信源数目估计方法研究

邱月阳

2016-10-13

主要内容

- 信息论准则(AIC/MDL)剖析
- AIC、MDL准则仿真实验
- 盖氏圆GDE定理及应用
- 基于特征向量的新方法

比值分析

信息论准则：针对白噪声

色噪声处理：
CCT：正则相关处理
平滑处理
盖氏圆方法

进一步抽象本质：实际上是根据特征值的大小进行分类的问题

从利用特征值的一维分类方式--→利用多维数据(联合特征向量)的多维分类方式

聚类K-Means、支持向量机SVM的高级分类方法

信号自相关矩阵 $$\mathbf{R}=E\left[\mathbf{r}(t)^{*}\mathbf{r}(t)^{T}\right]$$

$$=\mathbf{A}^{*}E\left[\mathbf{s}(t)^{*}\mathbf{s}(t)^{T}\right]\mathbf{A}^{T}+E\left[\mathbf{n}(t)^{*}\mathbf{n}(t)^{T}\right]$$

$$=\mathbf{A}^{*}\mathbf{R}_{\mathbf{S}}\mathbf{A}^{T}+\sigma_n^2\mathbf{I}\qquad (M\times M)$$

特征值 $$\eta_i=\nu_i+\sigma_n^2$$

$$\underbrace{\eta_{D+1}=\cdots\cdots=\eta_M}_{M-D}=\sigma_n^2$$

M=8，三个信号,入射角度theta=[10 20 30]度，SNR=[10 0 -5]dB的特征值

123.0205	97.2806	22.3867	1.0938	1.0277	0.9684	0.9300	0.8934
13.3504	10.7761	3.0047	1.0694	1.0322	0.9949	0.9445	0.9014
4.9415	4.1359	1.6978	1.1099	1.0498	1.0200	0.9509	0.8980

一、信息论准则 AIC及MDL准则

1、

$$AIC=\min_{K}\left\{N(M-K)\log\left[\frac{\frac{1}{M-K}\sum_{i=K+1}^{M}\hat{\lambda}_i\left(\theta^{(K)}\right)}{\left(\prod_{i=K+1}^{M}\hat{\lambda}_i\left(\theta^{(K)}\right)\right)^{\frac{1}{M-K}}}\right]+K(2M-K)\right\}$$

K为信源个数，M为阵元数目，lambda为自相关矩阵特征值，大到小排列

使上式取值为最小值的K即为信源数目的估计值

一是似然函数项,二是罚函数项

I(k)=L(k)+P(k),k=0，1，2，…,M

罚函数项同阵列协方差矩阵的特征值无关,而似然函数项同阵列协方差矩阵的特征值大小!阵元数多少!数据快拍数(样本数)及假定的信号源数目有很大关系

$$AIC = \min_{K}\left\{N(M-K)\log\left[\frac{\frac{1}{M-K}\sum_{i=K+1}^{M}\hat{\lambda}_i\left(\theta^{(K)}\right)}{\left(\prod_{i=K+1}^{M}\hat{\lambda}_i\left(\theta^{(K)}\right)\right)^{\frac{1}{M-K}}}\right] + K(2M-K)\right\}$$

- ◆ L(k)代表假设信号源数目为k时的似然函数值,从第k+1到第M共有M-k个特征值的算术平均值与其几何平均值的比值

- ◆ 若干正数的算术平均值与其几何平均值的比值是参加运算数的相等性的度量,该比值是一个大于或者等于1的数
  - 如果这几个数相同,那么它们的算术平均值与其几何平均值的比值为1;
  - 如果参加运算得到的数值差别比较大,那么其算术平均值与其几何平均值的比值也就越大;
  - 此比值只与这些数的相对大小有关系,而与它们的绝对大小无关

$$MDL=\min_{K}\left\{N(M-K)\log\left[\frac{\frac{1}{M-K}\sum_{i=K+1}^{N}\hat{\lambda}_i\left(\theta^{(K)}\right)}{\left(\prod_{i=K+1}^{M}\hat{\lambda}_i\left(\theta^{(K)}\right)\right)^{\frac{1}{M-K}}}\right]+\frac{1}{2}K(2M-K)\log N\right\}$$

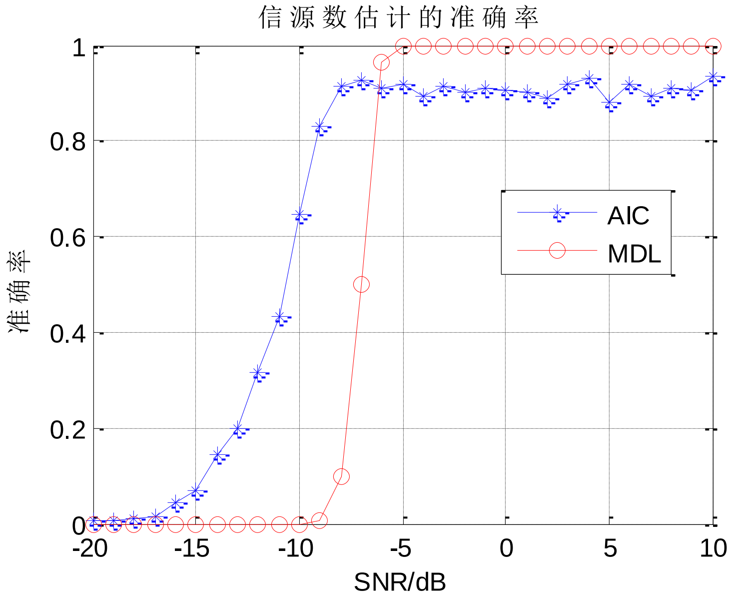
本质：在白噪声环境下,基于信息论准则就是利用信号特征值与噪声特征值之间的差别还有噪声特征值之间的相等性的去进行信号源数目的有效估计。

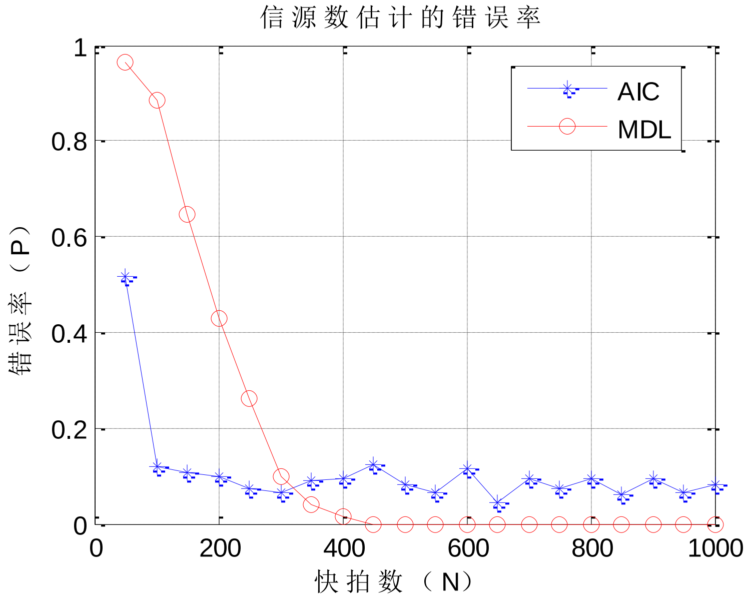
AIC、MDL准则只是罚函数项不同

- AIC准则低信噪比下优于MDL准则，但存在过估计，且不是一致性估计
- MDL准则在高SNR情况下准确率很高，且为一致性估计

3、仿真实验

- 仿真实验中采用8个传感器构成的线阵列,阵元间距为频率f的半波长,取3个等功率信号分别以10,20，30入射角入射到阵列,阵列噪声为空间白噪声,快拍数为500,信噪比从-20dB变化到10dB,步长为1dB,在每个信噪比上进行200次MonteCar1o仿真
- SNR= -5dB，snap=50:50:800，其余条件同上





MDL准则是一致性估计,在大样本的情况下,错误检测概率趋近于零,而AIC准则不是一致性估计,存在过估计问题

二、盖氏圆方法

特点：
- AIC、MDL准则都需要得到矩阵的特征值，然后再利用特征值来估计信源数
- 且只能对白噪声的背景进行估计

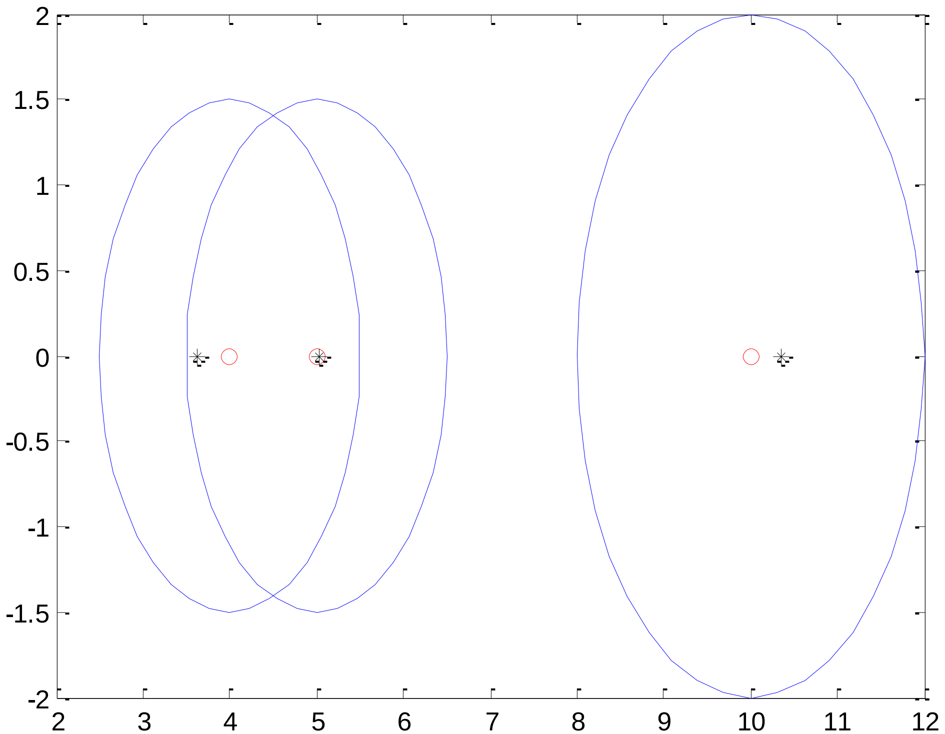
盖氏圆方法：
- 该法利用Gerschgorin圆盘定理，就可估计出各特征值的位置，进而估计出信号源
- 不需要具体知道特征值的信号源数估计方法

盖尔圆定理:(实或者复)矩阵A的所有协方差矩阵特征值均位于盖尔圆的并之中,而且假如存在k个盖尔圆同另外的盖尔圆之间不相接触,那么矩阵A有k个特征值,它们都位于k个盖尔圆的并之中,而且相互独立。

盖尔圆：
- 圆心：每个对角线元素值都是一个圆心
- 半径：除开对角线元素，该行所有元素的模之和

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}10 & i & -i\\ -i & 5 & 0.5i\\ i & -0.5i & 4\end{bmatrix}$$

$$O_1=\{z:|z-10|\le 2\},\quad O_2=\{z:|z-5|\le 1.5\},\quad O_3=\{z:|z-4|\le 1.5\}$$



Blue:盖氏圆
Red:圆心
Black:特征值

特征值为：
10.35
5.03
3.62

2、基于盖氏圆的信源数目估计

- 需要对数据协方差矩阵进行酉变换，目的是让信号和噪声的圆盘分开
- 信号的圆盘半径较大，它包含与K个信号源对应的特征值
- 噪声的圆盘半径较小，它包含M-K个与噪声对应的特征值

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1M} \\ r_{21} & r_{11} & \cdots & r_{11} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{M1} & r_{M2} & \cdots & r_{MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & r \\ r^H & r_{MM} \end{pmatrix}$$

R1理解为这样一个矩阵,它由阵列R中前M-1阵元,组成的子阵列的协方差矩阵

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{U}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{U}_1^H$$

U1为酉矩阵，由特征向量构成的M-1为方阵

$$\mathbf{D}_1 = diag(\lambda_1^{'}, \lambda_2^{'}, \cdots, \lambda_{M-1}^{'})$$

矩阵R和矩阵R1它们之间的特征值将满足下式：

$$\lambda_1 \geq \lambda_1^{'} \geq \lambda_2 \geq \lambda_2^{'} \geq \cdots \geq \lambda_{M-1} \geq \lambda_{M-1}^{'} \geq \lambda_M$$

$$\lambda_{D+1}^{'} = \cdots = \lambda_{M-1}^{'} = \sigma^2$$

酉变换矩阵U是由U1构造的，如下式表示的：

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 & 0 \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

用酉变换矩阵U对原矩阵R进行一次特殊变换,变换后矩阵在本节中用S表示：

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}^H \mathbf{R} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1^H \mathbf{R}_1 \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_1^H \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^H \mathbf{U}_1 & r_{MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & \mathbf{U}_1^H \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^H \mathbf{U}_1 & r_{MM} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}=\mathbf{U}^H\mathbf{R}\mathbf{U}=\begin{pmatrix}\mathbf{U}_1{}^H\mathbf{R}_1\mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_1^H\mathbf{r}\\ \mathbf{r}^H\mathbf{U}_1 & r_{MM}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{D}_1 & \mathbf{U}_1^H\mathbf{r}\\ \mathbf{r}^H\mathbf{U}_1 & r_{MM}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_1^{'} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \rho_1\\ 0 & \lambda_2^{'} & 0 & \cdots & 0 & \rho_2\\ 0 & 0 & \lambda_3^{'} & \cdots & 0 & \rho_3\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{M-1}^{'} & \rho_{M-1}\\ \rho_1^* & \rho_2^* & \rho_3^* & \cdots & \rho_{M-1}^* & r_{MM}\end{pmatrix}$$

$$\rho_i=u_i^{'H}A_1R_Sb_M^*\,,\ i=1,2,\cdots,M-1 \qquad b_M=[e^{j(i-1)\beta_1},e^{j(i-1)\beta_2},\cdots\cdots,e^{j(i-1)\beta_K}]^T$$

前面的(M一1)个盖尔圆(O1,O2 …… OM-1)的半径可以表示为

$$r_i=\left|\rho_i\right|=\left|\mathbf{u}_i^{'H}\mathbf{A}_1\mathbf{C}_s\mathbf{b}_M^*\right|=\left|\mathbf{u}_i^{'H}\mathbf{c}\right| \qquad i=1,2,\cdots,M-1$$

Ui’为特征向量，i=q+1,…M为噪声特征向量，与A1正交,故可进一步化简

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} \lambda_1^{'} & 0 & & & \cdots & 0 & \rho_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_q^{'} & & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & & \cdots & \sigma^2 & \cdots & 0 & \rho_q \\ 0 & & \cdots & & \cdots & \sigma^2 & 0 \\ \rho_1^* & \cdots & \rho_q^* & 0 & \cdots & 0 & c_{MM} \end{pmatrix}$$

可明显看到两组，一组半径大于0

一组半径基本位0，对应噪声盖氏圆，圆心也集中，且都比较小

$$GDE(k)=r_k-\frac{D(N)}{M-1}\sum_{i-1}^{M-1}r_i\ ,\quad k=1,2,\cdots,M-2$$

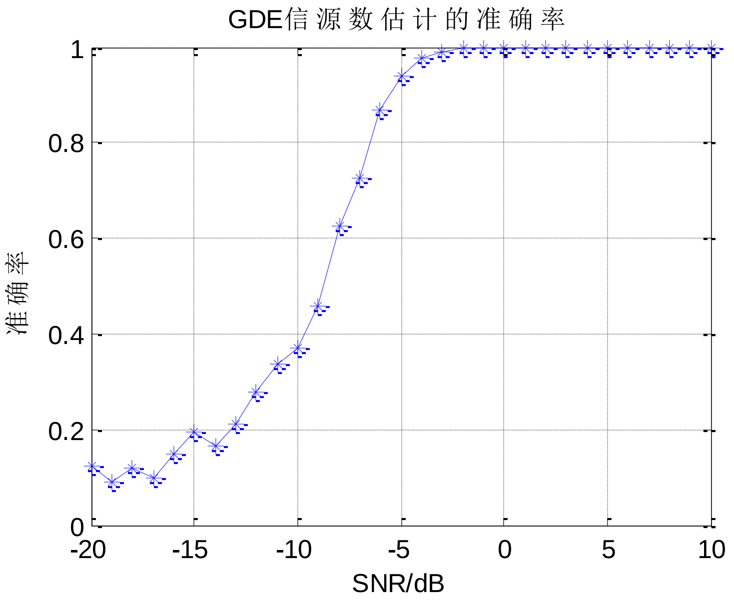
N为样本数，D(N)为一个(0,1)之间的非增函数

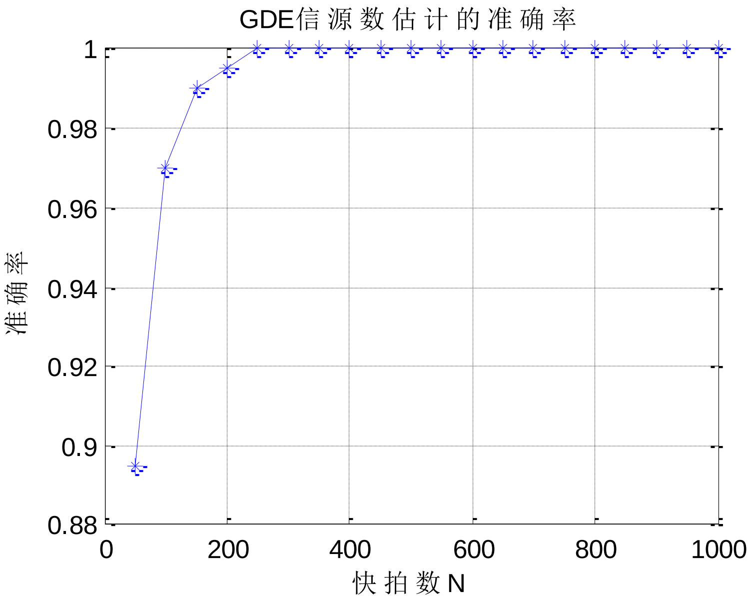
在上式中，找到第一个小于0的数,下标为k,信源数=k-1

2、仿真实验

M=8,theta=[10 20 30]   SNR= -20:10   snap=500

M=8，theta=[10 20 30]   SNR=0dB   snap=50:50:1000





三、基于特征向量的信源数目估计方法

AIC、MDL是基于特征值的分类方法，而实际可用的数据不仅仅有特征值，还有特征向量

由于R特征分解出的由信号子空间和噪声子空间，导向矢量张成的空间与信号子空间为同一个空间

利用这个特点，构造新的分类值——————参考论文：利用导向矢量与特征向量作内积，构成新的分类值　对应10dB、0dB、-10dB

SNR=10dB

特征值：99.7474　85.2612　58.6024　1.0962　1.0395　0.9864　0.9659　0.9070

内积值：1.6721　1.4037　1.3505　0.0095　0.0063　0.0065　0.0037　0.0080

SNR=0dB

特征值：10.8230　9.5236　6.9801　1.0953　1.0800　1.0150　0.9495　0.9260

内积值：1.5875　1.4079　1.3402　0.0377　0.0321　0.0405　0.0231　0.0259

SNR= -10dB

特征值： 1.9907 1.7881 1.5437 1.1062 1.0455 1.0195 0.9420 0.9061

内积值： 1.5759 1.4915 1.3609 0.0779 0.1395 0.1007 0.1635 0.1609

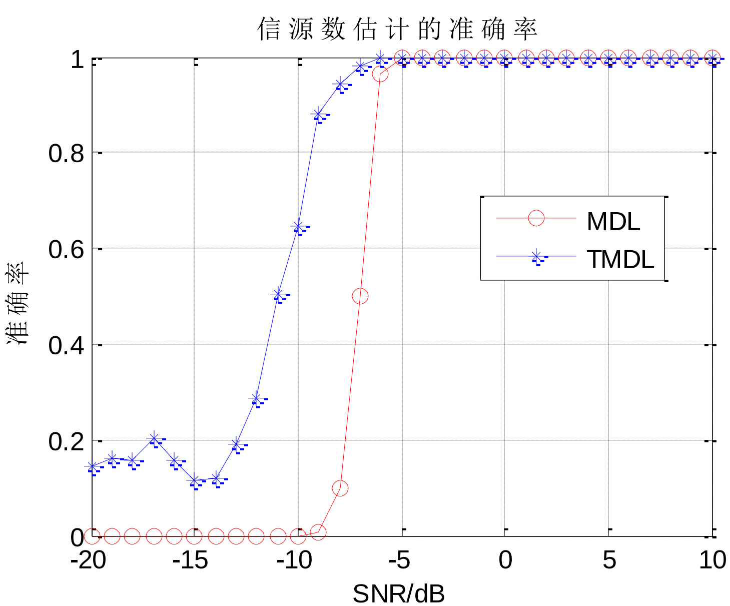
SNR= -20dB

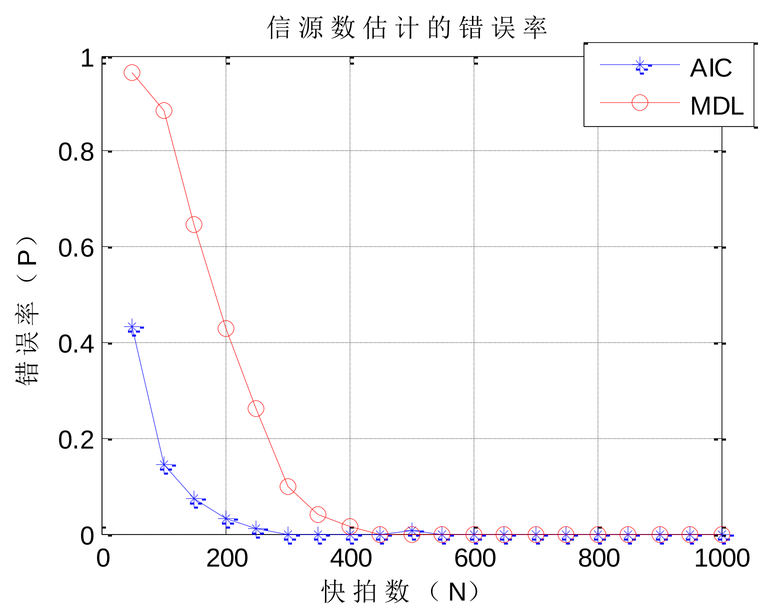
特征值： 1.1806 1.1080 1.0527 1.0305 0.9972 0.9485 0.9163 0.8704

内积值： 1.5591 1.0472 1.1798 1.0717 0.7636 0.7312 0.4297 0.3097

M=8， theta=[10 20 30] N=500,SNR= -20:10

M=8,theta=[10 20 30] SNR=-5dB,snap=50:50:1000 每个快拍下200次实验





四、基于特征子空间投影的估计算法

对协方差矩阵进行特征分解后得到特征空间U=[u_1, … , u_M]，将其划分成M个特征子空间为：

$$T_i = [u_{M-i+1}, \dots, u_M], i = 1, \dots, M$$

- Ti 为最后i个较小特征值对应的特征向量构成，维度M*I
- 当i=1, … M-D时，(D为信源个数，M阵元个数),Ti 就全部由噪声特征向量构成
- 当i= M-D-1, … , M时，Ti 由全部噪声特征向量和部分信号特征向量构成

协方差矩阵的第k列可写为： $R_s = AR_s a_k^H + r_k, k = 1, \dots, M$

Rs在Ti 上投影可得到：

$$B_i = T_i^H R_k = T_i^H (AR_s a_k^H + r_k)$$

$$B_i = [b_1, \dots, b_i]^T$$

$$B_i = T_i^H R_k = T_i^H (A R_s a_k^H + r_k)$$

信号部分　　　　　　噪声部分

对其求方差得到：$v_i = \mathrm{var}(B_i)$

- 1

$i = 1, 2, \ldots, M - D$　T_i 为噪声部分特征向量构成，由子空间的正交性

$$T_i^H A = 0 \longrightarrow B_i = T_i^H r_k$$

R_k 在Ti 下的投影仅为噪声部分在Ti下的投影，因此Bi 中的i个数的值较小且差异不大

- 2

$i = M - D + 1, \ldots, M$　Ti 由全部噪声特征向量和部分信号特征向量构成，即

$$T_i = [Us_i, U_N] \qquad Us_i = [u_{M-i+1}, \ldots, u_{M-D+1}]$$

由阵列的导向矢量与信号子空间和噪声子空间的关系可知

$$T_i^H A = \begin{bmatrix} U_{s_i}^H \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T_i^H A = \begin{bmatrix} U_{s_i}^H \\ 0 \end{bmatrix}$$

即Rk 在Ti 下的投影不再为零矢量，故有：

$$B_i = T_i^H R_k = \begin{bmatrix} U_{s_i}^H (A R_S a_k^H + r_k) \\ U_N^H r_k \end{bmatrix}$$

$$B_i = [B_i^S, B_i^N]^T$$

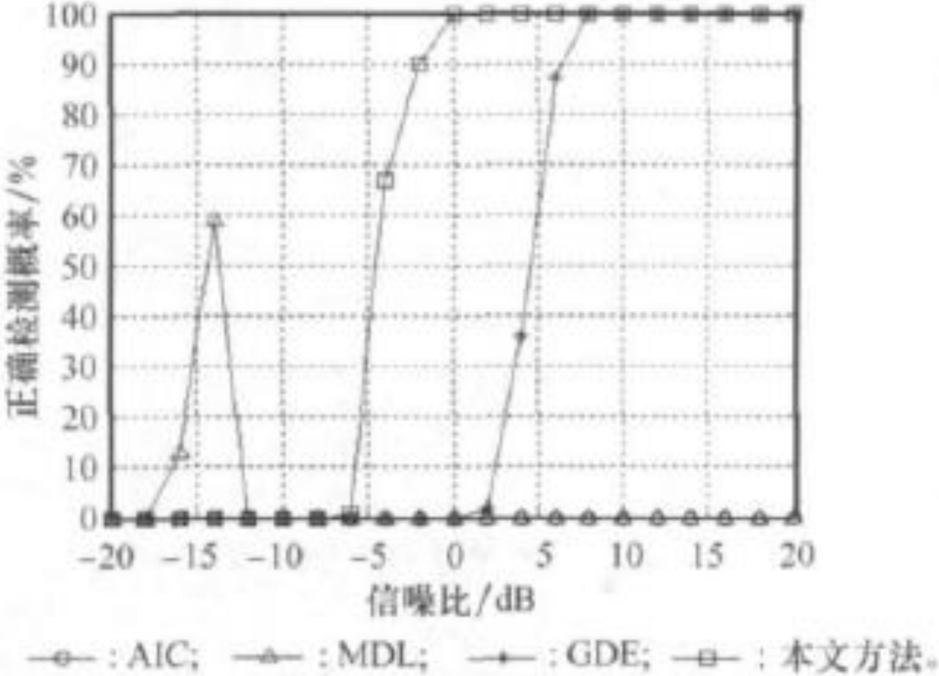
值较大

值较小

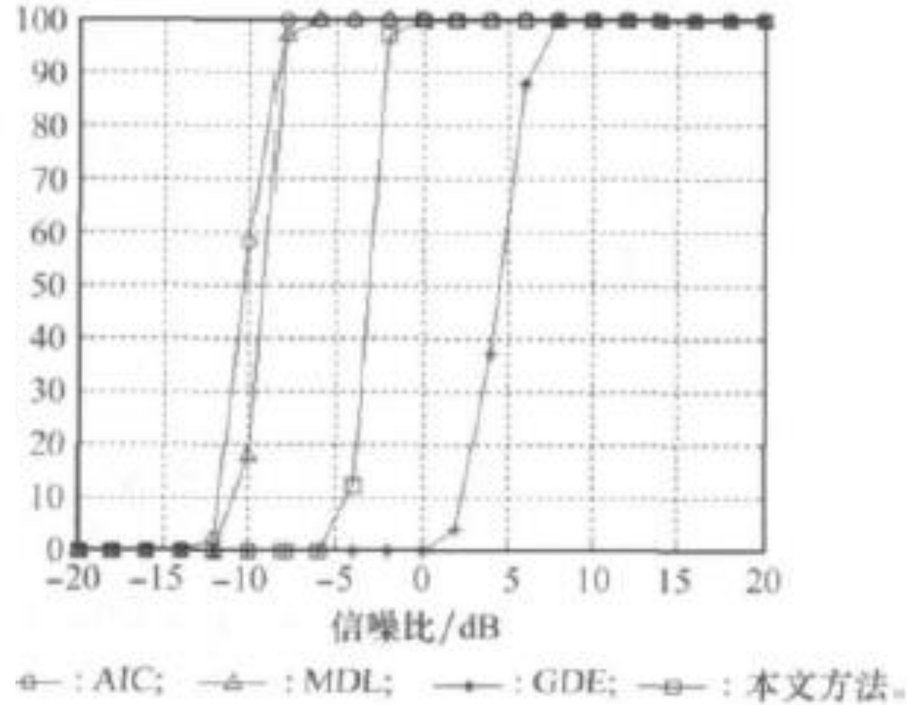
Bi的方差更大

$$\Delta(i) = v_i - \frac{\alpha}{M} \sum_{j=1}^{M} v_j$$

调整因子：$\alpha \in (0,1)$



色噪声情况下的实验



白噪声情况下的实验

Thank you