Abstract

(ppwwyyxxc@gmail.com)

March 5, 2012

目录

1 Structure 1

2 代数基本定理 1

1 Structure

群:一个集合与一个二元运算,满足封闭,结合,单位元,逆元

环:加法构成交换群,乘法构成半群(封闭,结合),乘法对加法左右分配.记加法单位元为 0

若环中乘法交换,称为交换环.

若乘法存在单位元,称为有单位元环,记其为 1

环 R 中 $\exists b \neq 0, s.t.ab = 0$,称 a 为左零因子.若没有非平凡零因子,称为无零因子环.

有单位元的无零因子交换环称为整环.

R_1 成为 R 的充要条件是 R_1 对 R 的减法与乘法封闭.(减法才能得出加法逆元存在)

域:加法与乘法均构成交换群

(Zero Function) 若 k 为无限集,则 $f : k^n \to k$ 是零函数(值域为 0) $\Leftrightarrow f = 0$(零多项式)

于是,两个多项式描述同一个函数当且仅当它们相等

有限域上未必.如 $x(x+1)$ 在 $\pmod 2$ 域上 $\equiv 0$

2 代数基本定理

实系数多项式在实数域内可唯一分解为一次因式与判别式小于零的二次因式乘积.

$$x^{2m} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{m}(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi}{2m+1} + 1)$$

$$x^{2m+1} - 1 = (x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{m}(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{m} + 1)$$

$$x^{2m+1} + 1 = (x+1)\prod_{k=1}^{m}(x^2 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m+1} + 1)$$

$$x^{2m} + 1 = \prod_{k=1}^{m}(x^2 - 2x\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m} + 1)$$

取一些特殊值,可得等式: $\prod_{k=1}^{m} \cos \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{1}{2^m}, \prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{2m} = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$

$f(x)$ 是 $n \geq 2$ 次多项式,$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists g(x), h(x), f(x) = g^2(x) + h^2(x)$