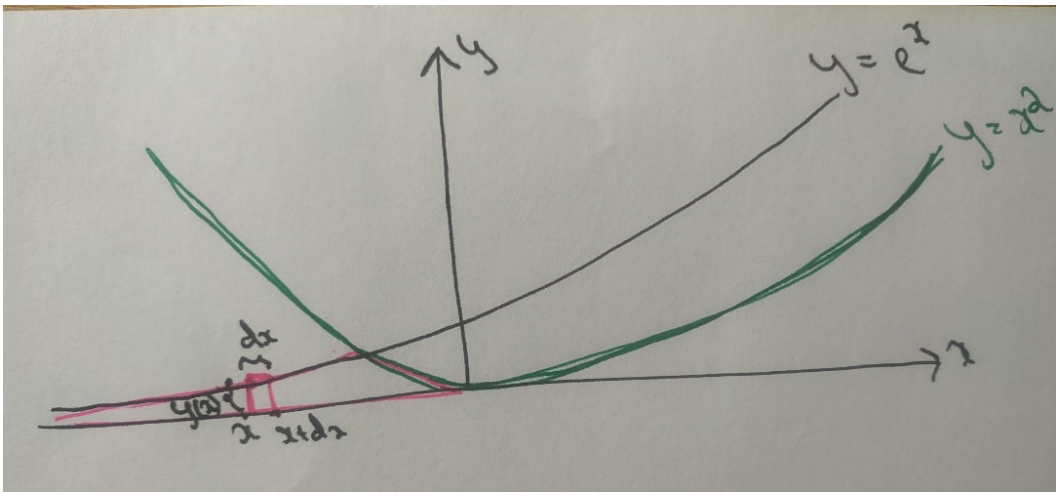
Для начала можно разбить фигуру на две части. Для этого найдем точку пересечения кривых e^x и x^2. Приравняв их, получаем некоторый $x = a = const$. В зависимости от того, чем уравен x относительно a, будут меняться функции плотности для обеих величин.

Пусть площадь фигуры равна S. Чтобы найти функции плотности через о-малое, будем находить отношение площади прямоугольника с парметрами dx и y к площади всей фигуры, для

у аналогичным способом.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{S}; & x < a \\ \frac{x^2}{S}; & x \geqslant a \end{cases}$$

$$f_Y(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{y}}{S}; & x < a \\ \frac{lny}{S}; & x \geqslant a \end{cases}$$



Задача 6

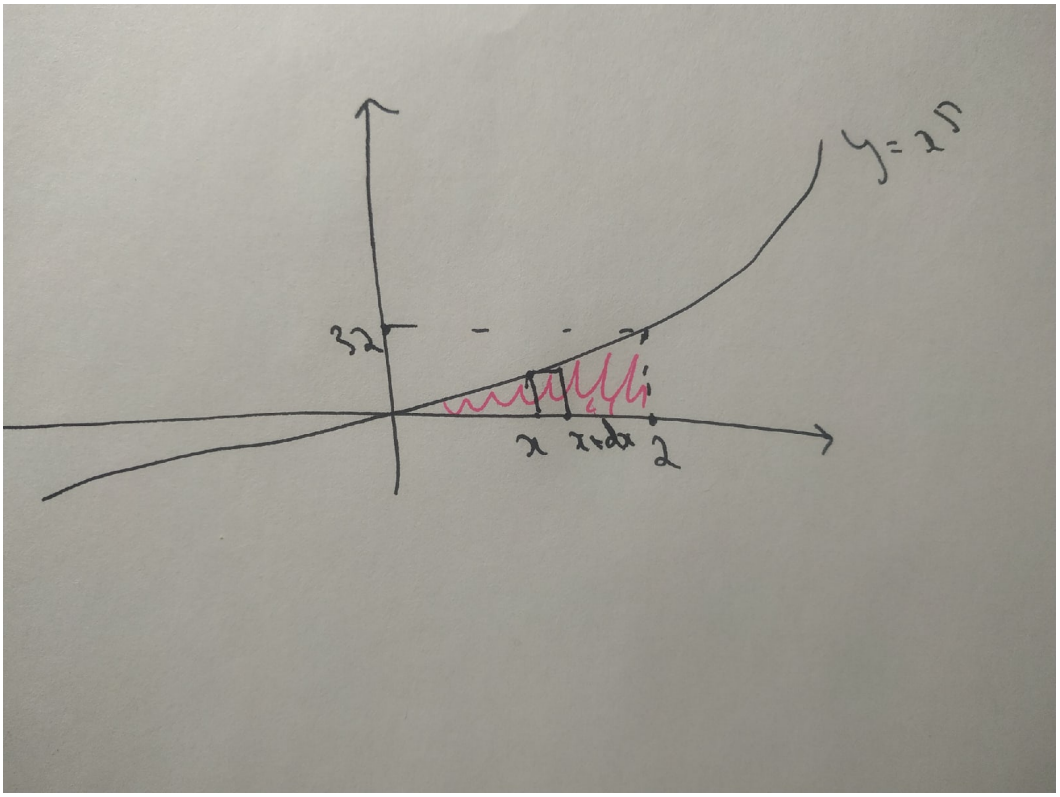
Найти функцию плотности x на фигуре, ограниченной кривыми $y = x^5$, $y = 0$, $x = 2$.

Решение

Площадь фигуры можно найти через интеграл, она получается равной $\frac{32}{3}$.

Функция плотности находится как отношение аппроксимированной вероятности попадания на определенную координату x ко всей площади фигуры. Получается:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^5}{\frac{32}{3}}; & x \in [0; 2] \\ 0; & else \end{cases}$$



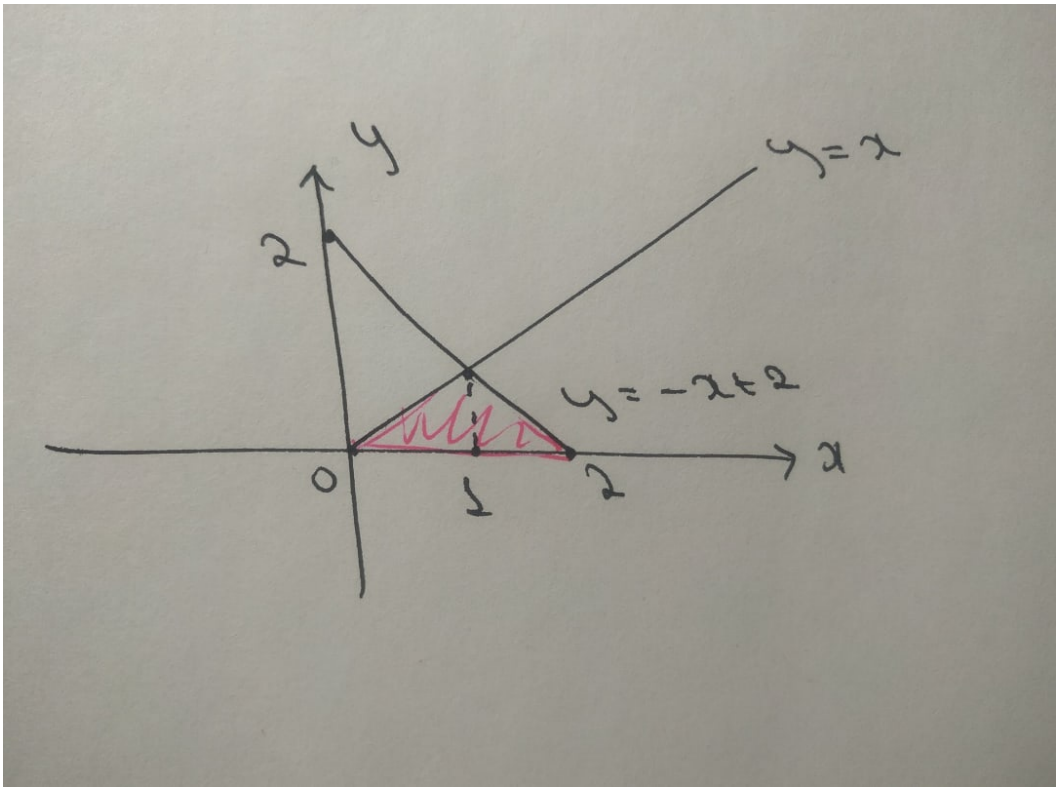
Задача 7

Найти функцию плотности x на фигуре, ограниченной прямыми $y = 0$, $y = x$ и $y = -x + 2$.

Решение

Площадь фигуры получается равной 1. Функция плотности находится путем аналогичной аппроксимации вероятности попадения в определенную точку. Получается:

$$f_X(x) = \begin{cases} x; & x \in [0; 1] \\ -x + 2; & else \end{cases}$$

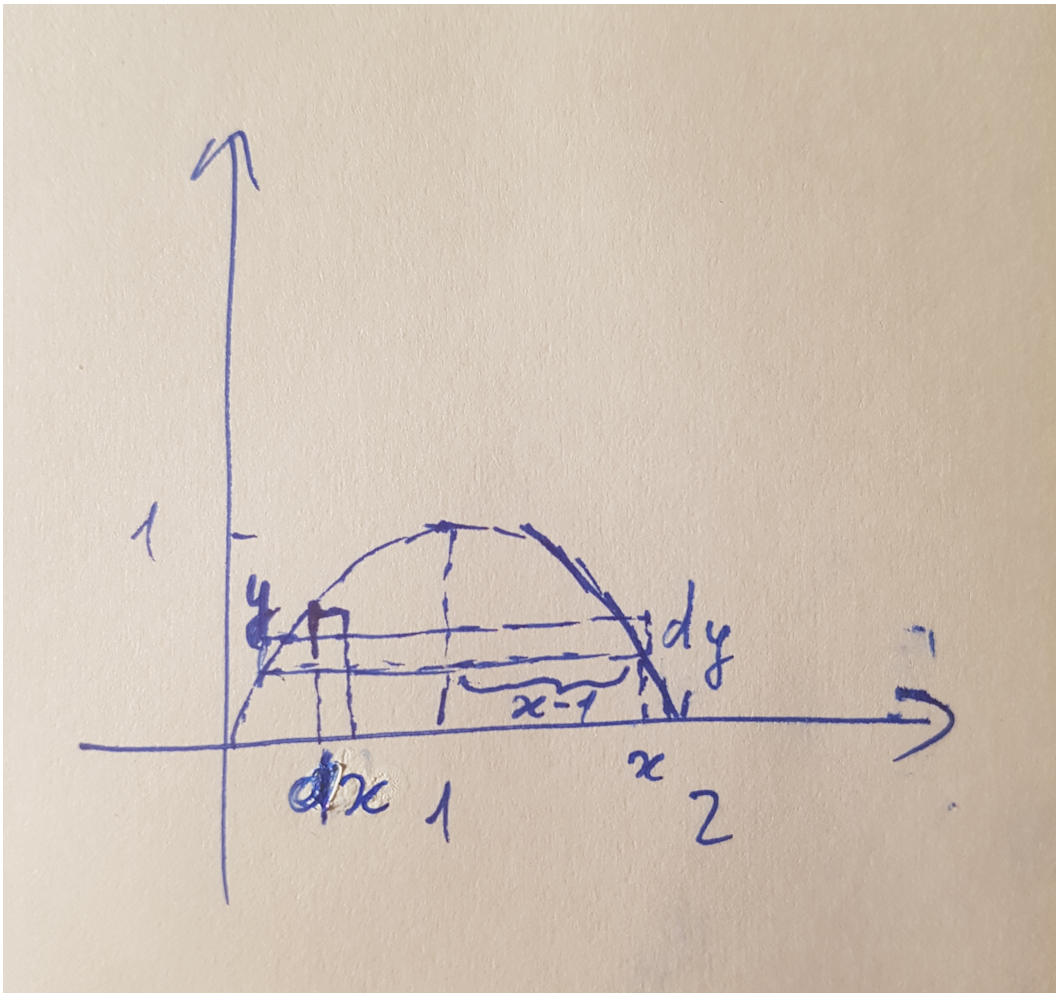


Задача 8

Точки равномерно распределены на области, ограниченной кривыми $y = -(x-1)^2 + 1$, $y = 0$. Найти функции плотности для абсциссы $f_X(x)$ и ординаты $f_Y(y)$ точки.

Решение

Аппроксимируем вероятность попадания X в интервал $[x, x+dx]$ отношением площади прямоугольника со сторонами y и dx и площади всей фигуры S.



$$S = \int_0^2 (-(x-1)^2 + 1)dx =$$

$$= \int_0^2 (-(x-1)^2 + 1)d(x-1) =$$

$$= \frac{-(x-1)^3}{3} + x - 1\Big|_0^2 = -\frac{1}{3} + 2 - 1 - \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \quad (13)$$

$$P(X \in [x, x+dx]) = \frac{(1-(x-1)^2)}{4/3}dx + o(dx)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3(1-(x-1)^2)}{4}, & x \in [0,2] \\ 0, & x \notin [0,2] \end{cases} \quad (14)$$

Аппроксимируем вероятность попадания Y в интервал $[y, y+dy]$ отношением площади прямоугольника со сторонами $2(x-1)$ и dy и площади всей фигуры S.

$$y = 1 - (x-1)^2 \tag{15}$$

$$x - 1 = \sqrt{1-y} \tag{16}$$

$$P(Y \in [y, y+dy]) = \frac{2\sqrt{1-y}}{4/3}dy + o(dy)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3\sqrt{1-y}}{2}, & y \in [0,1] \\ 0, & y \notin [0,1] \end{cases} \tag{17}$$

Задача 9

Две точки равномерно распределены на окружности с центром в начале координат и радиусом R. Найти плотность распределения расстояния между двумя точками.

Решение

Немного переформулируем условие. Пусть координаты первой точки всегда $(-1, 0)$, а вторая точка равномерно распределена на окружности. Тогда α - наименьший угол между радиусами, проведенных к точкам, причем:

$$\alpha \sim U[0, \pi]$$

Тогда расстояние D между точками выразить через α и R, используя теорему косинусов:

$$D^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos(\alpha)$$

Задача 10

Выведите функцию плотности k-й порядковой статистики из выборки равномерного распределения.

Решение

Выведем плотность в общем виде.

Искомое событие можно записать как:

$X_k \in [x; x+dx]$. Так как $X_1 \leqslant \ldots \leqslant X_k \leqslant \ldots \leqslant X_n$, то это событие эквивалентно трем одновременно произошедшим событиям:

1. Одно наблюдение из n попало в $[x; x+dx]$ $(P(.) = f_X(x)dx + o(dx))$
2. (k-1) наблюдения из (n-1) оставшихся попали левее $[x; x+dx]$ $((P(.) = P(X_1 < x, \ldots, X_k - 1 < x) = P(X_1 < x), \ldots, P(X_k - 1 < x) = (F_X(x))^{k-1})$
3. (n-k) оставшихся наблюдений попали правее $[x; x+dx]$ $((P(.) = ((1 - F_X(x))^{k-1})$

Тогда вероятность искомого события можно записать как:

$$f_{X_k}(x)dx = n(f_X(x)dx + o(dx)) \cdot (C_{n-k})^{k-1} \cdot (F_X(x))^{k-1} \cdot (1 - F_X(x))^{n-k} \cdot 1 + o(dx)$$

Тогда для равномерного распределения:

$$f_{U_k}(x) = n \cdot (C_{n-1})^{k-1} \cdot (fracx - ab - a)^{k-1} \cdot (1 - fracx - ab - a)^{n-k} \cdot \frac{1}{b-a}, \text{ если } x \in [a; b]$$

Задача 11

Вывести совместную функцию плотности для k-й и m-й порядковых статистик из выборки равномерного распределения.

Решение

Пусть искомое событие $A = \{X_k \in [x; x + dx], X_m \in [y; y + dy]\}$
Искомое событие произошло, если одновременно:

1. Какое-то одно наблюдение из n попало в $[x; x + dx]$ (с вероятностью $f_X(x)dx + o(dx)$)
2. Какое-то одно наблюдение из (n-1) попало в $[y; y + dy]$ (с вероятностью $f_X(y)dy + o(dy)$)
3. Какие-то (k–1) из оставшихся (n-1) левее X_k с вероятностью $(F_X(x))^{k-1}$
4. Какие-то (m–k–1) из оставшихся (n-k-1) попали в $[X_k; X_m]$ с вероятностью $(F_X(y) - F_X(x))^{m-k-1}$
5. Оставшиеся (n–1) правее X_m с вероятностью $(1 - F_X(y))^{n-1}$

Тогда:

$$f_{X_k, X_m}(x, y)dxdy = n(n-1) \cdot (C_{n-1})^{k-1} \cdot (f_X(x) + o(dx)) \cdot (f_X(y) + o(dy)) \cdot (F_X(x))^{k-1} \cdot$$
$$\cdot (F_X(y) - F_X(x))^{m-k-1} \cdot (1 - F_X(y)) \cdot (n-1) + o(dx) + o(dy)$$

Тогда для равномерного распределения:

$$f_{U_k, U_m}(x, y)dxdy = n(n-1) \cdot (C_{n-1})^{k-1} \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{y-a}{b-a} - \frac{x-a}{b-a}\right)^{m-k-1} \cdot$$
$$\cdot \left(1 - \frac{y-a}{b-a}\right) \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{1}{b-a}\right)^2, \text{ если } x \in [a; b]$$

Задача 12

На множество $D = \{(x, y)\ x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ бросают n точек. Найти функцию плотности X_k и Y_k, где $X_1 \leqslant \ldots \leqslant X_k \leqslant \ldots \leqslant X_n$, $Y_1 \leqslant \ldots \leqslant Y_k \leqslant \ldots \leqslant Y_n$.

Решение

Так как функция плотности произвольной абсциссы имеет вид $f_X(x)dx = \frac{2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}}{\pi \cdot R^2}dx + o(dx)$, если $x \in [-R; R]$, а плотность k-й порядковой статистики:

$$f_{X_k}(x) = n(f_X(x)dx + o(dx)) \cdot (C_{n-k})^{k-1} \cdot (F_X(x))^{k-1} \cdot (1 - F_X(x))^{n-k} \cdot 1 + o(dx),$$

то:

$$f_{X_k}(x) = n \cdot \left(\frac{2 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}}{\pi \cdot R^2}\right) \cdot (C_{n-k})^{k-1} \cdot \left(\frac{x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)}{\pi \cdot R^2}\right)^{k-1} \cdot$$
$$\cdot \left(1 - \frac{x \cdot \sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)}{\pi \cdot R^2}\right)^{n-k}$$

Аналогично для ординаты.

Задача 13

n точек равномерно упали на область, ограниченную прямыми $y = 1 - x$, $x = 0$, $y = 0$. Найти функции плотности для абсциссы $f_{X_k}(x)$ и ординаты $f_{X_k}(y)$ точки, где X_k – k-я порядковая статистика.

Решение

Так как функция плотности произвольной абсциссы имеет вид $f_X(x)dx = 2 \cdot (1 - x)$, если $x \in [0; 1]$, а плотность k-й порядковой статистики:

$$f_{X_k}(x) = n(f_X(x)dx + o(dx)) \cdot (C_{n-k})^{k-1} \cdot (F_X(x))^{k-1} \cdot (1 - F_X(x))^{n-k} \cdot 1 + o(dx),$$

то:

$$f_{X_k}(x) = n \cdot (2 \cdot (1 - x)) \cdot (C_{n-k})^{k-1} \cdot (2 \cdot x - x^2)^{k-1} \cdot (1 - (2 \cdot x - x^2))^{n-k}$$

Задача 14

n точек равномерно упали на область, ограниченную прямыми $ln(x + 1)$, $x = 1$, $y = 0$

Найдите функции плотности для абсциссы $f_{X_k}(x)$ и ординаты $f_{X_k}(y)$ точки, где X_k – k-я порядковая статистика.

Решение

Так как функция плотности произвольной абсциссы имеет вид $f_X(x)dx = \frac{ln(1+x)}{2ln(2)-1}$, если $x \in [0; 1]$, а плотность k-й порядковой статистики:

$$f_{X_k}(x) = n(f_X(x)dx + o(dx)) \cdot (C_{n-k})^{k-1} \cdot (F_X(x))^{k-1} \cdot (1 - F_X(x))^{n-k} \cdot 1 + o(dx),$$

то:

$$f_{X_k}(x) = n \cdot \left(\frac{ln(1 + x)}{2 \cdot ln(2) - 1}\right) \cdot (C_{n-k})^{k-1} \cdot \left(\frac{(1 + x) \cdot ln(1 + x) - x}{2 \cdot ln(2) - 1}\right)^{k-1} \cdot$$
$$\cdot \left(1 - (\frac{(1 + x) \cdot ln(1 + x)x}{2ln(2) - 1})\right)^{n-k}, \text{ если } x \in [0; 1]$$

Для ординаты:

$$f_{Y_k}(y) = n \cdot \left(\frac{2 - e^y}{2 \cdot ln(2) - 1}\right) \cdot C_{n-k}^{k-1} \cdot \left(\frac{2 \cdot y - e^y}{2 \cdot ln(2) - 1}\right)^{k-1} \cdot \left(1 - \frac{2 \cdot y - e^y}{2ln(2) - 1}\right)^{n-k}, \text{ если } x \in [0; ln(2)]$$