使用旋转阵列构型的方法
解稀疏线性阵列DOA估计中的测向模糊

A Method Based on Rotatory Array Configuration to Solve DOA Estimation Ambiguities in Sparse Linear Array

Present By: Cui Ao

目 录

1. 引言

1. 引言

波达角（DOA）估计简言之是利用阵列传感器接收到的平面波（或球面波）所产生的相位差来估计入射信号的角度。随着雷达、声呐、通信、地震学、电子监视和射电天文学等等领域的快速发展，DOA估计作为信号角度测向中的关键技术越来越受到广泛关注。

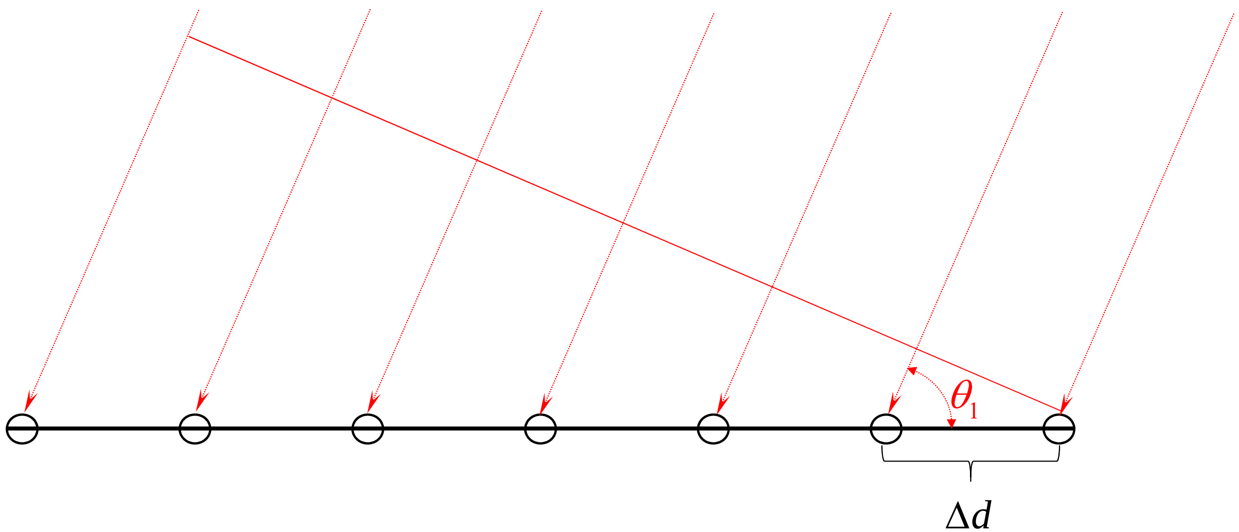

Fig. 1 Illustration of DOA Estimation in ULA

1. 引言

在阵列中，每个阵元相当于对信号场进行空间采样。一般情况下，需要满足空间采样定理，即阵元间距不能大于入射信号的半波长。

此外，阵列的孔径（线性阵列中对应于阵列的长度）与DOA估计的分辨率成正比，即孔径越大，分辨率越大。

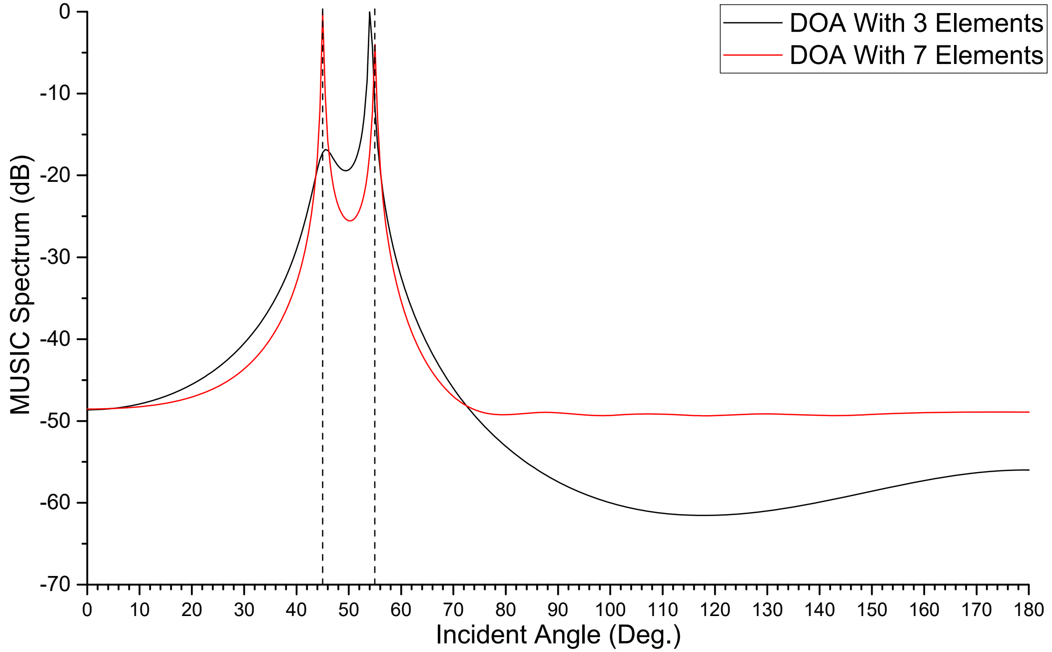

Fig. 2 Incident Angle = [45, 55], SNR=10, Element Interval=0.45×λ

1. 引言

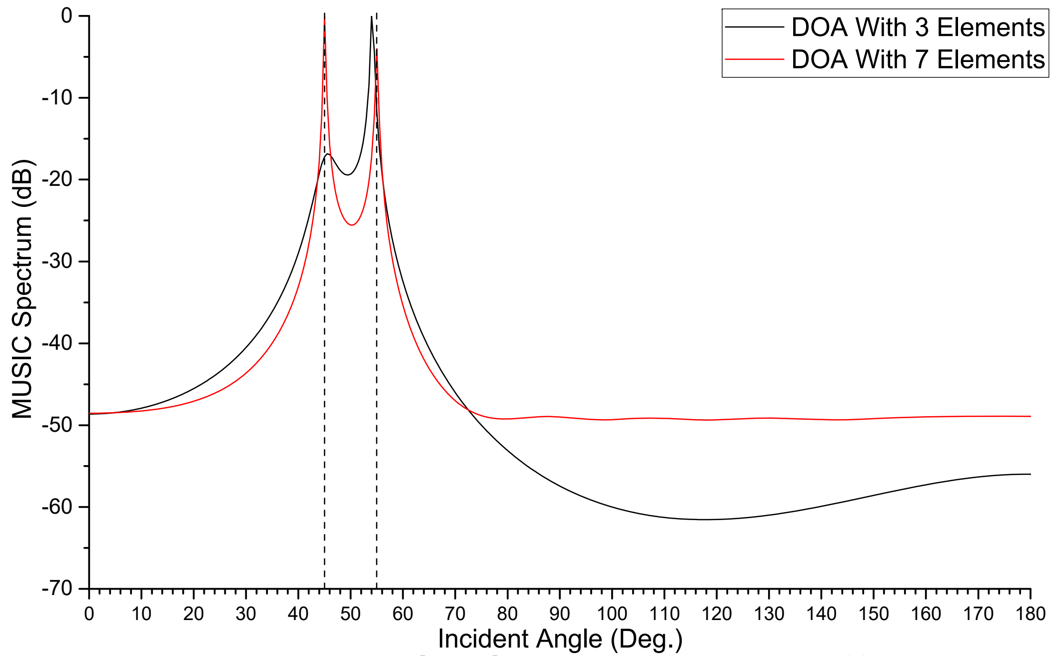

Fig. 3 Incident Angle = [45, 55], SNR=10, Element Interval=0.45×λ

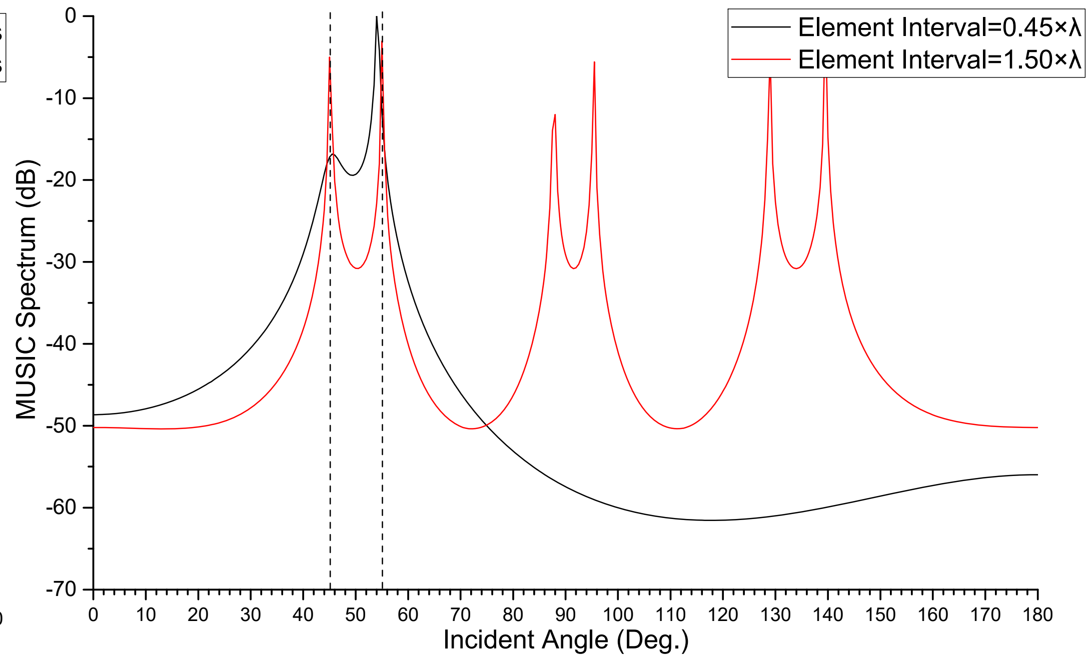

Fig. 4 Incident Angle = [45, 55], SNR=10, Element Number=3

增大阵列孔径最简单的方法是增加阵元数量，但是这势必会带来系统复杂性和运算复杂度的问题。

另一种思路是保持阵元数量不变，仅仅靠增大阵元间距扩大阵列孔径。但由于不满足空间采样定理，因此会存在虚假峰问题，影响DOA估计的准确性。

1. 引言

目前稀疏阵去模糊方法主要分为以下三类：

1、通过优化阵列阵元位置，使构造的阵列不产生模糊性；

2、在原有稀疏阵的基础上引入一个附加阵元，或者在接收信号时移动阵元；

3、从算法角度考虑去模糊特性

此外，根据Sun Hai-Lang等人的研究，提出了一种基于MUSIC算法的方法。该方法首先需要获得两组数据，其中一组数据是原始阵列的DOA估计结果，另一组数据通过滑动阵元，即改变阵元间距获得的DOA估计结果，然后比较两组结果，不能重合的MUSIC谱峰即为虚假峰。但该方法由于需要滑动阵元位置，因此耗时且难以控制。

分析以上背景，目前已有方法要么计算复杂度较大，要么难以实现。与此同时，由阵列角度出发来解模糊的方法少有提及，即使有也仅仅基于实验的观察，并没有进行深入的理论论证。

2. 旋转阵列构型方法及准则

2. 旋转阵列构型方法及准则

实际上，使用MUSIC算法进行DOA估计本质上是一个求解线性齐次方程组问题。即令θ在某个角度区间内扫描，并以此根据阵列构型生成对应的导向矢量$\boldsymbol{a}(\theta)$ 。当$\boldsymbol{a}(\theta)$ 与噪声空间的基向量$\boldsymbol{U}^H$正交时，得到空间谱的峰值。

$$P_{MUSIC}(\theta)=\frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{U}\mathbf{U}^H\mathbf{a}(\theta)},\exists\forall Peak=\theta_i \Leftrightarrow \mathbf{U}^H\mathbf{a}(\theta_i)=\mathbf{0}$$

假设具有N阵元的阵列对M个不同方向入射信号进行DOA估计，阵列间距不满足空间采样定理时，得到的空间谱存在虚假峰$P(\tilde{\theta})$，即$\tilde{\theta}\neq\theta_i, i=1\sim M$，$\boldsymbol{U}^H\boldsymbol{a}(\tilde{\theta})$ =0，因此有：

$$\mathbf{a}(\tilde{\theta})=\sum_{i=1}^{M}k_i\mathbf{a}(\theta_i)$$

2. 旋转阵列构型方法及准则

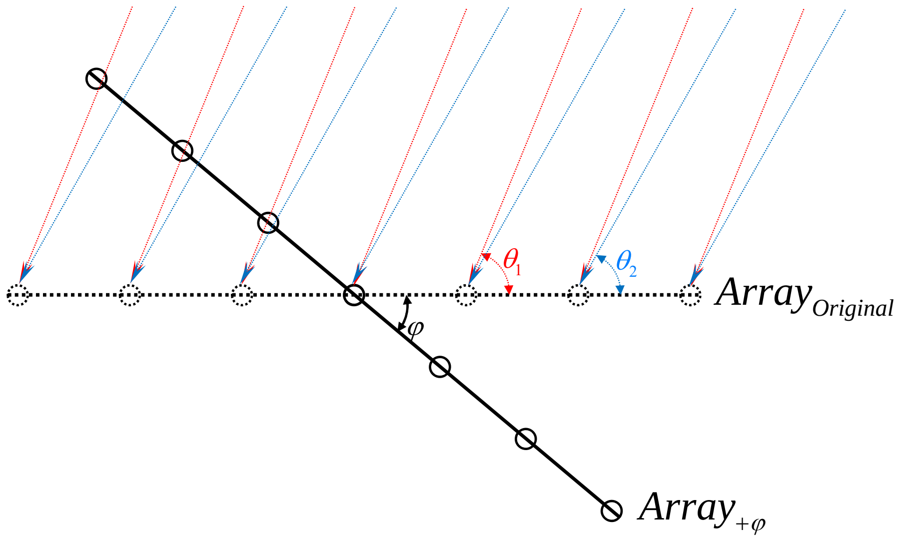

Fig. 5 Illustration of DOA Estimation of Rotatory Array

如左图所示，假设相对于原始阵列$Array_{Original}$，有两个信号，入射方向分别为θ_1和θ_2，并且其由于不满足空间采样定理存在一组虚假峰$\{\tilde{\theta}_i\}$。则当阵列相对于原始位置转动了角度φ后，入射信号不变，相对于形成的新阵列$Array_{+\varphi}$的入射方向相应会变为$\theta_1+\varphi$和$\theta_2+\varphi$，若其虚假峰为$\{\tilde{\theta}_i+\tilde{\varphi}_i\}$且$\tilde{\varphi}_i \neq \varphi$，则可将两个阵列DOA结果相乘以消除虚假峰。

2. 旋转阵列构型方法及准则

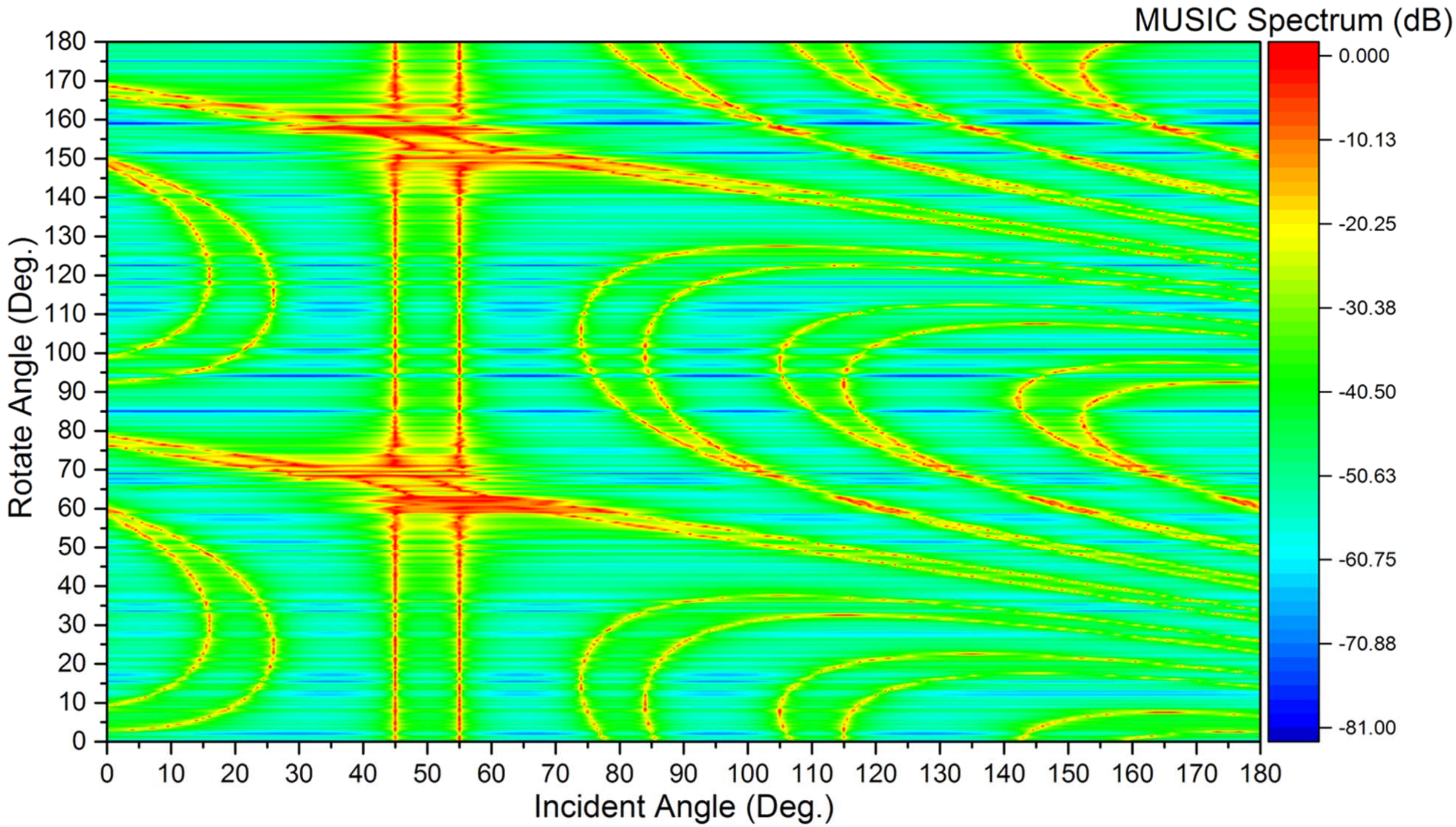

Fig. 6 Incident Angle = [45, 55], SNR=10, Element Number=3

2. 旋转阵列构型方法及准则

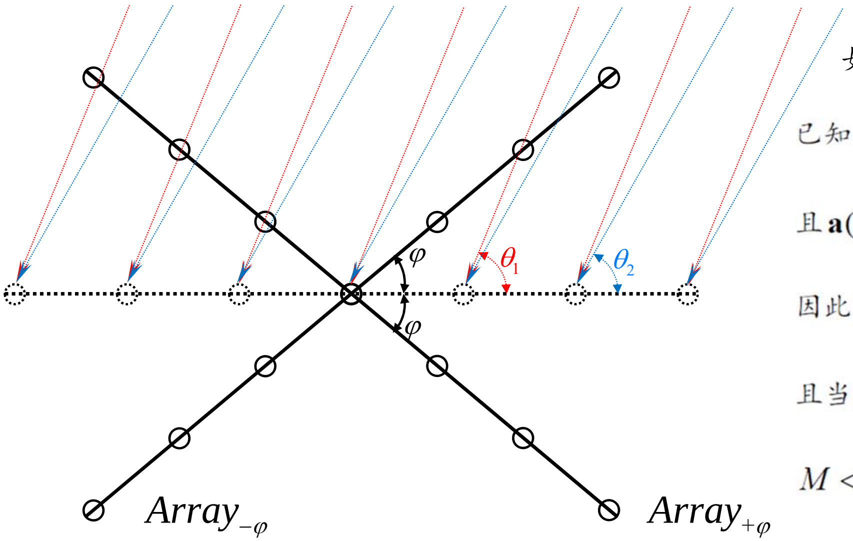

Fig. 7 Array Structure

如左图所示，相对于水平位置有两个阵列$Array_{+\varphi}$和$Array_{-\varphi}$

已知 $\cos(\theta+\varphi)+\cos(\theta-\varphi)=2\cos\theta\cos\varphi$，

且 $\mathbf{a}(\theta)=\begin{bmatrix}1 & e^{-j2\pi\rho\cos\theta} & \cdots & e^{-j2\pi(N-1)\rho\cos\theta}\end{bmatrix}^T$，$\mathbf{b}(\theta,\varphi)=\begin{bmatrix}1 & e^{-j2\pi\rho 2\cos\varphi\cos\theta} & \cdots & e^{-j2\pi(N-1)\rho 2\cos\varphi\cos\theta}\end{bmatrix}^T$，

因此有： $\mathbf{a}(\theta+\varphi)=diag\left[\mathbf{a}^*(\theta-\varphi)\right]\mathbf{b}(\theta,\varphi)$

且当 $\rho>0.5$ 时，$Array_{+\varphi}$ 在 $\tilde{\theta}+\varphi$ 存在虚假峰，$\mathbf{a}(\tilde{\theta}+\varphi)$ 是 $\mathbf{a}(\theta_1+\varphi),\mathbf{a}(\theta_2+\varphi),\ldots,\mathbf{a}(\theta_M+\varphi)$ 的线性组合，其中

$M<N$，$\tilde{\theta},\theta_1,\theta_2,\ldots\theta_M\in[-180,180]$。

证明：$\mathbf{a}(\tilde{\theta}-\varphi)$ 不是 $\mathbf{a}(\theta_1-\varphi),\mathbf{a}(\theta_2-\varphi),\ldots,\mathbf{a}(\theta_M-\varphi)$ 的线性组合。

2. 旋转阵列构型方法及准则

证明：

反证法：

假设 $\mathbf{a}(\tilde{\theta}-\varphi)$ 是 $\mathbf{a}(\theta_1-\varphi),\mathbf{a}(\theta_2-\varphi),\ldots,\mathbf{a}(\theta_M-\varphi)$ 的线性组合。

则

$$\mathbf{a}(\tilde{\theta}+\varphi)=\sum_{i=1}^{M}k_i\mathbf{a}(\theta_i+\varphi)=\sum_{i=1}^{M}k_i diag\left[\mathbf{a}^*(\theta_i-\varphi)\right]\mathbf{b}(\theta_i,\varphi)=diag\left[\mathbf{a}^*(\tilde{\theta}-\varphi)\right]\mathbf{b}(\tilde{\theta},\varphi)$$

又因为 $\mathbf{a}(\tilde{\theta}-\varphi)=\sum_{r=1}^{M}c_r\mathbf{a}(\theta_r-\varphi)$，可得 $diag\left[\mathbf{a}^*(\tilde{\theta}-\varphi)\right]=\sum_{r=1}^{M}c_r^* diag\left[\mathbf{a}^*(\theta_r-\varphi)\right]$，

因此有 $\sum_{i=1}^{M}k_i diag\left[\mathbf{a}^*(\theta_i-\varphi)\right]\mathbf{b}(\theta_i,\varphi)=\sum_{r=1}^{M}c_r^* diag\left[\mathbf{a}^*(\theta_r-\varphi)\right]\mathbf{b}(\tilde{\theta},\varphi)$

展开有：

$$\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{M}k_i\\ \sum_{i=1}^{M}k_i e^{j2\pi\rho\cos(\theta_i-\varphi)}e^{-j2\pi\rho2\cos\theta_i\cos\varphi}\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{M}k_i e^{j2\pi(N-1)\rho\cos(\theta_i-\varphi)}e^{-j2\pi(N-1)\rho2\cos\theta_i\cos\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{r=1}^{M}c_r^*\\ e^{-j2\pi\rho2\cos\tilde{\theta}\cos\varphi}\sum_{r=1}^{M}c_r^* e^{j2\pi\rho\cos(\theta_i-\varphi)}\\ \vdots\\ e^{-j2\pi(N-1)\rho2\cos\tilde{\theta}\cos\varphi}\sum_{r=1}^{M}c_r^* e^{j2\pi(N-1)\rho\cos(\theta_i-\varphi)}\end{bmatrix}$$

进而得方程组：

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{M}\left((k_i e^{-j2\pi0\rho2\cos\theta_i\cos\varphi}-c_i^* e^{-j2\pi0\rho2\cos\tilde{\theta}\cos\varphi})e^{j2\pi0\rho\cos(\theta_i-\varphi)}\right)=0\\ \sum_{i=1}^{M}\left((k_i e^{-j2\pi\rho2\cos\theta_i\cos\varphi}-c_i^* e^{-j2\pi\rho2\cos\tilde{\theta}\cos\varphi})e^{j2\pi\rho\cos(\theta_i-\varphi)}\right)=0\\ \cdots\\ \sum_{i=1}^{M}\left((k_i e^{-j2\pi(N-1)\rho2\cos\theta_i\cos\varphi}-c_i^* e^{-j2\pi(N-1)\rho2\cos\tilde{\theta}\cos\varphi})e^{j2\pi(N-1)\rho\cos(\theta_i-\varphi)}\right)=0\end{cases}$$

由于 $\{\mathbf{a}(\theta_1-\varphi)\quad\mathbf{a}(\theta_2-\varphi)\quad\ldots\quad\mathbf{a}(\theta_M-\varphi)\}$ 是信号空间的一组基，互相列线性无关，因此要满足上面方程，必然有 $(k_i e^{-j2\pi\rho n\cos\theta_i\cos\varphi}-c_i^* e^{-j2\pi\rho n\cos\tilde{\theta}\cos\varphi})=0$，其中 $i=1\sim M;n=0\sim N-1$，可推出：

2. 旋转阵列构型方法及准则

$$\mathbf{b}(\tilde{\theta},\varphi)=\begin{bmatrix} e^{-j2\pi 0\rho 2\cos\tilde{\theta}\cos\varphi} \\ e^{-j2\pi\rho 2\cos\tilde{\theta}\cos\varphi} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi(N-1)\rho 2\cos\tilde{\theta}\cos\varphi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\sum_{r=1}^{M} k_r e^{-j2\pi 0\rho 2\cos\theta_r\cos\varphi}}{\sum_{i=1}^{M} c_i^*} \\ \dfrac{\sum_{r=1}^{M} k_r e^{-j2\pi\rho 2\cos\theta_r\cos\varphi}}{\sum_{i=1}^{M} c_i^*} \\ \vdots \\ \dfrac{\sum_{r=1}^{M} k_r e^{-j2\pi(N-1)\rho 2\cos\theta_r\cos\varphi}}{\sum_{i=1}^{M} c_i^*} \end{bmatrix}=\sum_{r=1}^{M}\frac{k_r}{C}\mathbf{b}(\theta_r,\varphi)$$

由上式可以看出 $\mathbf{b}(\theta,\varphi)$ 是 $\{\mathbf{b}(\theta_1,\varphi),\mathbf{b}(\theta_2,\varphi),\ldots,\mathbf{b}(\theta_M,\varphi)\}$ 的线性组合。

当 $0<2\rho\cos\varphi<0.5$ 时，向量组 $\{\mathbf{b}(\theta,\varphi)\}$ 在 $\theta\in[0,180]$ 一定列线性无关，无法得到上述结论，因此与题设矛盾。

因此 $0<2\rho\cos\varphi<0.5$ 时，原假设不成立，$\mathbf{a}(\tilde{\theta}-\varphi)$ 不是 $\mathbf{a}(\theta_1-\varphi),\mathbf{a}(\theta_2-\varphi),\ldots,\mathbf{a}(\theta_M-\varphi)$ 的线性组合。

3. 数值仿真结果与分析

3. 数值仿真结果与分析

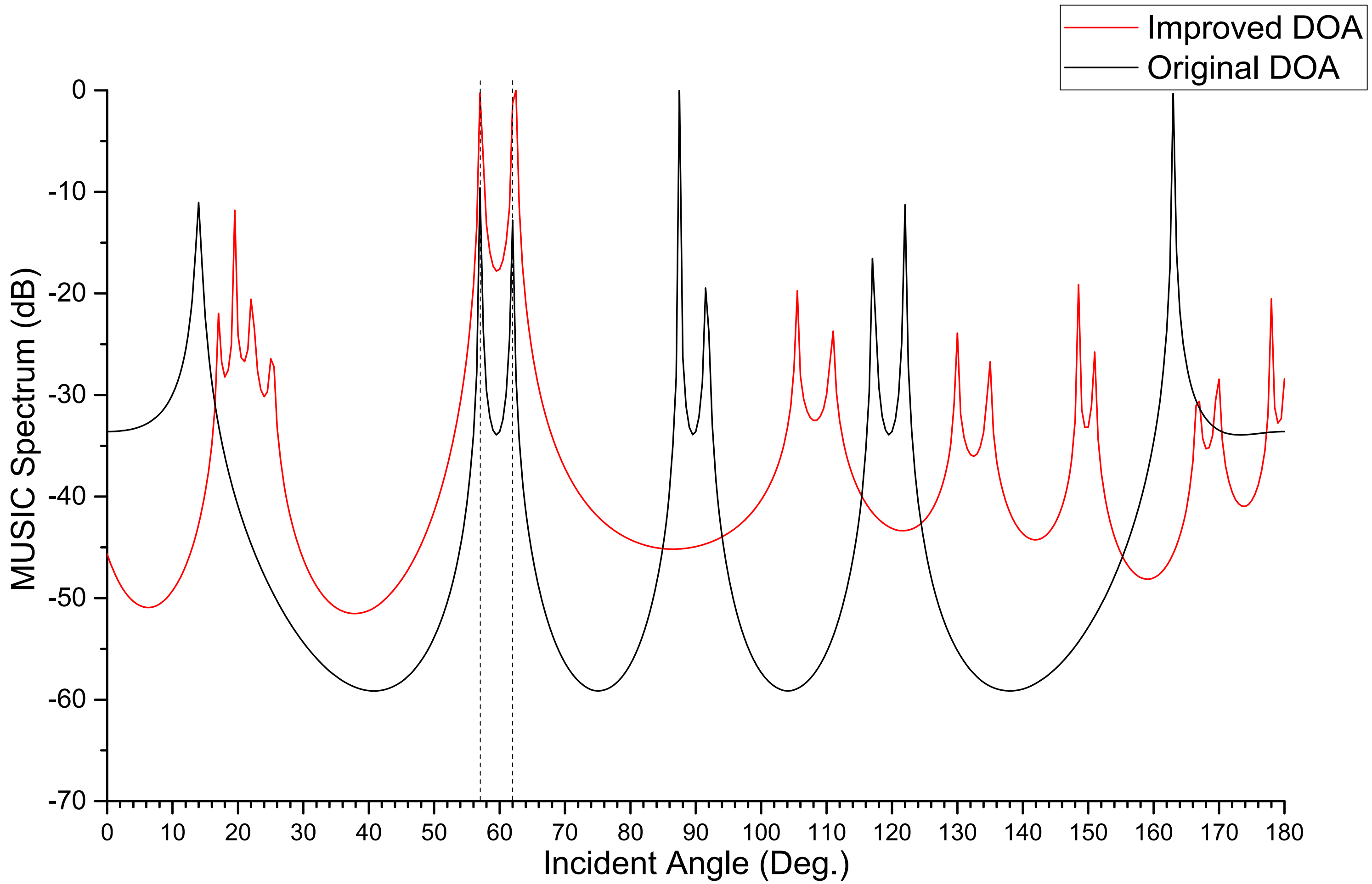

Fig. 8 Improved DOA Spectrum at Rotate Angle = 84 Deg.
Element Number = 3, Incident Angle = [57,62], SNR=10, Time Snapshots=5000

3. 数值仿真结果与分析

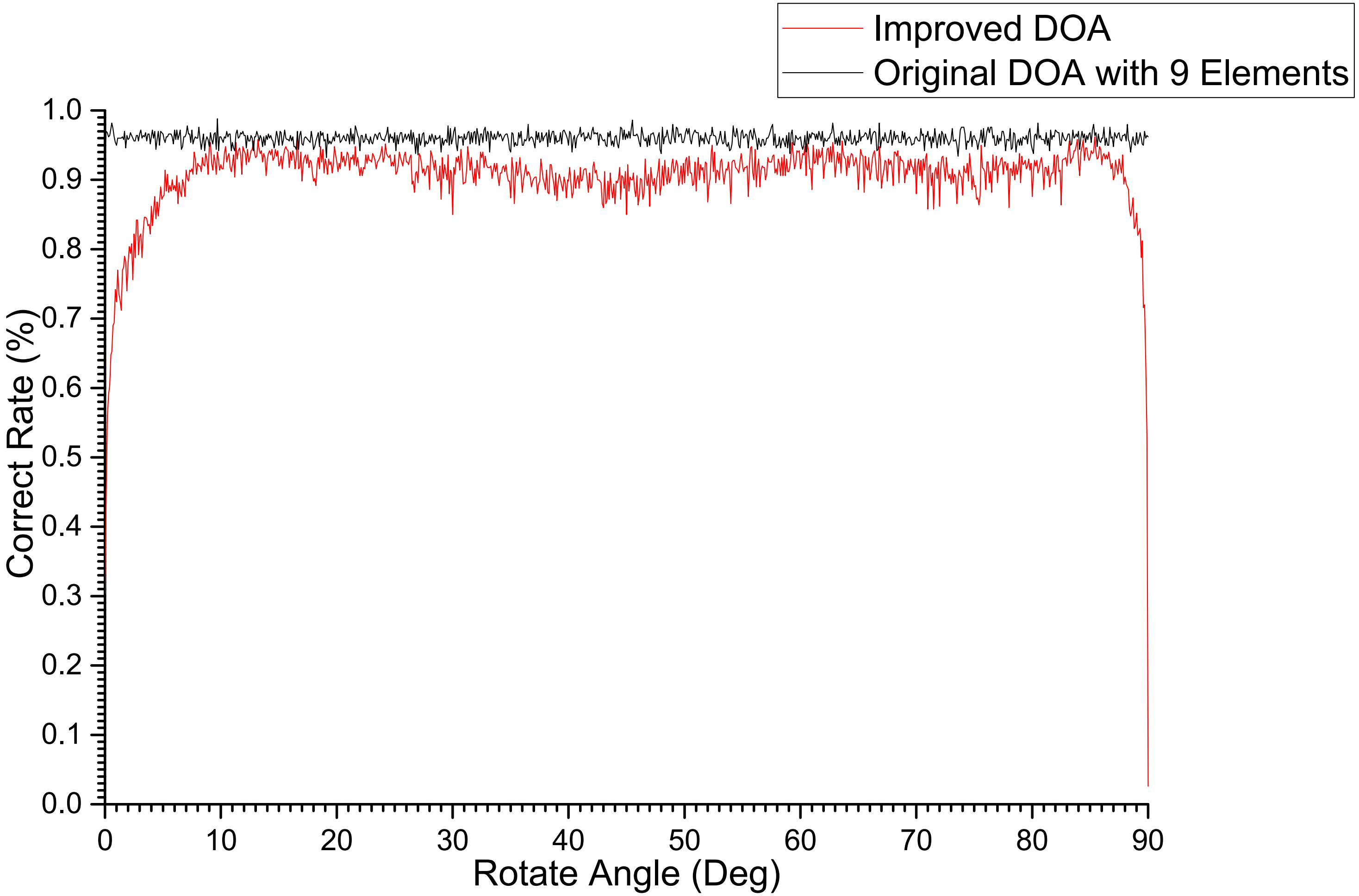

Fig. 9 Static Correct Rate of Improved and Original DOA from Rotate Angle = 0 to 90 with Step Length = 0.1
500 Loops for Each Angle and Time Snapshots = 5000 for Each Loop, SNR = 10

4. 结论、展望与讨论

Reference

[1] ALLEN M P. Analysis and Synthesis of Aircraft Engine Fan Noise for Use in Psychoacoustic Studies [D]. Blacksburg, Virginia; Virginia Polytechnic Institute and State University, 2012.
[2] 中国民用航空局. 民用机场飞行区技术标准 [M]. 2013.
[3] JIAN M, KOT A C, ER M H. DOA estimation of speech source with microphone arrays [J]. ISCAS '98 Proceedings of the 1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (Cat No98CH36187), 1998, 293-6 vol.5.

Thank You!

Present By: Cui Ao