阵列流形模糊问题的微分几何分析

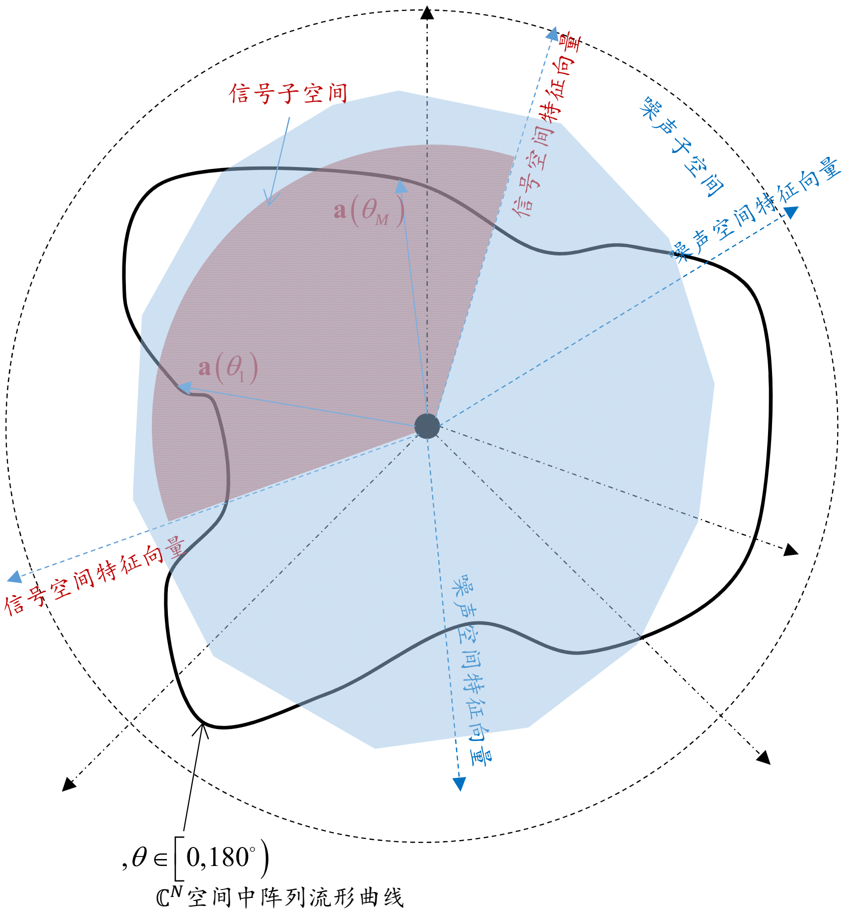
Analyzing Manifold Ambiguities based on Differential Geometry

Present By: Cui Ao

目录

1. 流形曲线的微分几何分析

1. 流形曲线的微分几何分析



对于一个线阵（Linear Array），$\mathbf{r}$表示阵列阵元的位置，其单位为$\lambda/2$。

$$\mathbf{r}=\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_N \end{bmatrix}^T$$

则导向矢量：

$$\mathbf{a}(\theta)=\begin{bmatrix} e^{-j\pi r_1\cos\theta} & e^{-j\pi r_2\cos\theta} & \dots & e^{-j\pi r_N\cos\theta} \end{bmatrix}^T = e^{-j\pi\mathbf{r}\cos\theta}$$

定义曲线： $\equiv\left\{\mathbf{a}(\theta)\in\mathbb{C}^N,\forall\theta\in\left[0,180^\circ\right)\right\}$

则曲线$\mathcal{A}$的弧长s可定义为： $s=\int_0^\theta\left\|\dot{\mathbf{a}}(\tau)\right\|d\tau$

$\dot{\mathbf{a}}(\theta)$为$\mathcal{A}$的正切矢量： $\dot{\mathbf{a}}(\theta)\equiv\dfrac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta}$

1. 流形曲线的微分几何分析

根据曲线$\mathcal{A}$的弧长s定义，可以将变量θ与s联系起来，使用s作为自变量描述

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\mathbf{a}}(\theta) &\equiv \frac{d\mathbf{a}(\theta)}{d\theta} = \left[\begin{matrix} j\pi r_1 \sin\theta e^{-j\pi r_1\cos\theta} & j\pi r_2 \sin\theta e^{-j\pi r_2\cos\theta} & \dots & j\pi r_N \sin\theta e^{-j\pi r_N\cos\theta} \end{matrix}\right]^T \\
s &= \int_0^\theta \left\| \left[\begin{matrix} j\pi r_1 \sin\tau e^{-j\pi r_1\cos\tau} & j\pi r_2 \sin\tau e^{-j\pi r_2\cos\tau} & \dots & j\pi r_N \sin\tau e^{-j\pi r_N\cos\tau} \end{matrix}\right]^T \right\| d\tau \\
&= \int_0^\theta \pi\|r\|\sin\tau d\tau = \pi\|r\|(1-\cos\theta)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \theta = \arccos\left(1-\frac{s}{\pi\|\mathbf{r}\|}\right)$$

则$\mathbf{a}(\theta)$可表示为弧长s的函数 $\mathbf{a}(s)=e^{-j\pi\mathbf{r}\left(1-\frac{s}{\pi\|\mathbf{r}\|}\right)} = e^{j\tilde{\mathbf{r}}s-j\pi\mathbf{r}}$ 其中 $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$

微分几何已经证明弧长s是曲线的积分不变量，因此使用弧长s作为阐述描述空间曲线$\mathcal{A}$，有：

$$\dot{s}(\theta) \equiv \frac{ds}{d\theta} = \|\dot{\mathbf{a}}(\theta)\|$$

2. 模糊集

2. 模糊集

一个有序的弧长集合$\boldsymbol{s} = [s_1, s_2, \ldots, s_c]^T$满足关系：

- 若$c \leq N$，且对应的流形矩阵$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})$的秩$Rank[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})] < c$，或
- 若$c > N$，且对应的流形矩阵$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}) \in \mathbb{C}^{N \times M}$的任意$N$列矩阵的秩都小于$N$，

则称该有序的弧长集合$\boldsymbol{s}$为模糊集。

模糊集$\boldsymbol{s}$的模糊秩ρ_a定义为：

$$\rho_a = \begin{cases} Rank(\mathbf{A}(\mathbf{s})) & c \leq N \\ \mathbf{A}(\mathbf{s})\text{的任意}N\text{列矩阵的秩中的最小值} & c > N \end{cases}$$

2. 模糊集

设一个有序的弧长集合$\boldsymbol{s}=[s_1,s_2,\dots,s_M]^T$是一个模糊集，意味着对于流形矩阵$\boldsymbol{A}\in\mathbb{C}^{N\times M}$是秩亏损的，即：

$$\mathbf{A}(\mathbf{s})=\begin{bmatrix}\mathbf{a}(s_1) & \mathbf{a}(s_2) & \dots & \mathbf{a}(s_M)\end{bmatrix} \qquad \det(\mathbf{A}_M(\mathbf{s}))=0$$

现考察一个新的集合$\hat{\boldsymbol{s}}$，为原弧长集合$\boldsymbol{s}$沿阵列流形曲线转动弧长$\Delta\,\boldsymbol{s}$得到的，为：

$$\hat{\mathbf{s}}=\begin{bmatrix}s_1+\Delta s & s_2+\Delta s & \dots & s_M+\Delta s\end{bmatrix}^T=\mathbf{s}+\Delta s\bullet\mathbf{1}_M$$

其中，$\mathbf{1}_M$为所有元素都为1的M维列向量，则$\hat{\boldsymbol{s}}$的第i个元素所对应的导向矢量为

$$\mathbf{a}(s_i+\Delta s)=e^{j\pi diag(r_1,r_2,\dots,r_N)}\bullet\mathbf{a}(s_i+\Delta s)\odot\mathbf{a}(\Delta s)$$

则集合$\hat{\boldsymbol{s}}$所对应的流形矩阵$\widehat{\boldsymbol{A}}$为

$$\hat{\mathbf{A}}(\hat{\mathbf{s}})=\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{s}+\Delta s\bullet\mathbf{1}_M)=e^{j\pi diag(r_1,r_2,\dots,r_N)}\mathbf{A}(\mathbf{s})\odot\mathbf{A}(\Delta s\bullet\mathbf{1}_M)$$

可知集合$\hat{\boldsymbol{s}}$所对应的流形矩阵$\widehat{\boldsymbol{A}}$仍为秩亏损的，因为：

$$\det(\hat{\mathbf{A}}_M(\hat{\mathbf{s}}))=\det(e_M^{j\pi diag(r_1,r_2,\dots,r_N)}\mathbf{A}_M(\mathbf{s})\odot\mathbf{A}_M(\Delta s\bullet\mathbf{1}_M))=0$$

2. 模糊集

定理1：给定一个模糊秩为ρ_a的模糊集$\boldsymbol{s} = [s_1, s_2, \ldots, s_M]^T$，若将$\boldsymbol{s}$沿阵列流形曲线转动弧长$\Delta$ $\boldsymbol{s}$得到新的弧长集$\hat{\boldsymbol{s}} = [s_1 + \Delta s, s_2 + \Delta s, \ldots, s_M + \Delta \mathrm{s}]^{\mathrm{T}}$，且满足$s_1 + \Delta s \geq 0$和$s_M + \Delta s \leq l_m$，则$\hat{\boldsymbol{s}}$也是一个模糊集。

其中，l_m为阵列流形长度，为：

$$l_m = \pi \|\mathbf{r}\| (1 - \cos\theta) |_{\theta = 180^\circ} = 2\pi \|r\|$$

定理1说明：当知道阵列的一个模糊集时，通过弧长转动操作可以得到无穷多个模糊集。同时可知，表面上不同的模糊集事实上可能是等价的，即可以根据一个模糊集计算另一个模糊集。

3. 均匀剖分模糊

3. 均匀剖分模糊

对阵列流形曲线进行均匀剖分而得到的模糊集称为均匀剖分模糊集。首先定义阵元间距$\Delta r_{kl}=r_l-r_k$，其中$l>k$且$l\neq k$，这里阵元间距不再仅仅指相邻阵元的间距，而是任意阵元之间的间距。

定理2：（证明暂略）考虑一个由N个阵元组成的线阵，其阵列位置矢量为$\boldsymbol{r}=[r_1,r_2,\dots,r_N]^T$，阵列流形长度为$l_m$，用阵元间距$\Delta r_{kl}$对流形曲线进行剖分得到$c$个弧长，这$c$个弧长组成均匀剖分集$\boldsymbol{s}_{\Delta r_{kl}}$

$$\mathbf{s}_{\Delta r_{kl}}=\begin{bmatrix}0 & \frac{l_m}{\Delta r_{kl}} & 2\frac{l_m}{\Delta r_{kl}} & \cdots & c\frac{l_m}{\Delta r_{kl}}\end{bmatrix}^T$$

若：

- $\boldsymbol{s}_{\Delta r_{kl}}$的最后一个元素大于0且小于$l_m$，且
- 非零元素个数c须大于等于$N-1$

则$\boldsymbol{s}_{\Delta r_{kl}}$是一个模糊集。

结合左边第一个限定条件，有：

$$c\frac{l_m}{|\Delta r_{kl}|}<l_m\Rightarrow c=\begin{cases}fix(\Delta r_{kl}) & 若\Delta r_{kl}\notin\mathbf{N}^+\\ |\Delta r_{kl}|-1 & 若\Delta r_{kl}\in\mathbf{N}^+\end{cases}$$

四川大學
SICHUAN UNIVERSITY

Thank You!

Present By: Cui Ao